ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 39-49.

УДК 517.95

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ $(2+1)$-МЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА–ФОККЕРА–ПЛАНКА

В.В. ДАВИДОВИЧ

Аннотация. Выполнена предварительная групповая классификация класса $(2+1)$-мерных линейных ультрапараболических уравнений относительно разрешимых алгебр Ли. Показано, что существует одно, шесть и четыре неэквивалентных ультрапараболических уравнений, которые допускают соответственно двух-, трех- и четырехмерные разрешимые алгебри Ли.

Ключевые слова: ультрапараболическое уравнение, преобразование эквивалентности, групповая классификация, максимальная алгебра инвариантности, разрешимая алгебра Ли.

Mathematics Subject Classification: 35K70, 76M60

1. Введение

Рассмотрим класс $(2+1)$-мерных линейных ультрапараболических уравнений Колмогорова–Фоккера–Планка:

$$u_t = A(t,x,y)\,u_{xx} + B(t,x,y)\,u_x + C(t,x,y)\,u_y + D(t,x,y)\,u, \tag{1}$$

где A, B, C и D — произвольные гладкие функции своих переменных в некоторой области пространства $\mathbb{R}^3$, $AC \neq 0$.

Уравнения из класса (1) широко используют для описания разнообразных процессов в физике и при математических расчетах в экономике [1, 2, 3, 4, 5]. В частности, среди известных уравнений из класса (1) стоит упомянуть такие:
уравнение Крамерса [1]

$$u_t = -(xu)_y + (V'(y)u)_x + \gamma(xu + u_x)_x, \tag{2}$$

которое описывает движение частицы в флуктуирующей среде (функция $u = u(t,x,y)$ — плотность вероятности, функция $V(y)$ — внешний потенциал, γ — постоянная); для вычисления значения азиатского опциона [5] используют уравнение

$$u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, u_{xx} - rx\, u_x + \log x\, u_y + r\, u, \tag{3}$$

или

$$u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, u_{xx} - rx\, u_x + \frac{x}{t_0 - T}\, u_y + r\, u, \tag{4}$$

где $u(t,x,y)$ — значение азиатского опциона, которое зависит от курса акций (переменная x) в момент времени t, y — среднее значение курса акций, T — срок действия контракта, t_0 — начало контракта (обычно кладут $t_0 = 0$), r — процентная ставка, σ — волатильность.

V.V. Davydovych, Preliminary group classification of $(2+1)$-dimensional linear ultraparabolic Kolmogorov–Fokker–Planck equations.

Поступила 24 ноября 2014 г.

На сегодняшний день симметрийные свойства некоторых подклассов класса (1) исследовались в работах [6]–[9]. В частности, в работе [7] проведена групповая классификация класса уравнений (2). В статье [10] показано, что (3) и (4) сводятся соответственно к уравнениям

$$u_t = u_{xx} - xu_y \tag{5}$$

и

$$u_t = u_{xx} + e^x u_y. \tag{6}$$

Отметим, что для уравнения (5), которое было получено Колмогоровым в 1934 г. для описания неизотропних диффузионных процессов, известно фундаментальное решение [2]. Кроме этого, также найдены максимальные алгебры инвариантности (МАИ) уравнений (5) и (6) [8, 9].

Поскольку каждое уравнение из класса (1) является линейным, то при фиксированных значениях функций A, B, C и D его МАИ является бесконечномерной с оператором $p\,\partial_u$, где функция $p\,(t,x,y)$ — произвольное гладкое решение уравнения (1). Таким образом, при проведении предварительной групповой классификации мы будем исключать из рассмотрения операторы вида $p\,\partial_u$, то есть будем искать только конечномерные части МАИ уравнений из класса (1). В частности, **целью работы** является нахождение таких уравнений вида (1), МАИ которых разрешимы и имеют размерность не более 4-х.

При изучении симметрийных свойств класса (1) невозможно применить классический метод Ли–Овсянникова. Это обусловлено тем, что произвольные элементы A, B, C и D исследуемого класса зависят от переменных t, x и y. Следовательно, при проведении предварительной групповой классификации будем использовать метод Жданова–Лагно, предложенный в работе [11] (см. подробнее [12]). На сегодняшний день указанный метод используется при рассмотрении широких классов дифференциальных уравнений [13]–[17].

2. Преобразование эквивалентности и оператор инвариантности класса уравнений (1)

Важную роль в процессе исследования симметрийных свойств класса дифференциальных уравнений методом Жданова–Лагно играют преобразования эквивалентности (точечные преобразования, которые сводят произвольно выбранное уравнение из заданного класса к некоторому другому уравнению из этого же класса). В частности, метод Жданова–Лагно эффективен при изучении классов дифференциальных уравнений, допускающих широкую группу преобразований эквивалентности.

Теорема 1. *Преобразования эквивалентности класса уравнений (1) имеют вид*

$$\bar{t} = T(t,y),\ \bar{x} = X(t,x,y),\ \bar{y} = Y(t,y),\ v = \varphi(t,x,y)u \tag{7}$$

($T, X,\ Y$ и φ — произвольные гладкие функции, $\varphi X_x(T_tY_y - T_yY_t) \neq 0$) и приводят произвольно выбранное уравнение из класса (1) в некоторое другое уравнение вида

$$v_{\bar{t}} = \tilde{A}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})v_{\bar{x}\bar{x}} + \tilde{B}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})v_{\bar{x}} + \tilde{C}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})v_{\bar{y}} + \tilde{D}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})v, \tag{8}$$

где функции $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ находятся из следующих соотношений:

$$(T_t - CT_y)\,\tilde{A} = X_x^2 A, \tag{9}$$

$$(T_t - CT_y)\,\tilde{B} = X_yC - X_t + \left(X_{xx} - 2\frac{\varphi_x}{\varphi}\,X_x\right)A + X_xB, \tag{10}$$

$$(T_t - CT_y)\,\tilde{C} = Y_yC - Y_t, \tag{11}$$

$$(T_t - CT_y)\,\tilde{D} = D - \frac{\varphi_y}{\varphi}C + \frac{\varphi_t}{\varphi} + \left(2\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)A - \frac{\varphi_x}{\varphi}B. \tag{12}$$

Доказательство теоремы основывается на прямом методе построения группы преобразований эквивалентности (см., например, [11]).

Замечание 1. *Преобразования эквивалентности (7) позволяют упростить класс (1) (например, положить $B = D = 0$). Однако при проведении предварительной групповой классификации исследуемого класса мы будем рассматривать именно уравнения вида (1). Это обусловлено особенностями метода, который использован в работе.*

Замечание 2. *В случае $C_x = 0$ существует преобразование, которое сводит уравнение (1) к уравнению с функцией $C = 0$ (следует из соотношения (11)). Таким образом, будем рассматривать только случай $C_x \neq 0$.*

Перед тем, как перейти к применению метода Жданова–Лагно, найдем общий вид оператора симметрии Ли, который допускается классом уравнений (1).

Теорема 2. *Оператор инвариантности класса уравнений (1) имеет следующий вид:*

$$X = \tau(t,y)\,\partial_t + \xi^1(t,x,y)\,\partial_x + \xi^2(t,y)\,\partial_y + (r(t,x,y)\,u + p(t,x,y))\,\partial_u, \tag{13}$$

где τ, ξ^1, ξ^2, r и p — неизвестные гладкие функции, которые находятся из системы определяющих уравнений (СОУ)

$$A_x\,\xi^1 + A_y\,\xi^2 + A_t\,\tau + A\left(\tau_t - 2\,\xi^1_x - C\tau_y\right) = 0, \tag{14}$$

$$B_x\,\xi^1 + B_y\,\xi^2 + B_t\,\tau + B\left(\tau_t - \xi^1_x - C\tau_y\right) + A\left(2r_x - \xi^1_{xx}\right) - C\xi^1_y + \xi^1_t = 0, \tag{15}$$

$$C_x\,\xi^1 + C_y\,\xi^2 + C_t\,\tau + C\left(\tau_t - \xi^2_y - C\tau_y\right) + \xi^2_t = 0, \tag{16}$$

$$D_x\,\xi^1 + D_y\,\xi^2 + D_t\,\tau + D\left(\tau_t - C\tau_y\right) + Ar_{xx} + Br_x + Cr_y - r_t = 0, \tag{17}$$

$$p_t = Ap_{xx} + Bp_x + Cp_y + Dp. \tag{18}$$

Доказательство теоремы основывается на применении критерия инвариантности дифференциальных уравнений (см., например, монографии [12, 18, 19, 20, 21]).

Учитывая тот факт, что мы исключаем из рассмотрения операторы вида $p\,\partial_u$ (которые отвечают за бесконечномерную часть МАИ уравнения (1)), искомый оператор симметрии Ли (13) приобретает вид

$$X = \tau(t,y)\,\partial_t + \xi^1(t,x,y)\,\partial_x + \xi^2(t,y)\,\partial_y + r(t,x,y)u\,\partial_u. \tag{19}$$

3. Низкоразмерные разрешимые алгебры Ли класса уравнений (1)

Из СОУ (14)–(17) следует, что при произвольных значениях функций A, B, C и D алгебра инвариантности уравнения (1) является одномерной с базисным оператором $u\partial_u$. Поскольку указанный оператор коммутирует с операторами вида (19), то среди двумерных только абелева алгебра [22]

$$2g_1 : \,[e_1, e_2] = 0$$

может быть алгеброй Ли уравнения (1).

Для построения всех возможных неэквивалентных реализаций алгебры $2g_1$ применим преобразования (7) к оператору (19):

$$\bar{X} = \left(\tau T_t + \xi^2 T_y\right)\partial_{\bar{t}} + \left(\tau X_t + \xi^1 X_x + \xi^2 T_y\right)\partial_{\bar{x}} + \left(\tau Y_t + \xi^2 Y_y\right)\partial_{\bar{y}} + \left(\tau\varphi_t + \xi^1\varphi_x + \xi^2\varphi_y + \varphi\, r\right) u\partial_{\bar{v}}. \quad (20)$$

Из (20) следует, что в случае $(\tau)^2 + (\xi^2)^2 \neq 0$ существуют преобразования, которые произвольно выбранный оператор (19) сводят к оператору $\partial_{\bar{t}}$. В частности, указанные преобразования можно найти, решив следующие уравнения:

$$\tau T_t + \xi^2 T_y = 1,\ \tau X_t + \xi^1 X_x + \xi^2 T_y = 0,$$

$$\tau Y_t + \xi^2 Y_y = 0,\ \tau\varphi_t + \xi^1\varphi_x + \xi^2\varphi_y + \varphi\, r = 0.$$

В случае $\tau = \xi^2 = 0,\ \xi^1 \neq 0$ получаем оператор $\partial_{\bar{x}}$. Если $\tau = \xi^2 = \xi^1 = 0$, то оператор (20) имеет вид $rv\partial_v$ и сводится к одному из операторов:

$$\bar{x}v\partial_v\ (r_x \neq 0),\ \bar{t}\,v\partial_v\ \left((r_t)^2 + (r_y)^2 \neq 0\right),\ \alpha v\partial_v\ (r = \alpha = const).$$

Следовательно, имеет место теорема.

Теорема 3. *С точностью до преобразований (7) и постоянного ненулевого множителя, произвольно выбранный оператор вида (19) можно свести к одному из операторов*

$$\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ tu\partial_u,\ xu\partial_u. \quad (21)$$

Среди операторов (21) только операторы $\partial_t,\ \partial_x$ и $u\partial_u$ удовлетворяют СОУ (14)–(17). Однако оператор ∂_x приводит к условию $C_x = 0$ и исключается из рассмотрения. Таким образом, мы получили одну двумерную алгебру Ли, которую допускает уравнение (1).

Теорема 4. *С точностью до преобразований эквивалентности (7) существует единственный класс уравнений*

$$u_t = A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_x + C(x,y)u_y + D(x,y)u, \quad (22)$$

который допускает двумерную алгебру Ли операторов симметрии вида (19), а именно:

$$2{g_1}^1 = < \partial_t,\ u\partial_u > .$$

При произвольных значениях функций $A,\ B,\ C$ и D эта алгебра является МАИ класса уравнений (22).

При построении трехмерных разрешимых алгебр инвариантности класса уравнений (1) достаточно к операторам алгебры $2g_1^1$ добавить один оператор вида (19) и найти все возможные неэквивалентные реализации, удовлетворяющие соответствующим коммутационным соотношениям и СОУ (14)–(17). При этом будем использовать преобразование

$$\bar{t} = t + T(y),\ \bar{x} = X(x,y),\ \bar{y} = Y(y),\ v = \varphi(x,y)u, \quad (23)$$

которые не изменяют вид оператора ∂_t.

Согласно классификации Мубаракзянова [22] существует 7 неизоморфных трехмерных разрешимых алгебр Ли. Однако нам необходимо рассмотреть только те из них, которые могут содержать оператор $u\partial_u$, а именно:

$$3g_1:\ [e_i, e_j] = 0\ (i,j = 1,2,3);$$

$$g_2 \oplus g_1:\ [e_1, e_2] = e_2;$$

$$g_{3.1}:\ [e_2, e_3] = e_1.$$

Поскольку процесс построения реализаций для каждой из указанных алгебр является практически аналогичным, то рассмотрим только алгебру $3g_1$ с базисными операторами:

$$e_1 = \partial_t,\ e_2 = u\partial_u,\ e_3 = X,$$

где X — произвольный оператор вида (19).

Из условия $[\partial_t, X] = 0$ получаем:

$$X = \tau(y)\,\partial_t + \xi^1(x,y)\,\partial_x + \xi^2(y)\,\partial_y + r(x,y)u\,\partial_u.$$

Применив преобразования (23) к оператору X, имеем

$$\bar{X} = \left(\tau + \xi^2 T_y\right)\partial_{\bar{t}} + \left(\xi^1 X_x + \xi^2 T_y\right)\partial_{\bar{x}} + \xi^2 Y_y\,\partial_{\bar{y}} + \left(\xi^1\varphi_x + \xi^2\varphi_y + \varphi\, r\right) u\partial_{\bar{v}}. \qquad (24)$$

Проведя аналогичные приведенным в теореме 3 вычисления, получаем операторы:

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_t,\ y\partial_t + \partial_x,\ xu\partial_u,\ yu\partial_u,\ y\partial_t + xu\partial_u,\ y\partial_t + r(y)u\partial_u\ (r' \neq 0). \qquad (25)$$

Подставив каждый из операторов (25) в СОУ (14)–(17) (с функциями A, B, C и D, которые зависят только от переменных x и y), установили, что только две реализации трехмерной разрешимой алгебры $3g_1$ удовлетворяют условию задачи, а именно:

$$3{g_1}^1 = <\partial_t,\ u\partial_u,\ \partial_y>,\ u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + D(x)u;$$

$$3{g_1}^2 = <\partial_t,\ u\partial_u,\ y\partial_t + \partial_x>,\ u_t = x^{-1}\left(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + D(y)u\right).$$

При рассмотрении алгебры $g_2 \oplus g_1$ мы получили следующие четыре неэквивалентные (с точностью до преобразований (23)) реализации:

$$g_2 \oplus {g_1}^1 = <\partial_t,\ e^t\partial_y,\ u\partial_u,>,$$

$$g_2 \oplus {g_1}^2 = < -t\partial_t + \partial_x,\ \partial_t,\ u\partial_u>,$$

$$g_2 \oplus {g_1}^3 = < -t\partial_t + \partial_y,\ \partial_t,\ u\partial_u>,$$

$$g_2 \oplus {g_1}^4 = <\partial_t,\ e^t(y\partial_t + \partial_x),\ u\partial_u,>,$$

которые удовлетворяют условию задачи.

Однако среди указанных реализаций есть эквивалентные с точностью до преобразований (7). Действительно, замены

$$\bar{t} = y,\ \bar{y} = te^y \text{ и } \bar{t} = -y^{-1}e^{-t},\ \bar{x} = t - xy$$

сводят соответственно $g_2 \oplus {g_1}^3$ в $g_2 \oplus {g_1}^1$ и $g_2 \oplus {g_1}^4$ в $g_2 \oplus {g_1}^2$.

Таким образом, получаем две неэквивалентные (с точностью до преобразований (7)) реализации алгебры $g_2 \oplus g_1$ и соответствующие им классы уравнений

$$g_2 \oplus {g_1}^1 = <\partial_t,\ e^t\partial_y,\ u\partial_u,>,\ u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + \left(C(x) - y\right)u_y + D(x)u;$$

$$g_2 \oplus {g_1}^2 = < -t\partial_t + \partial_x,\ \partial_t,\ u\partial_u>,\ u_t = e^x\left(A(y)u_{xx} + B(y)u_x + C(y)u_y + D(y)u\right).$$

При рассмотрении алгебры $g_{3.1}$ мы также получили две неэквивалентные (с точностью до преобразований (7)) реализации и соответствующие им классы уравнений

$$g_{3.1}{}^1 = <u\partial_u,\ \partial_t,\ \partial_y + tu\partial_u>,\ u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + (D(x)+y)\,u;$$

$$g_{3.1}{}^2 = <u\partial_u,\ \partial_t,\ y\partial_t + \partial_x + tu\partial_u>,$$
$$u_t = x^{-1}\left(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + \left(D(y) + \frac{x^2}{2}\right)u\right).$$

Объединив полученные результаты, сформулируем теорему.

Теорема 5. *С точностью до преобразований эквивалентности (7) существует шесть классов уравнений вида (1), которые допускают трехмерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии вида (19), а именно:*

$$3g_1{}^1 = <\partial_t,\ u\partial_u,\ \partial_y>,$$
$$u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + D(x)u; \tag{26}$$
$$3g_1{}^2 = <\partial_t,\ u\partial_u,\ y\partial_t + \partial_x>,$$
$$u_t = x^{-1}\left(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + D(y)u\right); \tag{27}$$
$$g_2 \oplus g_1{}^1 = <\partial_t,\ e^t\partial_y,\ u\partial_u>,$$
$$u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + (C(x) - y)\,u_y + D(x)u; \tag{28}$$
$$g_2 \oplus g_1{}^2 = <-t\partial_t + \partial_x,\ \partial_t,\ u\partial_u>,$$
$$u_t = e^x\left(A(y)u_{xx} + B(y)u_x + C(y)u_y + D(y)u\right); \tag{29}$$
$$g_{3.1}{}^1 = <u\partial_u,\ \partial_t,\ \partial_y + tu\partial_u>,$$
$$u_t = A(x)u_{xx} + B(x)u_x + C(x)u_y + (D(x)+y)\,u; \tag{30}$$
$$g_{3.1}{}^2 = <u\partial_u,\ \partial_t,\ y\partial_t + \partial_x + tu\partial_u>,$$
$$u_t = x^{-1}\left(A(y)u_{xx} + B(y)u_x - u_y + \left(D(y) + \frac{x^2}{2}\right)u\right). \tag{31}$$

При произвольных значениях функций A, B, C и D каждая из полученных алгебр является МАИ соответствующего ей класса уравнений.

4. 4-мерные разрешимые алгебры Ли операторов симметрии вида (19) класса уравнений (1)

Перед тем, как перейти к построению 4-мерных разрешимых алгебр Ли класса уравнений (1), заметим, что при некоторых фиксированных значениях функций A, B и D уравнения (27) и (31) допускают алгебры Ли размерности 5 и выше. Таким образом, мы исключаем указанные уравнения из дальнейшего рассмотрения. Отметим также, что для класса уравнений (29) эффективным является применение прямого метода построения МАИ вместо метода Жданова–Лагно. В частности, применив к (29) преобразования

$$\bar{t} = -\int \frac{\exp\left(-\int \frac{B}{C}dy\right)}{C}dy,\ \bar{y} = -t,\ \bar{x} = -x + \int \frac{B}{C}dy,\ v = \exp\left(\int \frac{D}{C}dy\right)u,$$

получаем

$$u_t = A(t)u_{xx} + e^x u_y. \tag{32}$$

Теорема 6. *При произвольном значении функции $A(t)$ класс уравнений (32) допускает 3-мерную МАИ операторов симметрии вида (19):*

$$<\partial_y,\ \partial_x + y\partial_y,\ u\partial_u>. \tag{33}$$

С точностью до преобразований эквивалентности (7) класс уравнений (32) допускает расширение алгебры Ли (33) только в следующих двух случаях:

1) *функция* $A(t)$ *является решением уравнения*

$$\left(\frac{A'}{A^2}\right)' = aA : \tag{34}$$

$$< \frac{1}{A}\,\partial_t + \frac{A'}{A^2}\,\partial_x - \frac{a}{2}\,xu\partial_u,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y,\ u\partial_u >,$$

где $a \neq 0$ — *произвольная постоянная;*

$$2)\ A(t) = 1 : < \partial_t,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y,\ u\partial_u,\ 2y\partial_x + y^2\partial_y + (e^x - y)\,\partial_u > .$$

Замечание 3. *Уравнение (32) с функцией* $A(t)$, *которая является решением уравнения (34), преобразованием*

$$\begin{array}{l} \bar{t} = \frac{a}{2}\int A dt,\ \bar{x} = x - \ln A,\ \bar{y} = \frac{a}{2}y,\ \bar{a} = \frac{2}{a}, \\ v = \exp\left(\frac{A'}{2A^2}\,x - \frac{a}{2}\int A\ln A dt - \frac{1}{4}\int\frac{(A')^2}{A^3}dt\right)u \end{array}$$

сводится к уравнению

$$u_t = au_{xx} + e^x u_y + xu$$

с МАИ вида

$$< \partial_t,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y + tu\partial_u,\ u\partial_u > .$$

Таким образом, при исследовании симметрийных свойств класса уравнений (32) мы получили только одно уравнение с 4-мерной МАИ.

Перейдем к построению 4-мерных разрешимых алгебр Ли для классов уравнений (26), (28) и (30). В частности, согласно классификации Мубаракзянова [22] и условию задачи, нам необходимо рассмотреть следующие алгебры:

$$\begin{array}{l} 4g_1 :\ [e_i, e_j] = 0\ (i, j = 1, 2, 3, 4); \\ g_2 \oplus 2g_1 :\ [e_1, e_2] = e_2; \\ g_{3.1} \oplus g_1 :\ [e_2, e_3] = e_1; \quad g_{3.2} \oplus g_1 :\ [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2; \\ g_{3.3} \oplus g_1 :\ [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2; \\ g_{3.4} \oplus g_1 :\ [e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = he_2,\ -1 \leqslant h < 1,\ h \neq 0; \\ g_{3.5} \oplus g_1 :\ [e_1, e_3] = pe_1 - e_2,\ [e_2, e_3] = e_1 + pe_2,\ p \geq 0; \\ g_{4.1} :\ [e_2, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2; \\ g_{4.3} :\ [e_1, e_4] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_2. \end{array}$$

В результате вычислений мы получили следующие неэквивалентные 4-мерные реализации разрешимых алгебр Ли и соответствующие им уравнения:

$$g_2 \oplus 2{g_1}^1 =< \partial_t,\ e^t\partial_y,\ \partial_x + \partial_y,\ u\partial_u >,$$
$$u_t = au_{xx} + bu_x + (x-y)u_y + du; \quad (35)$$
$$g_2 \oplus 2{g_1}^2 =< \partial_x - y\partial_y,\ \partial_y,\ \partial_t,\ u\partial_u >,$$
$$u_t = au_{xx} + bu_x + e^{-x}u_y + du; \quad (36)$$
$$g_{3.1} \oplus {g_1}^1 =< \partial_y,\ \partial_t,\ \partial_x + t\partial_y,\ u\partial_u >,$$
$$u_t = au_{xx} + bu_x - xu_y + du; \quad (37)$$
$$g_{3.2} \oplus {g_1}^1 =< \partial_y,\ \partial_t,\ t\partial_t + \partial_x + (t+y)\partial_y,\ u\partial_u >,$$
$$u_t = e^{-x}\left(au_{xx} + bu_x - xe^xu_y + du\right); \quad (38)$$
$$g_{3.2} \oplus {g_1}^2 =< e^t\partial_y,\ e^t(\partial_x + t\partial_y), -\partial_t,\ u\partial_u >,$$
$$u_t = au_{xx} + (b-x)u_x - (x+y)u_y + du; \quad (39)$$
$$g_{3.4} \oplus {g_1}^1 =< e^t\partial_y,\ e^{ht}(\partial_x + \partial_y), -\partial_t,\ u\partial_u >,\ h \neq 0,\ h \neq 1,$$
$$u_t = au_{xx} + (b-hx)u_x + ((1-h)x - y)u_y + du; \quad (40)$$
$$g_{3.4} \oplus {g_1}^2 =< \partial_t,\ \partial_y,\ t\partial_t + \partial_x + hy\partial_y,\ u\partial_u >,\ h \neq 0,\ h \neq 1,$$
$$u_t = e^{-x}\left(au_{xx} + bu_x + e^{hx}u_y + du\right); \quad (41)$$
$$g_{3.5} \oplus {g_1}^1 =< \partial_t,\ \partial_y,\ (y+pt)\partial_t + \partial_x + (py-t)\partial_y,\ u\partial_u >,\ p \geq 0,$$
$$u_t = \frac{e^{-px}}{\cos x}\left(au_{xx} + bu_x + \sin x e^{px}u_y + du\right); \quad (42)$$
$${g_{4.1}}^1 =< u\partial_u,\ \partial_y,\ \partial_t,\ \partial_x + t\partial_y + yu\partial_u >,$$
$$u_t = au_{xx} + bu_x - xu_y + \left(d + \frac{x^2}{2}\right)u; \quad (43)$$
$${g_{4.1}}^2 =< u\partial_u,\ \partial_t,\ -y\partial_t + \partial_x - \frac{1}{2}y^2u\partial_u,\ \partial_y + tu\partial_u >,$$
$$u_t = x^{-1}\left(au_{xx} + bu_x + u_y + (d+xy)u\right); \quad (44)$$
$${g_{4.3}}^1 =< \partial_y,\ u\partial_u,\ \partial_t,\ \partial_x + y\partial_y + tu\partial_u >,$$
$$u_t = au_{xx} + bu_x + e^xu_y + xu; \quad (45)$$
$${g_{4.3}}^2 =< e^t\partial_y,\ u\partial_u,\ \partial_x + \partial_y + tu\partial_u,\ -\partial_t >,$$
$$u_t = au_{xx} + bu_x + (x-y)u_y + xu. \quad (46)$$

В уравнениях (35)–(46) $a \neq 0,\ b$ и d — произвольные постоянные.

К каждому из уравнений (35)–(46) применим преобразования эквивалентности (7). Результат представим в виде табл. 1.

Замечание 4. *В табл. 1 в первом столбце рядом с номерами случаев приведены номера уравнений, к которым применяется преобразование эквивалентности.*

Поскольку уравнения из случаев 1, 3, 5, 6, 9, 10 и 12 относятся к классам уравнений (27) и (31) (которые исключены из рассмотрения), то остается исследовать только уравнения из случаев 4, 7 и 8. В итоге, получаем следующую теорему.

Таблица 1

Упрощение уравнений (35)–(46) преобразованиями эквивалентности (7)

№	Замена переменных	Уравнения после замены
1. (35)	$\bar{t}=e^{-t},\ \bar{x}=-x-bt,\ \bar{y}=-e^{-t}(y+bt+b),$ $v=e^{-dt}u,\ a\to -a$	$u_t=\frac{a}{t}\,u_{xx}-xu_y$
2. (36)	$\bar{t}=at,\ \bar{x}=-x,\ \bar{y}=ay,$ $v=\exp\left(\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b^2}{4a}-d\right)t\right)u$	$u_t=u_{xx}+e^xu_y$
3. (37)	$\bar{t}=at,\ \bar{y}=ay,$ $v=\exp\left(\frac{b}{2a}\,x+\left(\frac{b^2}{4a}-d\right)t\right)u$	$u_t=u_{xx}-xu_y$
4. (38)	$\bar{t}=\frac{a}{4}t,\ \bar{x}=\exp\left(\frac{x}{2}\right),\ \bar{y}=-\frac{a}{8}y,$ $v=\exp\left(\frac{b}{2a}x+\frac{1}{4}x\right)u$	$u_t=u_{xx}+\ln x\,u_y+$ $+\frac{d}{x^2}u$
5. (39)	$\bar{t}=-2t,\ \bar{x}=(x-b)e^{-t},$ $\bar{y}=-2(y+b)e^{-t},$ $v=e^{-dt}u,\ a\to -2a$	$u_t=ae^tu_{xx}-xu_y$
6. (40)	$\bar{t}=e^{(h-1)t},\ \bar{x}=(x-\frac{b}{h})e^{-ht},\ \bar{y}=(y+\frac{h-1}{h}b)e^{-t},$ $v=e^{-dt}u,\ (h-1)k=1-3h,\ k\neq -1,\ -3$	$u_t=at^ku_{xx}-xu_y$
7. (41)	$\bar{t}=\frac{a}{4}t,\ \bar{x}=\exp\left(\frac{x}{2}\right),\ \bar{y}=\frac{a}{4}y,$ $v=\exp\left(\frac{b}{2a}x+\frac{1}{4}x\right)u,\ 2(h-1)=k,k\neq 0,-2$	$u_t=u_{xx}+x^k\,u_y+$ $+\frac{d}{x^2}u$
8. (42)	$\bar{t}=at,\ \bar{y}=ay,v=\exp\left(\frac{b}{2a}\,x\right)u$	$u_t=\frac{e^{-p\,x}}{\cos x}(u_{xx}+$ $+\sin x\,e^{p\,x}u_y+du)$
9. (43)	$v=\exp\left(\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b^2}{4a}-d\right)t\right)u$	$u_t=au_{xx}-xu_y+$ $+\frac{x^2}{2}u$
10. (44)	$\bar{t}=-ay,\ \bar{x}=x+\frac{ay^3}{3}-by,\ \bar{y}=at-\frac{a^2y^4}{12}+\frac{aby^2}{2},$ $v=\exp\left(\frac{xy^2}{2}+dy-\frac{by^3}{6}+\frac{ay^5}{20}\right)u$	$u_t=u_{xx}-xu_y$
11. (45)	$\bar{x}=x-\frac{b^2}{4a},\ \bar{y}=y\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right),$ $v=\exp\left(\frac{b}{2a}\,x\right)u$	$u_t=au_{xx}+e^xu_y+$ $+xu$
12. (46)	$\bar{t}=e^{-t},\ \bar{x}=x+at^2+bt,$ $\bar{y}=ye^{-t}-\int\frac{at^2+bt}{e^t}dt,\ a\to -a$ $v=\exp\left(-tx-\frac{1}{2}bt^2-\frac{a}{3}t^3\right)u,$	$u_t=\frac{a}{t}\,u_{xx}-xu_y$

Теорема 7. *С точностью до преобразований эквивалентности (7) существует четыре класса уравнений вида (1), МАИ которых являются 4-мерными разрешимыми алгебрами Ли операторов симметрии вида (19), а именно:*

$$
\begin{aligned}
&u_t = au_{xx} + e^x u_y + xu,\\
&< \partial_t,\ \partial_y,\ \partial_x + y\partial_y + tu\partial_u,\ u\partial_u >,\\
&u_t = u_{xx} + \ln x\, u_y + \frac{d}{x^2}u,\\
&< \partial_t,\ \partial_y,\ 2t\partial_t + x\partial_x + (2y-t)\partial_y,\ u\partial_u >,\\
&u_t = u_{xx} + x^k\, u_y + \frac{d}{x^2}u,\ (k-1)^2 + d^2 \neq 0,\ k \neq -2,\ 0,\\
&< \partial_t,\ \partial_y,\ 2t\partial_t + x\partial_x + (2+k)y\partial_y,\ u\partial_u >,\\
&u_t = \frac{e^{-p\,x}}{\cos x}\left(u_{xx} + \sin x\, e^{p\,x}u_y + du\right),\ p \geq 0,\\
&< \partial_t,\ \partial_y,\ (y+pt)\partial_t + \partial_x + (py-t)p_y,\ u\partial_u > .
\end{aligned}
$$

5. Выводы

Используя метод Жданова–Лагно и известные факты из группового анализа дифференциальных уравнений, проведена предварительная групповая классификация широкого класса $(2+1)$-мерных линейных ультрапараболических уравнений вида (1) относительно разрешимых алгебр Ли до размерности 4 включительно. В частности, было установлено, что класс уравнений (1) (с точностью до преобразований эквивалентности (7)) допускает одну двухмерную, шесть трехмерных и четыре 4-мерных разрешимых МАИ операторов симметрии вида (19). Для завершения классификационной задачи относительно конечномерных алгебр Ли необходимо исследовать уравнения (27) и (31) прямым методом, а также найти все простые алгебры (методом Жданова–Лагно), которые допускаются классом уравнений (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.W. Gardiner *Handbook of stochastic methods.* Berlin: Springer. 1985.
2. A.N. Kolmogoroff *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)* // Ann. Math. 1934. V 35, № 1. P. 116–117.
3. P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne *Option pricing: mathematical models and computation* Oxford financial press. 1993.
4. A. Pascucci *Kolmogorov equations in physics and in finance* // Prog. Nonlinear Differential Equations Appl. 2005. V 63. P. 353—364.
5. H. Geman, M. Yor *Bessel processes, Asian options, and perpetuities* // Math. Fin. 1993. V 3, № 4. P. 349–375.
6. W.M. Shtelen, V.I. Stogny *Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 1989. V 22, № 13. L539.
7. S. Spichak, V. Stogny *Symmetry analysis of the Kramers equation* // Rep. Math. Phys. 1997. V 40, № 1, P. 125–130.
8. S.V. Spichak, V.I. Stogniy, I.M. Kopas *Symmetry properties and exact solutions of the linear Kolmogorov equation* // Research Bulletin of NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", **4**, (2011), 93–97. (in Ukrainian)
9. S.S. Kovalenko, I.M. Kopas, V.I. Stogniy *Preliminary group classification of a class of generalized linear Kolmogorov equations* // Research Bulletin of NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", **4**, (2013), 67–72. (in Ukrainian)
10. E. Barucci, S. Polidoro, V. Vespri *Some results on partial differential equations and Asian options* // Math. Models Methods Appl. Sci. 2001. V 11, № 3. P. 475–497.

11. R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno *Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V 32, № 42. 7405.
12. Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И. *Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа.* Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 392 с.
13. P. Basarab-Horwath, V. Lahno, R. Zhdanov *The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations* // Acta Applicandae Mathematica. 2001. V 69, N 1. P. 43–94.
14. V. Lahno, R. Zhdanov *Group classification of nonlinear wave equations* // J. Math. Phys. 2005. V 46, № 5. 053301.
15. R. Zhdanov, V. Lahno *Group classification of the general second-order evolution equation: semi-simple invariance groups* // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V 40, № 19. 5083.
16. Q. Huang, V. Lahno, C. Z. Qu, R. Zhdanov *Preliminary group classification of a class of fourth-order evolution equations* // J. Math. Phys. 2009. V 50, № 2. 023503.
17. D.-j. Huang, H.-q. Zhang *Preliminary group classification of quasilinear third-order evolution equations* // Appl. Math. Mech. 2009. V 30. P. 275–292.
18. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* М.: Наука. 1983.
19. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978.
20. G.W. Bluman, S. Kumei,*Symmetries and Differential Equations.* New York: Springer–Verlag. 1989.
21. P.J. Olver *Applications of Lie groups to differential equations.* Berlin: Springer. 1986.
22. Мубаракзянов Г.М. *О разрешимых алгебрах Ли* // Изв. высш. учебн. завед. Математика. 1963. № 1. P. 114–123.

Василий Васильевич Давидович,
Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3,
01004, г. Киев, Украина
E-mail: davydovych@imath.kiev.ua