ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 9-15.

УДК 517.928

О НОВОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Ф. ВАЛЕЕВ, Э.А. НАЗИРОВА, Я.Т. СУЛТАНАЕВ

Аннотация. В работе предлагается новый подход к исследованию асимптотического поведения решений при больших значениях x сингулярных линейных двучленных дифференциальных уравнений видов:

$$-\frac{d^n}{dx^n}y(x,\lambda)+\lambda q(x)y(x,\lambda)=0$$

с нерегулярно растущим при $x\to\infty$ потенциалом $q(x)$. Идея построения асимптотики решений сингулярных линейных дифференциальных уравнений и ее эффективность показаны на уравнениях 4-го порядка с осциллирующим потенциалом.

Ключевые слова: спектральная теория дифференциальных операторов, асимптотические формулы решений дифференциальных уравнений.

Mathematics Subject Classification: 34K08

1. Введение

В работе развивается новый подход к построению асимптотических формул фундаментальной системы решений (ФСР) при $x\to+\infty$ линейных дифференциальных уравнений со спектральным параметром $\lambda\in\mathbf{C}$ вида:

$$-\frac{d^n}{dx^n}y(x,\lambda)+\lambda q(x)y(x,\lambda)=0, \tag{1.1}$$

$x\in[x_0,\infty)$. Хорошо известно, что если потенциал $q(x)$ имеет «регулярное» поведение при $x\to+\infty$, то эти уравнения удается сводить к системе линейных дифференциальных уравнений с почти диагональной матрицей, а затем с помощью известной теоремы Левинсона [1] строить асимптотику при $x\to\infty$ решений. Классы так называемых «регулярных» потенциалов $q(x)$ (имеющих регулярное поведение при $x\to+\infty$) состоят из функций, удовлетворяющих условиям типа Титчмарша–Левитана ([1], с.330): $q(x)$ дважды непрерывно-дифференцируемая, $q'(x)$, $q''(x)$ не меняют знак на $[x_0,\infty)$ и

$$q(x)\to+\infty,\quad q'(x)=o(q^{\gamma}(x)),\ \ 0<\gamma<1+\frac{1}{n},\quad x\to+\infty.$$

N.F. Valeev, E.A. Nazirova, Ya.T. Sultanaev, On a new approach for studying asymptotic behavior of solutions to singular differential equations.

Работа поддержана РФФИ №15-01-01095 «Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов».

Поступила 24 июля 2015 г.

В этом случае ФСР этих уравнений имеет асимптотику при $x \to +\infty$ вида [3]:

$$y_k(x,\lambda) \sim \frac{1}{[\mu_k(x,\lambda)]^{\frac{n-1}{2}}} \exp \int_{x_0}^{x} \mu_k(t,\lambda)dt, \tag{1.2}$$

где $\mu_k(x,\lambda)$ корни уравнения $\mu^n - \lambda q(x) = 0, k = 1..n$.

Целью настоящей статьи является расширение классов дифференциальных уравнений с нерегулярными коэффициентами, для решений которых можно выписать асимптотические формулы при $x \to +\infty$.

Для демонстрации основной идеи построения асимптотики ФСР предлагаемым подходом мы рассматриваем уравнение следующего вида:

$$-\frac{d^4}{dx^4}y(x,\lambda) + \lambda^4(q(x) + h(x))y(x,\lambda) = 0,$$

где $q(x)$ — потенциал регулярного типа, а $h(x)$ — возмущение, причем нерегулярного типа и не подчинено $q(x)$.

Предлагаемая нами схема исследования асимптотики ФСР ориентирована на классы возмущений $h(x)$, которые можно назвать «быстроосциллирующими». Примерами таких возмущений являются функции вида:

$$h(x) = \sum \rho_k(x) P_k(\phi_k(x)),$$

где $P_k(t)$ — периодическая функция, а $\rho_k(x),\ \ \phi_k(x)$ — монотонные функции.

Отметим, что уравнения Штурма–Лиувилля с подобными потенциалами изучались многими авторами ([2]–[5] и др.). Как правило, в этих работах для получения ФСР требовалось, чтобы $q(x)$ и $h(x)$ удовлетворяли условию: функция $a(x) = \int_x^\infty h(t)/\sqrt{q(t)}dt$ — суммируема на бесконечности. При этих условиях в работах ([6], [7]) асимптотики ФСР были получены путем сведения исходного дифференциального уравнения к интегральному уравнению с последующим применением принципа сжимающих отображений.

2. Основной результат

Рассмотрим следующее уравнение:

$$-\frac{d^4}{dx^4}y(x,\lambda) + \lambda^4(q(x) + h(x))y(x,\lambda) = 0, \tag{2.1}$$

где $\lambda \in \mathbf{C},\ \ 0 \leqslant arg\lambda < \pi/2,\ x \in [0,\infty)$.

Потенциал $q(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией и удовлетворяет условиям регулярности типа Титчмарша–Левитана, а именно: $q''(x),\ q'(x)$ не меняют знак для достаточно больших x и

$$q(x) \to +\infty, \quad q'(x) = o(q^\gamma(x)), \ \ 0 < \gamma < 5/4, \quad x \to +\infty.$$

Вид спектрального параметра λ в уравнении (2.1) выбран с целью упрощения дальнейших выкладок.

Перейдем от уравнения (2.1) к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка, введя в рассмотрение вектор-столбец: $Y = (y, y', y'', y''')$:

$$Y' = A \cdot Y = (A_0 + A_1)Y, \tag{2.2}$$

$$A_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda^4 q(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \ A_1(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^4 h(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения асимптотики ФСР уравнения (2.2) приведем его к "почти диагональному"виду [1].

Собственные значения матрицы $A_0(x,\lambda)$ имеют вид

$$\mu_1(x,\lambda)=\lambda\mu(x),\;\; \mu_2(x,\lambda)=i\lambda\mu(x),\;\; \mu_3(x,\lambda)=-\lambda\mu(x),\;\; \mu_4(x,\lambda)=-i\lambda\mu(x),$$
$$\mu(x):=q^{1/4}(x).$$

Пусть:

$$T(x,\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda\mu)^{-3}&0&0&0\\0&(\lambda\mu)^{-2}&0&0\\0&0&(\lambda\mu)^{-1}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда $T(x,\lambda)$ приводит $A_0(x,\lambda)$ к диагональному виду:

$$T^{-1}A_0T=\Lambda(x,\lambda),\;\; \Lambda(x,\lambda)=diag\{\mu_1(x,\lambda),\mu_2(x,\lambda),\mu_3(x,\lambda),\mu_4(x,\lambda)\}=\lambda\mu(x)\Lambda_0,$$

$$\Lambda_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&i&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}.$$

Замена

$$Y=T\cdot Z,\quad Z=(z_1,z_2,z_3,z_4) \tag{2.3}$$

преобразует систему (2.2) к виду:

$$Z'(x,\lambda)=\left(\lambda\mu(x)\Lambda_0+\frac{\lambda h(x)}{4\mu^3(x)}G_0-\frac{\mu'(x)}{2\mu(x)}F_0\right)Z(x,\lambda), \tag{2.4}$$

где

$$\frac{\lambda h(x)}{4\mu^3(x)}G_0=T^{-1}A_1T,\quad \frac{\mu'(x)}{2\mu(x)}F_0=T^{-1}T',$$

$$G_0=\begin{pmatrix}1&i&-1&-i\\1&i&-1&-i\\1&i&-1&-i\\1&i&-1&-i\end{pmatrix},\quad F_0=\begin{pmatrix}3&-1+i&-1&-1-i\\-1-i&3&-1+i&-1\\-1&-1-i&3&-1+i\\-1+i&-1&-1-i&3\end{pmatrix}.$$

Теперь в системе дифференциальных уравнений (2.4) перейдем к новым переменным:

$$\xi=\int\limits_0^x\mu(t)dt,\quad x=\varphi(\xi),\quad Z(x)=U(\xi). \tag{2.5}$$

Получим систему уравнений:

$$U'_\xi(\xi,\lambda)=\left(\lambda\Lambda_0+\frac{\lambda h(x)}{4q(x)}G_0-\frac{\mu'_x(x)}{2\mu^2(x)}F_0\right)U(\xi,\lambda). \tag{2.6}$$

Обозначим

$$\alpha(\xi)=\frac{h(x)}{4q(x)},\quad \beta(\xi)=\frac{\mu'_x(x)}{2\mu^2(x)}.$$

Наложим на функцию $\alpha(\xi)$ условие

$$\left|\int\limits_\xi^\infty\alpha(s)ds\right|<\infty,\quad \forall\xi>0, \tag{2.7}$$

и введем в рассмотрение функцию:

$$\alpha_1(\xi):=\int\limits_\xi^\infty\alpha(s)ds.$$

Положим:

$$U(\xi,\lambda) = e^{-\lambda\alpha_1(\xi)G_0} \cdot V(\xi,\lambda). \tag{2.8}$$

После замены получаем:

$$V'_\xi(\xi,\lambda) = \left(\lambda e^{\lambda\alpha_1(\xi)G_0} \cdot \Lambda_0 \cdot e^{-\lambda\alpha_1(\xi)G_0} - \beta(\xi) \cdot e^{\lambda\alpha_1(\xi)G_0} \cdot F_0 \cdot e^{-\lambda\alpha_1(\xi)G_0}\right) V(\xi,\lambda).$$

Так как $G_0^2 = 0$, то

$$V'_\xi(\xi,\lambda) = \left(\lambda\Lambda_0 - \lambda^2\alpha_1(\xi)G_{11} - \beta(\xi)F_0 + \lambda\beta(\xi)\alpha_1(\xi)F_{11}\right) V(\xi,\lambda), \tag{2.9}$$

где матрицы G_{11}, F_{11} имеют вид:

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 0 & -1-i & 2 & -1+i \\ 1-i & 0 & i+1 & -2 \\ 2 & i-1 & 0 & -1-i \\ 1+i & -2 & -1-i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{11} = 6\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 & i \\ -1 & -i & 1 & i \\ -1 & -i & 1 & i \\ -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\left|\int\limits_\xi^\infty \alpha_1(t)dt\right| < \infty, \quad \xi > 0, \tag{2.10}$$

$$\alpha_1(\xi)\beta(\xi) \in L_1(0,\infty). \tag{2.11}$$

Перепишем систему (2.9) в более простом виде:

$$V'_\xi(\xi,\lambda) = (\lambda\Lambda_0 - \lambda^2\alpha_1(\xi)G_{11} - \beta(\xi)F_0 + F_1(\xi,\lambda))V(\xi,\lambda),$$

где элементы матрицы $F_1(\xi,\lambda) = \lambda\beta(\xi)\alpha_1(\xi)F_{11} \in L_1(0,\infty)$ при выполнении условий (2.7), (2.10), (2.11).

Введем в рассмотрение функцию:

$$\alpha_2(\xi) = \int\limits_\xi^\infty \alpha_1(s)ds. \tag{2.12}$$

Сделаем далее замену, аналогичную (2.8):

$$V(\xi,\lambda) = e^{-\lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}} \cdot R(\xi,\lambda), \tag{2.13}$$

тогда для $R(\xi,\lambda)$ получаем:

$$R'_\xi(\xi,\lambda) = e^{\lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}} \cdot (\lambda\Lambda_0 - \beta(\xi) \cdot F_0 + F_1(\xi,\lambda)) \cdot e^{-\lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}} R(\xi,\lambda).$$

Так как $G_{11}^2 = 0$, приходим к системе:

$$R'_\xi(\xi,\lambda) = (\lambda\Lambda_0 - \beta(\xi)F_0 + F_2(\xi,\lambda))R(\xi,\lambda), \tag{2.14}$$

где

$$F_2(\xi,\lambda) = e^{\lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}} \cdot F_1(\xi,\lambda) \cdot e^{-\lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}} - \lambda^3\alpha_2(\xi)G_{21} + \frac{(\lambda^3\alpha_2(\xi))^2}{2!}G_{22} + \lambda^2\alpha_2(\xi)\beta(\xi)F_{21},$$

при этом матрицы G_{21}, G_{22} имеют вид:

$$G_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & -2 \\ 2i & 0 & 2i & -4i \\ -4 & 2 & 0 & 2 \\ -2i & 4i & -2i & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_{22} = \begin{pmatrix} 8 & 8i & -8 & -8i \\ 8 & 8i & -8 & -8i \\ 8 & 8i & -8 & -8i \\ 8 & 8i & -8 & -8i \end{pmatrix},$$

а матрица F_{21} вычисляется в явном виде.

Потребуем выполнения следующего условия:

$$\alpha_2(\xi) \in L_1(0,\infty). \tag{2.15}$$

Тогда элементы матрицы $F_2(\xi,\lambda)$ суммируемы на интервале $(0,\infty)$.

Запишем матрицу $\lambda\Lambda_0 - \beta(\xi)F_0$ в виде:

$$\lambda\Lambda_0 - \beta(\xi)F_0 = \tilde{\Lambda_0} - \beta(\xi)\tilde{F_0},$$

$$\tilde{\Lambda_0} = \begin{pmatrix} \lambda + 3\beta(\xi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\lambda + 3\beta(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda + 3\beta(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\lambda + 3\beta(\xi) \end{pmatrix}, \quad \tilde{F_0} = F_0 - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Система (2.14) примет следующий вид:

$$R'_\xi(\xi,\lambda) = \left(\tilde{\Lambda_0}(\xi,\lambda) - \beta(\xi)\tilde{F_0} + F_2(\xi,\lambda)\right) R(\xi,\lambda).$$

Сделаем далее замену

$$R = (I + T_1(\xi,\lambda))P, \qquad T_1\tilde{\Lambda_0} = \tilde{\Lambda_0}T_1 - \beta(\xi)\tilde{F_0}, \tag{2.16}$$

откуда находим

$$T_1(\xi,\lambda) = \frac{\beta(\xi)}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 & -1 \\ i & 0 & i & i/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \\ -i & -i/2 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

После преобразований приходим к системе:

$$P'_\xi = \tilde{\Lambda_0}P - (I+T_1)^{-1}T'_1P + (I+T_1)^{-1}F_2(I+T_1)P. \tag{2.17}$$

Заметим, что при выполнении условий регулярности для функции $q(x)$ согласно ([1], с.330) $\beta' \in L_1(0,\infty)$, так что в силу условий (2.7), (2.10), (2.11), (2.15) система (2.17) имеет L-диагональный вид, а, стало быть, к этой системе может быть применена теорема Левинсона ([1], с.292), согласно которой основной вклад в асимптотики ФСР при $x \to +\infty$ вносит диагональная матрица $\tilde{\Lambda_0}$. Поэтому система дифференциальных уравнений (2.17) при $x \to +\infty$ имеет следующую асимпотику ФСР:

$$P(\xi,\lambda) = \exp\left\{\int\limits_0^\xi \tilde{\Lambda_0}(t,\lambda)dt\right\} \cdot (I + C\cdot o(1)),$$

здесь матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее возвращаясь от системы (2.17) к системе (2.2) с учетом формул для замен переменных (2.3), (2.5), (2.8), (2.12) получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (2.1) потенциал* $q(x)$ *— дважды непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:* $q''(x)$, $q'(x)$ *не меняют знак для достаточно больших* x *и*

$$q(x) \to +\infty, \quad \frac{d}{dx}q(x) = o(q^{\gamma}(x)), \quad 0 < \gamma < 5/4,$$

а функции

$$\alpha_1(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{h(\varphi(s))}{4q(\varphi(s))}ds, \quad \beta(\xi) = \frac{\frac{d}{dx}q(x)}{32q^{5/4}(x)}, \quad \xi = \int\limits_{0}^{x} q^{1/4}(t)dt, \quad x = \varphi(\xi)$$

удовлетворяют условиям

$$\alpha_1(\xi)\beta(\xi) \in L_1(0, +\infty), \quad \alpha_2(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty} \alpha_1(t)dt \in L_1(0, +\infty).$$

Тогда уравнение (2.1) имеет ФСР такую, что при $x \to +\infty$ *и при каждом фиксированном* $\lambda \neq 0$ *для* $Y(x, \lambda) = (y(x, \lambda), y'(x, \lambda), y''(x, \lambda), y'''(x, \lambda))$ *справедливы асимптотические формулы:*

$$Y(x, \lambda) = T(x, \lambda) \cdot e^{-\lambda\alpha_1(\xi)G_0 - \lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}}(I + T_1(\xi, \lambda)) \cdot e^{-\int\limits_0^{\xi}\tilde{\Lambda}_0(t,\lambda)dt} \cdot (I + C \cdot o(1)).$$

3. Пример

Приведем характерный пример функций $q(x)$, $h(x)$, для которых выполнены все условия доказанной теоремы. При этом все известные до нас методы исследования не позволяли получить асимптотические формулы для решений уравнения (2.1) с такими коэффициентами, поскольку для этих методов характерно отсутствие осциллирующей функции $h(x)$.

$$h(x) = (1 + x)^{\alpha} \sin{(1 + x)^{\beta}}, \quad q(x) = (1 + x)^{\alpha}.$$

Тогда условия теоремы предыдущего пункта выполнены, если

$$\beta > \frac{3\alpha}{8} + \frac{3}{2},$$

а асимптотические при $x \to +\infty$ формулы для ФСР системы (2.2) имеют вид:

$$Y(x, \lambda) \sim (1 + x)^{-3\alpha/8}T(x, \lambda)e^{-\Lambda_0\xi - \lambda\alpha_1(\xi)G_0 - \lambda^2\alpha_2(\xi)G_{11}},$$

где

$$\xi = \frac{(1 + x)^{\alpha/4+1} - 1}{\alpha/4 + 1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969. 526 с.
2. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. *Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).* М.: Наука. 1979. 400 с.
3. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1983. 354 с.
4. Муртазин Х.Х, Султанаев Я.Т. *К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля* // Математические заметки. 1980. Т. 28:4. С. 545–553.
5. N.F. Valeev, Ya.T. Sultanaev *On the deficiency indices of a singular Sturm-Liouville operator with a rapidly oscillating perturbation* // Doklady Mathematics. 2000. V. 62. № 2. P. 271–273.
6. Макина Н.К., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. *О методах исследования асимптотического поведения сингулярных дифференциальных уравнений* // Математические заметки. 2014. Т. 96. С. 627–632.
7. Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т. *О распределении собственных значений сингулярных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций* // Тр.ММО. 2014. Вып.2. С. 107–123.
8. Султанаев Я.Т. *Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций* // Диф. уравнения. 1974. Т. 10, № 9. С. 1673–1683.
9. Исмагилов Р.С. *Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций* // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 6. С. 667–675.

Валеев Нурмухамет Фуатович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `ValeevNF@yandex.ru`

Назирова Эльвира Айратовна,
Башкирский государственный универститет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
E-mail: `ellkid@gmail.com`

Султанаев Яудат Талгатович,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `sultanaevYT@gmail.com`