ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 29-38.

УДК 517.518

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО КЛАССА ТАКАГИ

О.Е. ГАЛКИН, С.Ю. ГАЛКИНА

Аннотация. Функции из показательного класса Такаги по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. Они имеют один вещественный параметр v и определяются с помощью ряда $T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x)$, где $T_0(x)$ — расстояние между точкой $x \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой. При различных значениях параметра v мы изучаем область определения, непрерывность, свойство Гёльдера, дифференцируемость и вогнутость таких функций. Приводя известные результаты и доказывая недостающие факты, мы даем полное описание этих свойств для каждого значения параметра.

Ключевые слова: непрерывность, дифференцируемость, односторонняя производная, непрерывная нигде не дифференцируемая функция Такаги, класс Такаги, показательный класс Такаги, область определения, условие Гёльдера, глобальный максимум, вогнутость.

Mathematics Subject Classification: 26A27, 26A15, 26A16, 26A51

1. Введение

Функция Такаги $T(x)$ была определена Т. Такаги в 1903 г. в работе [1], где он также доказал, что $T(x)$ на $\mathbb{R}$ всюду непрерывна и нигде не дифференцируема. Эту функцию можно задать с помощью ряда

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} T_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $T_0(x) = |[x+1/2] - x| = |\{x+1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z})$ — расстояние между точкой $x \in \mathbb{R}$ и ближайшей к ней целой точкой, $[x]$ — целая часть числа x, $\{x\}$ — дробная часть числа x.

Хата и Ямагути [2, Sec. 2] заменили в определении функции Такаги последовательность коэффициентов $\{1/2^n\}$ на произвольную последовательность констант $\{c_n\}$ и получили новое семейство функций, назвав его *классом Такаги*.

Объектом нашего исследования являются принадлежащие более узкому семейству вещественные функции T_v, зависящие от параметра v и определяемые равенством

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n T_0(2^n x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Заметим, что при $v = 0$ функция $T_v(x)$ совпадает с $T_0(x)$, а при $v = 1/2$ получится сама функция Такаги: $T_{1/2}(x) = T(x)$.

O.E. Galkin, S.Yu. Galkina, On properties of functions in exponential Takagi class.

© Галкин О.Е., Галкина С.Ю. 2015.

Работа поддержана РФФИ (гранты 13-02-12155 офи_м, 14-01-00516 А).

Поступила 8 июля 2015 г.

Поскольку в данном случае коэффициенты $c_n = v^n$ зависят от n по показательному закону, то множество функций вида (1), где $v \in (-1;1)$, будем называть *показательным классом Такаги.*

Функция Такаги и её обобщения применяются в различных областях математики, например, в математическом анализе, теории вероятностей, теории чисел и других. Этим функциям посвящено большое количество публикаций, которое продолжает увеличиваться. В частности, множество интересных результатов и ссылок имеется в обзорах [3] и [4].

В данной работе мы изучаем такие характеристики функций из показательного класса Такаги, как область определения, непрерывность, условие Гёльдера, дифференцируемость, вогнутость. Приводя известные результаты и доказывая недостающие факты, мы даем полное описание этих свойств функций T_v для каждого значения параметра v. Каждый раздел статьи посвящён тому или иному свойству, указанному в его заголовке. В последнем разделе представленные результаты проиллюстрированы графически.

2. Область определения и непрерывность

Двоично-рациональными числами (или точками) будем называть числа вида $p/2^k$, где $p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 1. *1) Если $|v| < 1$, то ряд (1), задающий функцию $T_v(x)$, сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$, его сумма $T_v(x)$ непрерывна, и $|T_v(x)| \leqslant 1/(2-2|v|)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.*

2) Если $|v| \geqslant 1$, то ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда x — двоично-рациональная точка. При этом на множестве двоично-рациональных точек функция $T_v(x)$ всюду разрывна.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $v \neq 1/2$, x – двоично-рациональная точка, имеющая двоичную запись $x = \ldots,x_1x_2\ldots x_m$, и $N > m$, где $m, N \in \mathbb{N}$. Тогда*

1) Если $v \in (-1;1)$, и число $h \in [0;2^{-N})$ имеет двоичную запись $h = 0,\underbrace{0\ldots0}_{N}h_{N+1}h_{N+2}\ldots$, то выполняется равенство

$$T_v(x+h) - T_v(x) = h \cdot \Big(\frac{1-2^Nv^N}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n\Big) + v^N T_v(2^N h).$$

2) Выполняется равенство

$$T_v(x+2^{-N}) - T_v(x) = 2^{-N}\big((1-2^Nv^N)/(1-2v) - 2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n\big).$$

Доказательство леммы 1. 1) Сначала заметим, что для любого числа y, имеющего двоичную запись $0,y_1y_2\ldots$, верна цепочка равенств:

$$T_0(0,y_1y_2\ldots) = T_0(y) = \begin{cases} y & \text{при } y_1 = 0 \\ 1-y & \text{при } y_1 = 1 \end{cases} = y_1 + (1-2y_1)\cdot 0,y_1y_2\ldots.$$

Используя эти выкладки, периодичность функции T_0 и равенство $x + h = \ldots,x_1\ldots x_m\underbrace{0\ldots0}_{N-m}h_{N+1}h_{N+2}\ldots$, получаем:

$$T_v(x+h) = T_v(\ldots,x_1x_2\ldots x_m\underbrace{0\ldots0}_{N-m}h_{N+1}h_{N+2}\ldots) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} v^n T_0(0,x_{n+1}\ldots x_m\underbrace{0\ldots0}_{N-m}h_{N+1}\ldots) +$$

$$+\sum_{n=m}^{N-1} v^n T_0(0,\underbrace{0\ldots0}_{N-n}h_{N+1}h_{N+2}\ldots)+\sum_{n=N}^{\infty} v^n T_0(0,h_{n+1}h_{n+2}\ldots)=$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1} v^n(x_{n+1}+(1-2x_{n+1})\cdot 0,x_{n+1}\ldots x_m\underbrace{0\ldots0}_{N-m}h_{N+1}h_{N+2}\ldots)+$$

$$+\sum_{n=m}^{N-1} v^n\cdot 0,\underbrace{0\ldots0}_{N-n}h_{N+1}h_{N+2}\ldots+v^N T_v(2^N h).$$

Полагая здесь $h=0$, находим:

$$T_v(x)=\sum_{n=0}^{m-1} v^n(x_{n+1}+(1-2x_{n+1})\cdot 0,x_{n+1}\ldots x_m).$$

Вычитая два последних равенства, получаем:

$$T_v(x+h)-T_v(x)=\sum_{n=0}^{m-1} v^n(1-2x_{n+1})\cdot 0,\underbrace{0\ldots0}_{N-n}h_{N+1}h_{N+2}\ldots+$$

$$+\sum_{n=m}^{N-1} v^n\cdot 0,\underbrace{0\ldots0}_{N-n}h_{N+1}h_{N+2}\ldots+v^N T_v(2^N h)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} v^n\cdot 2^n h-2\sum_{n=0}^{m-1} v^n x_{n+1}\cdot 2^n h+v^N T_v(2^N h)=$$

$$=h\cdot\Big((1-2^N v^N)/(1-2v)-2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n\Big)+v^N T_v(2^N h).$$

2) Если двоично-рационально не только число x, но и h, то ряды для $T_v(x)$ и $T_v(x+h)$ содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых, поэтому рассуждения п. 1) верны при всех $v\neq 1/2$. Заменив N на $N-1$, применим эти рассуждения для случая $h=2^{-N}=0,\underbrace{0\ldots0}_{N-1}1$. Учитывая, что $T_v(1/2)=1/2$, получим:

$$T_v(x+2^{-N})-T_v(x)=2^{-N}\cdot\Big(\frac{1-2^{N-1}v^{N-1}}{1-2v}-2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n\Big)+v^{N-1}T_v(2^{-1})=$$

$$=2^{-N}\cdot\Big((1-2^N v^N)/(1-2v)-2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n\Big).$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. 1) При $|v|<1$ равномерная сходимость ряда (1) вытекает из признака Вейрштрасса, а непрерывность его суммы $T_v(x)$ следует из теоремы Вейрштрасса и непрерывности слагаемых. Оценка $|T_v(x)|\leqslant 1/(2-2|v|)$ следует из неравенств

$$|T_v(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|v|^n|T_0(2^n x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|v|^n/2=1/(2-2|v|).$$

2) Пусть $|v|\geqslant 1$.

2а) Сначала покажем, что если x не является двоично-рациональной точкой, то ряд (1) расходится. В этом случае двоичная запись $x = \ldots,x_1x_2\ldots x_n\ldots$ непериодична. Поэтому существует строго возрастающая последовательность номеров $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, таких что $x_{n_k+1} = 0$, и $x_{n_k+2} = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$T_0(2^{n_k}x) = T_0(0{,}x_{n_k+1}x_{n_k+2}\ldots) = 0{,}x_{n_k+1}x_{n_k+2}\ldots \geqslant 0{,}01_2 = 1/4.$$

Отсюда $|v^{n_k}T_0(2^{n_k}x)| \geqslant |v^{n_k}|/4 \geqslant 1/4$, поэтому общий член ряда (1) не стремится к нулю, и ряд расходится.

Если же x — двоично-рациональная точка, то $x = p/2^m$, где p — целое, m — целое неотрицательное. Поэтому при $n \geqslant m$ будет $T_0(2^nx) = T_0(2^{n-m}p) = 0$. Значит ряд (1) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых и поэтому сходится в точке x.

2б) Теперь покажем, что при $|v| \geqslant 1$ функция T_v на множестве двоично-рациональных точек x всюду разрывна. Пусть x имеет двоичную запись $x = \ldots,x_1x_2\ldots x_m$. Тогда по п. 2) леммы 1 при $N > m$ выполняется равенство

$$T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x) = (2^{-N} - v^N)/(1 - 2v) - 2^{1-N}\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n.$$

Следовательно, разность $T_v(x + 2^{-N}) - T_v(x)$ не стремится к нулю при $N \to \infty$, а значит функция T_v разрывна.

Теорема доказана. □

Замечание. *1) Отметим, что функция T_0 на $\mathbb{R}$ четна, имеет период 1, удовлетворяет тождеству $T_0(1-x) = T_0(x)$. Кроме того, $T_0(x) = x$ при $x \in [0; 1/2]$ и $T_0(x) = 1-x$ при $x \in [1/2; 1]$. Поэтому функция T_v на области определения также четна, имеет период 1 и удовлетворяет тождеству $T_v(1-x) = T_v(x)$.*

2) В случае $|v| > 1$ из п. 2б) доказательства теоремы 1 следует, что при $N \to \infty$ разность $T_v(x+2^{-N})-T_v(x)$ стремится к бесконечности, поэтому на множестве двоично-рациональных чисел функция T_v неограничена в любом интервале.

3) Простой результат п. 1) теоремы добавлен для сопоставления с результатом п. 2).

3. Условия Липшица и Гельдера

3.1. При $1/2 < |v| < 1$, как следует из результатов работы К. Спарриер [5, Proposition 2.1.3], функция T_v на $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\log_2(1/|v|)$.

3.2. При $|v| = 1/2$ из результатов работы Шидфара и Сабетфахри [6, p. 375] вытекает, что функция T_v на $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем из интервала $(0; 1)$.

3.3. В случае $|v| < 1/2$ верно следующее простое утверждение.

Теорема 2. *При $|v| < 1/2$ функция T_v удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Из равенства (1) вытекает неравенство:

$$|T_v(x) - T_v(y)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|v|^n|T_0(2^nx) - T_0(2^ny)| \quad \text{при всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, используя оценку $|T_0(2^nx) - T_0(2^ny)| \leqslant |2^nx - 2^ny|$, получаем:

$$|T_v(x) - T_v(y)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|v|^n2^n|x - y| = |x - y|/(1 - 2|v|).$$

Следовательно, функция T_v удовлетворяет условию Липшица. □

4. Функциональное уравнение

4.1. Из результатов де Рама [7] следует, что при каждом $v \in (-1;1)$ функция T_v является единственным ограниченным решением функционального уравнения

$$y(x) = v \cdot y(2x) + T_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

4.2. Хата и Ямагути [8, p. 335] показали, что в случае $v = 1/4$ выполняется равенство

$$T_v(x) = T_{1/4}(x) = 2(x - x^2) \text{ при } x \in [0;1]. \tag{3}$$

В истинности этого равенства можно убедиться и непосредственной подстановкой функции (3) в функциональное уравнение (2).

5. Дифференцируемость

5.1. При $v = 1/2$, как уже было отмечено во введении, функция $T_v(x)$ совпадает с функцией Такаги $T(x)$, поэтому нигде не дифференцируема на $\mathbb{R}$ (см. [1]).

5.2. При $v = 1/4$, как следует из равенства (3) и периодичности $T_v(x)$, эта функция дифференцируема во всех точках $x \in \mathbb{R}$, кроме целочисленных.

5.3. При $v = 0$ функция T_v совпадает с функцией T_0, поэтому она дифференцируема во всех точках $x \in \mathbb{R}$, кроме полуцелых.

5.4. При $1/2 \leq |v| < 1$ из теоремы Коно [9, Theorem 2] о функциях класса Такаги следует, что функция T_v не дифференцируема ни в одной точке из $\mathbb{R}$.

5.5. При $|v| < 1/2$ из той же теоремы Коно [9, Theorem 2] следует, что функция T_v дифференцируема почти всюду на $\mathbb{R}$. Этот результат можно уточнить следующим образом:

а) Из результатов К. Спарриер [5, Proposition 1.1.2] следует, что при $|v| < 1/2$ функция T_v на $\mathbb{R}$ дифференцируема во всех точках, не являющихся двоично-рациональными.

б) Мандельброт в [10, Sec. A.1.2, p. 247] без доказательства отметил, в частности, что при $0 < v < 1/2$ и $v \neq 1/4$ функция T_v во всех точках из $\mathbb{R}$ имеет односторонние производные $T_v'(x \pm 0)$, которые различаются в двоично-рациональных точках и совпадают в остальных точках. Мы докажем следующий результат, согласующийся с этими фактами:

Теорема 3. *1) При $0 < |v| < 1/2$ в любой двоично-рациональной точке, имеющей двоичную запись $x = 0{,}x_1x_2\ldots x_m$, существуют односторонние производные $T_v'(x \pm 0) = \lim_{h\to+0}(T_v(x \pm h) - T_v(x))/h$, и выполняются равенства*

$$T_v'(x+0) = \frac{1}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n, \tag{4}$$

$$T_v'(x-0) = \frac{1}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n + 2^m v^{m-1}\frac{1-4v}{1-2v} \text{ при } x \notin \mathbb{Z},$$

$$T_v'(x-0) = -\frac{1}{1-2v} \text{ при } x \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

2) При $0 < |v| < 1/2$ и $v \neq 1/4$ функция T_v не дифференцируема в двоично-рациональных точках из $\mathbb{R}$.

Доказательство. 1) Сначала докажем утверждение п. 1).

1а) По любому числу $h \in (0; 1/2^m)$ можно подобрать натуральное $N = N(h)$ так, что $2^{-N-1} \leqslant h < 2^{-N}$. Тогда, используя оценку из п. 1) теоремы 1, получим:

$$|v^N T_v(2^N h)/h| \leqslant |v|^N/(2(1-|v|)h) = 2^{-N\log_2 1/|v|}/(2h(1-|v|)) \leqslant$$
$$\leqslant h^{\log_2 1/|v|}/(2h(1-|v|)) = h^{\log_2 1/|2v|}/(2(1-|v|)).$$

Отсюда, поскольку $\log_2 1/|2v| > 0$, видим, что $v^N T_v(2^N h)/h \to 0$ при $h \to 0$.

Теперь из п. 1) леммы 1 следует равенство (4).

1б) При $x \in \mathbb{Z}$ равенство (5) следует из равенства (4), поскольку в силу периодичности и четности функции $T_v'(x-0) = T_v'(-x-0) = -T_v'(x+0)$.

1в) Пусть $x \notin \mathbb{Z}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_m = 1$ в двоичной записи $x = \ldots,x_1x_2\ldots x_m$. Тогда, воспользовавшись разложением $h = 0,\underbrace{0\ldots0}_{N}h_{N+1}h_{N+2}\ldots$, получаем:

$$x - h = \ldots,x_1\ldots x_{m-1}0\underbrace{1\ldots1}_{N-m}\tilde{h}_{N+1}\tilde{h}_{N+2}\ldots = \tilde{x} + \tilde{h},$$

где $\tilde{x} = \ldots,x_1\ldots x_{m-1}0\underbrace{1\ldots1}_{N-m}$, $\tilde{h} = 0,\underbrace{0\ldots0}_{N}\tilde{h}_{N+1}\tilde{h}_{N+2}\ldots = 2^{-N} - h$, $\tilde{h}_n = 1 - h_n$ при $n = N+1, N+2, \ldots$.

Далее воспользуемся утверждением п. 1) леммы 1, заменив в нем x на $\tilde{x}$, h на $\tilde{h}$, m на N:

$$T_v(x-h) - T_v(\tilde{x}) = T_v(\tilde{x}+\tilde{h}) - T_v(\tilde{x}) =$$

$$= \tilde{h}\cdot\Big(\frac{1-2^Nv^N}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{N}(2v)^{n-1}\tilde{x}_n\Big) + v^NT_v(2^N\tilde{h}) =$$

$$= (2^{-N}-h)\cdot\Big(\frac{1-2^Nv^N}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{m-1}(2v)^{n-1}x_n - 2\sum_{n=m+1}^{N-1}(2v)^{n-1}\Big) + v^NT_v(2^Nh).$$

При $h = 0$ из этого равенства получаем:

$$T_v(x) - T_v(\tilde{x}) = 2^{-N}\cdot\Big(\frac{1-2^Nv^N}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{m-1}(2v)^{n-1}x_n - 2\sum_{n=m+1}^{N-1}(2v)^{n-1}\Big).$$

Вычитая из последнего равенства предпоследнее, находим:

$$T_v(x) - T_v(x-h) = h\cdot\Big(\frac{1-2^Nv^N}{1-2v} - 2\sum_{n=1}^{m-1}(2v)^{n-1}x_n - 2\sum_{n=m+1}^{N}(2v)^{n-1}\Big) - v^NT_v(2^Nh).$$

Отсюда, так как $x_m = 1$, получаем:

$$T_v(x) - T_v(x-h) = h\cdot\Big(\frac{1-2^Nv^N}{1-2v} -$$

$$-\frac{2^{m+1}v^m - 2^{N+1}v^N}{1-2v} + 2^mv^{m-1} - 2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n\Big) - v^NT_v(2^Nh).$$

Теперь, устремляя h к нулю и пользуясь соотношением $v^NT_v(2^Nh)/h \to 0$ из п. 1а), находим:

$$T_v'(x-0) = 1/(1-2v) + 2^mv^{m-1}(1-4v)/(1-2v) - 2\sum_{n=1}^{m}(2v)^{n-1}x_n,$$

что и требовалось.

2) Из доказанных в п. 1) равенств следует, что $T_v'(x-0) \neq T_v'(x+0)$ при $0 < |v| < 1/2$, $v \neq 1/4$ и двоично-рациональном x. Поэтому функция T_v не дифференцируема ни в одной двоично-рациональной точке.

Теорема доказана. □

Пример. *С помощью доказанных в теореме формул можно, например, вычислить, что при* $v \in (0;1/4)$ *в точках* $x = 1/4$ *и* $x = 3/4$ *самый большой скачок производной* $T_v'(x+0) - T_v'(x-0) = 6 - 4\sqrt{2} \approx 0{,}343$ *получится для* $v = 1/2 - \sqrt{2}/4 \approx 0{,}146$ *(рис. 1).*

6. Глобальный максимум

6.1. При $v = 1/2$ точки глобальных и локальных экстремумов функции $T_{1/2}(x) = T(x)$ нашел Кахан. В частности, он доказал следующее утверждение [11, p. 54]:

Теорема (Кахан, 1959). *Множество точек, в которых функция Такаги достигает своего глобального максимума, равного* $4/3$, *есть множество точек, имеющих двоичную запись* $x = \ldots, x_1x_2\ldots x_n\ldots$ *и удовлетворяющих условию* $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$ *для* $k = 0, 1, \ldots$.

Изложение дальнейших результатов исследований локальных экстремумов и множеств уровня функции Такаги можно найти в обзорах [3], [4] и работе [14].

6.2. При $v = 1/\sqrt{2}$ из результатов работы [12, Лемма 5] вытекает, что глобальный максимум функции T_v равен $(2+\sqrt{2})/3$, и на отрезке $[0;1]$ достигается в двух точках: $1/3$ и $2/3$.

6.3. Табор и Табор получили формулу для глобальных максимумов функций T_{v_n} на $\mathbb{R}$ для некоторой последовательности $\{v_n\}$. С учетом наших обозначений, их результат [13, Theorem 3.1] может быть представлен так:

Теорема (Табор и Табор, 2009). *Для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *обозначим через* v_n *единственное положительное решение уравнения* $2v+4v^2+\ldots+2^nv^n = 1$. *Пусть* $C_v = 1/(1-(4v-1)^{\log_{2v} v})$ *при* $v \in (1/4; 1/2)$. *Тогда*

1) $v_1 = 1/2$, *последовательность* $\{v_n\}$ *убывает и сходится к* $1/4$.

2) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} T_{1/4}(x) = 1/2 = \lim\limits_{v\to 1/4+0} C_v$; $\quad \max\limits_{x\in\mathbb{R}} T_{1/2}(x) = 2/3 = \lim\limits_{v\to 1/2-0} C_v$.

3) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} T_{v_n}(x) = C_{v_n}$ *для* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

6.4. Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема о достижении функциями T_v максимума в точке $1/2$.

Теорема 4. *1) При* $v \in [-1/2; 1/4]$ *функция* T_v *в точке* $1/2$ *имеет глобальный максимум, равный* $1/2$.

2) При $v \in (-1; -1/2) \cup (1/4; 1)$ *функция* T_v *в точке* $1/2$ *не имеет глобального максимума.*

3) При $v \in [0; 1/4]$ *и целых* $n \geqslant 0$ *функции*

$$S_{v,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} v^k T_0(2^k x)$$

в точке $1/2$ *имеют глобальный максимум, равный* $1/2$.

Доказательство. 1) Рассмотрим отдельно случаи $v \in [-1/2; 0)$ и $v \in [0; 1/4]$.

1а) При $v \in [-1/2; 0)$ функция $F_v(x) = T_0(x) + vT_0(2x)$ является неотрицательной на $\mathbb{R}$. Кроме того, из равенства (1), определяющего функцию T_v, получаем:

$$T_v(x) = T_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+1} F_v(2^{2k+1}x).$$

Отсюда, так как $v < 0$, а $F_v(x) \geqslant 0$, то $T_v(x) \leqslant T_0(x) \leqslant 1/2$. Поскольку $T_v(1/2) = 1/2$, то $1/2$ — точка глобального максимума функции T_v.

1б) Пусть теперь $v \in [0; 1/4]$. Если $x \in [0; 1]$, то из представления (1) функции T_v и формулы (3) следуют соотношения: $T_v(x) \leqslant T_{1/4}(x) = 2(x - x^2) \leqslant 1/2 = T_v(1/2)$. Для остальных x неравенство $T_v(x) \leqslant T_v(1/2)$ следует из перидичности функции T_v. Поэтому $1/2$ — точка глобального максимума.

2) При $v = 1/2$ из теоремы Кахана (см. п. 6.1) следует, что $1/2$ не входит в число точек глобального максимума функции $T_v(x) = T(x)$.

При $v \neq 1/2$, $v \in (-1;-1/2) \cup (1/4;1)$ достаточно показать, что для некоторого натурального N выполняется неравенство $T_v(1/2 + 2^{-N}) > T_v(1/2)$.

По лемме 1 при $x = 1/2 = 0{,}1_2$ и $m = 1$ имеем:

$$T_v(1/2 + 2^{-N}) = 2^{-N}\big((1 - 2^N v^N)/(1 - 2v) - 2\big) = 2^{-N}(4v - 1 - 2^N v^N)/(1 - 2v).$$

Следовательно, для $v \in (-1;-1/2)$ условие $T_v(1/2 + 2^{-N}) > T_v(1/2)$ будет выполняться при достаточно больших нечетных N; а для $v \in (1/4;1)$ и $v \neq 1/2$ это условие будет выполняться при всех достаточно больших натуральных N.

3) При $v \in [0;1/4]$ из определения функции $S_{v,n}$ и уже доказанного утверждения пункта 1) имеем: $S_{v,n}(x) \leqslant T_v(x) \leqslant 1/2 = S_{v,n}(1/2)$. Значит, при таких v в точке $1/2$ функции $S_{v,n}$ имеют глобальный максимум. □

7. Вогнутость на отрезке [0;1]

7.1. Имеет место следующее утверждение о вогнутости функций T_v на отрезке $[0;1]$.

Теорема 5. *Функции T_v на отрезке $[0;1]$ вогнуты при $v \in [0;1/4]$ и не являются вогнутыми при $v \in (-1;0) \cup (1/4;1)$.*

Доказательство. 1) Покажем, что для любого $v \in [0;1/4]$ функция T_v вогнута, то есть при всех $x, y \in [0;1]$ и $\alpha \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$T_v(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha T_v(x) + (1-\alpha)T_v(y). \tag{6}$$

Так как $T_v(x)$ есть поточечный предел функций $S_{v,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} v^k T_0(2^k x)$ при $n \to \infty$, то для доказательства вогнутости T_v достаточно доказать вогнутость функций $S_{v,n}$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Воспользуемся для этого индукцией по n.

При $n = 0$ функция $S_{v,n}(x) = T_0(x)$, очевидно, вогнута на $[0;1]$.

Пусть функция $S_{v,n}$ вогнута на $[0;1]$. Покажем, что $S_{v,n+1}$ также вогнута на $[0;1]$, то есть для всех $x, y \in [0;1]$ и $\alpha \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$S_{v,n+1}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha S_{v,n+1}(x) + (1-\alpha)S_{v,n+1}(y). \tag{7}$$

Рассмотрим три случая: а) $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1/2$; б) $1/2 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$; в) $0 \leqslant x < 1/2 < y \leqslant 1$.

а) Пусть $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1/2$. Так как

$$S_{v,n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} v^k T_0(2^k x) = T_0(x) + v S_{v,n}(2x),$$

то соотношение (7) равносильно неравенству

$$T_0(\alpha x + (1-\alpha)y) + v S_{v,n}(\alpha \cdot 2x + (1-\alpha) \cdot 2y) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha T_0(x) + (1-\alpha)T_0(y) + v(\alpha S_{v,n}(2x) + (1-\alpha)S_{v,n}(2y)),$$

это неравенство выполнено в силу вогнутости функций T_0 и $S_{v,n}$ на отрезке $[0;1]$.

б) Пусть $1/2 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. Тогда $0 \leqslant 1 - y \leqslant 1 - x \leqslant 1/2$. Заменив в неравенстве (7) x на $1 - y$, y на $1 - x$, α на $1 - \alpha$ и воспользовавшись тождеством $S_{v,n+1}(t) = S_{v,n+1}(1-t)$ $(t \in \mathbb{R})$, получим необходимое соотношение.

в) Рассмотрим оставшийся случай $0 \leqslant x < 1/2 < y \leqslant 1$. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $\alpha x + (1-\alpha)y$ лежит на отрезке $[0;1/2]$.

Подберем число $\beta \in (0;1)$ так, что $\alpha x + (1-\alpha)y = \beta x + (1-\beta) \cdot 1/2$. Для этого, очевидно, надо взять $\beta = (1/2 - \alpha x - (1-\alpha)y)/(1/2 - x)$.

Поскольку $y > 1/2$, то $\beta < (1/2 - \alpha x - (1-\alpha) \cdot 1/2)/(1/2 - x) = \alpha$.

В силу результата пункта а) функция $S_{v,n+1}$ вогнута на отрезке $[0;1/2]$, поэтому

$$S_{v,n+1}(\alpha x + (1-\alpha)y) = S_{v,n+1}(\beta x + (1-\beta) \cdot 1/2) \geqslant$$

$$\geqslant \beta S_{v,n+1}(x) + (1-\beta)S_{v,n+1}(1/2) = S_{v,n+1}(1/2) - \beta(S_{v,n+1}(1/2) - S_{v,n+1}(x)).$$

Согласно п. 1) теоремы 4, при $v \in [0;1/4]$ выполнены неравенства $S_{v,n+1}(x) \leqslant S_{v,n+1}(1/2)$ и $S_{v,n+1}(y) \leqslant S_{v,n+1}(1/2)$. Учитывая их, а также неравенство $\beta < \alpha$, получаем условие вогнутости функции $S_{v,n+1}$:

$$S_{v,n+1}(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant S_{v,n+1}(1/2) - \alpha(S_{v,n+1}(1/2) - S_{v,n+1}(x)) =$$
$$= \alpha S_{v,n+1}(x) + (1-\alpha)S_{v,n+1}(1/2) \geqslant \alpha S_{v,n+1}(x) + (1-\alpha)S_{v,n+1}(y).$$

2) При $v \in (-1;0)$ функция T_v на отрезке $[0;1]$ не является вогнутой, поскольку $T_v(1/4) = T_0(1/4) + vT_0(1/2) = 1/4 + v/2 < 1/4$, а значит при $x = 0$, $y = 1/2$, $\alpha = 1/2$ условие вогнутости (6) нарушается.

3) Остается показать, что при $v \in (1/4;1)$ функция T_v на отрезке $[0;1]$ не вогнута. Так как согласно п. 2) теоремы 4 точка $1/2$ не является точкой глобального максимума, то при некотором $x_0 \in [0;1]$ будет $T_v(x_0) > T_v(1/2)$. Тогда $T_v(1-x_0) = T_v(x_0) > T_v(1/2)$. Поэтому при $x = x_0$, $y = 1 - x_0$, $\alpha = 1/2$ условие вогнутости (6) нарушается.

Что и требовалось доказать. ☐

7.2. Отметим также результат Табора и Табора [13, Corollary 2.1], которые установили, что при $v \in [1/4, 1/2]$ функции T_v являются $(1, \log_2(1/v))$ – полувыпуклыми, то есть удовлетворяют неравенствам

$$T_v\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{T_v(x) + T_v(y)}{2} + |x-y|^{\log_2(1/v)}; \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

8. Иллюстрация представленных результатов

Здесь мы проиллюстрируем представленные в работе результаты на примере функций T_v для $v = 0{,}146$ и $v = -0{,}64$.

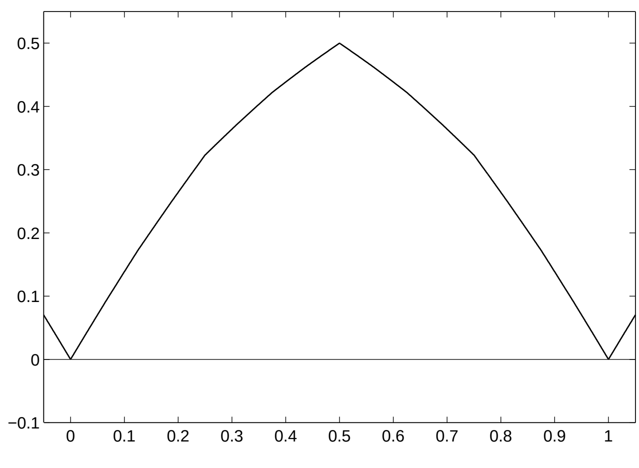

Рис. 1.

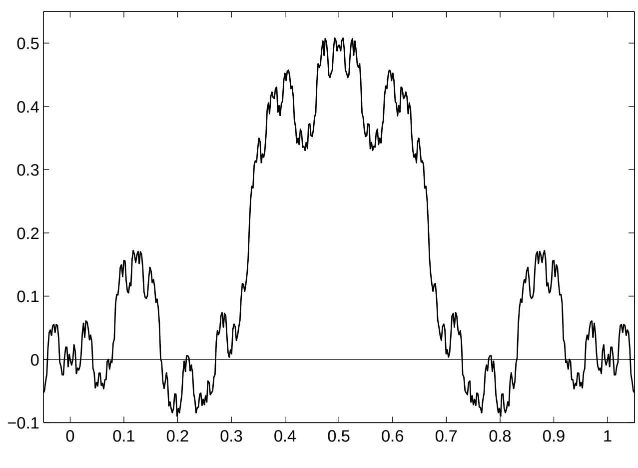

Рис. 2

Функция $y = T_{0{,}146}(x)$ (ее график изображен на рис. 1) удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}$ (см. теорему 2); не дифференцируема в двоично-рациональных точках и дифференцируема в остальных точках (см. п. 5.5); в точке $1/2$ имеет глобальный максимум, равный $1/2$ (см. теорему 4); вогнута на отрезке $[0;1]$ (см. теорему 5).

Функция $y = T_{-0{,}64}(x)$ (см. ее график на рис. 2) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\log_2(25/16) \approx 0{,}644$ на $\mathbb{R}$ (см. п. 3.1); не дифференцируема ни в одной точке из $\mathbb{R}$ (см. п. 5.4); в точке $1/2$ не имеет глобального максимума (см. теорему 4); не является вогнутой на отрезке $[0;1]$ (см. теорему 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Takagi *A simple example of a continuous function without derivative* // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. V. 1. 1903. P. 176—177.
2. M. Hata, M. Yamaguti *Takagi function and its generalization* // Japan J. Appl. Math. V. 1. 1984. P. 183—199.
3. P.C. Allaart, K. Kawamura *The Takagi function: a survey* // Real Anal. Exchange. V. 37, № 1. 2011/12. P. 1–54.
4. J.C. Lagarias *The Takagi Function and Its Properties* // In *RIMS Kokyuroku Bessatsu B34: Functions and Number Theory and Their Probabilistic Aspects.* Kyoto. B. 34. Aug. 2012. P. 153–189.
5. K.G. Spurrier *Continuous Nowhere Differentiable Functions.* Senior Thesis. South Carolina Honors College, South Carolina. 2004.
6. A. Shidfar, K. Sabetfakhri *On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense* // Amer. Math. Monthly. V. 93, № 5. 1986. P. 375—376.
7. de Rham G. *Sur un exemple de fonction continue sans derivee* // Enseign. Math. V. 3. 1957. P. 71—72.
8. M. Hata, M. Yamaguti *Weierstrass's function and chaos* // Hokkaido Math. J. V. 12. 1983. P. 333—342.
9. N. Kôno *On generalized Takagi functions* // Acta Math. Hungar. V. 49. 1987. P. 315—324.
10. B.B. Mandelbrot *Fractal landscapes without creases and with rivers.* P. 247. In H.-O. Peitgen, D. Saupe Ed. *The Science of Fractal Images* N.Y.:Springer-Verlag 1988. 313 p.
11. J.P. Kahane *Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée* // Enseignement Math. V. 5. 1959. P. 53—57.
12. Галкина С. Ю. *О коэффициентах Фурье-Хаара от функций с ограниченной вариацией* // Мат. заметки. Т. 51, № 1. 1992. С. 42–54.
13. J. Tabor, J. Tabor *Takagi functions and approximate midconvexity* // J. Math. Anal. Appl. V. 356, № 2. 2009. P. 729—737.
14. P.C. Allaart *On the level sets of the Takagi–van der Waerden functions* // J. Math. Anal. Appl. V. 419. 2014. P. 1168—1180.

Галкин Олег Евгеньевич,
Институт информационных технологий, математики и механики ННГУ,
пр. Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: olegegalkin@ya.ru

Галкина Светлана Юрьевна,
Институт информационных технологий, математики и механики ННГУ,
пр. Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: svetlana.u.galkina@mail.ru