ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 70-75.

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

О.А. РЕПИН

Аннотация. Для дифференциального уравнения, содержащего уравнение диффузии дробного порядка, исследована в бесконечной области нелокальная задача, краевое условие которой содержит линейную комбинацию обобщенных операторов дробного интегро-дифференцирования.

Для различных значений параметров этих операторов с помощью метода Трикоми доказана единственность решения рассматриваемой задачи. Существование решения получено в замкнутом виде как решение соответствующего уравнения с дробными производными разных порядков.

Ключевые слова: краевая задача, обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования, функция Райта, дифференциальное уравнение дробного порядка

Mathematics Subject Classification: 35M10

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y}u = 0, & (y > 0,\, 0 < \alpha < 1), \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, & (m > 0,\, y < 0), \end{cases} \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка α от функции $u(x,y)$ по второй переменной [1, с.34]

$$\left(D^{\alpha}_{0+,y}u\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y \frac{u(x,t)dt}{(y-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1,\, y > 0)$$

в области Ω, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $\Omega^+ = \big\{(x,y) : -\infty < x < +\infty, y > 0\big\}$ и области Ω^-, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками

$$AC: \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

и отрезком $[0,1]$ прямой $y = 0$.

Введем обозначения. Пусть $I = (0,1)$ – единичный интервал прямой $y = 0$, $\Theta_0(x) = \frac{x}{2} - i\left[\frac{(m+2)x}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$ – точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,0)$ $(x \in I)$, с характеристикой AC.

O.A. Repin, Boundary value problem for partial differential equation with fractional Riemann-Liouville derivative.

Поступила 25 мая 2015 г.

$I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}$ – оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$, введенный в [2] (см. также [1, с. 326–327], [3, с. 14], [4, с. 12], [5, с. 133]) и имеющий при действительных α, β, η и $x>0$ вид

$$\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f\right)(x)=\begin{cases}\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}F(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{t}{x})f(t)\,dt \quad (\alpha>0),\\ \frac{d^n}{dx^n}\left(I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}f\right)(x)\quad (\alpha\leqslant 0,\ n=[-\alpha]+1).\end{cases}\tag{2}$$

В частности,

$$\left(I_{0+}^{0,0,\eta}f\right)(x)=f(x),\ \left(I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta}f\right)(x)=\left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x),\ \left(I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta}f\right)(x)=\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x),\tag{3}$$

где I_{0+}^{α} и D_{0+}^{α} – операторы дробного интегрирования и дифференцирования порядка $\alpha>0$ [1, с.42, 44].

Для уравнения (1) изучим краевую задачу: найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям:

$$y^{1-\alpha}u|_{y=0}=0\quad(-\infty<x\leqslant 0,\quad 1\leqslant x<\infty),\tag{4}$$

$$A\left(I_{0+}^{a,b,\beta-1-a}u[\Theta_0(t)]\right)(x)+B\left(I_{0+}^{a+1,b-1-\beta,\beta-1-a}u_y(t,0)\right)(x)=g(x),\quad(x\in I)\tag{5}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\lim_{y\to 0-}u(x,y),\quad(x\in\overline{I}),\tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y=\lim_{y\to 0-}u_y(x,y),\quad(x\in I).\tag{7}$$

Здесь $\beta=\frac{m}{2m+4}$, a и b – действительные числа, причем $a>max\ \{-\beta,\beta-1\}$, A и B – вещественные константы разных знаков, $g(x)$ заданная функция, такая, что $g(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I)$.

Будем искать решение $u(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области Ω таких, что

$$u(x,y)\quad\text{стремится к нулю при}\quad(x^2+y^2)\to\infty,$$
$$y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega^+}),\quad u(x,y)\in C(\overline{\Omega^-}),$$
$$y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u)_y\in C(\Omega^+\cup\{(x,y):\ 0<x<1,y=0\}),$$
$$u_{xx}\in C(\Omega^+\cup\Omega^-),\quad u_{yy}\in C(\Omega^-).$$

Отметим, что в публикациях [6], [7] нами для уравнения (1) были исследованы нелокальные краевые задачи. Данная работа является продолжением исследования отмеченных задач и их обобщением.

2. Единственность решения задачи

Пусть существует решение поставленной задачи.

Введем обозначения

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\tau_1(x),\quad\lim_{y\to 0-}u(x,y)=\tau_2(x),\tag{8}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y=\nu_1(x),\quad\lim_{y\to 0-}u_y(x,y)=\nu_2(x),\quad(x\in I).\tag{9}$$

Известно (см. например, [6]), что решение уравнения (1) в полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее условию (4) и условию

$$\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y)=\tau_1(x),\quad(x\in\overline{I}),\tag{10}$$

дается формулой

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 G(x,y,t)\tau_1(t)dt,\tag{11}$$

где

$$G(x,y,t)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\,y^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{1,\frac{\alpha}{2}}_{1,\frac{\alpha}{2}}\left(-|x-t|y^{-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)},\ \alpha>\beta,\alpha>0-\text{ функция типа Райта [8, с. 23].}$$

Также известно [9], что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из области Ω^+ на линию $y=0$, имеет вид

$$\nu_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{12}$$

Найдем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $y=0$ из гиперболической части Ω^- области Ω.

Используя решение задачи Коши для уравнения (1) при $y<0$, в работе [10] выписано $u[\Theta_0(x)]$. Оно имеет вид

$$u[\Theta_0(x)]=\gamma_1\Gamma(\beta)\left(I^{\beta,0,\beta-1}_{0+}\tau_2(t)\right)(x)-\gamma_2\Gamma(1-\beta)\left(I^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}_{0+}\nu_2(t)\right)(x), \tag{13}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\quad \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Подставляя (13) в (5), учитывая (8)–(9) и применяя соотношение [1, с. 327]

$$\left(I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}I^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}_{0+}f\right)(x)=\left(I^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}_{0+}f\right)(x)\quad(\gamma>0), \tag{14}$$

получим

$$k_1\left(I^{a+\beta,b,\beta-1-a}_{0+}\tau_2(t)\right)(x)+k_2\left(I^{a+1-\beta,b+2\beta-1,\beta-a-1}_{0+}\nu_2(t)\right)(x)+$$
$$+B\left(I^{a+1,b-1+\beta,\beta-a-1}_{0+}\nu_2(t)\right)(x)=g(x), \tag{15}$$

где

$$k_1=A\gamma_1\Gamma(\beta),\quad k_2=-A\gamma_2\Gamma(1-\beta).$$

Подействуем на обе части соотношения (15) оператором $I^{-a-\beta,-b,2\beta-1}_{0+}$.

Непосредственные вычисления с использованием формул (14) и (3) показывают, что

$$\tau_2(x)=-k_3\left(I^{1-2\beta}_{0+}\nu_2(t)\right)(x)-k_4\left(I^{1-\beta}_{0+}\nu_2(t)\right)(x)+$$
$$+\frac{1}{k_1}\left(I^{-a-\beta,-b,2\beta-1}_{0+}g(t)\right)(x), \tag{16}$$

где

$$k_3=-\frac{\gamma_2(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)},\quad k_4=\frac{B}{A\gamma_1\Gamma(\beta)}. \tag{17}$$

Оценим интеграл

$$I=\int\limits_0^1\tau_2(x)\nu_2(x)dx.$$

В силу условий сопряжений (6), (7) и соотношения (12), имеем

$$I=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^1\tau_1(x)\tau_1''(x)dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, получим

$$I = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^1 [\tau_1'(x)]^2 dx \leqslant 0. \tag{18}$$

Теперь найдем оценку интеграла I снизу.

При $g(x) = 0$ равенство (16) принимает вид

$$\tau_2(x) = -k_3 \left(I_{0+}^{1-2\beta} \nu_2(t) \right)(x) - k_4 \left(I_{0+}^{1-\beta} \nu_2(t) \right)(x) =$$

$$= -\frac{k_3}{\Gamma(1-2\beta)} \int\limits_0^x \nu_2(t)(x-t)^{-2\beta} dt - \frac{k_4}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^x \nu_2(t)(x-t)^{-\beta} dt,$$

и, следовательно,

$$I = -\frac{k_3}{\Gamma(1-2\beta)} \int\limits_0^1 \nu_2(x) dx \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta} \nu_2(t) dt -$$

$$-\frac{k_4}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^1 \nu_2(x) dx \int\limits_0^x (x-t)^{-\beta} \nu_2(t) dt.$$

Далее воспользуемся известной формулой для гамма-функции $\Gamma(\mu)$ [11, с. 387]

$$\int\limits_0^\infty s^{\mu-1} \cos(ks) ds = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (k > 0, 0 < \mu < 1).$$

Полагая в ней $k = |x-t|$, $\mu = 2\beta$ получим

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)} \int\limits_0^\infty s^{2\beta-1} \cos(s|x-t|) ds, \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right),$$

при $k = |x-t|$, $\mu = \beta$ будем иметь

$$|x-t|^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)} \int\limits_0^\infty s^{\beta-1} \cos(s|x-t|) ds.$$

Применив эти формулы и формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования в повторном интеграле, приходим к соотношению

$$I = -\frac{k_3 \sin(\pi\beta)}{\pi} \int\limits_0^\infty s^{2\beta-1} \left[\left(\int\limits_0^1 \nu_2(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^1 \nu_2(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds - \frac{k_4 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)}{\pi} \int\limits_0^\infty s^{\beta-1} \left[\left(\int\limits_0^1 \nu_2(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^1 \nu_2(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds \geq 0. \tag{19}$$

Из (18) и (19) вытекает, что $I = 0$, и, следовательно, согласно (18)

$$\int_0^1 [\tau_1(x)]^2 dx = 0.$$

Отсюда в силу равенств $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ получаем $\tau_1(x) = 0$ для всех $x \in \overline{I}$.

Это, согласно формуле (11),

$$u(x,y) = \int_0^1 G(x,y,t)\tau_1(t)dt$$

дает возможность утверждать, что $u(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{\Omega^+}$.

В силу условий сопряжения (8) $\tau_2(x) = \tau_1(x)$, и поэтому $\tau_2(x) = 0$, а в силу (9) и (12) и $\nu_2(x) = 0$. А тогда $u(x,y) \equiv 0$ и в области Ω^-, как решение задачи Коши с нулевыми данными, что и доказывает единственность решения исходной задачи.

3. Существование решения задачи

Согласно (11), для доказательства существования решения исследуемой задачи достаточно найти $\nu_1(x)$.

Продифференцируем обе части соотношения (16) по x дважды:

$$\frac{d^2}{dx^2}\tau_2(x) = -k_3\frac{d^2}{dx^2}\left(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2(t)\right)(x) - k_4\frac{d^2}{dx^2}\left(I_{0+}^{1-\beta}\nu_2(t)\right)(x) + \\ +\frac{1}{k_1}\frac{d^2}{dx^2}\left(I_{0+}^{-a-\beta,-b,2\beta-1}g(t)\right)(x)$$

или, (полагая $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$),

$$\left(D_{0+}^{1+2\beta}\nu\right)(x) - \lambda\left(D_{0+}^{1+\beta}\nu\right)(x) - \mu\nu(x) = g_1(x), \tag{20}$$

где

$$\lambda = -\frac{B}{k_2} = \frac{B}{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)}, \quad \mu = -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{k_3} = \frac{\gamma_1\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)},$$

$$g_1(x) = -\frac{1}{A\gamma_2\Gamma(1-\beta)}\left(I_{0+}^{-a-\beta-2,2-b,1+2\beta}g(t)\right)(x).$$

В монографии [12, с.297] рассмотрено уравнение с дробными производными

$$\left(D_{0+}^{\alpha}y\right)(x) - \lambda\left(D_{0+}^{\beta}y\right)(x) - \mu y(x) = f(x), \tag{21}$$

где $x > 0$, $\alpha > \beta > 0$, $\lambda, \mu \in R$, $f(x)$ задана на $R_+ = [0,\infty)$ и выписано его решение в следующем виде

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}G_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(x-t)f(t)dt.$$

Здесь

$$G_{\alpha,\beta,\lambda,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu^n}{n!}\,z^{\alpha n}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\alpha n+\alpha,\alpha-\beta)\end{array}\middle|\lambda z^{\alpha-\beta}\right],$$

$${}_p\Psi_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_k\,z^k, \quad c_k = \frac{\Pi_{i=1}^p\Gamma(a_i+\alpha_i k)}{\Pi_{j=1}^q\Gamma(b_j+\beta_j k)}\,\frac{1}{k!} \quad (k \in N_0 = \{0,1,...\}),$$

$$z, a_i, b_j \in C, \quad \alpha_i, \beta_j \in R, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,q}.$$

Этой функции посвятили свои работы известные математики по специальным функциям Fox C. [13], [14] и Wright E.M. [15], [16], [17].

Уравнение (20) – это уравнение вида (21), а поэтому его решение дается формулой

$$\nu(x) = \int_0^x (x-t)^{2\beta} G_{1+2\beta,1+\beta,\lambda,\mu}(x-t) g_1(t)dt,$$

$$G_{1+2\beta,1+\beta,\lambda,\mu}(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} (x-t)^{(1+2\beta)n} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (n+1,1) \\ ((1+2\beta)n+1+2\beta,\beta) \end{array} \middle| \lambda(x-t)^{\beta} \right],$$

что и завершает доказательство существования решения исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск. Наука и техника. 1987. 688 с.
2. M. Saigo *A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function* // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, № 2. P. 135–143.
3. Репин О.А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.* Саратов. ун-т. 1992. 161 с.
4. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит. 2003. 272 с.
5. Нахушева З.А. *Нелокальные задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений.* Нальчик. 2011. 196 с.
6. Килбас А.А., Репин О.А. *Аналог задачи Бицадзе-Самарского для смешанного уравнения с дробной производной* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 5. С. 638–644.
7. Килбас А.А., Репин О.А. *Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с частной производной Римана-Лиувилля и операторами обобщенного дробного интегрирования в краевом условии* // Труды Института математики. Минск. 2004. Т. 12, № 2. С. 75–81.
8. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
9. Геккиева С.Х. *Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной* // Изв. Кабар.-Балкар. научн. центра РАН. 2001. № 2(7). С. 78–80.
10. Килбас А.А., Репин О.А. *Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* М.: Наука. 1981. 800 с.
12. A.A. Kilbas, H.M Srivastava, Y.Y. Trujillo *Theory and applications of fractional differential equations.* North–Holland. Math. Studies 204. Amsterdam–Boston ... Tokio. 2006. 523 p.
13. C. Fox *The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions.* Proc. London Math. Soc. (Ser. 2), 27. 1928. P. 389–400.
14. C. Fox *The G and H functions as symmetrical Fourier kernels.* Trans. Amer. Math. Soc. 98. 1961. P. 395–429.
15. E.M. Wright *The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function.* J. London Math. Soc. 10. 1935. p. 286–293.
16. E.M. Wright *The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor Series.* Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 238. 1940. P. 423–451.
17. E.M. Wright *The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function II.* Proc. London Math. Soc. 46 (2). 1940. P. 389–408.

Олег Александрович Репин,
Самарский государственный экономический университет,
ул. Советской Армии, 141,
443090, г. Самара, Россия
E-mail: `Matstat@mail.ru`