ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 50-56.

УДК 517.53:539

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю.Н. ДРОЖЖИНОВ, $\boxed{\text{Б.И. ЗАВЬЯЛОВ}}$

Аннотация. Под тауберовыми теоремами сравнения понимают теоремы, в которых по заданному асимптотическому поведению отношения интегральных преобразований двух (обобщенных) функций делается заключение об асимптотическом поведении отношения других интегральных преобразований этих функций. В работе доказывается тауберова теорема сравнения для обобщенных функций, преобразования Лапласа которых имеют ограниченный аргумент. В частности, такими функциями будут ядра гиперболических относительно конуса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и их фундаментальные решения.

Ключевые слова: обобщенные функции, тауберовы теоремы, квазиасимптотика, гиперболические относительно конуса операторы.

1. Введение

Теоремами тауберова типа называют теоремы, связывающие асимптотическое поведение функции (вообще говоря, обобщенной) на беконечности (или в нуле) с асимптотическим поведением ее преобразования Лапласа, Фурье или других интегральных преобразований, производящих функций и т.п., в окрестности нуля (или бесконечности). Теоремы, обратные к тауберовым, называют абелевыми.

Под тауберовыми теоремами сравнения понимают теоремы, в которых по заданному асимптотическому поведению отношения интегральных преобразований двух (обобщенных) функций делается заключение об асимптотическом поведении отношения других интегральных преобразований этих функций. В качестве одной из функции сравнения в таких теоремах используется так называемая *допустимая* обобщенная функция. Типичной одномерной тауберовой теоремой сравнения для мер является тауберова теорема М.В. Келдыша. Я приведу ее в формулировке работы [1].

Теорема 1.1 (М.В. Келдыш (1951)). *Пусть $\mu(\xi)$ и $\nu(\xi)$ положительные возрастающие функции, определенные на полуоси $(0,+\infty)$, причем равные нулю в окрестности начала координат. Пусть μ дифференциируема и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{\xi\to\infty}\mu(\xi)=\infty,\quad \alpha<\frac{\xi\mu'(\xi)}{\mu(\xi)}<\beta, \tag{1.1}$$

где $0<\beta<\alpha+1$. Если

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(t)}{(t+\xi)^{[\beta]}}\sim\int_0^\infty\frac{d\nu(t)}{(t+\xi)^{[\beta]}},\quad \xi\to+\infty,$$

Yu.N. Drozhzhinov, $\boxed{\text{B.I. Zavialov}}$, Comparison Tauberian theorems and hyperbolic operators with constant coefficients.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-50-00005).
Поступила 25 июля 2015 г.

то $\mu(\xi) \sim \nu(\xi)$ *при* $\xi \to +\infty$. *(Здесь* $[\beta]$ *— целая часть* β*.)*

Условие (1.1), называемое в литературе «тауберовым условием М.В. Келдыша», относится к *допустимым* условиям, которым должна удовлетворять одна из функций, участвующих в тауберовой теореме сравнения. В монографии [2] доказана тауберова сравнения для обобщенных функций, преобразования Лапласа которых имеют неотрицательную вещественную часть.

В работах [2, 3, 4] на основе многомерного обобщения понятия правильно меняющейся функции доказан ряд многомерных тауберовых теорем в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, в том числе и теоремы сравнения. Шкала правильно меняющихся функций изложена в [7]). Эти теоремы нашли многочисленные применения в спектральной теории, теории вероятностей и различных моделях математической физики [2, 8, 9]. Данная статья является продолжением работы [5]. Показано, что обобщенная функция, преобразование Лапласа которой имеет ограниченный аргумент – допустима, в частности, такими функциями являются ядра гиперболических относительно конуса операторов. Доказана тауберова теорема сравнения, в которой в качестве сравниваемых обобщенных функций участвуют ядра (а также и фундаментальные решения) гиперболических относительно однородных конусов операторов.

2. Основные обозначения и некоторые определения

Пусть Γ – замкнутый, острый, регулярный, телесный и однородный конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в 0.

$$\Gamma^* = [y \in \mathbb{R}^n : (y,t) \geq 0, t \in \Gamma], \quad C = \mathrm{int}\Gamma^*$$

сопряженный конус. К таким конусам, например, относятся световой конус будущего

$$\Gamma = \bar{V}_n^+ = [t = (t_0, \bar{t}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 \geqslant |\bar{t}|]$$

и положительный координатный угол

$$\bar{\mathbb{R}}_+^n = \{t \in \mathbb{R}^n : t_j \geqslant 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Эти два конуса самосопряжены.

Через $S'(\Gamma)$ обозначаем пространство обобщенных функций медленного роста с носителями в конусе Γ. Преобразование Лапласа обобщенных функций $f(t) \in S'(\Gamma)$, определяемое формулой

$$L[f(t)] \equiv \tilde{f}(z) = (f(t), e^{i(z,t)}), \quad z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in C,$$

осуществляет изоморфизм сверточной алгебры $S'(\Gamma)$ на алгебру $H(T^C)$ функций, голоморфных в трубчатой области $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ с полиномиальной оценкой роста вблизи границы:

$$|\widetilde{f}(z)| \leqslant M \frac{(1+|z|)^a}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy \in T^C,$$

при некоторых M, a, b, зависящих от $\widetilde{f}$. Здесь $\Delta_C(y)$ – расстояние от y до границы конуса C. Обобщенную функцию $f(t) \in S'(\Gamma)$ называют спектральной функцией для $\widetilde{f}(z)$.

Ядро Коши трубчатой области T^C задается формулой

$$\mathcal{K}_C(z) = L[\Theta_\Gamma(t)](z), \text{ для } z \in T^C,$$

где $\Theta_\Gamma(t)$ — характеристическая функция конуса Γ. В силу регулярности Γ ядро Коши есть делитель еденицы в алгебре $H(T^C)$. Поэтому обобщенные функции $\Theta_\Gamma^\alpha(t)$, определяемые формулой

$$\mathcal{K}_C^\alpha(z) = L[\Theta_\Gamma^\alpha(t)], \quad -\infty < \alpha < \infty,$$

образуют сверточную абелеву группу: $\Theta_\Gamma^\alpha \star \Theta_\Gamma^\beta = \Theta_\Gamma^{\alpha+\beta}$. Обобщенная функция $f^{(-\alpha)} = \Theta_\Gamma^\alpha \star f$ называется первообразной (при $\alpha < 0$ – производной) обобщенной функции $f \in S'(\Gamma)$

порядка α относительно конуса Γ. В частности, $\mu(t) = \int_{(t-\Gamma)\cap\Gamma} d\mu(t)$ — первообразная меры $d\mu(t)$ относительно конуса Γ. А половинная производная ($\alpha = -\frac{1}{2}$) относительно конуса будущего – оператор Даламбера

$$\Theta^{-\frac{1}{2}}_{V^3_+}(t) = const(\partial_0^2 - \Delta)\delta(t), \quad t = (t_0, t_1, t_2, t_3),$$

Через $\mathcal{A}(\Gamma)$ обозначим совокупность собственных линейных автоморфизмов конуса Γ, так что

$$U \in \mathcal{A}(\Gamma): \quad U\Gamma \subset \Gamma, \det U = J > 0.$$

Соответственно, оператор $V = (U^T)^{-1}$ определяет автоморфизм конуса Γ^*, поэтому $V \subset \mathcal{A}(\Gamma^*)$. Отметим, что

$$\Theta^\alpha_\Gamma(Ut) = J^{\alpha-1}\Theta^\alpha_\Gamma(t).$$

Нетрудно видеть, что для светового конуса будущего $\bar{V}^+_n$ имеем $\Theta^\sigma_{V^+_n}(t) \in L_2^{loc}$ при $\sigma > 1 - \frac{1}{n+1}$. Аналогично, для положительного октанта

$$\mathbb{R}^n_+ \text{ при } \sigma > \frac{1}{2}, \Theta^\sigma_{\mathbb{R}^n_+} \in L_2^{loc}.$$

Пусть дано семейство $\{U_k \in \mathcal{A}(\Gamma), k \in I\}$, где множество индексов I имеет $+\infty$ своей предельной точкой.

Определение. Комплекснозначная обобщенная функция $u(t) \in S'(\Gamma)$ называется *q-вполне допустимой* для семейства $\{U_k \in \mathcal{A}(\Gamma), k \in I\}$ если

1. $u^{(-q)}(t)$ – локально суммируемая функция;
2. Существует $t_0 \in \mathrm{int}\Gamma$, так что
$$\Phi_k(t) = \frac{u^{(-q)}(U_k t)}{u^{(-q)}(U_k t_0)} \overset{t\in K}{\rightrightarrows} \gamma_q(t), \quad k \to +\infty, \tag{2.1}$$
где K — произвольный компакт в $\mathrm{int}\Gamma$, а функция $\gamma_q(t) \neq 0$ и непрерывна в $int\Gamma$;
3. Существует k_0, так что $|\Phi_k(t)| \leqslant \psi(t)$ при $k > k_0$ и $t \in int\,\Gamma$, где $\psi(t)$ — функция медленного роста в Γ.

Определение 2.1. Обобщенная функция $u(t) \in S'(\Gamma)$ называется q-допустимой для конуса Γ, если для любого семейства $\{U_k \in \mathcal{A}(\Gamma), k \in I\}$ существует подпоследовательность $\{U_{k_m}, m \to \infty, k_m \in I\}$, относительно которой обобщенная функция $u(t)$ будет q-вполне допустимой. Заметим, что если функция $u(t)$ q-допустима, то она и $q + n, n = 1, 2, \ldots$ — допустима.

В работах [2, 3, 4, 5] были введены допустимые и вполне допустимые обобщенные функции, приведены примеры и некоторые достаточные условия q-допустимости. К таким функциям относится важный класс обобщенных функций, преобразования Лапласа которых имеют ограниченный аргумент. В частности, к этому классу принадлежат ядра пассивных операторов (их преобразования Лапласа имеют неотрицательную вещественную часть).

Определение 2.2. Будем говорить, что комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция $u(t) \in S'(\Gamma)$ удовлетворяет *обобщенному условию Келдыша*, если существует множество векторов $\mathcal{O} \subset \Gamma$

$$U\mathcal{O} \subset \mathcal{O}, \quad \forall U \in \mathcal{A}(\Gamma); \quad \mathrm{Lin}(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^n$$

такое, что множество

$$D = \{\xi \in \mathbb{C}: \quad \xi = \frac{(\ell, t)(\ell, \mathrm{grad}u(t))}{u(t)}, \quad t \in int\Gamma, |\ell| = 1, \ell \in \mathcal{O}\}$$

ограничено, и $\bar{D} \subset \{\xi \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\xi > -1\}$.

В работе [5] показано, что функции, удовлетворяющие обобщенному условию Келдыша, являются нуль-допустимыми для конуса Γ, если Γ – положительный координатный угол или световой конус будущего. Там же доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть $u(t) \in S'(\Gamma)$ вещественна и*

$$|arg\ \widetilde{u}(z)| \leqslant \frac{\pi}{2}m, \qquad z \in T^C,$$

где m – целое число. Если

$$\Theta_\Gamma^\sigma(t) \in L_2^{loc},$$

то $u(t)$ –$[(2+\sigma)m]$ — допустима для Γ.

3. Тауберовы теоремы сравнения

В работе [5] доказана весьма общая тауберова теорема для голоморфных функций ограниченного аргумента.

Теорема 3.1. *Пусть $f(t) \in S'(\Gamma)$ и $|arg\ \widetilde{f}(z)| \leqslant \frac{\pi}{2}m, \quad z \in T^C$. Пусть еще даны последовательность чисел $\{\rho_k, r \in I\}$ и семейство $\{U_k \in \mathcal{A}(\Gamma), k \in I\}$. Если найдется область $\Omega \subset C$ такая, что*

$$\frac{1}{J_k \rho_k}\widetilde{f}(V_k y) \longrightarrow \widetilde{h}(y), \quad k \to \infty, \quad y \in \Omega,$$

то для любого $q \geqslant (2+\sigma)m$, где σ таково, что $\Theta_\Gamma^\sigma \in L_2^{loc}$,

$$\frac{1}{J_k^q \rho_k} f^{(-q)}(U_k t) \overset{t\in K}{\rightrightarrows} \gamma_q(t), \quad k \to \infty, \tag{3.1}$$

где γ_q непрерывна, а K — произвольный компакт в $int\Gamma$. Кроме того, $\widetilde{\gamma}_q(iy) = \widetilde{h}(iy)\mathcal{K}_C^q(iy)$, и справедлива оценка

$$\Big|\frac{1}{J_k^q \rho_k} f^{(-q)}(U_k t)\Big| \leqslant \psi(t), \qquad k > k_0,$$

для некоторого k_0, где $\psi(t)$ полиномиального роста в Γ.

Отметим, что согласно теореме 2.1, функция $\gamma_q(t)$ совпадает с функцией, определяемой условием q-вполне допустимости, см. (2.1). Доказательство существенно использует общую тауберову теорему работы [2] и специальную оценку ядра Коши острого регулярного конуса, [6]. Заметим, что в приложениях предполагают, что семейство $\{U_k, k > 0\}$ – вещественная непрерывная мультипликативная группа линейных автоморфизмов конуса Γ, такая, что $\{U_k(t), k > 0\}$ определяют фазовые траектории простейшей динамической системы, у которой вещественные части всех собственных значений генератора этой группы одного знака [10, 11].

Основная цель этой работы — доказать тауберову теорему сравнения для голоморфных функций ограниченного аргумента.

Теорема 3.2. *Пусть $f(t) \in S'(\Gamma)$, $|arg\widetilde{f}(z)| \leqslant \frac{\pi}{2}m$ при $z \in T^C$, и функция $u(t)$ q-допустима для Γ, причем $q \geqslant (2+\sigma)m$ и $\Theta_\Gamma^\sigma \in L_2^{loc}$, а $\{U_k, k \in I\}$ — заданное семейство линейных автоморфизмов конуса Γ. Если существует область $\Omega \subset C$ такая, что*

$$\frac{\widetilde{f}(V_k y)}{\widetilde{u}(V_k y)} \longrightarrow \widetilde{p}(y), \quad k \to \infty, k \in I, \quad y \in \Omega, \tag{3.2}$$

то

$$\frac{f^{(-q)}(U_k t)}{u^{(-q)}(U_k t)} \overset{t\in K}{\rightrightarrows} \frac{\gamma_q(t) * p(t)}{\gamma_q(t)}, \quad k \to \infty, \tag{3.3}$$

где K — произвольный компакт из $int\Gamma$, а $\widetilde{p}(z) = L[p(t)]$, и функция $\gamma_q(t)$ определяется формулой (3.1).

Доказательство. Пусть условие (3.2) выполнено, а (3.3) нет, то есть для некоторых чисел $m_0, \varepsilon_0 > 0$ существует подпоследовательность

$$\{U_{k_m} \subset \mathcal{A}(\Gamma), \quad k_m \in I, \quad m \to \infty\}$$

и последовательность точек $\{t_m \in K\}$, так что

$$\left| \frac{f^{(-q)}(U_{k_m} t_m)}{u^{(-q)}(U_{k_m} t_m)} - \frac{\gamma_q(t) * p(t)}{\gamma_q(t)}\bigg|_{t=t_m} \right| > \varepsilon_0, \quad m > m_0. \tag{3.4}$$

Полагая $\rho_k = \frac{1}{J_k^q} u^{(-q)}(U_k t_0)$, учитывая q-допустимость функции $u(t)$, имеем для некоторой подпоследовательности $\{U_{k'_m}, m' \to \infty\}$

$$\frac{1}{J_{k_m}^q \rho_{k_m}} u^{(-q)}(U_{k_m} t) = \frac{u^{(-q)}(U_{k_m} t)}{u^{(-q)}(U_{k_m} t_0)} \overset{t \in K}{\rightrightarrows} \gamma_q(t), \quad m \to \infty. \tag{3.5}$$

Здесь мы опустили штрихи у m, что не нарушает общности в доказательстве. Кроме того, для $y \in \Omega$ имеем

$$\frac{\widetilde{f}(V_{k_m} y)}{J_{k_m} \rho_{k_m}} = \frac{\widetilde{f}(V_k y)}{\widetilde{u}(V_k y)} \frac{J_{k_m}^{q-1} \widetilde{u}(V_{k_m} y)}{u(U_{k_m} t_0)} \to \widetilde{p}(y) \mathcal{K}_C^{(-q)}(iy) \widetilde{\gamma}_q(iy). \tag{3.6}$$

Здесь мы учли, что первый сомножитель слева в силу (3.2) стремится к $\widetilde{p}(iy)$, а второй – согласно лемме 1 §5.2 монографии [2] – стремится к $\mathcal{K}_C^{(-q)}(iy)\widetilde{\gamma}_q(iy)$. Согласно тауберовой теореме 3.1 для $m \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{J_{k_m}^q \rho_{k_m}} f^{(-q)}(U_{k_m} t) = \frac{f^{(-q)}(U_k t)}{u^{(-q)}(U_k t)} \frac{u^{(-q)}(U_{k_m} t)}{u^{(-q)}(U_{k_m} t_0)} \overset{t \in K}{\rightrightarrows} p(t) \gamma_q(t). \tag{3.7}$$

Сравнивая теперь соотношения (3.5), (3.7) и (3.4), приходим к противоречию, что и доказывает теорему.

Теорема 3.1 и теорема 3.2 позволяют исследовать квазиасимптотику ядер гиперболических относительно конуса C дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и их фундаментальных решений.

Пусть $U = \{U_k, k > 0\}$ — мультипликативная, однопараметрическая группа линейных автоморфизмов конуса Γ, так что $U_k \in \mathcal{A}(\Gamma)$, причем полагаем, что $\{U_k t, k > 0, t \in \Gamma\}$ задают фазовые траектории динамической системы

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = At, \quad \tau = \ln k,$$

в которой все собственные значения матрицы A (генератора этой группы) положительны. Напомним определение квазиасимптотики обобщенной функции в шкале правильно меняющихся функций.

Пусть $f(t) \in S'(\Gamma)$ и $\rho(k)$ — правильно меняющаяся функция. Мы говорим, что f обладает квазиасимптотикой в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$ по группе $U_k \in \mathcal{A}(\Gamma)$, если для любой основной функции $\psi(t) \in S(\Gamma)$ и некоторой $g \in S'(\Gamma), g \not\equiv 0$,

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(U_{\frac{1}{k}} t), \psi(t)) \xrightarrow[k \to \infty]{} (g(t), \psi(t))$$

$$\left(\frac{1}{\rho(k)} (f(U_k t), \psi(t)) \xrightarrow[k \to \infty]{} (g(t), \psi(t)) \right). \tag{3.8}$$

Подробнее смотри [11].

Рассмотрим дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами m-порядка

$$Q(\partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha, \qquad \sum_{|\alpha| = m} |a_\alpha| \neq 0.$$

Оператор $Q(\partial)$ называется *гиперболическим относительно конуса* C, если существует точка $y_0 \in \mathbb{R}^n$, такая что $Q(y_0 - iz) \neq 0, \quad z \in T^C$. Положим $P(\partial) = Q(y_0 + \partial)$, так что $P(-iz) = Q(y_0 - iz) \neq 0$ и, следовательно, гиперболический полином.

Лемма 3.1. *Гиперболический полином $P(-iz)$, отличный от нуля в T^C, имеет там ограниченный аргумент.*

Доказательство в [2].

Пусть $P_i(\partial), i = 1, 2$, гиперболические операторы относительно конуса C и $\mathcal{E}_i(t) \in S'(\Gamma)$, соответствующие им фундаментальные решения, так что для преобразования Лапласа имеем

$$P_i(-iz)\widetilde{\mathcal{E}}_i(-iz) = 1, \quad i = 1, 2, \quad z \in T^C. \tag{3.9}$$

Отсюда, в частности, следует, что преобразование Лапласа фундаментальных решений гиперболических операторов имеют ограниченный аргумент в T^C, и, кроме того, для группы $\{V_k \in \mathcal{A}(C), k > 0\}$ (точнее для фазовых траекторий, определяемых этой группой),

$$\frac{\widetilde{\mathcal{E}}_1(V_k y)}{\widetilde{\mathcal{E}}_2(V_k y)} = \frac{P_2(V_k y)}{P_1(V_k y)}, \qquad y \in C. \tag{3.10}$$

Теперь, пользуясь доказанной теоремой 3.2, получаем следующую тауберову теорему сравнения для фундаментальных решений гиперболических операторов.

Теорема 3.3. *Пусть $P_i(\partial), i = 1, 2$, гиперболические операторы относительно конуса $C = int\Gamma^*$ и $\mathcal{E}_i(t) \in S'(\Gamma)$, соответствующие им фундаментальные решения. Пусть также σ таково, что $\Theta^\sigma_\Gamma(t) \in L_2^{loc}$. Если для некоторой области $\Omega \in C$ и группы $\{V_k \in \mathcal{A}(C), k > 0\}$*

$$\frac{P_2(V_k y)}{P_1(V_k y)} \overset{y\in\Omega}{\rightrightarrows} \widetilde{p}(y), \quad k \to \infty, \tag{3.11}$$

то для некоторого q

$$\frac{\mathcal{E}_1^{(-q)}(U_k t)}{\mathcal{E}_2^{(-q)}(U_k t)} \overset{t\in K}{\rightrightarrows} \frac{\gamma_q(t) * p(t)}{\gamma_q(t)}, \quad k \to \infty. \tag{3.12}$$

Здесь K — произвольный компакт из $int\Gamma$, а $\widetilde{p}(z) = L[p(t)]$ и функция $\gamma_q(t)$ определяется формулой (3.1), в которой $u(t)$ следует заменить на $P_1(t)$. При этом $q > (2 + \sigma)m$, где m определяется из теоремы 2.1.

Пример. Рассмотрим гиперболические относительно конуса $\bar{\mathbb{R}}^2_+$ дифференциальные операторы

$$P_1(\partial) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\delta(t_1, t_2)*, \qquad P_2(\partial) = (\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2})\delta(t_1, t_2) * .$$

В $T^C = \mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}^2_+$ преобразование Лапласа их ядер $\widetilde{P}_1(-iz) = -z_1 z_2$ и $\widetilde{P}_2(-iz) = -(z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2)$ не обращается в нуль (здесь $m = 4$). Имеем

$$\widetilde{P}_1(y) = y_1 y_2, \quad \gamma_1(t) = \Theta_{\mathbb{R}^2_+}(t), \quad \widetilde{P}_2(y) = y_1^2 + 2y_1 y_2 + y_2^2,$$

где $\Theta_{\mathbb{R}^2_+}(t)$ с точностью постоянной – фундаментальное решение оператора P_1. В качестве фазовых траекторий используем лучи, выходящие из начала координат,

$$U_k t = kt, \quad V_k y = \frac{1}{k}y, \quad \frac{dt}{d\tau} = Et, \quad \tau = \ln k,$$

то есть генератор группы – единичная матрица. Из соотношения (3.12) (с точностью до постоянной) имеем

$$1 = c\mathcal{E}_2(t)[t_2\delta(t_1) + 2\delta(t_1, t_2) + t_1\delta(t_2)].$$

Отметим, что это соотношение носит условный характер (делить единицу на сомножитель справа нельзя, нужно сначала взять соответствующие первообразные относительно конуса $\bar{\mathbb{R}}^2_+$). Согласно теореме достаточно взять девятую первообразную (реально достаточно трех). Многочисленные другие применения многомерных тауберовых теорем можно найти в главе IV монографии [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. *Распределение собственных значений.* М.: Наука, 1979.
2. Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций.* М.: Наука, 1986.
3. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы сравнения для обобщенных функций в конусах* // Матем. сб. 1985. Т. 126, № 4. С. 515–542.
4. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные абелевы и тауберовы теоремы сравнения* // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 9. С. 1234–1258.
5. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы сравнения для голоморфных функций ограниченного аргумента* // Известия АН СССР, сер. матем. 1991. Т. 55, № 6. С. 1159–1155.
6. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.
7. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука, 1985.
8. Якымив А.Л. *Вероятностные приложения тауберовых теорем.* М.: Физматлит, 2005.
9. Бойматов К.Х. *Многомерные спектральные асимптотики эллиптических операторов в областях, удовлетворяющих условию конуса* // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 1.
10. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Обобщенные функции асимптотически однородные вдоль траекторий неустойчивого вырожденного узла* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та, сер. физ-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 68–82.
11. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Обобщенные функции асимптотически однородные по траекториям, определяемым однопараметрическими группами* // Известия РАН, сер. математическая. 2012. Т. 76, № 3. С. 39–92.

Юрий Николаевич Дрожжинов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: `drozzin@mi.ras.ru`

Борис Иванович Завьялов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: `bzavial@mi.ras.ru`