ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 57-69.

УДК 517.587, 517.923

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА

ПОСВЯЩАЕТСЯ 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И.Ф. КРАСИЧКОВА-ТЕРНОВСКОГО

В.Ю. НОВОКШЕНОВ, А.А. ЩЕЛКОНОГОВ

Аннотация. Вычисление асимптотики ортогональных полиномов является классической задачей анализа. В статье найдено асимптотическое распределение нулей обобщенных полиномов Эрмита $H_{m,n}(z)$ при $m = n$, $n \to \infty$, $z = O(\sqrt{n})$. Эти полиномы, представляющие собой вронскианы от классических полиномов Эрмита, возникают во многих задачах математической физики и теории случайных матриц. Вычисление асимптотики основано на применении задачи Римана к уравнению Пенлеве IV, решениями которого являются функции $u(z) = -2z + \partial_z \ln H_{m,n+1}(z)/H_{m+1,n}(z)$. В указанном скейлинговом пределе эта задача Римана имеет асимптотическое решение в элементарных функциях. В результате получаются формулы типа Планшереля-Ротаха для асимптотики классических полиномов Эрмита.

Ключевые слова: Обобщенные полиномы Эрмита, распределение нулей, уравнение Пенлеве IV, мероморфные решения, задача Римана, метод Дейфта-Жу, формулы Планшереля-Ротаха.

Mathematics Subject Classification: 30D35, 30E10, 33C75, 34M35, 34M55, 34M60

0. Введение

Обобщенные полиномы Эрмита $H_{m,n}(z)$ определяются соотношениями [17], [4]

$$H_{m,n}(z) = \det\left(P_{n-i+j}(z)\right)_{i,j=1}^{m}, \qquad (1)$$

где

$$P_s(z) = \sum_{i+2j=s} \frac{1}{6^j i! j!} z^i$$

или, в эквивалентной форме, как вронскианы классических полиномов Эрмита

$$H_{m,n}(z) = c_{m,n}\mathcal{W}\left(H_m(z), H_{m+1}(z), \ldots, H_{m+n}(z)\right),$$

где $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$, $c_{m,n}$ — нормировочные постоянные.

Подобно классическим ортогональным полиномам, они обладают многими замечательными свойствами. Например, ортогональные на вещественной оси с весом $w(x,z,m) = (x-z)^m \exp(-x^2)$ полиномы $p_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению [3]

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + a_n(z,m)p_n(x) + b_n(z,m)p_{n-1}(x),$$

V.Yu. Novokshenov, A.A. Schelkonogov, Distribution of zeroes to generalized Hermite polynomials.

Работа поддержана РНФ (грант 14-11-00078).

Поступила 24 августа 2015 г.

где
$$a_n(z,m) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\frac{H_{n+1,m}}{H_{n,m}}, \quad b_n(z,m) = \frac{nH_{n+1,m}H_{n-1,m}}{2H_{n,m}^2}.$$
Другое свойство, которое будет использовано ниже, состоит в том, что логарифмические производные
$$u(z) = -2z + \frac{d}{dz}\ln\frac{H_{m,n+1}(z)}{H_{m+1,n}(z)} \tag{2}$$
доставляют рациональные решения четвертого уравнения Пенлеве (PIV)
$$u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2-\alpha)u + \frac{\beta}{2u}, \tag{3}$$
с коэффициентами
$$\alpha = n - m, \quad \beta = -2(m+n+1)^2.$$

Отметим также найденное недавно приложение, связанное с матричными моделями в статистической физике. Функция распределения собственных значений в *гауссовском унитарном ансамбле* [10] при условии фиксации n собственных значений λ_k и m-кратного вырождения $n+1$-го собственного значения $\lambda_{n+1} = z$ имеет вид
$$D_n(z) = \frac{1}{n!}\int_{\infty}^{\infty}\cdots\int_{\infty}^{\infty}\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - z)^m e^{-\lambda_k^2}d\lambda_k. \tag{4}$$
С другой стороны, статистическая сумма (4) может рассматриваться как энергия основного состояния волновой функции $n+1$ кулоновской частицы с $1/r^2$ отталкиванием во внешнем квадратичном поле [10]. При этом оказывается [3], что
$$D_n(z) = A_{m,n}H_{m,n}(cz), \quad c = i\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad A_{m,n} = \mathrm{const}.$$
Таким образом, нули обобщенных полиномов Эрмита отвечают координатам кулоновских частиц в равновесном состоянии, удерживаемых внешним квадратичным полем.

Вычисление асимптотического распределения нулей ортогональных полиномов восходит к работам классиков анализа конца XIX в., таких как Дарбу, Чебышев, Стеклов и Стилтьес. В частности, для полиномов Эрмита это распределение вытекает из формул Планшереля-Ротаха [14], [16], гл. 8
$$e^{-z^2/2}H_n(z) = \frac{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\sqrt{n!}}{(\pi n)^{1/4}\sqrt{\sin\varphi}}\left\{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(\sin 2\varphi - 2\varphi) + \frac{3\pi}{4}\right] + O(n^{-1})\right\},$$
где $z = \sqrt{2n+1}\cos\varphi$, $\varepsilon \le \varphi \le \pi - \varepsilon$, $n\to\infty$ и
$$e^{-z^2/2}H_n(z) = \frac{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{4}}\sqrt{n!}}{(\pi n)^{1/4}\sqrt{\operatorname{sh}\varphi}}\left\{\exp\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)(\operatorname{sh} 2\varphi - 2\varphi) + \frac{3\pi}{4}\right] + O(n^{-1})\right\},$$
где $z = \sqrt{2n+1}\operatorname{ch}\varphi$, $\varepsilon \le \varphi \le \omega$, $n\to\infty$, ω — произвольная постоянная.

Отсюда следует, что нули $H_n(z)$ вещественны и расположены в области с характерным масштабом $O(\sqrt{2n})$.

Ниже мы будем вычислять распределения нулей полиномов $H_{m,n}(z)$ при
$$m = n, \quad n\to\infty, \quad z = O(\sqrt{n}). \tag{5}$$
Для этого, по примеру недавних работ [1], [2] и [13], мы используем рациональные решения (2) уравнения PIV (3). Нетрудно показать, что полюсы этого решения с вычетами $+1$ отвечают нулям полинома $H_{m,n+1}$, а полюсы с вычетами -1 совпадают с нулями полинома $H_{m+1,n}$. Далее, используя свойство полной интегрируемости уравнения PIV, можно сформулировать задачу Римана, отвечающую заданным рациональным решениям.

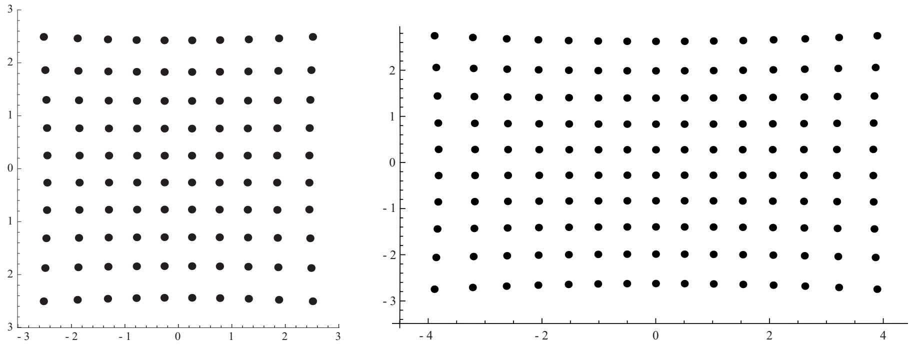

Рис. 1. Нули обобщенных полиномов Эрмита $H_{m,n}(z)$ при $m = n = 10$ (слева) и при $m = 15$ и $n = 10$ (справа)

Для этого в §1 мы вычислим данные монодромии и цепочку преобразований Беклунда, приводящих к решениям (2). Оказывается, что эта матричная задача очень похожа на соответствующую задачу Римана, применяемую для семейства ортогональных полиномов с экспоненциальным весом (§2). Метод асимптотического решения подобных задач состоит в предъявлении специального параметрикса, регуляризующего степенной рост на бесконечности с заменой его на стандартную нормировку на единичную матрицу. Этот метод, восходящий к работам П. Дейфта и других [5], в данном случае похож на процедуру, обслуживающую классические полиномы Эрмита. В §3 показано, что параметрикс строится в элементарных функциях, в отличие от случая полиномов Воробьева-Яблонского в уравнении PII, приводящих к параметриксу в терминах тэта функций [1], [2]. В результате в §4 мы восстанавливаем решетку нулей обобщенных полиномов Эрмита в пределе (5), разрешая систему тригонометрических уравнений.

1. Преобразования Беклунда и вычисление данных монодромии

Первыми интегралами уравнения PIV служат данные монодромии, определяемые следующим образом [8], глава 5. Рассмотрим линейное матричное уравнение по дополнительному параметру λ

$$\Psi_\lambda = A(\lambda, z)\Psi, \tag{6}$$

где $\Psi = \Psi(\lambda, z)$ является 2×2 — матричной функцией, а $A(\lambda, z)$ рациональна по λ

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & y \\ 2(uw + \theta_0 - \theta_\infty)y^{-1} & -z \end{pmatrix} +$$

$$+ \quad \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -uw + \theta_0 & -yw/2 \\ 2(uw - 2\theta_0)y^{-1} & uw - \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь u, w и y являются функциями от z, удовлетворяющими нелинейным уравнениям

$$\frac{d}{dz}\log y = -u - 2z,$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dz} = -4uw + u^2 + 2zu + 4\theta_0, \\ \dfrac{dw}{dz} = 2w^2 - 2uw - 2zw + \theta_0 + \theta_\infty. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнения (7) эквивалентны уравнению PIV (3) на функцию $u = u(z)$ с коэффициентами

$$\alpha = 2\theta_\infty - 1, \quad \beta = -8\theta_0^2.$$

Данные монодромии определяются матрицами Стокса для решений Ψ уравнения (6)

$$\Psi_{j+1}(\lambda, z) = \Psi_j(\lambda, z) S_j, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{8}$$

Здесь четыре фундаментальных решения Ψ_j уравнения (6) выбираются из условий аналитичности по λ в секторе Ω_j,

$$\Omega_j = \{\lambda \,|\, -\pi/4 + \pi j/2 < \arg\lambda < \pi/4 + \pi j/2, \quad j = 1, 2, 3, 4\},$$

и нормировки на бесконечности

$$\Psi_j(\lambda, z) = \big(I + O(\lambda^{-1})\big) \exp\left\{\left(\frac{\lambda^2}{2} + z\lambda\right)\sigma_3\right\} \lambda^{-\theta_\infty \sigma_3}, \tag{9}$$

$$\lambda \to \infty, \quad \lambda \in \Omega_j, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Основным свойством матриц Стокса S_j (8) выступает их независимость от z тогда и только тогда, когда u, w и y удовлетворяют системе (7) или, что эквивалентно, $u = u(z)$ является решением уравнения PIV (3) ([8], [11]). Таким образом, скалярные элементы этих матриц s_1, s_2, s_3 and s_4

$$S_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2k-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

становятся *интегралами движения* (первыми интегралами) уравнения PIV (3). Очевидно, что они не независимы, поскольку уравнение второго порядка имеет только два независимых первых интеграла. В самом деле, для данных монодромии справедливо соотношение [8], глава 5

$$(1 + s_2 s_3) e^{2\pi i \theta_\infty} + \left(s_1 s_4 + (1 + s_3 s_4)(1 + s_1 s_2)\right) e^{2\pi i \theta_\infty} = 2\cos(2\pi\theta_0), \tag{10}$$

которое вытекает из условия цикличности при итерации уравнений монодромии (8)

$$S_1 S_2 S_3 S_4 \, e^{2\pi i \theta_\infty \sigma_3} = T e^{2\pi i \theta_0 \sigma_3} T^{-1}, \quad \det T = 1.$$

Обратная задача теории монодромии для уравнения PIV состоит в нахождении Ψ_j, удовлетворяющих условиям (8) и (9) с заданными данными монодромии s_1, s_2, s_3, s_4 при условии (10). Если такие функции существуют, то решение уравнения PIV (3) вычисляется по формуле ([8], глава 5)

$$u(z) = -2z - \lim_{\lambda\to\infty} \left(\lambda\, \partial_z \Psi_1(\lambda, z) \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^2}{2} + z\lambda\right)\sigma_3\right\} \lambda^{-\theta_\infty\sigma_3}\right)_{12}, \tag{11}$$

где нижний индекс $_{12}$ обозначает элемент $(1, 2)$ матрицы Ψ_1.

Приступая к решению этой задачи при $z \to \infty$, сначала вычислим величины s_j для рациональных решений (2). Для этого воспользуемся рекуррентными соотношениями для обобщенных полиномов Эрмита. Все $H_{m,n}$ связаны равенствами [4]

$$\begin{cases} 2m H_{m+1,n} H_{m-1,n} = H_{m,n} H''_{m,n} - \left(H'_{m,n}\right)^2 + 2m H^2_{m,n}, \\ 2n H_{m,n+1} H_{m,n-1} = -H_{m,n} H''_{m,n} + \left(H'_{m,n}\right)^2 + 2n H^2_{m,n}, \end{cases} \tag{12}$$

с "начальными условиями"

$$H_{0,0} = H_{0,1} = H_{1,0} = 1, \quad H_{1,1} = 2z. \tag{13}$$

Соответствующие рациональные решения PIV (2)

$$u_{m,n}(z) = -2z + \frac{d}{dz} \ln \frac{H_{m,n+1}(z)}{H_{m+1,n}(z)} \tag{14}$$

также удовлетворяют рекурренциям, называемым *преобразованиями Беклунда*. Это нелинейные преобразования $\tilde{u}(z) = \mathcal{R}\left(u'(z), u(z), z\right)$, переводящие решение $u(z)$ в решение $\tilde{u}(z)$ уравнения PIV, возможно, с другими коэффициентами α, β.

Рассмотрим пару преобразований Беклунда [4]

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2: \quad \tilde{u} &= \frac{(u' - \sqrt{-2\beta})^2 + (4\alpha - 4 - 2\sqrt{-2\beta})u^2 - u^2(u+2z)^2}{2u(u^2 + 2zu + u' - \sqrt{-2\beta})},\\ \mathcal{R}_3: \quad \tilde{u} &= \frac{(u' - \sqrt{-2\beta})^2 - (4\alpha + 4 + 2\sqrt{-2\beta})u^2 - u^2(u+2z)^2}{2u(u^2 + 2zu - u' + \sqrt{-2\beta})}.\end{aligned} \tag{15}$$

Оказывается, что композиция преобразований $\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_3$ переводит коэффициенты $(\alpha,\, \beta)$ в $\left(\alpha,\, -\frac{1}{2}(4 + \sqrt{-2\beta})^2\right)$, а параметры $(\theta_0,\, \theta_\infty)$ – в $(\theta_0 + 2,\, \theta_\infty)$ соответственно. Нетрудно проверить, что для рациональных решений (14) с коэффициентами $\alpha = n - m$, $\beta = -2(m+n+1)^2$ в результате получаются решения

$$\tilde{u}(z) = \mathcal{R}_6\left(u'_{m,n}(z), u_{m,n}(z), z\right) = u_{m+1,n+1}(z).$$

В терминах Ψ-функций и "уравнения по λ" (6) преобразования Беклунда отвечают левому умножению на матрицы, рациональные по $\sqrt{\lambda}$ ("одевание"лаксовой пары [8], гл. 6)

$$\tilde{\Psi} = \mathbf{R}_6(\lambda)\Psi.$$

Для преобразований (15) эти матрицы имеют вид

$$\mathbf{R}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^{1/2} + \begin{pmatrix} y & \frac{y}{2} \\ \frac{2y}{u} & 1 \end{pmatrix}\lambda^{-1/2},$$

$$\mathbf{R}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^{1/2} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{u}{2y} \\ -\frac{yw - \theta_0 - \theta_\infty}{y} & -\frac{wy - \theta_0 - \theta_\infty}{2y} \end{pmatrix}\lambda^{-1/2},$$

$$\mathbf{R}_6(\lambda) = \mathbf{R}_2(\lambda)\mathbf{R}_3(\lambda) \tag{16}$$

где постоянные по λ величины y, u и w удовлетворяют системе (7). Прямая проверка с помощью "уравнения по λ"(6) показывает эквивалентность (16) и (15).

Достаточно вычислить s_j для случая (13). Выберем $m = n = 0$, тогда из уравнений (14) и (13) находим $u_{0,0}(z) = u(z) = -2z$. Разрешая остальные уравнения (7), имеем

$$y(z) = w(z) = 1, \quad u(z) = -2z. \tag{17}$$

Подставляя величины (17) вместе с $z = 0$ в "уравнение по λ" (6), получим треугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2\lambda} & 1 \\ 0 & -\lambda - \frac{1}{2\lambda} \end{pmatrix}.$$

Тем самым, уравнение (6) решается в явном виде

$$\Psi_j(\lambda, 0) = \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} e^{\frac{\lambda^2}{2}} & \lambda^{1/2} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int\limits_\lambda^\infty \frac{e^{\frac{-\xi^2}{2}}}{\xi} d\xi \\ 0 & \lambda^{-1/2} e^{\frac{-\lambda^2}{2}} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega_j, \tag{18}$$

а интегрирование производится по лучам $\arg\lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}j$, $j = 1,\, 2,\, 3,\, 4$.

Теорема 1. *Данные монодромии s_j для "уравнения по λ" (6) с коэффициентами (17), отвечающими решению $u(z) = u_{0,0} = -2z$, имеют вид*

$$s_1 = s_3 = 0, \quad s_2 = 2\pi i, \quad s_4 = -2\pi i. \tag{19}$$

Доказательство. В силу верхней треугольности матриц Ψ_j (18) уравнения скачка (8) также имеют верхнетреугольные решения. Отсюда $S_1 = S_3 = I$, так что для нечетных $j = 1, 3$ данные монодромии равны нулю. Для вычисления S_2 и S_4 заметим, что

$$\Psi_3 = \Psi_2 S_2 = \Psi_1 S_1 S_2 = \Psi_1 S_2.$$

Тогда

$$s_2 = \left(\Psi_3 \Psi_1^{-1}\right)_{12} = \int\limits_{\infty e^{5\pi/4i}}^{\infty e^{\pi/4i}} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\xi} d\xi,$$

где контур интегрирования обходит начало координат сверху. Тем самым контур для интегральной показательной функции в этой формуле деформируется в обход начала координат в отрицательном направлении, что дает $s_2 = -2\pi i$. Аналогично вычисляется s_4. $\square$

Сформулируем теперь задачу Римана, которая будет использоваться ниже для вычисления решений уравнения PIV (14). Заметим сначала, что в силу Теоремы 1 $\Psi_1 = \Psi_2$ и $\Psi_3 = \Psi_4$, поскольку на лучах $\arg\lambda = 3\pi/4$ и $\arg\lambda = 7\pi/4$ скачки отсутствуют. Кроме того, условие сопряжения (8) можно перенести с лучей $\arg\lambda = \pi/4$ и $\arg\lambda = 5\pi/4$ на вещественную ось, что не противоречит нормировке (9).

Сделаем сначала замену переменных, учитывая большие параметры $z = O(\sqrt{n})$, $n = m \to \infty$ (5)

$$z = x\sqrt{n}, \quad \lambda = (\xi - x)\sqrt{n}, \quad \Theta = \frac{1}{2}(\xi^2 - x^2). \tag{20}$$

Введем новые матричные функции

$$\begin{aligned} Y_+(\lambda, z) &= \Psi_4(\lambda, z) \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^2}{2} + z\lambda\right)\sigma_3\right\} \lambda^{-\theta_\infty \sigma_3}, \\ Y_-(\lambda, z) &= \Psi_2(\lambda, z) \exp\left\{-\left(\frac{\lambda^2}{2} + z\lambda\right)\sigma_3\right\} \lambda^{-\theta_\infty \sigma_3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Функции Y_+ и Y_- удовлетворяют следующим условиям

1 *Матричная функция* $Y_+(\xi, x)$ *аналитична по* ξ *в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im}\xi > 0$, *а* $Y_-(\xi, x)$ *– в нижней полуплоскости* $\operatorname{Im}\xi < 0$

2
$$Y_+(\xi, x) = Y_-(\xi, x) \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i e^{-2n\Theta(\xi,x)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{22}$$

3
$$Y_\pm(\xi, x) = \left(I + O(\xi^{-1})\right) \begin{pmatrix} \xi^{2n} & 0 \\ 0 & \xi^{-2n} \end{pmatrix}, \quad \xi \to \infty$$

$Y(\xi, x)$

Здесь мы сдвинули контур сопряжения $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} + x$, поскольку матрица сопряжения аналитична в полосе $|\operatorname{Im}\xi| \le |x|$, $x = O(1)$. Отметим также, что условие нормировки 3 возникает здесь ввиду n-кратного применения преобразований Беклунда (16) к матрицам Ψ_j (18). В самом деле, в силу конструкции матриц $\mathbf{R}_2(\lambda)$ и $\mathbf{R}_3(\lambda)$ их произведение домножает $(\Psi)_{11}$ на λ, а $(\Psi)_{22}$ на λ^{-1}.

Теперь формула обращения для решения уравнения PIV приобретает более простой вид.

Теорема 2. *Пусть матрицы* $Y_\pm$ *доставляют решение задачи Римана (22), тогда функция*

$$u_{n,n}(z) = -2x\sqrt{n} - \lim_{\xi\to\infty} \left(\xi\, \partial_x Y_+(\xi, x)\right)_{12}, \quad z = x\sqrt{n}, \tag{23}$$

является решением уравнения PIV (3), отвечающим данным монодромии (19).

Доказательство. По матрицам $Y_\pm$ восстанавливаются матрицы Ψ_j, удовлетворяющие условиям (8) и (9) с данными монодромии (19). Тогда выполняется "уравнение по λ" (6) и справедлива формула обращения (11), которая совпадает с (23). □

2. Ортогональные полиномы с экспоненциальным весом

Прежде чем переходить к асимптотическому исследованию задачи Римана (22), укажем на ее связь с классическими ортогональными полиномами. Пусть $\{\mathcal{H}_k(\xi)\}_{k=1}^\infty$ – множество полиномов $\mathcal{H}_k(\xi) = \xi^k + \ldots$, ортогональных на вещественной оси с мерой $e^{-nV(\xi)}d\xi$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_j(\xi)\mathcal{H}_k(\xi)e^{-nV(\xi)}d\xi = 0, \quad j \neq k,$$

где $V(\xi) = \xi^{2l} + \ldots$ – полином четной степени. Определим матрицы

$$Y^{(q)}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_q(\xi) & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{H}_q(s)e^{-nV(s)}}{s-\xi}ds \\ \gamma_{q-1}\mathcal{H}_{q-1}(\xi) & \dfrac{\gamma_{q-1}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{H}_{q-1}(s)e^{-nV(s)}}{s-\xi}ds \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\xi \neq 0, \tag{24}$$

где постоянные γ_{q-1} являются нормировочными константами в условии ортогональности

$$\gamma_{q-1} = -2\pi i \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_{q-1}^2(s)e^{-nV(s)}ds\right)^{-1}.$$

Оказывается, что матрицы (24) доставляют решение следующей задачи Римана ([9], [5], гл. 3.2)

- $Y_+^{(q)}(\xi)$ *аналитична при* $\operatorname{Im}\xi > 0$, *а* $Y_-^{(q)}(\xi)$ *аналитична при* $\operatorname{Im}\xi < 0$
- $Y_+^{(q)}(\xi) = Y_-^{(q)}(\xi)\begin{pmatrix}1 & e^{-nV(\xi)} \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}$
- $Y_\pm^{(q)}(\xi, x) = (I + O(\xi^{-1}))\begin{pmatrix}\xi^q & 0 \\ 0 & \xi^{-q}\end{pmatrix}, \quad \xi \to \infty$

$\Bigg|\ Y^{(q)}(\xi)$

В случае $V(\xi) = \xi^2$ полиномы $\mathcal{H}_q(\xi)$ совпадают с полиномами Эрмита $H_q(\xi) = (-1)^q e^{\xi^2}\frac{d^q}{d\xi^q}e^{-\xi^2}$, а задача Римана может быть использована для вычисления асимптотики полиномов Эрмита при $q = n$, $n \to \infty$ ([5], §7.4). При этом нормировочные константы γ_q имеют вид

$$\gamma_{q-1} = \left(Y_1^{(q)}\right)_{21} = -i\frac{2^q\sqrt{\pi}n^{(q-1)/2}}{(q-1)!}, \tag{25}$$

где $Y^{(q)}(\xi) = \left(I + Y_1^{(q)}\xi^{-1} + \ldots\right)\xi^{(q-1)\sigma_3}$.

Также на этом пути воспроизводятся формулы Планшереля-Ротаха, упомянутые во введении [5], [12]. Поскольку полиномы Эрмита имеют нули только на вещественной оси, строки матрицы $Y^{(n)}$ не обращаются в нуль в верхней (нижней) полуплоскости, то есть матрицы всюду невырождены, и задача Римана однозначно разрешима.

Ситуация становится сложнее, когда экспоненциальный вес становится зависящим от параметра. В самом деле, заменяя $V(\xi)$ на $\Theta(\xi, x) = \xi^2 + 2\xi x$, рассмотрим интегралы Коши во втором столбце матрицы $Y^{(n)}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{H}_n(s,x)e^{-n(s^2+2sx)}}{s-\xi}ds = \frac{\mathcal{H}_n(-x,x)e^{-nx^2}}{2i\pi^{5/4}\sqrt{2xn}(-x-\xi)}\left(1 + O(n^{-1})\right), \quad n \to \infty.$$

Здесь мы воспользовались методом перевала, деформировав контур интегрирования так, чтобы он проходил через точку $s = -x$, $\operatorname{Im} x \neq 0$, так что выполняется условие перевала

$\partial_s(s^2+2sx)=0$. Пусть $\mathcal{H}_n(-x,x)=0$, тогда первая строка матрицы (24) становится нулевой при $\xi=-x$. Таким образом, матрицы $Y_\pm^{(n)}$ становятся вырожденными в этой точке и не дают решения задачи Римана.

Указанная ситуация является следствием теоремы Биркгофа-Гротендика о факторизации матрицы, голоморфно зависящей от параметра [8], прил. B.

3. Асимптотическое "раздевание" задачи Римана

В этом параграфе мы вычисляем решение задачи Римана (22) при $n\to\infty$. Несмотря на то, что эта задача Римана включает только верхнетреугольные матрицы, ее решение не сводится к последовательности скалярных задач сопряжения аналитических функций. Причина состоит в условии нормировки 3. В самом деле, можно было бы избавиться от степенного роста на бесконечности, введя матрицы $\tilde{Y}_\pm=Y_\pm\,\mathrm{diag}\,(z^{-2n},\,z^{2n})$. Тогда матрицы $\tilde{Y}_\pm$ приобретут стандартную нормировку на единичную матрицу $\tilde{Y}_\pm\to I$ при $\xi\to\infty$, однако появится полюс $2n$-го порядка в нуле. Это обстоятельство препятствует применению интеграла Коши к задаче сопряжения (22).

Для регуляризации на бесконечности матриц $Y_\pm$ применяется другой способ, изобретенный Перси Дейфтом и другими в [5], [6], [7]. Он состоит в применении специального параметрикса, называемого g-функцией. В нашем случае это аналитическая функция, удовлетворяющая условиям

- $g(\xi)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\ln(\xi-s)\rho(s)ds,\quad a\in\mathbb{R}\,,\quad a=O(1)$
- $g_\pm(\xi)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\ln|\xi-s|\rho(s)ds\pm\pi i\chi_{\xi\le a}\int_{\xi}^{a}\rho(s)ds$ *при* $\xi\in(-a,a)$, $\chi_{\xi\le a}$ — *характеристическая функция* $[\xi,a]$
- $g(\xi)=\ln\xi+O(\xi^{-1}),\quad \xi\to\infty$
- $e^{ng(\xi)}$ *аналитична в* $\mathbb{C}\,/[-a,a]$
- $e^{ng(\xi)}=\xi^n\left(1+O(\xi^{-1})\right),\quad \xi\to\infty$

$g(\xi)$ (26)

Функция $\rho(s)$ имеет смысл вероятностной меры $d\mu=\rho(s)ds$, минимизирующей функционал

$$\mathcal{F}=\int_{\mathbb{R}}\xi^2d\mu(\xi)+\int_{\mathbb{R}^2}\ln|\xi-s|^{-1}d\mu(\xi)d\mu(s),\quad x=\mathrm{const}.$$

Теорема 3. *(*[15]*, гл.5) При* $\partial_\xi^2\Theta(\xi,x)\ge0$ *носитель меры* $d\mu=\rho(s)ds$ *сосредоточен на отрезке* $\mathrm{supp}\,\rho\in[-a,a]$*. Имеют место соотношения*

$$2\Theta(\xi,x)+2\int_{\mathbb{R}}\ln|\xi-s|^{-1}\rho(s)ds+\ell+x^2\ge0,\quad \xi\in\mathbb{R}\,,$$

$$2\Theta(\xi,x)+2\int_{\mathbb{R}}\ln|\xi-s|^{-1}\rho(s)ds+\ell x^2\equiv0,\quad \xi\in[-a,a],$$

где

$$\ell=-2\int_{-a}^{a}\ln|\xi-s|^{-1}\rho(s)ds-\xi^2,\quad -a<\xi<a. \tag{27}$$

Определим функцию

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^2 - 2g(\xi) + \ell, \tag{28}$$

и новую кусочно-аналитическую матрицу

$$W(\xi, x) \equiv e^{n\ell\sigma_3} Y(\xi, x) e^{-ng(\xi)\sigma_3} e^{-n\ell\sigma_3}, \quad \xi \in \mathbb{C}/\mathbb{R}. \tag{29}$$

Тогда для W выполняется следующая задача Римана

- $W(\xi, x)$ *аналитична по* ξ *в* $\mathbb{C}/\mathbb{R}$
- $W_+(\xi, x) = W_+(\xi, x) \begin{pmatrix} e^{n(\varphi_+ - \varphi_-)} & e^{-n(\varphi_+ + \varphi_-)} \\ 0 & e^{-n(\varphi_+ - \varphi_-)} \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}$
- $W_\pm(\xi, x) = I + O(\xi^{-1})$, *при* $\xi \to \infty$

$\Bigg|\; W(\xi, x)$

(30)

Тем самым задача сведена к задаче Римана со стандартной единичной нормировкой на бесконечности. Здесь φ_+ и φ_-, как обычно, представляют собой граничные значения на вещественной оси из верхней и нижней полуплоскостей соответственно. Перечислим свойства этих граничных значений в виде теоремы П. Дейфта

Теорема 4. *([5], гл. 7.5). Для граничных значений функции φ (28) справедивы свойства*

1) $\dfrac{-\varphi_+ + \varphi_-}{2} = g_+(\xi) - g_-(\xi) = 2\pi i \displaystyle\int_\xi^\infty \rho(s)ds$ *при* $\xi \in \mathbb{R}$

2) $-\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\,\varphi_+ = \mathrm{Im}\, g_+(\xi) = \pi \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} \rho(s)ds - \pi$ *при* $\xi \in [-a, a]$

3) $\dfrac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = \mathrm{Re}\,\varphi = \xi^2 - g_+ - g_- + \ell \equiv 0$ *при* $\xi \in [-a, a]$

4) $\dfrac{\varphi_+ + \varphi_-}{2} = \mathrm{Re}\,\varphi = \xi^2 - g_+ - g_- + \ell \geq 0$ *при* $\xi \notin [-a, a]$

Заметим, что свойство 2 означает, что $\mathrm{Re}\,\varphi_+$ убывает при $\mathrm{Im}\,\xi \to +\infty$ в силу уравнения Коши-Римана $u_y = -v_x$, $\varphi = u+iv$. Аналогично, $\mathrm{Re}\,\varphi_-$ убывает при $\mathrm{Im}\,\xi \to -\infty$, поскольку $\mathrm{Im}\,\varphi_- = -\mathrm{Im}\,\varphi_+$.

Матрица сопряжения, фигурирующая в (30), допускает разложение на множители [5], гл. 7.6

$$\begin{pmatrix} e^{n(\varphi_+ - \varphi_-)} & e^{-n(\varphi_+ + \varphi_-)} \\ 0 & e^{-n(\varphi_+ - \varphi_-)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\varphi_-} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-n(\varphi_+ + \varphi_-)} \\ -e^{n(\varphi_+ + \varphi_-)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\varphi_+} & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Таким образом, задачу (30) можно переписать в виде

$$\Phi_+ = \Phi_- \begin{pmatrix} 0 & e^{-n(\varphi_+ + \varphi_-)} \\ -e^{n(\varphi_+ + \varphi_-)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$\Phi_\pm(\xi, x) \to I, \quad \xi \to \infty, \tag{32}$$

где

$$\Phi_\pm(\xi, x) \equiv W_\pm(\xi, x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp e^{2n\varphi} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im}\,\xi \gtrless 0. \tag{33}$$

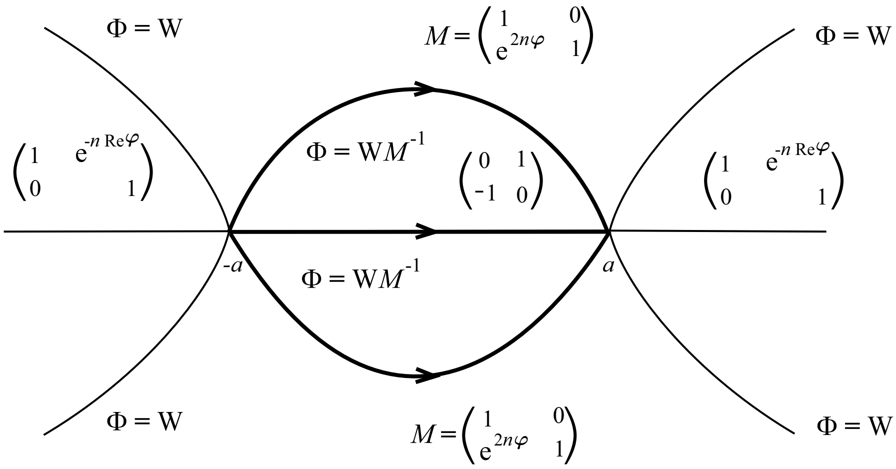

Рис. 2. Регуляризация задачи Римана (22) по Дейфту-Жу. Матрицы скачков отвечают соответствующим линиям Стокса.

В силу теоремы 4 $\varphi_+ + \varphi_- \equiv 0$ при $\xi \in [-a,a]$, а при $\xi \in \mathbb{R}/[-a,a]$ величина $\varphi_+ + \varphi_-$ неотрицательна. Поэтому задача Римана для матриц Φ и W выглядит так, как изображено на рис. 2. Нетрудно проверить, что все матрицы сопряжения за пределами "линзы" $\mathrm{Re}\,\varphi < 0$, отмеченной жирными линиями, экспоненциально близки к единичным, поскольку внедиагональные экспоненты в них малы порядка $O(e^{-n|\varphi|})$. Отдельного рассмотрения заслуживают окрестности граничных точек $\xi = a$ и $\xi = -a$. Однако оказывается, что там значения Φ аналитически продолжаются в решения Φ для внутренности "линзы" [5], гл. 7.6.

Тем самым, в главном порядке по n решение задачи Римана (32) дается матрицей Φ, удовлетворяющей модельной задаче

$$\begin{gathered}\Phi_+ = \Phi_- \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad \xi \in [-a,a],\\ \\ \Phi_\pm(\xi) \to I, \quad \xi \to \infty.\end{gathered} \tag{34}$$

Решение задачи (34) дается явной формулой [6]

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & -1\end{pmatrix}\left(\frac{\xi - a}{\xi + a}\right)^{\frac{1}{4}\sigma_3}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & -1\end{pmatrix}. \tag{35}$$

Теперь для представления главного члена асимптотики $Y(\lambda, z)$ нам осталось вычислить величины $g(\xi)$, $\rho(s)$ и a, фигурирующие в задачах (26), (30) и теоремах 3) и 4. Эти величины также даются явными формулами, следуя методике [5], §7.3. Опуская детали, приведем лишь ответы

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\pi}\sqrt{a^2 - \xi^2} + \frac{x}{\pi}\sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}}, \tag{36}$$

$$g(\xi) = -\ln\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - a^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - a^2}\right)^2. \tag{37}$$

$$a = \sqrt{2}. \tag{38}$$

Вычисления величин $\rho(\xi)$, $g(\xi)$ и a основаны на явном решении скалярной задачи Римана (26), а также на формуле обращения, вытекающей из (23). В самом деле, выполнение условий задачи (26) легко проверяется из явных формул (36) и (37).

Объединяя формулы полученные выше в этом параграфе, об асимптотиках решения задач Римана (30), (32) и (34), приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *([6]) Решение задачи Римана (22) имеет следующие асимптотики*

1) *Вне "линзы"* $\operatorname{Re}\varphi < 0$:

$$Y(\lambda, z) = e^{n\ell\sigma_3}\Phi(\xi)e^{n(2g-\ell)\sigma_3}\left(I + O(n^{-1}\right), \quad n \to \infty,$$

2) *Внутри "линзы"* $\operatorname{Re}\varphi > 0$:

$$Y(\lambda, z) = e^{n\ell\sigma_3}\Phi(\xi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\varphi} & 1 \end{pmatrix} e^{n(2g-\ell)\sigma_3}\left(I + O(n^{-1}\right), \quad n \to \infty,$$

где $\Phi(\xi)$ *определена формулой (35), а* φ *и* ℓ *- формулами (27) и (28).*

4. Формула обращения и асимптотика нулей

Главный член асимптотики решения задачи Римана, приведенный в теореме 5, позволяет вычислить асимптотику полиномов $H_{n,n}(\lambda)$ с экспоненциальным весом, отвечающих этой задаче. Начнем со случая 1), когда $|\xi| > \sqrt{2}$, то есть $|z| > \sqrt{2n}$. Согласно явному представлению (24) для матрицы Y и выражению (37) для функции g

$$H_{n,n}(z) = (Y)_{11}(z, x) = \Phi_{11}(\xi)e^{2ng(\xi)}\left(I + O(n^{-1}\right), \quad \xi = x, \quad z = x\sqrt{n},$$

что дает окончательно при $n \to \infty$ и $|x| > \sqrt{2}$

$$H_{n,n}(x\sqrt{n}) \approx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]\frac{e^{\frac{n}{4}(x-\sqrt{x^2-2})^2}}{(x-\sqrt{x^2-2})^n}. \tag{39}$$

В случае 2) при $|\xi| < \sqrt{2}$ дополнительный матричный множитель в теореме 5 дает

$$H_{n,n}(z) = (Y)_{11}(z, x) = \left(\Phi_{11,+}(\xi) + \Phi_{12,+}(\xi)e^{n\varphi_+}\right)e^{2ng_+(\xi)}\left(I + O(n^{-1}\right),$$
$$\xi = x, \quad z = x\sqrt{n}.$$

Учитывая, что $\Phi_{11,+} = \overline{\Phi_{12,+}}$ в силу формулы (35) и $g_+(\xi) = i\pi\int_x^{\sqrt{2}}\rho(s)ds$, имеем

$$H_{n,n}(x\sqrt{n}) \approx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(n\pi\int\limits_x^{\sqrt{2}}\rho(s)ds + \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}}\cos\left(n\pi\int\limits_x^{\sqrt{2}}\rho(s)ds - \frac{\pi}{4}\right)\right]\exp\left\{n\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\ln|x-s|\rho(s)ds\right\}. \tag{40}$$

Из асимптотик (39) и (40) следует, что нули полиномов $H_{n,n}(z)$ сосредоточены в области $|z| < \sqrt{2n}$. Их расположение определяется занулением квадратной скобки в формуле (40)

$$\operatorname{tg}\left(n\pi\int\limits_x^{\sqrt{2}}\rho(s)ds + \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Вычисляя интеграл в аргументе тангенса, имеем из выражения для $\rho(\xi)$ (36)

$$\pi\int\limits_x^{\sqrt{2}}\rho(s)ds = \frac{3}{2}x\sqrt{2-x^2} + (x\sqrt{2}-1)\operatorname{Arctg}\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}. \tag{42}$$

Приравнивая вещественные и мнимые части в (41), получим в итоге

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,\left(\frac{3}{2}x\sqrt{2-x^2}+(x\sqrt{2}-1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)=\frac{1}{n}\left(\mathrm{Re}\;\mathrm{arctg}\,\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+\pi j\right),\\
&\mathrm{Im}\,\left(\frac{3}{2}x\sqrt{2-x^2}+(x\sqrt{2}-1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)=\frac{1}{n}\left(\mathrm{Im}\;\mathrm{arctg}\,\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}+\pi k\right),
\end{aligned}\tag{43}$$

где $j,k\in\mathbb{Z}$.

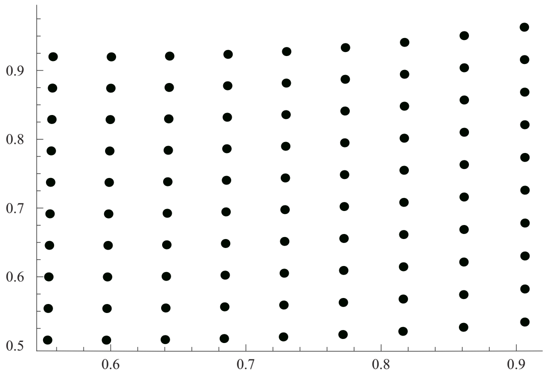

Рис. 3. Численный пример вычисления нулей в первом квадранте $x=z/\sqrt{n}$ по формулам (43) при $n=30$, $21\le j,\ k\le 30$

Замечание 1. *Нетрудно проверить, что формулы (39) и (40) являются обобщением асимптотик順Планшереля-Ротаха* [14]*, упомянутых во введении. В самом деле, при вещественном* z *и при* $m=0$ *имеем из (12)* $H_{n,0}(z)=H_n(z)$*, где* $H_n(z)$ *— классические полиномы Эрмита. Сравнение формул Планшереля-Ротаха с (39) выполнено в монографии П. Дейфта* [5]*. Вычисление асимптотик нулей полиномов* $H_{m,n}(z)$ *при произвольных* $m,n\to\infty$ *и* $m-n=O(1)$ *может быть, по-видимому, выполнено методом, подобным изложенному выше.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Bertola, T. Bothner *Zeros of large degree Vorob'ev-Yablonski polynomials via a Hankel determinant identity* // arXiv:1401.1408v1
2. R. J. Buckingham and P. D. Miller *Large-degree asymptotics of rational Painleve-II functions: noncritical behaviour* // Nonlinearity 2014. V. 27. P. 2498–2578.
3. Y. Chen and M.V. Feigin *Painlevé IV and degenerate Gaussian unitary ensembles* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39 P. 12381–12393.
4. P.A. Clarkson *Special Polynomials Associated with Rational Solutions of the Painlevé Equations and Applications to Soliton Equations* // Comp. Methods and Function Theory 2006 V. 6 No. 2. P. 329–401.
5. P. Deift *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach* // Courant Lecture Notes: New York Univ. NY, 1999.
6. P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory* // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. No. 11. P. 1335–1425
7. P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou *Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights* // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. No. 12. P. 1491–1552

8. A.S. Fokas, A.R. Its, A.A. Kapaev and V.Yu. Novokshenov *Painlevé Transcendents. The Riemann-Hilbert Approach.* Amer. Math. Soc. [Math. Surveys and Monographs] V. 128 Providence, RI: 2006
9. A. Fokas, A. Its and A. Kitaev *Discrete Painlevé equations and their appearance in quantum gravity* // Comm. Math. Phys. 1991. V. 142 No. 2. P. 313–344.
10. P.J.Forrester *Log-gases and random matrices.* London Math. Soc. Monographs, V. 34. Princeton University Press: 2010.
11. A.A. Kapaev, E. Hubert *A note on the Lax pairs for Painlevé equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. No. 46. P. 8145–8156.
12. A.P. Magnus *Painleve-type differential equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials* // J. Comput. Appl. Math. 1995. V. 57. P. 215—237.
13. V.Yu.Novokshenov and A.A.Shchelkonogov *Double Scaling Limit in the Painlevé IV Equation and Asymptotics of the Okamoto Polynomials*, Advances in the Mathematical Sciences, AMS Translations // 2014. V. 233. P. 199–210.
14. M. Plancherel, W. Rotach *Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite* // Commentarii Math. Helvetici 1929. V. 1 P. 227–254.
15. E.B. Saff, V. Totik *Logarithmic Potentials with External Fields* // "Grundlehren der mathematischen Wissenschaften V. 317. Springer: 1997.
16. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* М.: Физматгиз, 1962.
17. M. Noumi and Y. Yamada *Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials* // Nagoya Math. J. 1999. V. 153. P. 53–86.

Виктор Юрьевич Новокшенов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `novik53@mail.ru`

Алексей Александрович Щелконогов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К.Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `alexey91-91@mail.ru`