УДК 537.311.3, 517.95

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В ПРОВОДНИКЕ С МАЛЫМИ КОНТАКТАМИ

Р.Р. ГАДЫЛЬШИН, А.А. ЕРШОВ, С.В. РЕПЬЕВСКИЙ

Аннотация. Построена и строго обоснована полная асимптотика по малому параметру электрического сопротивления трехмерного проводника, подключенного с помощью двух малых контактов произвольной геометрии. Получены явные формулы для первых двух членов асимптотики, которые обобщают классическую формулу Хольма одночленной асимптотики сопротивления для двух малых круговых контактов одинакового радиуса.

Ключевые слова: электрическое сопротивление, малые контакты, формула Хольма, асимптотическое разложение, краевая задача, метод согласования, уравнение Лапласа, смешанная задача.

Mathematics Subject Classification: 35J05, 35J25, 35B40, 78M35

Введение

В работе [1] приводится одно из первых упоминаний широко известного хольмовского приближения электрического сопротивления образца произвольной формы

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon\sigma} + O(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

где ε — радиус малых круглых контактов на уплощенной части поверхности, σ — удельная проводимость материала. При экспериментальной проверке, проведенной в [2], погрешность формулы (1) не превышала $\pm 1,5\%$. В монографии Р. Хольма [3] дано аналитическое обоснование формулы (1).

Хольмовское приближение (1) часто используется и в современных работах (см. например, [4, 5]).

В нашей работе рассматривается случай контактов произвольной формы, причем, необязательно совпадающих. Построена полная асимптотика сопротивления. Для главного члена асимптотики получена явная формула, в которой отражена зависимость от геометрии контактов (см. формулы (2), (3) ниже). Также выведена формула для второго члена асимптотики сопротивления.

Для этого в настоящей работе также будет построено полное асимптотическое разложение решения краевой задачи, интерпретирующего электрический потенциал проводника,

---

R.R. Gadylshin, A.A. Ershov, S.V. Repyevsky, On asymptotic formula for electric resistance of conductor with small contacts.

Работа первого автора выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности Минобрнауки России. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта РФФИ проект № 14-31-50424-мол_нр и "Фонда поддержки молодых ученых "Конкурс Мебиуса". Третий автор частично поддержан РФФИ проект № 14-01-00322.

Поступила 15 апреля 2015 г.

подключенного с помощью малых или так называемых «точечных» контактов (см. например, [6]), с помощью которого и будет найдена асимптотика электрического сопротивления.

В заключении раздела заметим, что двумерный аналог подобных исследований приведен в работах [7–9].

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, проводник Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$. И пусть эта область имеет два конечных плоских участка, с которыми мы свяжем две декартовые координатные системы $O_+x_1^+x_2^+x_3^+$ и $O_-x_1^-x_2^-x_3^-$; $x_\pm := (x_1^\pm, x_2^\pm, x_3^\pm)$. В этих координатах математически опишем форму малых контактов γ_+^ε и γ_-^ε. Пусть множества γ_+ и γ_- — замыкания ограниченных односвязных областей на плоскостях $x_3^+ = 0$ и $x_3^- = 0$, соответственно, $\partial\gamma_\pm \in C^\infty$. В качестве сечений малых контактов возьмем $\gamma_\pm^\varepsilon = \{x_\pm : \varepsilon^{-1}x_\pm \in \gamma_\pm\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (рис. 1).

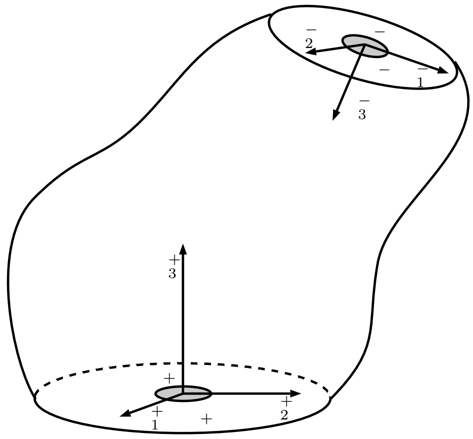

Рис. 1. Проводник Ω

Первую координатную систему будем считать основной. Поэтому иногда будем опускать знак „+“ и записывать ее как $Ox_1x_2x_3$; $x := (x_1, x_2, x_3)$.

В работе получена следующая асимптотическая формула для электрического сопротивления:

$$R(\varepsilon) = \frac{R_{-1}}{\varepsilon} + R_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j R_j, \tag{2}$$

где

$$R_{-1} = \frac{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}{2\pi\sigma C_{\gamma_+} C_{\gamma_-}}, \qquad R_0 = -\frac{1}{2\pi\sigma}\big(G_+(O_-) + G_-(O_+)\big). \tag{3}$$

Здесь и всюду далее, $C_{\gamma_\pm} > 0$ — емкости дисков $\gamma_\pm$ (см. например, [10, гл.2, §1], [11, гл.2, §3]), $G_\pm(x) = r_\pm^{-1} + g_\pm(x)$, где $r_+ = |x|$, $r_- = |x^-|$, а функции $g_\pm(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta g_\pm = 0, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial g_\pm}{\partial \mathbf{n}} = -2\pi - \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\dfrac{1}{r_\pm}\right), \quad x \in \partial\Omega \backslash O_\pm, \qquad g_\pm(O_\pm) = 0, \end{array} \right. \tag{4}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали. Существование таких функций хорошо известно ([12, гл.2, § 2, п. 122], [13, гл.6, § 7,8]).

Если $\gamma_\pm$ — круги единичного радиуса, то $C_{\gamma_\pm} = \dfrac{2}{\pi}$ [11, гл.2, §3], [14, гл.1, §4]. Поэтому даже для частного случая малых круговых контактов $\gamma_\pm^\varepsilon$ радиуса ε, рассмотренном в [1–3], в силу (2), (3) получаем равенство

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{2\sigma\varepsilon} - \frac{1}{2\pi\sigma}\Big(G_-(O_+) + G_+(O_-)\Big) + O(\varepsilon),$$

которое уточняет классическую формулу (1). Заметим, что для ряда форм дисков γ их емкости C_γ вычисляются явно [10, 11]. В частности, если $\gamma_\pm$ — эллипс с осями a и b, то

$$C_{\gamma_\pm} = \frac{a}{K(\sqrt{|a^2-b^2|}/a)},$$

где

$$K(z) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-z^2\sin^2 t}}$$

— полный эллиптический интеграл I-го рода [11, гл.2, §3].

Отметим также, что уплощение границы в месте присоединения контактов, во-первых, естественно с технологической точки зрения, а во-вторых, не влияет на значение главного члена асимптотики (см. замечание в следующем разделе).

2. Сведение вычисления сопротивления к решению краевой задачи

Так как по закону Ома

$$R = \frac{\Delta U}{I}, \tag{5}$$

где ΔU — разность потенциалов на контактах, а I — сила тока, проходящего через проводник, то, зная электрический потенциал $u(x,\varepsilon)$ в каждой точке проводника Ω, мы можем вычислить разность потенциалов $\Delta U = |u(O_+) - u(O_-)|$ и силу тока как модуль поверхностного интеграла по любому сечению H проводника:

$$I = \left|\sigma \int\limits_H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_H}\, dS\right|, \tag{6}$$

где $\mathbf{n}_H$ — нормаль к поверхности сечения H, а $\sigma\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_H}$ — плотность силы тока, проходящего через сечение H (см. например, [14, гл.3, §21]).

Электрический потенциал $u(x,\varepsilon)$ моделируется с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega \backslash \{\gamma_+^\varepsilon \cup \gamma_-^\varepsilon\}, \\ u = U_\pm, & x \in \gamma_\pm^\varepsilon, \end{cases} \tag{7}$$

где U_+, U_- — потенциалы на контактных поверхностях, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль [14, гл.3, §21], [3, §4, с.25].

Поскольку искомое сопротивление проводника не зависит от напряжения, то для удобства изложения можем положить $U_+ = 1$, $U_- = -1$. То есть вместо (7) достаточно рассмотреть следующую *основную* краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega \backslash \{\gamma_+^\varepsilon \cup \gamma_-^\varepsilon\}, \\ u = \pm 1, & x \in \gamma_\pm^\varepsilon. \end{cases} \tag{8}$$

Из [15] и теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений [16, гл. IV, §2, п.3] следует существование и единственность решения задачи (8) в классе функций из $C^\infty(\overline{\Omega}\backslash\{\partial\gamma_+^\varepsilon \cup \partial\gamma_-^\varepsilon\}) \cap C(\overline{\Omega})$.

Замечание 1. *Если в окрестности присоединения контактов граница не является плоской, то можно сделать ее упрощенной локальной заменой переменной. Естественно, что оператор Лапласа перейдет в оператор с переменными коэффициентами, что никак не влияет на вычисление главных членов асимптотики, хотя, конечно, технически усложняет и удлиняет процесс построения полной асимптотики ([17], где была рассмотрена задача на собственные значения для эллиптического оператора второго порядка с переменными коэффициентами и сменой типа граничного условия на малом участке границы). Заметим, что подобная ситуация имеет место и для других сингулярных возмущений, стягивающихся к точке (для малых отверстий [18], [19]).*

3. Построение главных членов асимптотики решения краевой задачи (8)

Построение формальной асимптотики решения $u(x,\varepsilon)$ краевой задачи (8) при $\varepsilon \to 0$ проводится методом согласования асимптотических разложений [18, 20, 21].

Следуя этому методу, в окрестности частей границы $\gamma_\pm^\varepsilon$ (т.е. в окрестности точек $O_\pm$) асимптотическое разложение функции $u(x,\varepsilon)$ естественно искать в виде

$$u(x,\varepsilon) = v_0^\pm\left(\frac{x_\pm}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1^\pm\left(\frac{x_\pm}{\varepsilon}\right) + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j v_j^\pm\left(\frac{x_\pm}{\varepsilon}\right). \tag{9}$$

Подставляя ряд (9) в (8) и переходя к *внутренним* переменным $\xi_\pm = \frac{x_\pm}{\varepsilon}$, получаем краевые задачи для *внутренних* разложений:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi_\pm} v_0^\pm = 0, \quad \xi_3^\pm > 0, \\ v_0^\pm = \pm 1, \quad \xi_\pm \in \gamma_\pm, \\ \dfrac{\partial v_0^\pm}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi_\pm \in \Gamma_\pm := \{\xi_\pm : \xi_3^\pm = 0,\, \xi_\pm \notin \gamma_\pm\}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \Delta_{\xi_\pm} v_j^\pm = 0, \quad \xi_3^\pm > 0, \\ v_j^\pm = 0, \quad \xi_\pm \in \gamma_\pm, \\ \dfrac{\partial v_j^\pm}{\partial \xi_3} = 0, \quad \xi_\pm \in \Gamma_\pm, \qquad j = 1, 2, ... \end{cases} \tag{11}$$

Здесь и далее используется обозначение $(\xi_1^\pm, \xi_2^\pm, \xi_3^\pm) = \xi_\pm$, а под $\Delta_{\xi_\pm}$ понимается оператор Лапласа в переменных $\xi_\pm$.

Обозначим также $\rho_\pm = |\xi_\pm|$, $\mathbb{R}_+^{3,\pm} = \{\xi_\pm : \xi_3^\pm > 0\}$. Через $X_j^\pm(\xi_\pm)$ и $X_j^{\pm,i}(\xi_\pm)$ будем обозначать однородные гармонические полиномы степени j, удовлетворяющие условию $\frac{\partial X_j^\pm}{\partial \xi_3^\pm} = \frac{\partial X_j^{\pm,i}}{\partial \xi_3^\pm} = 0$ при $\xi_3^\pm = 0$. Из определения следует, что $X_j^\pm \rho_\pm^{-2j-1}$, $X_j^{\pm,i} \rho_\pm^{-2j-1}$ — гармонические функции, удовлетворяющие условию $\frac{\partial X_j^\pm \rho_\pm^{-2j-1}}{\partial \xi_3^\pm}(\xi_1^\pm, \xi_2^\pm, 0) = \frac{\partial X_j^{\pm,i} \rho_\pm^{-2j-1}}{\partial \xi_3^\pm}(\xi_1^\pm, \xi_2^\pm, 0) = 0$ при $\xi_\pm \neq 0$. В [22, лемма 3] показана справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Для любой функции* $\Phi \in C^\infty(\gamma_\pm)$ *существует решение* $v \in C^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}_+^{3,\pm}\backslash\partial\gamma_\pm\right) \cap C\left(\overline{\mathbb{R}}_+^{3,\pm}\right)$ *краевой задачи*

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad \xi_3^\pm > 0, \\ v = \Phi, \quad \xi_\pm \in \gamma_\pm, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi_3^\pm} = 0, \quad \xi_\pm \in \Gamma_\pm, \end{cases}$$

имеющее дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi_\pm) = \frac{C_\pm(\Phi)}{\rho_\pm} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^\pm(\xi_\pm)\rho_\pm^{-1-2j}, \qquad \rho_\pm \to \infty.$$

Обозначим через $E(\xi_\pm;\gamma_\pm)$ функцию, удовлетворяющую утверждению леммы 1 при $\Phi \equiv 1$. В обозначениях этой леммы имеем:

$$E(\xi_\pm;\gamma_\pm) = \frac{C_{\gamma_\pm}}{\rho_\pm} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j^\pm(\xi_\pm)\rho_\pm^{-1-2j}, \qquad \rho_\pm \to \infty,$$

где, напомним, $C_{\gamma_\pm} > 0$ — емкости дисков $\gamma_\pm$. Заметим, что, если $\gamma_\pm$ — единичный круг, то (см. например, [14, гл.1, §4])

$$E(\xi_\pm;\gamma_\pm) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{\rho_\pm^2 - 1 + \sqrt{(\rho_\pm^2-1)^2 + 4(\xi_3^\pm)^2}}}\,.$$

Из определения $E(\xi_\pm;\gamma_\pm)$ вытекает, что функции

$$v_0^\pm(\xi_\pm) = \pm\frac{\mathcal{B}_0}{C_{\gamma_\pm}}E(\xi_\pm;\gamma_\pm)) \pm \left(1 - \frac{\mathcal{B}_0}{C_{\gamma_\pm}}\right) \tag{12}$$

являются решениями краевых задач (11) для любой постоянной $\mathcal{B}_0$ и имеют асимптотики

$$v_0^\pm(\xi_\pm) = \pm\left(1 - \frac{\mathcal{B}_0}{C_{\gamma_\pm}}\right) \pm \frac{\mathcal{B}_0}{\rho_\pm} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{X_j^{\pm,0}(\xi_\pm)}{\rho_\pm^{2j+1}}, \quad \rho_\pm \to \infty. \tag{13}$$

Переписывая (13) во *внешних* переменных $x_\pm = \varepsilon\xi_\pm$, имеем:

$$v_0^\pm\left(\frac{x^\pm}{\varepsilon}\right) = \pm\left(1 - \frac{\mathcal{B}_0}{C_{\gamma_\pm}}\right) \pm \varepsilon\frac{\mathcal{B}_0}{r_\pm} + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\frac{X_j^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^{2j+1}}, \quad \varepsilon r_\pm \to \infty.$$

Отсюда, следуя методу согласования асимптотических разложений, получаем, что *внешнее* разложение должно иметь вид

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x), \tag{14}$$

где

$$u_0(x) = \mathcal{A}_0^\pm + o(1), \quad r_\pm \to 0, \tag{15}$$

$$u_1(x) = \pm\frac{\mathcal{B}_0}{r_\pm} + O(1), \quad r_\pm \to 0, \tag{16}$$

$$u_j(x) = \frac{X_{j-1}^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^{2j-1}} + O(r_\pm^{-j+1}), \quad r_\pm \to 0,\ j = 2,3,\dots \tag{17}$$

$$\mathcal{A}_0^\pm = \pm\left(1 - \frac{\mathcal{B}_0}{C_{\gamma_\pm}}\right). \tag{18}$$

Подставив разложение (14) в (8) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0, \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \{O_+ \cup O_-\}, \qquad k = 0,1,... \end{cases} \tag{19}$$

В силу (4) функция

$$u_1(x) = \mathcal{B}_0\Big(G_+(x) - G_-(x)\Big) + \mathcal{A}_1 \tag{20}$$

является решением краевой задачи (19) и (16) при любой постоянной $\mathcal{A}_1$.

Очевидно, что, если

$$\mathcal{A}_0^- = \mathcal{A}_0^+ := \mathcal{A}_0, \tag{21}$$

то функция

$$u_0(x) \equiv \mathcal{A}_0 \tag{22}$$

удовлетворяет (19) и (15).

Решая систему линейных уравнений (18) и (21), получаем, что

$$\mathcal{A}_0 = \frac{C_{\gamma_+} - C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}, \qquad \mathcal{B}_0 = \frac{2C_{\gamma_+}C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}. \tag{23}$$

Таким образом, определены функции $u_0(x)$, $v_0^\pm(\xi_\pm)$ в силу равенств (22), (12) и (23), а функция $u_1(x)$ определена равенством (20) с точностью до пока произвольного слагаемого $\mathcal{A}_1$.

Всюду далее через $Y_j^\pm(\xi_\pm)$ и $Y_j^{\pm,i}(\xi_\pm)$ также будем обозначать однородные гармонические полиномы степени j, удовлетворяющие условию $\frac{\partial Y_j^\pm}{\partial \xi_3^\pm} = \frac{\partial Y_j^{\pm,i}}{\partial \xi_3^\pm} = 0$ при $\xi_3^\pm = 0$. Из (20) следует, что

$$u_1(x) = \pm\frac{\mathcal{B}_0}{r_\pm} + \mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j^{\pm,1}(x_\pm), \quad r_\pm \to 0. \tag{24}$$

Перепишем с учетом равенств (22) и (24) асимптотику суммы $u_0(x) + \varepsilon u_1(x)$ при $r_\pm \to 0$ во внутренних переменных $\xi_\pm$:

$$u_0(x) + \varepsilon u_1(x) = \mathcal{A}_0 \pm \frac{\mathcal{B}_0}{\rho_\pm} + \varepsilon\Big(\mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm)\Big) + \varepsilon\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j Y_j^{\pm,1}(\xi_\pm).$$

Отсюда получаем требование для асимптотик на бесконечности функций $v_k^\pm(\xi_\pm)$:

$$\begin{aligned} v_0^\pm(\xi_\pm) =& \mathcal{A}_0 \pm \frac{\mathcal{B}_0}{\rho_\pm} + O(\rho_\pm^{-2}), \quad \rho_\pm \to \infty, & (25)\\ v_1^\pm(\xi_\pm) =& \mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm) + O(\rho_\pm^{-1}), \quad \rho_\pm \to \infty, & (26)\\ v_k^\pm(\xi_\pm) =& Y_{k-1}^{\pm,1}(\xi_\pm) + O(\rho_\pm^{k-2}), \quad \rho_\pm \to \infty,\ k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что определенные в (12) функции $v_0^\pm(\xi_\pm)$ имеют асимптотики (25) (см. (18), (21)).

Из определения функций $E(\xi_\pm; \gamma_\pm)$ вытекает, что для любой постоянной $\mathcal{B}_1$ функции

$$v_1^\pm(\xi_\pm) = \pm\frac{\mathcal{B}_1}{C_{\gamma_\pm}}(E(\xi_\pm; \gamma_\pm) - 1) \tag{27}$$

являются решениями краевых задач (11) и имеют асимптотики

$$v_1^\pm(\xi_\pm) = \mp\frac{\mathcal{B}_1}{C_{\gamma_\pm}} \pm \frac{\mathcal{B}_1}{\rho_\pm} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j^{\pm,1}(\xi_\pm)}{\rho_\pm^{2j+1}}, \quad \rho_\pm \to \infty. \tag{28}$$

Сравнивая последнее равенство с (26), выводим следующую систему линейных уравнений на $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{B}_1$:

$$\mp\frac{\mathcal{B}_1}{C_{\gamma_\pm}} = \mathcal{A}_1 \mp \mathcal{B}_0 G_\mp(O_\pm).$$

Отсюда с учетом (23) получаем, что, во-первых,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 =&\frac{2C_{\gamma_+}C_{\gamma_-}}{(C_{\gamma_+}+C_{\gamma_-})^2}\left(C_{\gamma_+}G_-(O_+)-C_{\gamma_-}G_+(O_-)\right),\\ \mathcal{B}_1 =&2\left(\frac{C_{\gamma_+}C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+}+C_{\gamma_-}}\right)^2\left(G_+(O_-)+G_-(O_+)\right),\end{aligned}\tag{29}$$

а, во-вторых, асимптотики (28) уточняют асимптотики (26).

Перепишем с учетом равенств (13) и (28) асимптотики сумм $v_0^\pm(\xi_\pm)+\varepsilon v_1^\pm(\xi_\pm)$ при $\rho_\pm\to\infty$ во внешних переменных $x_\pm$:

$$\begin{aligned}v_0^\pm(\xi_\pm)+\varepsilon v_1^\pm(\xi_\pm) =&\mathcal{A}_0+\varepsilon\left(\pm\frac{\mathcal{B}_0}{r_\pm}+\mathcal{A}_1\mp\mathcal{B}_0G_\mp(O_\pm)\right)+\varepsilon^2\left(\frac{X_1^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^3}\pm\frac{\mathcal{B}_1^\pm}{r_\pm}\right)+\\ &+\sum_{j=3}^{\infty}\varepsilon^j\left(\frac{X_{j-1}^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^{2j-1}}+\frac{X_{j-2}^{\pm,1}(x_\pm)}{r_\pm^{2j-3}}\right).\end{aligned}$$

Отсюда, следуя методу согласования асимптотических разложений, уточняем асимптотики (15), (16), (17):

$$u_0(x) =\mathcal{A}_0+o(1),\qquad u_1(x)=\pm\frac{\mathcal{B}_0}{r_\pm}+\mathcal{A}_1\mp\mathcal{B}_0G_\mp(O_\pm)+O(r_\pm),\quad r_\pm\to0,\tag{30}$$

$$u_2(x) =\frac{X_1^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^3}\pm\frac{\mathcal{B}_1}{r_\pm}+O(1),\quad r_\pm\to0,\tag{31}$$

$$u_j(x) =\frac{X_{j-1}^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^{2j-1}}+\frac{X_{j-2}^{\pm,1}(x_\pm)}{r_\pm^{2j-3}}+O(r_\pm^{-j+2}),\quad r_\pm\to0,\ j=3,4,\ldots$$

Функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$, определенные равенствами (22) и (20), удовлетворяют (30) (см. (24)).

Из [22, лемма 2] вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $n\geqslant 1$. *Тогда для любых* $X_n^\pm(x_\pm)$ *существуют функции* $U_\pm(x)\in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash O_\pm)$, *являющиеся решениями краевых задач*

$$\begin{cases}\Delta U_\pm=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial U_\pm}{\partial\mathbf{n}}=0, & x\in\partial\Omega\backslash O_\pm,\end{cases}$$

и имеющие дифференцируемые асимптотики

$$U_\pm(x)=\frac{X_n^\pm(x_\pm)}{r_\pm^{2n+1}}+\sum_{j=1}^{\infty}Y_j^\pm(x_\pm),\qquad r_\pm\to0.$$

В силу (4) и утверждения леммы 2 существует решение $u_2(x)\in C^\infty\left(\overline{\Omega}\backslash\{O_+\cup O_-\}\right)$ краевой задачи (19), (31) и оно представимо в виде

$$u_2(x)=\frac{X_1^{+,0}(x_+)}{r_+^3}+\frac{X_1^{-,0}(x_-)}{r_-^3}+\frac{\mathcal{B}_1}{r_+}-\frac{\mathcal{B}_1}{r_-}+\widetilde{u}_2(x)+\mathcal{A}_2,\tag{32}$$

где $\widetilde{u}_2\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\int_\Omega\widetilde{u}_2(x)dx=0$, а $\mathcal{A}_2$ — пока произвольная постоянная.

Из (22), (20), (32), (12), (27), (23) и (29), в частности, следует, что

$$\begin{aligned}
u_0(x) \equiv & \frac{C_{\gamma_+} - C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}}, \\
u_1(x) = & \frac{2C_{\gamma_+} C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}} \left(G_+(x) - G_-(x) + \frac{1}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}} \Big(C_{\gamma_+} G_-(O_+) - C_{\gamma_-} G_+(O_-) \Big) \right), \\
u_2(x) = & \frac{X_1^{+,0}(x_+)}{r_+^3} + \frac{X_1^{-,0}(x_-)}{r_-^3} + \\
& + 2 \left(\frac{C_{\gamma_+} C_{\gamma_-}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}} \right)^2 (G_+(O_-) + G_-(O_+)) \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) + \widetilde{u}_2(x) + \mathcal{A}_2,
\end{aligned} \tag{33}$$

где $\widetilde{u}_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а $\mathcal{A}_2$ — пока произвольная постоянная,

$$\begin{aligned}
v_0^\pm(\xi_\pm) = & \pm \left(1 + \frac{2C_{\gamma_\mp}}{C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-}} \Big(E(\xi_\pm; \gamma_\pm) - 1 \Big) \right), \\
v_1^\pm(\xi_\pm) = & \pm 2 \frac{C_{\gamma_\mp} C_{\gamma_\pm}^2}{\left(C_{\gamma_+} + C_{\gamma_-} \right)^2} \Big(G_+(O_-) + G_-(O_+) \Big) \Big(E(\xi_\pm; \gamma_\pm) - 1 \Big).
\end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом, мы построили главные члены $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ (с точностью до произвольной постоянной $\mathcal{A}_2$), $v_0^\pm(\xi_\pm)$, $v_1^\pm(\xi_\pm)$ формальных разложений (14) и (9). Построение полных асимптотических разложений (14) и (9) и их строгое обоснование будет приведено в следующих двух разделах.

4. Формальное построение полной асимптотики решения краевой задачи (8)

Содержанием этого раздела является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Существуют ряды* (14), (9) *такие, что*

1) функции $u_k(x) \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \setminus \{O_+ \cup O_-\}\right)$ являются решениями краевых задач (19);

2) для функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ справедливы равенства (33), *где $\widetilde{u}_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а $\mathcal{A}_2$ — некоторая постоянная;*

3) при $k \geqslant 1$ функции $u_k(x)$ имеют следующие асимптотики:

$$u_k(x) = \sum_{q=1}^{k-1} \frac{X_q^{\pm,k-q-1}(x_\pm)}{r_\pm^{2q+1}} \pm \frac{\mathcal{B}_{k-1}}{r_\pm} + \mathcal{A}_k^\pm + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j^{\pm,k}(x_\pm), \qquad x_\pm \to 0; \tag{35}$$

4) функции $v_k^\pm(\xi_\pm) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{3,\pm} \setminus \partial\gamma_\pm) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+^{3,\pm})$ являются решениями краевых задач (10), (11);

5) для функций $v_0^\pm(\xi_\pm)$ и $v_1^\pm(\xi_\pm)$ справедливы равенства (34);

6) функции $v_k^\pm(\xi_\pm)$ имеют следующие асимптотики:

$$v_k^\pm(\xi_\pm) = \sum_{q=1}^{k-1} Z_q^{\pm,k-q}(\xi_\pm) + \mathcal{A}_k^\pm \pm \frac{\mathcal{B}_k}{\rho_\pm} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j^{\pm,k}(\xi_\pm)}{\rho_\pm^{2j+1}}, \quad \rho_\pm \to \infty. \tag{36}$$

Доказательство. Справедливость (36) для $v_0^\pm$ вытекает из (13) при $\pm\left(1 - \frac{\mathcal{B}_0}{C_{\gamma_\pm}}\right) := \mathcal{A}_0^\pm$, а для $v_1^\pm$ следует из (28) при $\mp\frac{\mathcal{B}_1}{C_{\gamma_\pm}} := \widetilde{\mathcal{A}}_1^\pm$, а для u_1 равенство (35) совпадает с (24).

Из (32) следует, что

$$u_2(x) = \frac{X_1^{\pm,0}(x_\pm)}{r_\pm^3} \pm \frac{\mathcal{B}_1}{r_\pm} + \widetilde{\mathcal{A}}_2^\pm + \mathcal{A}_2 + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j^{\pm,2}(x_\pm), \qquad x_\pm \to 0, \tag{37}$$

где $\widetilde{\mathcal{A}}_2^{\pm}$ — вполне определенные числа, а $\mathcal{A}_2$ — пока произвольная постоянная.

В силу леммы 1 существуют решения $\widetilde{v}_2^{\pm} \in C^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^{3,\pm} \backslash \partial\gamma_{\pm}\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+^{3,\pm}\right)$ краевой задачи (11), имеющие асимптотики

$$\widetilde{v}_2^{\pm}(\xi_{\pm}) = Z_1^{\pm,1}(\xi_{\pm}) \pm \frac{\widetilde{\mathcal{B}}_2^{\pm}}{\rho_{\pm}} + O(\rho_{\pm}^{-2}), \quad \rho_{\pm} \to \infty,$$

где $\widetilde{\mathcal{B}}_2^{\pm}$ — вполне определенные числа. Тогда для любых чисел $\mathcal{B}_2^{\pm}$ функции

$$v_2^{\pm}(\xi_{\pm}) = \widetilde{v}_2^{\pm}(\xi_{\pm}) \pm \frac{\mathcal{B}_2^{\pm}}{C_{\gamma_{\pm}}}\Big(E(\xi_{\pm};\gamma_{\pm}) - 1\Big) \in C^{\infty}\left(\overline{\mathbb{R}}_+^{3,\pm} \backslash \partial\gamma_{\pm}\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+^{3,\pm}\right)$$

являются решениями краевых задач (11) и имеют следующие асимптотики

$$v_2^{\pm}(\xi_{\pm}) = Z_1^{\pm,1}(\xi_{\pm}) \mp \frac{\mathcal{B}_2^{\pm}}{C_{\gamma_{\pm}}} \pm \frac{\widetilde{\mathcal{B}}_2^{\pm} + \mathcal{B}_2^{\pm}}{\rho_{\pm}} + O(\rho_{\pm}^{-2}), \quad \rho_{\pm} \to \infty. \tag{38}$$

Сравнивая последнее равенство с требуемым равенством (36) при $k = 2$, получаем линейное уравнение на $\mathcal{B}_2^{+}$ и $\mathcal{B}_2^{-}$:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_2^{+} + \mathcal{B}_2^{+} = \widetilde{\mathcal{B}}_2^{-} + \mathcal{B}_2^{-} := \mathcal{B}_2. \tag{39}$$

Сравнивая (38) с (36), а (37) с (35), получаем еще два линейных уравнения на $\mathcal{B}_2^{+}$, $\mathcal{B}_2^{-}$ и $\mathcal{A}_2$:

$$\mp\frac{\mathcal{B}_2^{\pm}}{C_{\gamma_{\pm}}} = \widetilde{\mathcal{A}}_2^{\pm} + \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_2^{\pm}. \tag{40}$$

Так как определитель системы уравнений (39), (40) равен $\frac{1}{C_{\gamma_+}} + \frac{1}{C_{\gamma_-}}$, то она однозначно разрешима. Вычислив $\mathcal{B}_2^{+}$, $\mathcal{B}_2^{-}$ и $\mathcal{A}_2$, находим $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{A}_2^{\pm}$ в силу (39), (40) и, следовательно, окончательно определяем $v_2^{\pm}(\xi_{\pm})$ и $u_2(x)$, добиваясь при этом равенств (35) и (36) для $k = 2$.

Кроме этого, в силу леммы 2 существует решение $u_3(x) \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega} \backslash \{O_+ \cup O_-\}\right)$ краевой задачи (19), имеющее асимптотику

$$u_3(x) = \frac{X_2^{\pm,0}(x_{\pm})}{r_{\pm}^5} + \frac{X_1^{\pm,1}(x_{\pm})}{r_{\pm}^3} \pm \frac{\mathcal{B}_2}{r_{\pm}} + \widetilde{\mathcal{A}}_3^{\pm} + \mathcal{A}_3 + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j^{\pm,3}(x_{\pm}), \qquad x_{\pm} \to 0,$$

где $\widetilde{\mathcal{A}}_3^{\pm}$ — вполне определенные числа, а $\mathcal{A}_3$ — пока произвольная постоянная. Т.е. получили аналог равенства (37) для следующего шага.

Повторяя проведенную выше процедуру, последовательно находим $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{A}_3^{\pm}$ $\mathcal{A}_3$, окончательно определяем $v_3^{\pm}(\xi_{\pm})$ и $u_3(x)$, добиваясь при этом равенств (35) и (36) для $k = 3$, а в силу леммы 2 получаем существование решения $u_4(x) \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega} \backslash \{O_+ \cup O_-\}\right)$ краевой задачи (19), имеющего асимптотику

$$u_4(x) = \frac{X_3^{\pm,0}(x_{\pm})}{r_{\pm}^7} + \frac{X_2^{\pm,1}(x_{\pm})}{r_{\pm}^5} + \frac{X_1^{\pm,2}(x_{\pm})}{r_{\pm}^3} \pm \frac{\mathcal{B}_3}{r_{\pm}} + \widetilde{\mathcal{A}}_4^{\pm} + \mathcal{A}_4 + \sum_{j=1}^{\infty} Z_j^{\pm,4}(x_{\pm}), \qquad x_{\pm} \to 0,$$

где $\widetilde{\mathcal{A}}_4^{\pm}$ — вполне определенные числа, а $\mathcal{A}_4$ — пока произвольная постоянная. И так далее. Теорема доказана. □

5. Обоснование построенной асимптотики решения краевой задачи (8)

Обозначим через $B_{\pm}(t)$ шар радиуса t с центром в точке $O_{\pm}$. Содержанием этого раздела является доказательство следующего утверждения, основанного на подходе, использовавшимся при обосновании асимптотик собственных значений краевых задач со сменой типа граничного условия на малом участке границы [23–26].

Теорема 2. *Пусть функции $u_k(x)$ и $v_k^{\pm}(\xi_{\pm})$ удовлетворяют утверждениям теоремы 1. Тогда решение краевой задачи* (8) *имеет асимптотику* (14) *в* $\Omega\setminus\left(B_+(\sqrt{\varepsilon})\cup B_-(\sqrt{\varepsilon})\right)$ *и асимптотики* (9) *в* $\Omega\cap B_{\pm}(\sqrt{\varepsilon})$ *по норме* W_2^1.

Доказательство. Обозначим через $\widehat{u}_N(x,\varepsilon)$ и $\widehat{v}_N^{\pm}(x,\varepsilon)$ частичные суммы рядов (14), (9), соответственно, до степеней ε^N включительно. Из пунктов 3) и 6) теоремы 1 вытекает следующее дифференцируемое равенство:

$$\widehat{u}_N(x,\varepsilon)-\widehat{v}_N^{\pm}(x,\varepsilon)=O\left(\varepsilon r_{\pm}^N+\varepsilon^N r_{\pm}+\left(\frac{\varepsilon}{r_{\pm}}\right)^{N+1}\right),\qquad r_{\pm}\to 0,\quad \frac{r_{\pm}}{\varepsilon}\to\infty. \tag{41}$$

Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная нулю при $t<1$ и единице при $t>2$. Обозначим

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_{N,s}(x,\varepsilon)=&\widehat{u}_N(x,\varepsilon)\chi\left(\frac{sr_+}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\chi\left(\frac{sr_-}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\\&+\widehat{v}_N^{+}(x,\varepsilon)\left(1-\chi\left(\frac{sr_+}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)+\widehat{v}_N^{-}(x,\varepsilon)\left(1-\chi\left(\frac{sr_-}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right).\end{aligned} \tag{42}$$

Тогда функция $\widetilde{u}_{N,s}(x,\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta\widetilde{u}_{N,s}=f_{N,s}, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\widetilde{u}_{N,s}}{\partial\mathbf{n}}=0, & x\in\partial\Omega\setminus\{\gamma_+^{\varepsilon}\cup\gamma_-^{\varepsilon}\},\\ \widetilde{u}_{N,s}=\pm1, & x\in\gamma_{\pm}^{\varepsilon},\end{cases} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}f_{N,s}(x,\varepsilon)=&\left(\widehat{u}_N(x,\varepsilon)-\widehat{v}_N^{\pm}(x,\varepsilon)\right)\Delta\chi\left(\frac{sr_+}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\left(\widehat{u}_N(x,\varepsilon)-\widehat{v}_N^{\pm}(x,\varepsilon)\right)\Delta\chi\left(\frac{sr_-}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\\&+\nabla\left(\widehat{u}_N(x,\varepsilon)-\widehat{v}_N^{\pm}(x,\varepsilon)\right)\nabla\chi\left(\frac{sr_+}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\left(\widehat{u}_N(x,\varepsilon)-\widehat{v}_N^{\pm}(x,\varepsilon)\right)\nabla\chi\left(\frac{sr_-}{\sqrt{\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

Отсюда в силу (41) получаем, что

$$\|f_{N,s}\|_{L_2(\Omega)}=O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right). \tag{44}$$

Обозначим

$$U_{N,s}(x,\varepsilon)=\widetilde{u}_{N,s}(x,\varepsilon)-u(x,\varepsilon). \tag{45}$$

В силу (8) и (43) получаем, что функция $U_{N,s}(x,\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta U_{N,s}=f_{N,s}, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial U_{N,s}}{\partial\mathbf{n}}=0, & x\in\partial\Omega\setminus\{\gamma_+^{\varepsilon}\cup\gamma_-^{\varepsilon}\},\\ U_{N,s}=0, & x\in\gamma_{\pm}^{\varepsilon}.\end{cases} \tag{46}$$

Умножим уравнение в (46) на $U_{N,s}(x,\varepsilon)$ и возьмем от обеих частей полученного равенства интеграл по Ω. Интегрируя левую часть последнего равенства по частям, в силу (44) имеем:

$$\|\nabla U_{N,s}\|_{L_2(\Omega)}=O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right). \tag{47}$$

В [27] показано, что минимальное собственное значение краевой задачи

$$\begin{cases}-\Delta\psi_{\varepsilon}=\lambda_{\varepsilon}\psi_{\varepsilon}, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial\psi_{\varepsilon}}{\partial\mathbf{n}}=0, & x\in\partial\Omega\setminus\gamma_+^{\varepsilon},\\ \psi_{\varepsilon}=0, & x\in\gamma_+^{\varepsilon},\end{cases}$$

имеет асимптотику $\lambda_\varepsilon = \varepsilon 2\pi C_{\gamma_+}|\Omega| + O(\varepsilon^2)$. Поэтому из вариационных свойств собственных значений краевых задач следует (см. например, [16, гл.IV, §1, п.4]), что для функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на γ_+, справедлива оценка

$$\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\pi C_{\gamma_+}|\Omega|}\|\nabla w\|^2_{L_2(\Omega)}$$

при достаточно малых ε. Отсюда и из (47) и (45) вытекает равенство

$$\|\widetilde{u}_{N,s} - u\|_{W_2^1(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{\frac{N-1}{2}}\right).$$

И, наконец, из этого равенства, определения (42) функции $\widetilde{u}_{N,s}(x,\varepsilon)$ и произвола в выборе N и s следует справедливость утверждения доказываемой теоремы. □

6. Доказательство формул (2), (3)

Пусть H — произвольное сечение области Ω, не содержащие точек $O_\pm$, а H_μ — μ-окрестность H для достаточно малого μ. Тогда для решения краевой задачи (46) имеет место оценка [16, глава IV, §2]

$$\|U_{N,s}\|_{W_2^2(H_\mu)} \leqslant C\|f_{N,s}\|_{L_2(\Omega)}. \tag{48}$$

Так как

$$\|w\|_{L^2(H)} \leqslant C_1\|w\|_{W_2^1(H_\mu)},$$

[16, глава III, §5], то из (48), (44) и неравенства $\|w\|_{L_1(H)} \leqslant |H|\|w\|_{L_2(H)}$ следует, что

$$\int\limits_H \left|\frac{\partial U_{N,s}}{\partial \mathbf{n}_H}\right| dS = O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right).$$

Отсюда в силу определений (45) и (42) функции $U_{N,s}(x,\varepsilon)$ и $\widetilde{u}_{N,s}(x,\varepsilon)$ и произвола в выборе N получаем, что

$$\int\limits_H \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_H}\, dS = \int\limits_H \frac{\partial \widehat{u}_N}{\partial \mathbf{n}_H}\, dS + O\left(\varepsilon^{N+1}\right). \tag{49}$$

Подставляя (49) в (6), с учетом равенств (22) и (35) и [22, лемма 2] получаем, что

$$I = \sigma\left|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k \mathcal{B}_{k-1}\int\limits_H \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_H}\Big(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\Big)dS\right| + O(\varepsilon^{N+1}) = 2\pi\sigma\left|\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k\mathcal{B}_{k-1}\right| + O(\varepsilon^{N+1}). \tag{50}$$

Так как $\mathcal{B}_0 > 0$ и $\mathcal{B}_1 > 0$ в силу (23) и (29), то, подставив (50) и $\Delta U = 2$ в (5), в силу произвола в выборе N получаем справедливость формулы (2) для $R(\varepsilon)$, где

$$R_{-1} = \frac{1}{\pi\sigma\mathcal{B}_0}, \qquad R_0 = -\frac{\mathcal{B}_1}{\pi\sigma\mathcal{B}_0^2}.$$

И, наконец, из последних равенств и значений (23), (29) постоянных $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$ получаем формулы (3) для R_{-1} и R_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Holm *Über Kontaktwiderstände, besonders bei Kohlekontakten* // Zeitschrift für technische Physik. 1922. V. 3. № 9, P. 290–294
2. R. Holm, R. Störmer *Eine Kontrolle des metallischen Charakters von gereinigten Platinkontakten* // Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. 1930. Band 9, Heft 2. P. 323–330.
3. Хольм Р. *Электрические контакты.* М.: Иностранная литература. 1961. 314 с.
4. Павлейно О.М., Павлов В.А., Павлейно М.А. *Влияние расплывания контактного пятна на процесс импульсного нагрева электродов* // Электронная обработка материалов. 2011. Т. 47. № 4. С. 142–149.
5. Плохов И.В. *Модель динамики токопередачи через скользящий контакт* // Электротехника. 2005. № 2. С. 28–33.
6. Филиппов В.В., Поляков Н.Н. *Распределения потенциала в анизотропных проводниковых кристаллах и пленках при измерении электропроводимости и коэффициента Холла* // Вести высших учебных заведений черноземья. 2011. № 2(24). С. 6–10.
7. Ершов А.А. *Краевая эллиптическая задача с дельтообразной производной на границе* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 3. С. 479–485.
8. Ершов А.А. *Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 7. С. 1064–1080.
9. Ершов А.А. *К задаче об измерении электропроводности* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 6. С. 1004–1007.
10. Полиа Г., Сеге Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике* М.: Физматлит.1962. 336 с.
11. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала* М.: Наука. 1966. 515 с.
12. Смирнов В.И. *Курс высшей математики Т.4, ч.2.* М.: Наука. 1981. 192 с.
13. Ильин А.М. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 2009. 192 с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика (в 10 т). Т. VIII. Электродинамика сплошных сред* М.: Физматлит. 2005. 656 с.
15. S. Zaremba *Sur un problème mixte relatif a l'équation de Laplace // Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie* Classe des sciences mathématiques et naturelles, série A. 1910. P. 313–344.
16. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* М.: Наука. 1976. 391 с.
17. Гадыльшин Р.Р. *Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметорм в граничном условии* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 4. С. 640–652.
18. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* М.: Наука. 1989. 336 с.
19. V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevsky *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains V. 1,2.* Birkhaeuser Verlag. Basel. 2000. 336 c.
20. Гадыльшин Р.Р. *Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа* // Соврем. математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 3–32.
21. Бикметов А.Р., Гадыльшин Р.Р. *Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n-мерной области* // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 28–64.
22. Ершов А.А. *О смешанной задаче для гармонической функции* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 7. С. 1094–1106.
23. Гадыльшин Р.Р. *Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия* // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 42–55.
24. Гадыльшин Р.Р. *Расщепление кратного собственного значения в краевой задаче для мембраны, закрепленной на малом участке границе* // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 3. С. 43–61.
25. Гадыльшин Р.Р., Шишкина Е.А. *О неравенствах Фридрихса для круга* // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 48–61.

26. Гадыльшин Р.Р., Репьевский С.В., Шишкина Е.А. *О собственном значении для лапласиана в круге с граничным условием Дирихле на малом участке границы в критическом случае* // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 56–70.
27. Гадыльшин Р.Р. *О возмущении спектра Лапласиана при смене типа граничного условия на малой части границы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 7. С. 77–88.

Рустем Рашитович Гадыльшин,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Gadylshin@yandex.ru

Александр Анатольевич Ершов,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: Ale10919@yandex.ru

Сергей Владимирович Репьевский,
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: Repyevsky@gmail.com