ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 114-124.

УДК 517.5

О БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

А.А. ЮНУСОВ

Аннотация. Доказано, что если в интегрально-весовом пространстве функций на интервале $(-1;1)$ $L_2(h)$ существует безусловный базис из экспонент, и целая функция, порождающая этот базис, удовлетворяет некоторому условию, то пространство $L_2(h)$ как нормированное пространство изоморфно классическому пространству L_2.

Ключевые слова: Гильбертовы пространства, целые функции, безусловные базисы из экспонент, базисы Рисса.

Mathematics Subject Classification: 30D20

1. Введение

В статье рассматривается задача о существовании безусловных базисов из экспонент в гильбертовых пространствах

$$L_2(h) = \{f \in L_{\rm loc}(-1,1) : ||f||^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty\},$$

где h — выпуклая функция на $(-1,1)$.

В классическом случае, когда $h(t) \equiv 0$, система Фурье $\{e^{\pi n i}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис. Очевидно, что в других случаях ортонормированных базисов из экспонент в пространствах $L_2(h)$ не может быть. Понятие базиса Рисса введено в [1] и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе.

Система элементов $\{e_k, \ k = 1,2,...\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2], [3]), если она полна, и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c\sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2 \le ||\sum_{j=1}^{n} c_k e_k||^2 \le C\sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2.$$

Известно (см. [4],[5]), что если система $\{e_k, \ k = 1,2,...\}$ — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

причем

$$c\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2 \le ||x||^2 \le C\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2.$$

A.A. Yunusov, On unconditional exponential bases in weighted spaces on real axis.

© Юнусов А.А. 2015.

Поступила 2 августа 2015 г.

Безусловный базис $\{e_k,\ \ k = 1, 2, ...\}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf ||e_k|| \le \sup ||e_k|| < \infty$.

В работе [6] было начато изучение безусловных базисов из экспонент в гильбертовых подпространствах пространства $H(D)$ аналитических в ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ функций, и для пространства Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике были построены безусловные базисы из экспонент. В работе [7] рассмотрен вопрос о существовании базисов из экспонент в $E_2(D)$ на выпуклой области D с гладкой границей. В диссертации [8] доказано, что в пространствах Смирнова на выпуклых областях, содержащих на границе гладкую дугу, безусловных базисов из экспонент не существует. В [9] показано, что в пространствах Бергмана на выпуклых областях, на границе которых есть точка с ненулевой кривизной, безусловных базисов из экспонент не существует.

В диссертации [10] доказан аналог этого результата в весовых пространствах $L_2(h)$: при определенных условиях регулярности роста весовой функции $h(t)$, если для любого $k \in \mathbb{N}$

$$e^{h(t)}(1 - |t|)^k \longrightarrow \infty,\ |t| \longrightarrow 1,$$

то в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Единое внутреннее содержание задач о безусловных базисах из экспонент в пространствах Смирнова, Бергмана и в пространствах $L_2(h)$ становится ясной, если с помощью преобразования Фурье-Лапласа перейти к эквивалентной задаче о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций.

Если X — некоторое гильбертово пространство функций, в котором совокупность всех экспонент $e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}$, полна, то преобразование Фурье-Лапласа, которое каждому линейно непрерывному функционалу $S \in X^*$ ставит в соответствии функцию

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

взаимно однозначно отображает сопряженное пространство X^* на некоторое пространство функций $\widehat{X}$. При естественных условиях на исходное пространство X пространство $\widehat{X}$ оказывается гильбертовым пространством целых функций с наведенной из X^* структурой, в котором точечные функционалы $F \longrightarrow F(z)$ оказываются ограниченными для всех $z \in \mathbb{C}$. Тем самым, в силу самосопряженности гильбертовых пространств возникает воспроизводящее ядро [11] $K(\lambda, z)$:

$$(F(\lambda), K(\lambda, z))_{\widehat{X}} = F(z),\ \forall F \in \widehat{X}.$$

Из простых функционально-аналитических соображений следует, что система экспонент $e^{\lambda_k z},\ \ k \in \mathbb{Z}$, будет безусловным базисом в X тогда и только тогда, когда система $K(\lambda, \lambda_k),\ k \in \mathbb{Z}$, будет безусловным базисом в $\widehat{X}$.

Задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в весовых пространствах целых функций изучалась многими авторами. Например, в работах [12]–[15] рассматривались весовые пространства целых функций

$$H(\varphi) = \{F \in H(\mathbb{C}):\ ||F||^2 = \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty\},$$

где φ — некоторая субгармоническая функция на плоскости, $dm(z)$ — плоская мера Лебега. В работе [13] в предположении некоторой регулярности роста функции $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ доказано, что если

$$\ln^2 t = o(\varphi(t)),\ t \longrightarrow \infty,$$

то в пространстве $H(\varphi)$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует, а в пространствах с весом

$$\varphi(t) = O(\ln^2 t),\ t \longrightarrow \infty,$$

— существуют.

В работе [16] доказано общее условие на функцию Бергмана весового пространства целых функций, при выполнении которого безусловного базиса из воспроизводящих ядер в этом пространстве не существует.

Результаты работы [13] наводят на мысль о некоторой устойчивости существования безусловных базисов в весовых пространствах при "возмущениях" веса. Дело в том, что пространства $H(\varphi)$, когда $\varphi(\lambda) = O(\ln|\lambda|)$, $\lambda \longrightarrow \infty$, становятся конечномерными и, тем самым, в них существуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер. Возникает предположение, что для весов h, достаточно медленно растущих при $|t| \longrightarrow 1$, в пространстве $L_2(h)$ могут существовать безусловные базисы из экспонент, поскольку они существуют в классическом пространстве L_2. Доказанная в этой статье теорема 1 является скорее аргументом против такого предположения.

2. Обозначения, предварительные сведения и формулировка утверждений

Утверждение о том, что для двух неотрицательных функций f, g при некоторой постоянной C выполняется оценка $f(x) \le Cg(x), \forall x \in X$, будем обозначать символом $\prec$:

$$f(x) \prec g(x),\ x \in X.$$

Соответствующий смысл имеют символы $\succ$ и $\asymp$.

В работе [17] доказано, что пространство $\widehat{L}_2(h)$ преобразований Фурье-Лапласа непрерывных функционалов на $L_2(h)$ как нормированное пространство изоморфно пространству целых функций экспоненциального типа с нормой

$$||F||^2 := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} dy d\widetilde{h}(x), \tag{1}$$

где

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - h(t))$$

— сопряженная по Юнгу к функции h и

$$K(x) = ||e^{(x+iy)t}||^2 = \int_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)} dt.$$

Если $\delta_z : F(\cdot) \longrightarrow F(z)$ — точечный функционал на $\widehat{L}_2(h)$, то по определению преобразования Фурье-Лапласа

$$||\delta_z||^2_{\widehat{L}_2(h)^*} = ||e^{zt}||^2 = K(\Re z).$$

Пусть система экспонент $\{e^{\lambda_k t}, k \in \mathbb{Z}\}$ образует безусловный базис в пространстве $L_2(h)$ и S_k, $k \in \mathbb{Z}$ — биортогональная система. Положим

$$L(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)\widehat{S}_0(\lambda).$$

Тогда

$$\widehat{S}_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)},\ k \in \mathbb{Z},$$

и эта система образует безусловный базис в пространстве $\widehat{L}_2(h)$, тем самым,

$$\left|\left|\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}\right|\right|^2 = \frac{1}{K(\lambda_k)}. \tag{2}$$

По формуле (1) имеем ($\lambda = x + iy$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}\right|^2 \frac{dy d\widetilde{h}(x)}{K(x)} \asymp \frac{1}{K(\Re\lambda_k)}, k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Целую функцию L в дальнейшем будем называть порождающей функцией безусловного базиса. В известных нам примерах безусловных базисов для конструкции базиса берется порождающая функция, удовлетворяющая очень жестким условиям на асимптотику в бесконечности. Для описания систем экспонент, образующих безусловный базис в классическом пространстве L_2, Б.Я. Левиным было введено понятие целой функции типа синуса. В дальнейшем это понятие было обобщено для конструкции безусловных базисов в пространствах Смирнова ([6],[7]). В работе [17] дано более общее определение функции типа синуса для субгармонической функции.

Определение 1. *Пусть u непрерывная субгармоническая функция на плоскости и $\tau(u,z)$ – радиус наибольшего круга с центром в точке z, в котором функция u отклоняется от пространства гармонических функций на этом круге не более чем на 1. Функцией типа синуса для функции u будем называть целую функцию L, удовлетворяющую условиям*

1. Все нули z_n, $n \in \mathbb{N}$, функции L простые и при некотором $\varepsilon > 0$ круги $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются.

2. При любом $\varepsilon > 0$ вне множества кругов $B(z_n, \varepsilon\tau(u, z_n))$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется соотношение

$$|\ln |L(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon).$$

Из соображений субгармоничности и из определения величины $\tau(u,z)$ вытекает свойство

$2'$. *Для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка сверху*

$$\ln |L(z)| \leq |u(z)| + A_1(\varepsilon).$$

Целые функции типа синуса в таком общем смысле использованы для построения безусловных базисов в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках [22] и в пространствах $H(\varphi)$ ([13]). Поскольку пространство $\widehat{L}_2(h)$ инвариантно относительно сдвигов вдоль мнимой оси, то порождающую функцию безусловного базиса естественно искать среди функций типа синуса для некоторой субгармонической функции, зависящей только от реальной части своего аргумента, то есть для некоторой выпуклой функции одной переменной $u(x)$. Такая целая функция в любой полосе $\{\lambda : |\Re\lambda| < q\}$ вне кругов $B_k(\delta) := B(\lambda_k, \delta)$ (λ_k - нули функции L) при любом $\delta > 0$ будет удовлетворять условию

$$|L(\lambda)| \asymp 1,\ |\Re\lambda| < q,\ \lambda \notin \bigcup_k B_k, \tag{4}$$

причем для некоторого $\delta > 0$ круги $B_k(\delta)$ попарно не пересекаются.

Теорема 1. *Пусть порождающая функция L некоторого безусловного базиса в пространстве $L_2(h)$ удовлетворяет условию (4). Тогда пространство $L_2(h)$ как нормированное пространство изоморфно классическому пространству L_2.*

Для доказательства этой теоремы нам нужны будут следующие факты о безусловных базисах и порождающих функциях. Из определения безусловности базиса следует соотношение (см., например, [9])

$$\frac{1}{P}K(z) \leq \sum_k \frac{|L(z)|^2 K(z_k)}{|L'(z_k)|^2 |z - z_k|^2} \leq PK(z),\ z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

где P — некоторая положительная постоянная. Введем более общую характеристику для непрерывных на плоскости функций.

Определение 2. *Для непрерывной в* $\overline{B}(z,r)$ *функции* f *положим*

$$\|f\|_r = \max_{w\in\overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f,z,r)$ *— расстояние от функции* f *до пространства гармонических в* $B(z,r)$ *функций:*

$$d(f,z,r) = \inf\{\|f-H\|_r,\ H - \text{гармонична в }\ B(z,r)\}.$$

Для непрерывной на $\mathbb{C}$ *функции* $\mathbf{u}$ *и положительного числа* p *положим*

$$\tau(u,z,p) = \sup\{r:\ d(u,z,r)\le p\}.$$

В работе [21] показано (лемма 1.1), что в случае, когда u — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau=\tau(u,\lambda,p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda,\tau)$, то

$$\max_{z\in\overline{B}(\lambda,\tau)} (H(z)-u(z)) = 2p.$$

Эту величину определим для функции $u(\lambda)=\ln K(\lambda)$ и числа $\ln(5P)$, где P — константа из соотношения (5). В дальнейшем ее будем обозначать просто через через $\tau(\lambda)$.

Теорема А. (см. [9], теорема 1).

1. В любом круге $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$ *содержится хотя бы один нуль* λ_k *функции* L.

2. Для любых $n,k,\ n\ne k$, *выполняется неравенство*

$$|\lambda_k-\lambda_n| \ge \frac{\max(\tau(\lambda_k),\tau(\lambda_n))}{10P^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Для любого k *в круге* $B(\lambda_k, \frac{\tau(\lambda_k)}{20P^{\frac{3}{2}}})$ *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{5^6P^8}K(\lambda) \le \frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2|\lambda-\lambda_k|^2} \le PK(\lambda).$$

Из пункта 1 данной теоремы выводится оценка производных около мнимой оси, которая вместе с (5) влечет оценку самой функции на всей плоскости.

Лемма 1. *Если порождающая функция* L *ограничена сверху по модулю на двух вертикальных прямых, то для любого* $q>0$ *выполняются оценки*

$$\sup_{|\Re\lambda_k|\le q} |L'(\lambda_k)| < \infty, \quad \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} |L(\lambda)|e^{-\widetilde{h}(\Re\lambda)} < \infty.$$

В предположении нижних оценок на порождающую функцию с помощью соотношения (3) получим нижние оценки на производных $|L'(\lambda_k)|$, которые вместе с (5) дают нижние оценки на саму функцию вне окрестностей нулей.

Лемма 2. *Пусть порождающая функция* L *безусловного базиса в пространстве* $L_2(h)$ *удовлетворяет условию: для некоторого* $q>0$ *и для всех* $\delta>0$

$$|L(\lambda)| \succ 1,\ |\Re\lambda|<q,\ \lambda\notin\bigcup_k B_k,$$

причем при некотором δ *круги* $B_k(\delta)$ *попарно не пересекаются. Тогда для всех* k *выполняется нижняя оценка*

$$|L'(\lambda_k)| \succ \frac{1}{|x_k|+1}e^{\widetilde{h}(x_k)},\ \lambda_k = x_k+iy_k,$$

и для всех $\varepsilon>0$ *имеет место нижняя оценка*

$$|L(\lambda)| \succ e^{\widetilde{h}(x)-\frac{1}{2}\ln\ln(|x|+e)},\ \lambda = x+iy\notin\bigcup_k B(\lambda_k,\varepsilon(|x_k|+1)).$$

Если порождающая функция удовлетворяет условиям теоремы 1, то верны выводы обеих лемм.

Лемма 3. *Пусть порождающая функция удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда*

$$|L'(\lambda_k)| \asymp \frac{1}{|x_k|+1} e^{\widetilde{h}(x_k)},\ k \in \mathbb{Z},$$

и для всех $\varepsilon > 0$

$$|L(\lambda)| \succ e^{\widetilde{h}(x)},\ \lambda = x + iy \notin \bigcup_k B(\lambda_k, \varepsilon(|x_k|+1)).$$

В частности, порождающая функция L должна быть функцией типа синуса для функции $\widetilde{h}$.

3. Доказательство теоремы 1 и вспомогательных утверждений

Доказательство теоремы 1 проведем в предположении, что весовая функция удовлетворяет условиям: для некоторого α

$$e^{h(t)} = O(1-|t|)^{\alpha},\ |t| \longrightarrow 1,\ h(t) > 0, t \neq 0,\ h(0) = 0,$$

поскольку в противном случае безусловных базисов в пространстве $L_2(h)$ не существует [10]. Если это условие выполнено, то

$$\tau(z) \asymp |\Re z| + 1. \tag{6}$$

Из неотрицательности h следует, что для любого $q > 0$

$$\int_{-q}^{q} d\widetilde{h}(x) > 0. \tag{7}$$

Доказательство леммы 1.

Возьмем вертикаль $\Re\lambda = a$, на которой $|L|$ ограничена сверху. Поскольку $K(\lambda) = ||\delta_\lambda||^2$, то из формулы (2) имеем

$$|L(\lambda)|^2 \prec (|\lambda|+1)^2 K(\lambda). \tag{8}$$

Как показано в [20]

$$K(x) \asymp \frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{\tau(x)},$$

значит, с учетом (6)

$$K(x) \asymp \frac{e^{2\widetilde{h}(x)}}{|x|+1} \prec \frac{e^{2|x|}}{|x|+1}. \tag{9}$$

Поэтому из (8) следует, что на полуплоскости $\Re\lambda > a$

$$|L(\lambda)e^{-\lambda}|^2 \prec \frac{(|\lambda|+1)^2}{|x|+1}.$$

Длина дуги γ полуокружности $C := \{\lambda : |\lambda - a| = R, \Re\lambda > a\}$, находящейся выше параболы $y = (x-a)^2$, есть $o(R)$ при $R \longrightarrow \infty$. Проекция $C \setminus \gamma$ на вещественную ось есть интервал (x_R, R), где x_R — положительное решение уравнения $x^2 + x^4 = R^2$. Нам достаточно того, что $x_R \asymp \sqrt{R}$. Пусть G — область, ограниченная полуокружностью C и вертикалью $\Re\lambda = a$. По формуле Коши, для функции $g(\lambda) = L(\lambda)e^{-\lambda}$ и для любого $\lambda \in G$

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{g(z)dz}{(z-\lambda)^2}.$$

Из оценок выше имеем

$$\left|\int_{\gamma\bigcup\overline{\gamma}}\frac{g(z)dz}{(z-\lambda)^2}\right|\prec\frac{o(R)}{R}=o(1).$$

$$\left|\int_{C\setminus(\gamma\bigcup\overline{\gamma})}\frac{g(z)dz}{(z-\lambda)^2}\right|\prec\sup\frac{1}{\sqrt{|x|+1}}\asymp\frac{1}{x_R}=o(1).$$

Таким образом,

$$g'(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re z=a}\frac{g(z)dz}{(z-\lambda)^2}.$$

Если $|L|$ ограничена сверху на прямой $\Re z=a$ и $\Re\lambda-a>\varepsilon$, то

$$|g'(\lambda)|\prec\int_{\Re z=a}\frac{d\Im z}{|z-\lambda|^2}\prec\varepsilon^{-1}.$$

Для $\lambda_k:\ \Re\lambda_k>a+\varepsilon$, получим $(x_k=\Re\lambda_k)$

$$|L'(\lambda_k)|\prec\varepsilon^{-1}e^{|x_k|}.$$

Такую же оценку получаем на полуплоскости $\Re z-a<-\varepsilon$. Если $\Re z=b$ $b\neq a$ — еще одна вертикаль, на которой $|L|$ ограничена, то, взяв $\varepsilon<|b-a|/3$, получим оценки на четырех полуплоскостях, покрывающих всю плоскость. Тем самым,

$$\sup_k|L'(\lambda_k)|<\infty.$$

Из первого пункта теоремы A следует, что можно найти такое $d>0$, что в каждом квадрате

$$Q_m=\{z:\ |\Re z|\le d,\ md\le\Im z<(m+1)d\},\ m\in\mathbb{Z},$$

найдется хотя бы один показатель из λ_k. Обозначим один из нулей, лежащих в квадрате Q_m через z_m. Из соотношения (5) получим

$$|L(\lambda)|^2\sum_m\frac{1}{|\lambda-z_m|^2}\prec K(\lambda).$$

С учетом частоты нулей z_m несложно показать, что вне множества кругов $B(z_m,\delta)$ выполняется соотношение

$$\sum_m\frac{1}{|\lambda-z_m|^2}\asymp\frac{1}{|x|+1}.$$

Тем самым, вне таких кругов в силу (9) имеем оценку

$$|L(\lambda)\prec e^{\widetilde{h}(\Re\lambda)}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2.

В условиях леммы 2 возьмем $\delta>0$ таким, чтобы квадраты

$$Q_k(2\delta)=\{|Rez-\Re\lambda_k|\le2\delta,\ |Imz-\Im\lambda_k|\le2\delta\}$$

попарно не пересекались и положим

$$Q(\delta)=\bigcup_k Q_k(\delta),\ Q_x=\{z:\Re z=x\}\setminus Q(\delta).$$

Из соотношения (3) при всех k по условию ограниченности снизу $|L|$ имеем

$$|L'(\lambda_k)|^2\succ K(\lambda_k)\int_{|x|\le q}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|L(\lambda)|^2dy}{|\lambda-\lambda_k|^2}\right)\frac{d\widetilde{h}'(x)}{K(x)}\succ$$

$$\succ K(x_k)\int_{|x|\le q}\left(\int_{Q_x}\frac{dy}{|\lambda-\lambda_k|^2}\right)\frac{d\widetilde{h}'(x)}{K(x)}.$$

Учитывая выбор δ, несложно показать, что

$$\int_{Q_x} \frac{dy}{|\lambda-\lambda_k|^2} \asymp \frac{1}{|x-x_k|+1},$$

значит,

$$|L'(\lambda_k)|^2 \succ K(\lambda_k) \int_{|x|\le q} \frac{d\widetilde{h}'(x)}{(|x-x_k|+1)K(x)} \succ \frac{K(x_k)}{|x_k|+1}.$$

По соотношению (9) получим искомую нижнюю оценку производных

$$|L'(\lambda_k)| \succ \frac{1}{(|x_k|+1)} e^{\widetilde{h}(x_k)},\ \lambda_k = x_k + iy_k.$$

Если эту оценку подставить в соотношение (5), то получим

$$K(\lambda) \prec |L(\lambda)|^2 \sum_k \frac{|x_k|+1}{|\lambda-\lambda_k|^2}. \tag{10}$$

По предположению (6) и пункту 2 теоремы А можно найти такие числа ε и $d \in (1,2)$, что в каждом из квадратов

$$R_{0,n} = \{0 \le \Re z < \varepsilon, n\varepsilon \le Imz < (n+1)\varepsilon\},$$

$$R_{m,n} = \{\varepsilon d^{m-1} \le \Re z < \varepsilon d^m, d^{m-1} n\varepsilon \le Imz < d^m(n+1)\varepsilon\},\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N},$$

и в каждом квадрате $-R_{m,n},\ m = 0,1,2,...,\ \ n \in \mathbb{Z}$, лежит не более одного нуля λ_k. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и $\lambda \notin \bigcup_k B(\lambda_k, \delta(|x_k|+1))$. Пусть $\lambda \in R_{s,j}$. Через A обозначим набор смежных с $R_{s,j}$ квадратов (их конечное число). Если $\lambda_k \in R_{m,n} \in A$, то

$$|\lambda-\lambda_k| \succ (|x|+1),$$

поэтому

$$\sum{}' \frac{|x_k|+1}{|\lambda-\lambda_k|^2} \prec \frac{1}{|x|+1}. \tag{11}$$

Штрих у знака суммирования означает, что суммируются слагаемые (если существуют) по $\lambda_k \in R_{m,n} \in A$.

Пусть $z_{m,n}$ — геометрический центр квадрата $R_{m,n}$. Если $\lambda_k \in R_{m,n} \notin A$, то

$$|\lambda-\lambda_k| \asymp |\lambda - z_{m,n}|,\ |x_k|+1 \asymp \mathrm{diam}\ R_{m,n} \asymp d^m,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $|\lambda-z|^{-2}$ субгармонична по $z \ne \lambda$, поэтому

$$\sum{}' \frac{|\Re\lambda_k|+1}{|\lambda-\lambda_k|^2} \prec \int_{\mathbb{C}\setminus B(\lambda,\varepsilon(|\Re\lambda|+1))} \frac{dm(z)}{(|Rez|+1)|\lambda-z|^2}.$$

Здесь штрих у знака суммы означает суммирование по всем $\lambda_k \in R_{m,n} \notin A$. Отсюда

$$\sum{}' \frac{|\Re\lambda_k|+1}{|\lambda-\lambda_k|^2} \prec \frac{\ln(|x|+1)}{|x|+1}.$$

Учитывая (11), получим

$$\sum \frac{|\Re\lambda_k|+1}{|\lambda-\lambda_k|^2} \prec \frac{\ln(|x|+1)}{|x|+1}.$$

Вместе с (10) последнее соотношение означает, что

$$|L(\lambda)| \succ e^{\widetilde{h}(x)-\frac{1}{2}\ln\ln(|x|+e)},\ \lambda \notin \bigcup_k B(\lambda_k, \varepsilon(|x_k|+1)).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1. По лемме 1
$$|L(\lambda)| \prec e^{\widetilde{h}(x)} \asymp \frac{1}{|\Re\lambda|+1}K(\lambda).$$
По определению функции τ в круге $B = B(\lambda, \varepsilon(|x|+1))$ существует гармоническая функция $u(z)$, отличающаяся от $\ln K(z)$ не более чем на 1. Пусть g — аналитическая функция в этом круге и $\Re g = u$. По формуле Коши
$$(Le^{-g})'(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{L(z)e^{-g(z)}dz}{(z-\lambda_k)^2}$$
получим верхнюю оценку
$$|L'(\lambda_k)| \prec \frac{e^{\widetilde{h}(x_k)}}{|x_k|+1}.$$
Соответствующие нижние оценки получены в лемме 2.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы круги $B(\lambda_k, \varepsilon(|\lambda_k|+1))$ попарно не пересекались, и в каждом из них выполнялось соотношение пункта 3 теоремы A. По доказанной асимптотике $L'|(\lambda_k)|$ получаем, что в кольцах $S_k := B(\lambda_k, \varepsilon(|\lambda_k|+1)) \setminus B(\lambda_k, \frac{\varepsilon}{2}(|\lambda_k|+1))$ выполняется оценка снизу
$$|L(\lambda)| \succ e^{\widetilde{h}(\Re\lambda)},$$
учитывая вывод леммы 1
$$|L(\lambda)| \prec e^{\widetilde{h}(\Re\lambda)},\ \lambda \in S := \bigcup_k S_k.$$
Пусть
$$C = \sup_{\lambda\in S} |L(\lambda)|e^{-\widetilde{h}(\Re\lambda)}.$$
Обозначим
$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \bigcup_k B(\lambda_k, \varepsilon(|\lambda_k|+1)).$$
Функция
$$u(\lambda) = \widetilde{h}(\Re\lambda) - \ln|L(\lambda)|$$
субгармонична на $\mathbb{C} \setminus \bigcup_k \{\lambda_k\}$, и по лемме 2 имеет место оценка
$$u(\lambda) \le \frac{1}{2}\ln\ln(|\Re\lambda|+e) + O(1),\ \lambda \in \Omega,$$
причем
$$u(\lambda) \le C,\ \lambda \in \partial\Omega.$$
Функция $v_1(\lambda) = \max(u(\lambda), 2C)$ субгармонична на плоскости вне нулей λ_k
$$v_1(\lambda) \equiv 2C,\ \lambda \in \bigcup_k S_k.$$
Тогда функция
$$v(\lambda) = \begin{cases} v_1(\lambda), & \lambda \in \Omega, \\ 2C, & a = \lambda \notin \Omega, \end{cases}$$
субгармонична на всей плоскости и имеет оценку
$$v(\lambda) \le \ln\ln(|\lambda| + O(1),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$
Но в этом случае функция v должна быть константой (см. [15], стр. 84) и, тем самым,
$$\ln|L(\lambda)| \ge \widetilde{h}(\Re\lambda) + O(1), \lambda \in \Omega.$$

Завершение доказательства теоремы 1.

Соотношение (3) влечет оценку для любого x_k

$$\frac{|L'(\lambda_k)|^2}{K(x_k)} \succ \int_0^{\frac{|x_k|}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(x+iy)|^2}{|z-\lambda_k|^2 K(x)} d\widetilde{h}'(x) dy.$$

Оценим $|L|^2$ по лемме 3 вне попарно непересекающихся квадратов

$$Q_n := \{z : |\Re(z-\lambda_n)| \le \varepsilon(|\Re\lambda_n|+1),\ |\Im(z-\lambda_n)| \le \varepsilon(|\Re\lambda_n|+1)\}.$$

После несложных оценок интеграла по dy снизу получим

$$\frac{|L'(\lambda_k)|^2}{K(x_k)} \succ \frac{1}{|x_k|} \int_0^{\frac{|x_k|}{2}} |x| d\widetilde{h}'(x).$$

Отсюда и из леммы 3 следует

$$\int_0^{\frac{|x_k|}{2}} |x| d\widetilde{h}'(x) \prec 1, |x_k| \longrightarrow \infty. \tag{12}$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^a t d\widetilde{h}'(t) = a\widetilde{h}'(a) - \widetilde{h}(a) + \widetilde{h}(0).$$

Если $\widetilde{h}'$ строго возрастающая функция, то супремум в

$$h(t) = \sup_x (xt - \widetilde{h}(x))$$

достигается в единственной точке $x = x_t :\ \widetilde{h}'(x) = t$, причем $|x_t| \longrightarrow \infty$, если $|t| \longrightarrow 1$. Тем самым,

$$h(t) = x_t t - \widetilde{h}(x_t) = x_t \widetilde{h}'(x_t) - \widetilde{h}(x_t).$$

Из (12) теперь получаем, что $h(t)$ ограниченная функция, то есть $L_2(h)$ изоморфно классическому L_2.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н.К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // ДАН. 1946. Т. 54. С. 383–386.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* Препринт ЛОМИ, С. 8–80.
3. S.V. Hruščev, N.K. Nikol'skii, B.S. Pavlov *Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels* // Complex Analysis and Spectral Theory. Lecture Notes in Mathematics. Volume 864. 1981. P. 214–335.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965. 448 с.
5. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука. 1980.
6. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР, Сер. мат., 39:3(1975). С. 657–702.
7. Любарский Ю.И. *Ряды экспонент в пространстве Смирнова и интерполяция целыми функциями специальных классов* // Изв. АН СССР, Сер. мат., 52:3(1988). С. 559–580.
8. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН., 1992.
9. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии Безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН, Сер. мат. 2007. Т. 71, № 6. С. 69–90.
10. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовх пространствах на R* // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 2006.

11. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. V. 68, № 3. P. 337–404.
12. A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis 242. 2007. № 2. P. 563–606.
13. A. Borichev, Yu.Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9. 2010. P. 449–461.
14. K. Seip *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space* I // Reine Angew. Math. 429. 1992. P. 91–106.
15. K. Seip, R. Wallsten *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock spaceII* // Reine Angew. Math. 429. 1992. P. 107–113.
16. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, № 3. С. 67–77.
17. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 80–87.
18. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и анализ, 22:5. 2010. С. 49–68.
19. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.
20. Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 1. С. 3–16.
21. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т. 26, № 4. С. 159–175.
22. Исаев К.П. *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 1. С. 60–71.

Артур Айратович Юнусов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `mc.yunusov@gmail.com`