ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 3 (2015). С. 3-8.

УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА МНОГОМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА

С. БАЙЗАЕВ

Аннотация. Для многомерной обобщенной системы Коши-Римана изучается вопрос нётеровости в гёльдеровых пространствах функций, ограниченных на всей плоскости. Для случая постоянных коэффициентов рассматриваются задачи о решениях, определенных во всей плоскости, а также на полуплоскости, и имеющие на бесконечности полиномиальный рост. Для двух- и трехмерного случаев найдены соответствующие условия на коэффициенты, при выполнении которых пространство решений первой задачи будет конечномерным, нулевым и бесконечномерным соответственно.

Ключевые слова: многомерная обобщенная система Коши-Римана, решения полиномиального роста, гёльдеровы пространства, нётеровость.

Mathematics Subject Classification: 35J46, 35J56

1. Введение

Пусть C_α– банахово пространство комплексных вектор-функций $w(z) = (w_1(z), ..., w_n(z))$, ограниченных во всей плоскости и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем α; норма в C_α определяется по формуле

$$\|w\|_\alpha = sup\|w(z)\| + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|w(z_1) - w(z_2)\|,$$

где $\|.\|$ - норма в C^n; C^1_α– банахово пространство комплексных вектор-функций $w \in C_\alpha$ таких, что $w_z, w_{\bar z} \in C_\alpha$; норма в C^1_α определяется по формуле

$$\|w\|_{\alpha,1} = \|w\|_\alpha + \|w_z\|_\alpha + \|w_{\bar z}\|_\alpha.$$

Рассмотрим многомерную обобщенную систему Коши-Римана вида

$$Lw \equiv w_{\bar z} + A(z)\bar w = 0, \tag{1}$$

где $A(z)$–матрица, столбцы которой принадлежат пространству C_α. Для системы (1) не сохраняются многие свойства одномерной обобщенной системы Коши-Римана [1], такие как теорема Лиувилля, конечномерность пространства решений степенного роста и др. Например, при $n = 2$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ система (1) имеет бесконечное число линейно независимых, ограниченных во всей плоскости, решений $w_a(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\overline{a}z + a\overline{z})} + \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i(\overline{a}z+a\overline{z})}$, где $a = \sqrt{3}e^{i\alpha}$.

S. Baizaev, On the solutions of polynomial growth for a multidimensional generalized Cauchy-Riemann system.

Поступила 14 октября 2014 г.

2. Решения, определенные во всей плоскости

В работе [2] при $n = 2$ для частных случаев системы (1) с постоянной матрицей A рассмотрена задача о решениях, определенных во всей плоскости и растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. В работах [3, 4] для произвольного n изучен вопрос о нетривиальной разрешимости системы (1) с постоянной матрицей A в классе функций, растущих при $z \to \infty$ не быстрее чем $|z|^N$, и в случае конечномерности пространства P_N таких решений получена формула для нахождения размерности этого пространства:

$$dimP_N = 2n(N+1) - 2\sum_{k=0}^{N} rankB_k, \tag{2}$$

где $B_{2j} = \bar{A}(A\bar{A})^j, B_{2j+1} = (A\bar{A})^{j+1}$, $j = 0, 1, ..., [N/2]$. В [5] для случая слабо осциллирующих на бесконечности коэффициентов, т.е. удовлетворяющих условию вида

$$\lim_{z\to\infty} \max_{|z-\zeta|\leqslant 1} \|A(z) - A(\zeta)\| = 0,$$

найдены необходимые и достаточные условия нётеровости оператора $L : C^1_\alpha \to C_\alpha$. При условии слабой осцилляции на бесконечности коэффициентов из последовательности $\{A(z+h_k)\}$, где $h_k \to \infty$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом компакте, причем предельная матрица будет постоянной и зависит от выбора последовательности h_k. Множество таким образом построенных матриц по всевозможным последовательностям $h_k \to \infty$ обозначим через $H(A)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для того чтобы оператор $L : C^1_\alpha \to C_\alpha$ был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы для всех матриц $A_0 \in H(A)$ матрица $A_0\overline{A}_0$ не имела собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$.*

В связи с этой теоремой важным является нахождение необходимых и достаточных условий отсутствия у матрицы $A_0\overline{A}_0$ собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$.

Для случаев $n = 2, 3$ условие того, что матрица вида $A_0\overline{A}_0$ не имела собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$, можно выписать через элементы матрицы A_0. Для случая $n = 2$ соответствующие условия приведены в [4] без доказательства.

Теорема 2. *Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда матрица $A\overline{A}$ имеет отрицательное собственное значение, в том и только том случае, когда одновременно выполняются следующие четыре условия:*

$$detA \neq 0, |a| = |d|, |a|^2 + b\overline{c} < 0, ad\overline{bc} \geq 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $A\overline{A}$ имеет отрицательное собственное значение. Характеристическое уравнение для матрицы $A\overline{A}$ имеет вид

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \Delta^2 = 0, \tag{4}$$

где

$$\alpha = |a|^2 + |d|^2 + 2Re(b\overline{c}), \Delta = |detA|. \tag{5}$$

Покажем, что

$$\alpha + 2\Delta \geq 0. \tag{6}$$

Действительно, имеем

$$\alpha + 2\Delta \geq |a|^2 + |d|^2 + 2Re(b\overline{c}) + 2(|bc| - |ad|) = \\ = (|a| - |d|)^2 + 2(Re(b\overline{c}) + |b\overline{c}|) \geq 0. \tag{7}$$

Тогда $\Delta > 0$, в противном случае из неравенства (6) следует, что $\alpha \geq 0$ и собственные значения матрицы $A\overline{A}$ будут неотрицательными: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \alpha$.

Если $\alpha \geq 0$, то у уравнения (4) нет отрицательного корня. Поэтому $\alpha < 0$ и $\alpha - 2\Delta < 0$. Так как дискриминант уравнения (4) $D = (\alpha - 2\Delta)(\alpha + 2\Delta)$ неотрицательный, то из последнего неравенства, с учетом (6) следует, что $D = 0$, т.е.

$$\alpha + 2\Delta = 0. \tag{8}$$

Тогда из неравенства (7) получаем:

$$|a| = |d|, Re(b\overline{c}) + |b\overline{c}| = 0. \tag{9}$$

Далее неравенство $\alpha < 0$ означает, что $|a|^2 + b\overline{c} < 0$.

Осталось установить неравенство $ad\overline{bc} \geq 0$. Равенство (8) с учетом равенств (9) перепишем в виде

$$|ad - bc| = |bc| - |ad|. \tag{10}$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, после упрощения получим:

$$Re(ad\overline{bc}) = |adbc|. \tag{11}$$

Последнее равенство эквивалентно неравенству $ad\overline{bc} \geq 0$. Все соотношения из (3) установлены. Необходимость условий (3) доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (3). Покажем, что собственные значения матрицы $A\overline{A}$ будут отрицательными. Четвертое условие из (3) эквивалентно равенству (11), которое в свою очередь равносильно равенству (10). Тогда с учетом второго и третьего условий из (3), имеем

$$\Delta = |ad - bc| = |bc| - |ad| = -(|a|^2 + b\overline{c}).$$

Следовательно,

$$\alpha + 2\Delta = 2|a|^2 + 2b\overline{c} - 2(|a|^2 + b\overline{c}) = 0.$$

Поэтому дискриминант уравнения (4) $D = (\alpha - 2\Delta)(\alpha + 2\Delta)$ будет равен нулю, и это уравнение имеет кратный корень

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} = -\Delta,$$

который является отрицательным. Достаточность условий (3) установлена. Теорема доказана.

Для случая матриц третьего порядка справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $A-$постоянная матрица третьего порядка, $k_1 = Sp(A\overline{A})$, $k_2 = \frac{1}{2}[Sp(A\overline{A})^2 - (Sp(A\overline{A}))^2]$ и $\gamma-$ кривая состоящая из объединений левой ветви параболы $y = -\frac{x^2}{3}, x < 0$ и полуоси $y = 0, x \geq 0$. Тогда матрица $A\overline{A}$ не имеет собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$ в том и только том случае, когда $detA \neq 0$ и выполняется одно из следующих условий:*

а) точка (k_1, k_2) лежит выше кривой γ и

$$\mu^3 - k_1\mu^2 - k_2\mu - |detA|^2 < 0, \tag{12}$$

где $\mu = \frac{1}{3}(k_1 - \sqrt{k_1^2 + 3k_2})$;

б)точка (k_1, k_2) лежит на кривой γ или ниже нее.

Заметим, что след матриц вида $(A\overline{A})^m, m = 0, 1, 2, ...$ является вещественным числом.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $A\overline{A}$ не имеет собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$. Покажем, что $\Delta = |detA| \neq 0$ и выполняется условие а) или б). Характеристическое уравнение для матрицы $A\overline{A}$ имеет вид

$$p(\lambda) \equiv -\lambda^3 + k_1\lambda^2 + k_2\lambda + \Delta^2 = 0. \tag{13}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3-$ корни этого уравнения. Можно считать, что либо $\lambda_j > 0, j = 1, 2, 3$, либо $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \varepsilon + i\delta, \lambda_3 > 0$, причем $\delta \neq 0$. Очевидно, что $\Delta \neq 0$.

Через D_+ обозначим открытую область, состоящую из точек (x, y), расположенных выше кривой γ, а через D_-– дополнение этой области до всей плоскости. Пусть $K-$ точка с координатами (k_1, k_2). Возможны два случая: 1) $K \in D_+$; 2) $K \in D_-$. В первом случае либо $k_1^2 + 3k_2 > 0$ и $k_2 \leqslant 0$, либо $k_1 \geq 0$ и $k_2 > 0$. Тогда функция $p(\lambda)$ при $\lambda < 0$ имеет минимум в точке $\lambda = \mu$, и так как $p(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to -\infty$, то $p(\mu) > 0$, т.е. выполняется неравенство (12). Итак, в первом случае выполняется условие а). Во втором случае выполняется условие б). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $detA \neq 0$ и выполняется одно из условий а) или б). Покажем, что матрица $A\overline{A}$ не имеет собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$. Очевидно, $p(0) > 0$. Если выполнено условие а), то $K \in D_+$ и $min_{\lambda<0}p(\lambda) = p(\mu) > 0$. Поэтому корни уравнения (13) не лежат на полуоси $(-\infty, 0]$. Если же выполнено условие б), то при $k_1 \geq 0$ имеем $p(\lambda) > 0, \forall\lambda \leqslant 0$, а при $k_1 < 0$ имеем $p'(\lambda) < 0, \forall\lambda \in (-\infty, +\infty)$, и поэтому $p(\lambda) > p(0) > 0, \forall\lambda \leqslant 0$. Следовательно, у уравнения (13) нет корней на полуоси $(-\infty, 0]$. Достаточность условий теоремы установлена. Теорема доказана.

Пусть $M = \sigma(A\overline{A}) \bigcap(-\infty, 0]$, $M_1 = \sigma(A\overline{A}) \bigcap(-\infty, 0)$, где $\sigma(A\overline{A})-$ спектр матрицы $A\overline{A}$. Для случая $n = 3$ и необратимой матрицы A имеет место следующая теорема о структуре множеств M и M_1.

Теорема 4. *Пусть $\delta = k_1^2 + 4k_2$. Справедливы следующие утверждения:*
a) если $\delta < 0$, то $M = \{0\}$ и $M_1 = \emptyset$;
b) если $\delta = 0$, то
$M = \{0\}$ при $k_1 \geq 0$ и $M = \{\frac{k_1}{2}, 0\}$ при $k_1 < 0$;
$M_1 = \emptyset$ при $k_1 \geq 0$ и $M_1 = \{\frac{k_1}{2}\}$ при $k_1 < 0$;
c) если $\delta > 0$, то при $k_2 > 0$
$M = \{0\}$, если $k_1 \geq 0$ и $M = \{\frac{k_1}{2}, 0\}$, если $k_1 < 0$;
$M_1 = \emptyset$, если $k_1 \geq 0$ и $M_1 = \{\frac{k_1}{2}\}$, если $k_1 < 0$;
при $k_2 = 0$
$M = \{0\}$, если $k_1 \geq 0$ и $M = \{k_1, 0\}$, если $k_1 < 0$;
$M_1 = \emptyset$, если $k_1 \geq 0$ и $M_1 = \{k_1\}$, если $k_1 < 0$;
при $k_2 < 0$
$M = \{0\}$, если $k_1 > 0$ и $M = \{\frac{1}{2}(k_1 \pm \sqrt{\delta}), 0\}$, если $k_1 < 0$;
$M_1 = \emptyset$, если $k_1 \geq 0$ и $M_1 = \{\frac{1}{2}(k_1 \pm \sqrt{\delta})\}$, если $k_1 < 0$.

3. Размерность пространства P_N для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть $n = 2$ и $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Если выполняются условия (3), то пространство P_N будет бесконечномерным, если $detA \neq 0$ и остальные условия из (3) одновременно не выполняются, то пространство P_N будет нулевым. Если $detA = 0$, то пространство P_N будет ненулевым и конечномерным. В этом случае при $A = 0$ из формулы (2) имеем $dimP_N = 4(N+1)$, что согласуется с теоремой Лиувилля; если же $A \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$, $|a| + |b| > 0, \lambda-$ комплексное число, и из (2) легко получить формулы:

$dimP_N = 4N + 2$ при $a + \overline{\lambda}b = 0$ и $dimP_N = 2N + 2$ при $a + \overline{\lambda}b \neq 0$.

Пусть $n = 3$. Если $A \neq 0$, то, учитывая теорему 2, получаем, что в случае а) пространство P_N будет нулевым, а в случае б) — бесконечномерным. Если $detA = 0$, то пространство P_N будет ненулевым и конечномерным. В этом случае при $A = 0$ из формулы (2) имеем $dimP_N = 4(N + 1)$, что согласуется с теоремой Лиувилля. Пусть теперь $detA = 0$ и $A \neq 0$.

Тогда $dimP_N = 2(N+1)$ в следующих случаях: 1) при $\delta < 0$; 2) при $\delta = 0$ и $k_1 > 0$; 3) при $\delta > 0, k_1 > 0$ и $k_2 < 0$. Далее

$dimP_N = 6N + 4 - 2[rankA + rank(\bar{A}A\bar{A})]$ при $\delta = 0, k_1 = 0$ и $rank(A\bar{A}) = 1$,

$dimP_N = 6N - 4 - 2[rank(\bar{A}A\bar{A}) + rank(\bar{A}(A\bar{A})^2]$ при $\delta = 0, k_1 = 0$ и $rank(A\bar{A}) = 2$,

$dimP_N = 4N + 6 - 2rankA$ при $\delta > 0, k_1 > 0$ и $rank(A\bar{A}) = 1$,

$dimP_N = 4N + 2 - 2rank(\bar{A}A\bar{A}$ при $\delta > 0, k_1 > 0$ и $rank(A\bar{A}) = 2$.

Наконец, пространство P_N будет бесконечномерным в следующих случаях: 1) при $\delta = 0, k_1 < 0$; 2) при $k_1 < 0$ и $k_2 = 0$; 3) при $k_2 > 0$; 4) при $\delta > 0, k_1 < 0$ и $k_2 < 0$.

4. Задача на полуплоскости

Теперь для системы с постоянными коэффициентами

$$w_{\bar{z}} + A\bar{w} = 0, \tag{14}$$

где $A-$ комплексная матрица порядка n, рассмотрим следующую задачу.

Задача Р. Найти вектор-функцию $w(z)$ из класса $C^1(G) \cap C(\bar{G}), G = \{z : Imz > 0\}$, являющуюся решением системы (14) в области G и удовлетворяющую условию

$$\|w(z)\| \leqslant K(1+|z|)^N, z \in \overline{G}, \tag{15}$$

где $K-$ постоянная, зависящая от $w(z), N \in \{0, 1, ...\}$.

Если $w(z)$ является решением задачи Р, то вектор-функция $U(\xi, y) = (\omega, v)^T$, где $\omega = F_x w, v = F_x \overline{w}, F_x-$ преобразование Фурье по переменной x, для каждого $y \geq 0$ принадлежит пространству $S' = S'(R)$ и будет решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dU}{dy} + B(\xi)U = 0, \tag{16}$$

где $B(\xi) = \begin{pmatrix} \xi E_n & -2i\overline{A} \\ 2iA & -\xi E_n \end{pmatrix}$, E_n- единичная матрица порядка n. Отметим, что вектор-функции ω и v связаны следующим равенством

$$v(\xi, y) = \overline{\omega(-\xi, y)}. \tag{17}$$

Наоборот, если вектор-функция $U(\xi, y) = (\omega, v)^T$ для каждого $\xi \in R$ является решением системы (16), выполняется условие (17) и $\omega \in S' \ \forall y \in (0, \infty)$, то вектор-функция $w = F_\xi^{-1}\omega$ будет решением уравнения (14) в области G. Пусть $S(\xi)-$ матрица, приводящая матрицу $B(\xi)$ к квазидиагональному виду: $\Lambda(\xi) = S^{-1}(\xi)B(\xi)S(\xi)$. Предположим, что матрица $A\overline{A}$ не имеет собственных значений, лежащих на полуоси $(-\infty, 0]$. Тогда матрица $B(\xi)$ для всех значений $\xi \in R$ будет обратимой и не имеет чисто мнимых собственных значений. Поэтому матрицу $\Lambda(\xi)$ можно представить в блочно-диагональном виде

$$\Lambda(\xi) = \begin{pmatrix} \Lambda_+(\xi) & O \\ O & \Lambda_-(\xi) \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_+(\xi)$ $(\Lambda_-(\xi))$–$n \times n$-матрица, состоящая из жордановых клеток матрицы $B(\xi)$, соответствующих собственным значениям с положительной (отрицательной) вещественной частью. Пусть матрица $S(\xi)$ представлена в блочном виде

$$S(\xi) = \begin{pmatrix} S_1(\xi) & S_2(\xi) \\ S_3(\xi) & S_4(\xi) \end{pmatrix},$$

где $S_j(\xi)$ $(j=1,2,3,4)-n\times n$-матрицы и пусть $e_k(\xi)\in C^n$ $\forall\xi\in R$ $(k=1,2)$. Тогда общее решение системы (16) имеет вид

$$U(\xi,y)=\left(\begin{array}{ll} S_1(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi)+ & S_2(\xi)e^{-\Lambda_-(\xi)y}e_2(\xi) \\ S_3(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi)+ & S_4(\xi)e^{-\Lambda_-(\xi)y}e_2(\xi) \end{array}\right).$$

Элементы матриц $S_k(\xi)$ и $S_k^{-1}(\xi)$ при $|\xi|\to\infty$ растут не быстрее чем степенная функция. Поэтому для того чтобы $U\in S'$ для всех $y>0$, необходимо, чтобы $e_2(\xi)=0$. Следовательно,

$$U(\xi,y)=\left(\begin{array}{c} S_1(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi) \\ S_3(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi) \end{array}\right),$$

т.е.

$$\omega(\xi,y)=S_1(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi)$$

и

$$v(\xi,y)=S_3(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi).$$

Для выполнимости условия (17) и нахождения решения задачи P, вектор-функцию $e_1(\xi)\in S'$ нужно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$S_3(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi)=\overline{S_1(-\xi)}e^{-\overline{\Lambda_+(\xi)y}}\overline{e_1(-\xi)},$$

и вектор-функция

$$w=F_\xi^{-1}[S_1(\xi)e^{-\Lambda_+(\xi)y}e_1(\xi)]$$

удовлетворяла условию (15).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М.: Наука, 1988. 509 с.
2. Сафаров Д. *О размерности пространства решений степенного роста для одного класса эллиптических систем* // Дифференциальные уравнения. Т. 15, № 1. 1979. С. 112–115.
3. Байзаев С. *О медленно растущих решениях одной многомерной эллиптической системы* // Доклады АН ТаджССР. Т. 34, № 6. 1991. С. 329–332.
4. Байзаев С. *Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости* Новосибирск: НГУ. 1999. 74 с.
5. Байзаев С., Мухамадиев Э. *О нётеровости и индексе многомерных эллиптических операторов в гёльдеровых пространствах* // Современные методы в теории краевых задач, труды Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XI". Ч. 1, Воронеж, 2000. С. 75–84.

Саттор Байзаев,
Сибайский институт (филиал)
Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453838, г. Сибай, Россия
E-mail: `baisat54@rambler.ru`