ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 76-87.

УДК 517.956.225+517.572

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ В КЛАССЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Б.Т. ТОРЕБЕК

Аннотация. В данной работе в классе гармонических в шаре функций изучаются свойства некоторых модифицированных интегро-дифференциальных операторов Римана-Лиувилля. В качестве применения свойств этих операторов рассматриваются некоторые локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения Лапласа в шаре. Доказаны теоремы единственности и существования изученных задач. Исследованные задачи обобщают известные задачи Дирихле и Бицадзе-Самарского.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, гармоническая функция, оператор Баврина, оператор Римана-Лиувилля, нелокальная задача

Mathematics Subject Classification: 35K20, 35R11

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ — единичная сфера. Пусть далее, $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$. Следующие операторы называются операторами интегрирования и дифференцирования порядка $\alpha > 0$ в смысле Римана-Лиувилля [1]

$$I^\alpha[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^r (r-\tau)^{\alpha-1} u(\tau\theta)\, d\tau,$$

$$D^\alpha[u](x) = \frac{d}{dr} I^{1-\alpha}[u](x), 0 < \alpha < 1,$$

где — $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{|x|} \sum\limits_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Так как $I^\alpha[u](x) \to u(x)$ почти всюду при $\alpha \to 0$ (см.[1]), то можно положить $I^0[u](x) = u(x)$. Тогда $D^1[u](x) = \frac{du}{dr}(x)$.

В работе [2] в классе гармонических функций были введены следующие операторы

$$B^\alpha[u](x) = r^\alpha D^\alpha[u](x), 0 < \alpha < 1. \tag{1}$$

Далее, в работах И.И. Баврина [4] в классе гармонических в шаре функции изучены свойства операторов вида

$$\delta_{\mu_1} = r\frac{d}{dr} + \mu_1,$$

$$\delta_{\mu_1}^m = \left(r\frac{d}{dr} + \mu_1\right)\left(r\frac{d}{dr} + \mu_2\right) \cdot \ldots \cdot \left(r\frac{d}{dr} + \mu_m\right),$$

B.T. Torebek, Modified Riemann-Liouville integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантового финансирования научно-технических програм и проектов Комитетом науки МОН РК (проект 0819/ГФ4).

Поступила 16 мая 2015 г.

$$\delta_{\mu_1}^{-1}\left[u\right](x)=\int\limits_0^1 t^{\mu_1-1}u\left(tx\right)dt,$$

$$\delta_{\mu_1}^{-m}\left[u\right](x)=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^1 t^{\mu_1-1}\left(1-t\right)^{m-1}u\left(tx\right)dt,$$

где $\mu_j>0,\mu_j=\mu_1+m-1,j=1,2,...m.$

Так как $(m-1)!=\Gamma\left(m\right)$, то из конструкций оператора δ_{μ}^{-m} видно, что данный оператор определен и для дробных значений параметра m. Тогда естественно возникает вопрос определения обратного оператора к $\delta_{\bar{\mu}}^{-m}$ в случае дробных значений параметра m. Следуя работе [3], введем следующую модификацию оператора (1)

$$\delta_{\mu}^{\alpha}\left[u\right](x)=r^{-\mu}B^{\alpha}\left[r^{\mu}u\right](x),\mu>0,0<\alpha<1.$$

В настоящей работе мы построим дробные аналоги операторов $\delta_{\bar{\mu}}^{-m}$, $\delta_{\bar{\mu}}^{m}$ и покажем, что результаты работы [4] верны и для общего случая.

Пусть $u\left(x\right)$ — гармоническая функция в области Ω, α и μ — не отрицательные, действительные числа, причем $\mu+1=\mu_1$.

Рассмотрим операторы

$$B_{\mu}^{-\alpha}\left[u\right](x)=\begin{cases} u(x),\alpha=0\\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}s^{m+\mu-\alpha}u(sx)ds,\alpha>0,\end{cases}$$

$$B_{\mu}^{\alpha}\left[u\right](x)=\begin{cases} u(x),\alpha=0,\\ \delta_{\mu}^{\alpha}\left[u\right](x),0<\alpha<1,\\ \delta_{\mu_1}^{m}\left[\delta_{\mu}^{\alpha-m}\left[u\right]\right](x),m\le\alpha<m+1,m=1,2,....\end{cases}\tag{2}$$

Если $\alpha=m$ и $\mu>0$, то для (2) получаем оператор Баврина $B_{\mu_1}^{m}=\delta_{\mu_1}^{m}$, а если $\mu=0$ и $0<\alpha<1$, то B_0^{α} совпадает с оператором (1).

2. Свойства операторов B_{μ}^{α} и $B_{\mu}^{-\alpha}$

Пусть $H_k\left(x\right)$ — однородный гармонический полином степени $k\in N_0=\{0,1,...\}$. Тогда, используя свойства $H_k\left(x\right)=H_k\left(r\theta\right)=r^kH_k\left(\theta\right)$, легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\alpha>0$, $\mu\ge0$ и $H_k\left(x\right)$ — однородный гармонический полином степени $k\in N_0=\{0,1,...\}$. Тогда справедливы равенства*

$$B_{\mu}^{\alpha}\left[H_k\right](x)=\frac{\Gamma\left(k+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+m-\alpha+\mu+1\right)}H_k\left(x\right),\tag{3}$$

$$B_{\mu}^{-\alpha}\left[H_k\right](x)=\frac{\Gamma\left(k+m-\alpha+\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+m+\mu+1\right)}H_k\left(x\right).\tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $m\le\alpha<m+1$, $\mu\ge0$ и $u(x)$ — гармоническая в шаре Ω функция. Тогда функции $B_{\mu}^{\alpha}[u](x)$ и $B_{\mu}^{-\alpha}[u](x)$ являются гармоническими в области Ω.*

Доказательство. Так как $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω, то она разлагается при $|x|\le\rho<1$ ряд вида [5]

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x),\tag{5}$$

где $\left\{H_k^{(i)}(x),\, i=1,\dots,h_k\right\}$ — полная система однородных гармонических полиномов степени k, а $u_k^{(i)}$ — коэффициенты разложения (5). Применяя формально оператор B_μ^α к ряду (5) и учитывая равенство (3), получим

$$B_\mu^\alpha[u](x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{\Gamma\left(k+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+m-\alpha+\mu+1\right)}u_k^{(i)}H_k^{(i)}\left(x\right). \tag{6}$$

Далее, из асимптотической оценки гамма функций легко показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{\Gamma\left(k+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+m-\alpha+\mu+1\right)}}=1.$$

Тогда радиус сходимости ряда (6) совпадает с радиусом сходимости ряда (5), и поэтому его сумма представляет собой гармоническую в Ω функцию.

Аналогично, используя (4), доказывается гармоничность функции $B_\mu^{-\alpha}[u](x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в шаре Ω. Тогда, для любого $x\in\Omega$ справедливы равенства*

$$u\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha[u]\left(sx\right)ds. \tag{7}$$

Доказательство. Представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде ряда (5) и преобразуем его следующим образом

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{\Gamma\left(k+m-\alpha+\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+m+\mu+1\right)}\frac{\Gamma\left(k+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(k+m-\alpha+\mu+1\right)}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x). \tag{8}$$

Далее, учитывая равенства (3), (4) и равномерную сходимость ряда (8) по x при $|x|\le\rho<1$, получаем

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-1}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha\left[H_k^{(i)}\right]\left(sx\right)ds=$$

$$=\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}\right]\left(sx\right)ds=$$

$$=\int_0^1\frac{\left(1-s\right)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha\left[u\right]\left(sx\right)ds.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω и $B_\mu^\alpha\left[u\right]\left(x\right)\in C(\overline{\Omega})$. Тогда для любого $m\le\beta<\alpha$, $\mu\ge0$ производная $B_\mu^\beta\left[u\right]\left(x\right)$ существует, и имеет место формула*

$$B_\mu^\beta\left[u\right]\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^1\left(1-s\right)^{\alpha-\beta-1}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha\left[u\right]\left(sx\right)ds. \tag{9}$$

Доказательсвто. Используя представление (6), функцию $B_\mu^\beta[u](x)$ преобразуем следующим образом:

$$B_\mu^\beta[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{\Gamma(k+m+\mu+1)}{\Gamma(k+m-\beta+\mu+1)}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{\Gamma(k+m+\mu+1)}{\Gamma(k+m-\alpha+\mu+1)}\frac{\Gamma(k+m-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(k+m-\beta+\mu+1)}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-\beta-1}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha\left[H_k^{(i)}\right](sx)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-\beta-1}s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha[u](sx)ds.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области Ω. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства*

$$B_\mu^{-\alpha}\left[B_\mu^\alpha[u]\right](x) = B_\mu^\alpha\left[B_\mu^{-\alpha}[u]\right](x) = u(x). \tag{10}$$

Доказательство. Применим к функции $B_\mu^\alpha[u](x)$ оператор $B_\mu^{-\alpha}$. По определению оператора $B_\mu^{-\alpha}$ имеем

$$B_\mu^{-\alpha}\left[B_\mu^\alpha[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-1}\,s^{\mu+m-\alpha}B_\mu^\alpha[u](sx)\,ds.$$

В силу равенства (7) последнее выражение равно $u(x)$. Первое равенство из (10) доказано. Для доказательства второго равенства из (10) применим оператор B_μ^α к функции $B_\mu^{-\alpha}[u](x)$, то

$$B_\mu^{-\alpha}\left[B_\mu^\alpha[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B_\mu^\alpha\left[\int\limits_0^1(1-s)^{\alpha-1}\,s^{\mu+m-\alpha}u(sx)\,ds\right] =$$

$$= \delta_{\mu_1}^m\int\limits_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{s^{\mu+m-\alpha}r^{\alpha-m-\mu}}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{m-\alpha}\,\tau^\mu u(s\tau\theta)\,d\tau ds.$$

Далее, нетрудно убедиться в следующих равенствах

$$\frac{r^{\alpha-m-\mu}}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r(r-\tau)^{m-\alpha}\,\tau^\mu u(s\tau\theta)\,d\tau \underset{s\tau=t}{=}$$

$$= \frac{r^{\alpha-m-\mu}}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{rt}\left(r-\frac{t}{s}\right)^{m-\alpha}\left(\frac{t}{s}\right)^\mu u(t\theta)\frac{dt}{s} =$$

$$= \frac{(rs)^{\alpha-m-\mu}}{\Gamma(m+1-\alpha)}\frac{d}{d(rs)}\int\limits_0^{rs}(rs-t)^{m-\alpha}\,t^\mu u(t\theta)\,dt = B_\mu^\alpha[u](sx)$$

и $r\frac{d}{dr} = (rs)\,\frac{d}{d(rs)}$, где учтено, что $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{tx}{|tx|}$. Поэтому будем иметь

$$B_{\mu}^{\alpha}\left[B_{\mu}^{-\alpha}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}(1-s)^{\alpha-1}\, s^{\mu+m-\alpha}B_{\mu}^{\alpha}[u]\,(sx)\,ds.$$

Теорема доказана.

Таким образом, из утверждения теоремы 4 следует, что операторы B_{μ}^{α} и $B_{\mu}^{-\alpha}$ являются взаимно обратными в классе гармонических функций в шаре Ω.

3. Локальная задача

Рассмотрим следующую задачу.

Задача L. *Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_{\mu}^{\alpha}[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству* $B_{\mu}^{\alpha}[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega$.

Заметим, что аналогичные задачи с граничными операторами целого, высокого порядка рассматривались в работах [4], [6]–[9], а с операторами дробного порядка – в работах [2], [10]–[14].

Пусть $v(x)$ — классическое решение задачи Дирихле в шаре Ω

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}. \tag{11}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи L существует, единственно, и представляется в виде*

$$u(x) = B_{\mu}^{-\alpha}[v](x),$$

где $v(x)$ — решение задачи (11).

Доказательство Пусть решение задачи L существует и это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор B_{μ}^{α} и обозначим $B_{\mu}^{\alpha}[u](x) = v(x)$. Так как $B_{\mu}^{\alpha}[u](x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, то из $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Далее, поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω, то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(x)$ — тоже гармоническая в шаре Ω и

$$v(x)\,|_{\partial\Omega} = B_{\mu}^{\alpha}[u](x)\,|_{\partial\Omega} = f(x)\,.$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (11). Причем, если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно, и $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Применим к равенству $B_{\mu}^{\alpha}[u](x) = v(x)$ оператор $B_{\mu}^{-\alpha}$. Поскольку интегралы вида

$$\int\limits_{0}^{1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\mu+m-\alpha}v(\tau x)\,d\tau$$

при $\alpha \in [m, m+1)$, $\mu > 0$, $\mu + m - \alpha \neq 0$ имеют слабые особенности при $\tau = 0$ и $\tau = 1$, то такие функции являются непрерывной функцией по $x \in \overline{\Omega}$ при непрерывной функции $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Значит, оператор $B_{\mu}^{-\alpha}$ применим к функциям из $C\left(\overline{\Omega}\right)$. В силу первого равенства из (10) получим равенство (12), т.е.

$$B_{\mu}^{-\alpha}[v](x) = B_{\mu}^{-\alpha}\left[B_{\mu}^{\alpha}[u]\right](x) = u(x).$$

Пусть наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (11) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Ясно, что $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Рассмотрим функцию $u(x) = B_{\mu}^{-\alpha}[v](x)$. В силу второго равенства из (10) будем иметь

$$B_{\mu}^{\alpha}[u](x) = B_{\mu}^{\alpha}\left[B_{\mu}^{-\alpha}[v]\right](x) = v(x).$$

Значит, функция $u(x)$ — гармоническая в Ω и

$$B_\mu^\alpha[u]\,|_{\partial\Omega} = v\,|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема 5 доказана.

4. Нелокальная задача, когда носители данных не пересекаются с границей области

В этом пункте исследуются вопросы разрешимости нелокальной задачи с оператором B_μ^α, когда носители данных не пересекаются с границей области. Пусть заданы последовательности чисел δ_j и a_j $,j = 1, 2, ...,$ удовлетворяющие условиям:

$$0 < \delta_j \le b < 1, \sum_{j=1}^{\infty} |_j| < \infty.$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача N. *Найти функцию* $u\,(x) \in^2 (\Omega) \cap \left(\bar{\Omega}\right)$ *гармоническую в шаре* Ω, *для которой функция* $B_\mu^\alpha\,[u]\,(x) \in \left(\bar{\Omega}\right)$ *и удовлетворяет условию*

$$B_\mu^\alpha\,[u]\,(x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^\beta\,[u]\,(\delta_j x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega\ . \tag{12}$$

Нелокальные краевые задачи представляют весьма интересное обобщение классических задач, и в то же время они естественным образом получаются при построении математических моделей реальных процессов и явлений в физике, в инженерии, в социологии, в экологии ит.д. За последние несколько десятилетий в математической литературе появился ряд работ, посвященных исследованию нелокальных задач для дифференциальных уравнений. Одной из первых среди них была статья А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [15], в которой были предложены новые постановки задач для эллиптических уравнений, и которая стала отправной точкой большинства исследований в этом направлении. Рассматриваемая задача является простейшим обобщением задачи Бицадзе-Самарского на граничные операторы нецелого порядка. Заметим, что в случае $\alpha = \beta = 0$, т.е. когда $B_\mu^\alpha = B_\mu^\beta \equiv \mathrm{I}$ — единичный оператор, аналогичные задачи изучались в одномерном случае в работе [16], а в случае $n \ge 2$ – в работах [17], [18], [19]. Отметим также, что аналогичные нелокальные задачи для граничных операторов дробного порядка изучались в работах [2], [20], [21], [22].

Для исследования задачи N приведем следующую вспомогательную теорему.

Теорема 6. *Пусть* $0 < \delta_j \le b < 1, j = 1, 2, ..., f(x) \in C(\partial\Omega)$, *и справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \le \frac{\Gamma\,(m-\beta+\mu+1)}{\Gamma\,(m-\alpha+\mu+1)}. \tag{13}$$

Тогда

1) если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \ne \frac{\Gamma\,(m-\beta+\mu+1)}{\Gamma\,(m-\alpha+\mu+1)}, \tag{14}$$

то задача

$$\begin{cases} \Delta v\,(x) = 0, x \in \Omega \\ v(x) - \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^{\beta-\alpha}[v]\,(\delta_j x) = f(x), x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

однозначно разрешима;

2) если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \equiv \frac{\Gamma(m-\beta+\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha+\mu+1)}, \tag{16}$$

то для разрешимости задачи (15) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, ds_x = 0; \tag{17}$$

3) если решение существует, то при выполнении условий (14) оно единственно, а при выполнении условий (16) оно единственно до произвольного постоянного.

Доказательство. Исследуем единственность решения задачи (15). Пусть функция $v(x)$ является решением задачи (15) при $f(x) = 0$. Обозначим

$$M = \max_{\partial\Omega} |\mathrm{v}(x)| = |\mathrm{v}(x_0)|, x_0 \in \partial\Omega.$$

Если $v(x) \neq const$, то в силу принципа максимума для гармонических функций $|v(x)| < M$ для любого $x \in \Omega$. Далее, в силу условия задачи (15) и определения оператора $B_\mu^{\beta-\alpha}$ при $f(x) = 0$ получаем

$$M = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^{\beta-\alpha}[v](\delta_j x_0) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\mu+m-\alpha} |v(s\delta_j x_0)|\, ds.$$

Так как $0 < \delta_j \leq b < 1, j = 1, 2, ...$, то $\delta_j x_0 \in \Omega$ и при любом $s \in [0,1]$, точки $s\delta_j x_0$ также принадлежат шару Ω. Поэтому для всех $s\delta_j x_0 \in \Omega$ выполняется $|v(s\delta_j x_0)| < M$ и, следовательно,

$$M \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \left| B_\mu^{\beta-\alpha}[v](\delta_j x_0) \right| < M \frac{\Gamma(m-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(m-\beta+\mu+1)} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|.$$

Теперь, если выполняется (13), то получаем противоречие $M < M$. Поэтому, в случае выполнения условия (13) необходимо, чтобы $v(x) = const$. Подставляя в этом случае $v(x) \equiv C$ в условие задачи (15), имеем $C = 0$ или равенство (16). Таким образом, при выполнении условий (13) и (14) получаем $v(x) \equiv 0$. Если же выполняется (16), то произвольная постоянная будет решением однородной задачи (15). Действительно, если $v(x) \equiv C$, то, подставляя ее в условие задачи (15), имеем $C - C = 0$. Единственность доказана.

Теперь перейдем к изучению существования решения задачи (15). Обозначим $\mu(x) = v(x)|_{\partial\Omega}$ — след неизвестной гармонической функции $v(x)$ в $\partial\Omega$. Решение задачи (15) будем искать в виде интеграла Пуассона

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} P(x,y)\mu(y) dS_y, \tag{18}$$

где $P(x,y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ — ядро Пуассона задачи Дирихле (11). Подставляя функцию (18) в условие задачи (15), относительно неизвестной функции $\mu(x)$ получаем следующее интегральное уравнение

$$\mu(x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)} s^{\mu+m-\alpha} \left[\int_{\partial\Omega} P(s\delta_j x, y)\mu(y)\, ds_y \right] ds =$$

$$= f(x), x \in \partial\Omega. \tag{19}$$

Меняя местами порядок интегрирования в левой части равенства (19), получаем

$$\mu(x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int\limits_{\partial\Omega} P_{\alpha,\beta}\left(\delta_j x, y\right)\mu(y)dS_y = f(x), x \in \partial\Omega,$$

где

$$P_{\alpha,\beta}\left(\delta_j x, y\right) = \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)} s^{\mu+m-\alpha} P\left(s\delta_j x, y\right) ds.$$

Обозначим

$$K(x,y) = -\sum_{j=1}^{\infty} a_j P_{\alpha,\beta}\left(\delta_j x, y\right), x, y \in \partial\Omega.$$

Тогда уравнение (19) представляется в виде

$$\mu(x) + \int\limits_{\partial\Omega} K(x,y)\mu(y)dS_y = f(x), x \in \partial\Omega. \tag{20}$$

Заметим, что для всех $x, y \in \partial\Omega$ и $0 < \delta_j \le b < 1, j = 1, 2, ...,$ выполняются условия

$$|\delta_j x - y| = |y - \delta_j x| \ge 1 - \delta_j \ge 1 - b > 0, \tag{21}$$

и

$$|\delta_j x - y|^2 = |\delta_j y - x|^2. \tag{22}$$

Тогда легко показать, что в силу условия (21) ядро $K(x,y)$ является непрерывным на $\partial\Omega \times \partial\Omega$, а в силу условия (22) симметричным т.е. $K(x,y) = K(y,x)$. Следовательно, к интегральному уравнению (20) применима альтернатива Фредгольма [23]. Отсюда легко вытекают утверждения теоремы. Действительно, если выполняются условия (13) и (14), то однородная задача (15), а следовательно, и однородная задача, соответствующая (20), имеют единственное решение. Тогда по теореме Фредгольма [23] интегральное уравнение (20) разрешимо при любом $f(x) \in C(\partial\Omega)$ и, следовательно, функция (18) является единственным решением задачи (15). Если выполняются условия (13) и (16), то любое постоянное будет решением однородной задачи (15). Следовательно, в этом случае однородное интегральное уравнение, соответствующее (20), имеет одно линейно независимое решение, и этим решением будет функция $\mu(x) = C$, где C — произвольная постоянная. Далее, так как $K^*(x,y) = K(y,x) = K(x,y)$, то соответствующее (20) союзное уравнение также имеет решение $\mu * (x) = C$.

Тогда по теореме Фредгольма, для разрешимости интегрального уравнения (20) необходимо и достаточно выполнения условия (17). Таким образом, если выполняется условие (17), то функция (18) и в этом случае будет решением задачи (15). Теорема доказана.

Теперь переходим к утверждению основной задачи. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $0 < \delta_j \le b < 1, j = 1, 2, ..., f(x) \in C(\partial\Omega)$ *и справедливо неравенство (13). Тогда*

если выполняется условие (14), то задача N однозначно разрешима;

если выполняется условие (16), то для разрешимости задачи N необходимо и достаточно выполнения условия (17), причем решение задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого;

если решение задачи N существует, то оно представимо в виде

$$u(x) = B_\mu^{-\alpha}[v](x),$$

где $v(x)$ *— решение задачи (15).*

Доказательство. Пусть $u(x)$ является решением задачи N. Применим к функции $u(x)$ оператор B_μ^α и обозначим $B_\mu^\alpha[u](x) = v(x)$. В силу утверждения теоремы 2 для любого справедливо равенство (7). Тогда, используя формулу (9), имеем

$$B_\mu^\beta\left[u\right]\left(\delta_j x\right) = B_\mu^{\beta-\alpha}[v]\left(\delta_j x\right).$$

Далее, поскольку $u(x)$ — гармоническая функция в Ω, то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(x)$ — тоже гармоническая в шаре Ω, и выполняются условия задачи (15). Таким образом, если $u(x)$ — решение задачи N, то функция $v(x)$ является решением задачи (15). Пусть выполняются условия (13) и (14). Тогда по теореме 6 для любого $f(x) \in C\left(\partial\Omega\right)$ решение задачи (15) существует, единственно, и $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Если применить оператор $B_\mu^{-\alpha}$ к равенству $B_\mu^\alpha[u](x) = v(x)$ в силу первого равенства, из теоремы 4 для любого $x \in \Omega$, получим $u\left(x\right) = B_\mu^{-\alpha}\left[v\right]\left(x\right)$. Гармоничность данной функции следует из утверждения теоремы 1, а выполнения условия задачи (15) проверяется непосредственно

$$B_\mu^\alpha[u](x) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^\beta\left[u\right]\left(\delta_j x\right) =$$

$$= v\left(x\right) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^{\beta-\alpha}\left[v\right]\left(\delta_j x\right) = f(x), x \in \partial\Omega.$$

Первая часть теоремы доказана. Пусть теперь выполняется условие (16). Тогда из соотношения $u(0) = C$ для функции

$$w(x) = B_\mu^\alpha\left[u\right]\left(x\right) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^\beta\left[u\right]\left(\delta_j x\right)$$

получаем

$$w\left(0\right) = B_\mu^\alpha\left[u\right]\left(0\right) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j B_\mu^\beta\left[u\right]\left(0\right) = 0.$$

А так как функция $w(x)$ есть решение задачи Дирихле (11), то при выполнении условия $w(0) = 0$ вытекает необходимое условие (17). Таким образом, необходимость условия (17) для существования решения задачи N при выполнении условии (16) доказана. Покажем, что условие (17) является и достаточным для существования решения задачи N при выполнении условия (16). По теореме 6, при выполнении условия (17) и (16) решение задачи (15) существует, единственно, с точностью до постоянного слагаемого, и $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Тогда функция $u(x) = B_\mu^{-\alpha}[v](x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема доказана.

5. Нелокальная задача, когда носители данных пересекаются с границей области

Рассмотрим теперь задачу N, когда последовательность чисел δ_j удовлетворяет условиям: $0 < \delta_j < 1, j = 1, 2, ...,$ и $\delta_j \to 1$ при $j \to \infty$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $f\left(x\right) \in \partial\Omega$, и выполняется*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{\left(1-\delta_j\right)^{n-1}} < \infty. \tag{23}$$

Тогда

1) если выполняются условия (13)-(14), то задача (15) однозначно разрешима;

2) если выполняются условия (13), (16), то для разрешимости задачи (15) (с точностью до постоянного слагаемого) необходимо и достаточно выполнение условия (17).

Лемма 2 доказывается аналогично, как теорема 6. При этом, в силу условий (23), ядро интегрального уравнения (20) является симметричным и ограниченным.

Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $0 < \delta_j < 1, j = 1, 2, ...,\ \lim\limits_{j\to\infty} \delta_j = 1,\ f(x) \in C(\partial\Omega)$ *и справедливо (23). Тогда*

1) если выполняются условия (13)-(14), то задача N однозначно разрешима;

2) если выполняется условие (13), (16), то для разрешимости задачи N необходимо и достаточно выполнения условия (17), причем решение задачи единственно с точностью до постоянного слагаемого;

3) если решение задачи N существует, то оно представимо в виде

$$u(x) = B_{\mu}^{-\alpha}[v](x),$$

где $v(x)$ *— решение задачи (15).*

Доказательство теоремы 8 проводится почти дословным повторением доказательства теоремы 7, где вместо теоремы 6 используется лемма 2.

6. Примеры

Пример 1. Пусть $n = 2$, $0 < \alpha < 1$ и $\mu = 0$. По теореме 5 единственное решение задачи L имеет вид

$$u(r,\varphi) = B_{\mu}^{-\alpha}\left[v\right](r,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u\left(rs,\varphi\right) ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{s^{-\alpha}}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-(rs)^2}{1-2rs\cos\left(\varphi-\theta\right)+(rs)^2} f\left(\theta\right)d\theta\right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\frac{s^{-\alpha}\left(1-(rs)^2\right)}{1-2rs\cos\left(\varphi-\theta\right)+(rs)^2} ds\right\} f\left(\theta\right)d\theta.$$

В работе [24] доказано следующее равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\frac{s^{-\alpha}\left(1-(rs)^2\right)}{1-2rs\cos\left(\varphi-\theta\right)+(rs)^2} ds =$$

$$= 2\Gamma\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\cos\left[\left(1-\alpha\right)arctg\frac{r\sin(\varphi-\theta)}{1-r\cos(\varphi-\theta)}\right]}{\left(1-2r\cos\left(\varphi-\theta\right)+r^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}} - \frac{1}{2}\right).$$

Тогда окончательно получим

$$u(x) = \frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\cos\left[\left(1-\alpha\right)arctg\frac{r\sin(\varphi-\theta)}{1-r\cos(\varphi-\theta)}\right]}{\left(1-2r\cos\left(\varphi-\theta\right)+r^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}} - \frac{1}{2}\right\} f\left(\theta\right)d\theta.$$

Пример 2. Пусть $a_1 \neq 0$ и $a_j = 0, j = 2, 3, ...$

Рассмотрим однородный гармонический полином степени p

$$u_p(x) = \sum_{|\beta|=p} c_{\beta} x_1^{\beta_1}\cdot x_2^{\beta_2}\cdot ...\cdot x_n^{\beta_n}.$$

Рассмотрим действие оператора B_μ^α к функции $u_p(x)$. В силу равенства (3)

$$B_\mu^\alpha\left[u_p\right](x)=\frac{\Gamma\left(p+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(p+m-\alpha+\mu+1\right)}u_p(x).$$

Далее, так как $u_p(\delta_1 x)=\delta_1^p u_p(x)$, то

$$B_\mu^\alpha\left[u_p\right](x)-a_1B_\mu^\beta\left[u_p\right](\delta_1 x)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(p+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(p+m-\alpha+\mu+1\right)}u_p(x)-a_1\frac{\Gamma\left(p+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(p+m-\beta+\mu+1\right)}\delta_1^p u_p(x)=$$

$$=\left(\frac{\Gamma\left(p+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(p+m-\alpha+\mu+1\right)}-a_1\frac{\Gamma\left(p+m+\mu+1\right)}{\Gamma\left(p+m-\beta+\mu+1\right)}\delta_1^p\right)u_p(x).$$

Следовательно, гармонический полином $u_p(x)$ является решением однородной задачи N, соответствующей

$$a_1=\frac{\Gamma\left(p+m-\beta+\mu+1\right)}{\Gamma\left(p+m-\alpha+\mu+1\right)}\delta_1^{-p}>1.$$

Заметим также, что при n=3 число однородных гармонических полиномов степени p равно $2p+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland. Mathematics studies. 2006. 539p.
2. Карачик В.В., Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. *О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении* // Математические труды. (2011) **14**, № 1. С. 99–125. (Перевод на англ.) Siberian Advences in Mathematics. (2012) **22**, № 2. P.115–134.
3. Килбас А.А., Титюра А.А. *Дробная производная типа Маршо-Адамара и обращение дробных интегралов* // Доклады Национальной академии наук Беларуси. (2006) **50**, № 4, С. 5–10.
4. Баврин И.И. *Операторы для гармонических функций и их приложения* // Дифференциальные уравнения. (1985) **21**, № 1. С. 9–15.
5. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: "Мир". 1974. 333 с.
6. Баврин И.И. *Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения* // Дифференциальные уравнения. (1988) **24**, № 9. С. 1629–1631.
7. Соколовский В.Б. *Об одном обобщении задачи Неймана* // Дифференциальные уравнения. (1988) **24**, № 4. С. 714–716.
8. Бицадзе А.В. *К задаче Неймана для гармонических функций* // Доклады АН СССР. (1990) **311**, № 1. С. 11–13.
9. Карачик В.В., Турметов Б.Х. *Об одной задаче для гармонического уравнения* // Известия АН Уз ССР, серия физико-математических наук. (1990) № 4. С. 17–21.
10. B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov *On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of a fractional order* //Boundary Value Problems. (2013) **93**, 18p. doi:10.1186/1687-2770-2013-93
11. Турметов Б.Х. *Об одной краевой задаче для гармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. (1996) **32**, № 8. С. 1089–1092.
12. Турметов Б.Х. *О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка* // Математические труды. (2004) **7**, № 1. С.189–199. (Перевод на англ.) Siberian Advences in Mathematics. (2005) **15**, № 2. P. 115–125.
13. Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. *Модифицированные операторы Баврина и их применения* // Дифференциальные уравнения. (2015) **51**, № 2. С. 240–250.
14. Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж. *Некоторые свойства и применения интегро-дифференциальных операторов типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций* // Сибирский математический журнал. (2012) **53**, № 4. С. 752–764.

15. Бицадзе А.В., Самарский А.А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач* // Доклады АН СССР. (1969) **185**, № 4. С. 739–740.
16. Ильин В.А., Моисеев Е.И. *Нелокальная краевая задача первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовке* // Доклады АН СССР. (1986) **291**, № 3. С. 534–539.
17. Пулатов А.К. *Об одной задаче Бицадзе-Самарского* // Дифференциальные уравнения. (1989) **25**, № 3. С. 537–540.
18. F. Criado, F.Jr. Criado, N. Odishelidze *On the solution of some non-local problems* //Czechoslovak Mathematical Journal. (2004) **54**, № 2. P. 487–498.
19. Кишкис К.Ю. *Об одной нелокальной задаче для гармонических в многосвязной области функций* // Дифференциальные уравнения. (1987) **23**, № 1. С. 174–177.
20. A.S. Berdyshev, B.J. Kadirkulov, J.J. Nieto *Solvability of an elliptic partial differential equation with boundary condition involving fractional derivatives* // Complex Variables and Elliptic Equations. (2013) DOI:10.1080/17476933.2013.777711
21. M.A. Sadybekov, B.K. Turmetov, B.T. Torebek *Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball* // Electronic Journal of Differential Equations, (2014) **2014**, № 157. P. 1–14.
22. M. Kirane, B.T. Torebek *On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions* // Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2015) doi:10.1002/mma.355.
23. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. *Интегральные уравнения.* 2-е изд. М.: "ФИЗМАТЛИТ 2002. 160 с.
24. Торебек Б.Т., Турметов Б.Х. *К вопросу разрешимости некоторых обратных задач для уравнения Лапласа с граничным оператором Римана-Лиувилля* // Вестник КарГУ. Серия математика. (2013) **69**, № 1. С. 113–121.

Берикбол Тиллабайулы Торебек,
Институт математики и математического моделирования,
ул. Пушкина, 125,
050010, г. Алматы, Казахстан
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
ул. аль-Фараби, 71,
050040, г. Алматы, Казахстан
E-mail: turebekb85@mail.ru