ТЭКЛИНДОВСКИЕ КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В.Ф. ВИЛЬДАНОВА, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Выделены классы единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на связном некомпактном полном римановом многообразии. Для многообразий с краем предполагается, что решение на крае удовлетворяет условиям Дирихле и Неймана.

Классы единственности определяются неотрицательной функцией, растущей не быстрее функции расстояния от фиксированной точки вдоль геодезических, и аналогичны тэклиндовским классам единственности для уравнения на действительной прямой.

Ключевые слова: классы единственности, уравнение теплопроводности, риманово многообразие.

Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20, 35R01, 58J32

1. Введение

Пусть M — геодезически полное некомпактное связное риманово многообразие размерности n. Пусть $\triangle$ — оператор Лапласа (или, то же самое, Лапласа – Бельтрами) на M. Как известно, в локальных координатах $x_1, x_2, ..., x_n$ лапласиан $\triangle$ имеет вид:

$$\triangle = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора (в отличие от ковариантных компонент g_{ij}), $g = \det \|g_{ij}\|$. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = (0, T) \times M$ уравнение теплопроводности:

$$u_t - \triangle u = 0. \qquad (1)$$

Работа посвящена доказательству единственности решения задачи Коши и смешанных задач для уравнения (1) в неограниченной области D^T. Основополагающей является работа А.Н. Тихонова [1], в которой не только был указан класс единственности $|u(t,x)| \leq B \exp(b|x|^2)$ для уравнения теплопроводности на действительной оси, но и впервые был построен пример неединственности решения задачи Коши. В работе [2] С. Тэклинд уточнил этот результат, показав, что единственность решения задачи Коши имеет место в классе функций $|u(t,x)| \leq B \exp(|x| h(|x|))$, где $h(r)$ – неубывающая

V.F. Vil'danova, F.Kh. Mukminov, Täcklind uniqueness classes on noncompact Riemannian manifolds.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00081-а).

Поступила 2014 г.

неотрицательная функция с расходящимся интегралом

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = +\infty, \tag{2}$$

(ниже такие функции h будем называть функциями Тэклинда). При этом для любой функции со сходящимся интегралом $\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h_1(r)} < \infty$ был построен пример ненулевого решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности, удовлетворяющего оценке $|u(t,x)| \le B\exp(|x|h_1(|x|))$ и условию $u(0,x) = 0$.

Эти результаты обобщались для общего параболического уравнения в $\mathbb{R}^n$ в работах [3] – [16] и ряде других. Подробный обзор этих работ имеется, например, в [3]. В работах [4] и [5] отмечено, что в случае смешанных задач адекватной является запись класса единственности в терминах роста интегралов

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\{|x|<r\}\cap M} u^2(t,x)dxdt \le B\exp(rh(r)).$$

Анизотропные классы единственности рассматривались в работах [6], [7]. В случае первой смешанной задачи были установлены геометрические классы единственности, являющиеся более широкими, чем теклиндовские, если область $M \subset \mathbb{R}^n$ достаточно быстро сужается на бесконечности (см. [3]). Зависимость классов единственности от младших коэффициентов уравнения изучалась в работе [8].

На боковой границе цилиндра D^T заданы краевые условия Дирихле и Неймана:

$$u(t,x)\Big|_{\Gamma_1} = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial N}\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\gamma \subset \partial M$ – произвольное замкнутое подмножество, $\Gamma_1 = (0,T)\times\gamma$ и Γ_2 — дополнение к нему $\Gamma_2 = \Gamma\backslash\Gamma_1$. Начальная функция

$$u(0,x) = \varphi(x) \in L_{2,lc}(M), \tag{4}$$

предполагается квадратично суммируемой по любому ограниченному подмножеству $Q \subset M$.

Пусть $\sigma(x), x \in M$ — локально липшицева положительная функция с ограниченными поверхностями уровня, $|\nabla\sigma(x)| \le 1$, $\sigma(x) \to \infty$ при $\mathrm{dist}(x,x_0) \to \infty$.

Положим $M(r) = \{x \in M \mid \sigma(x) < r\}$, $D_\rho^{T,r} = (0,T)\times(M(r)\backslash M(\rho))$, (индекс $\rho = 0$ будет опускаться).

Теорема 1. *Пусть $u(t,x)$ – решение в D^T задачи (1), (3) с начальным условием*

$$u(0,x) = 0. \tag{5}$$

Если существует такая функция Тэклинда $h(r)$, что для всех $r \ge 1$

$$\|u\|^2_{D^{T,r}} \leqslant \exp(rh(r)), \tag{6}$$

то $u(t,x) \equiv 0$ в D^T.

2. Обобщенное решение задачи

Пусть $D_a^b = (a,b)\times M$, $D^T = D_0^T$. Введем следующие обозначения в локальных картах:

$$\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle_g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}u^iv^j, \qquad (\nabla f)^i = \sum_{j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Тогда легко видеть, что
$$\langle \nabla f, \nabla w\rangle_g = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}, \qquad |\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla f\rangle_g.$$
Меру на римановом многообразии будем обозначать через $d\nu$.

На множестве функций из из $C^1(\overline{D^T})$, имеющих компактный носитель, определим скалярное произведение
$$(u,w)_{H^{0,1}} = \int\limits_{D^T} (uw + \langle \nabla u, \nabla w\rangle_g)\, d\nu dt.$$
Через $C_0^1(D^T\backslash\Gamma_1)$ обозначим множество функций из $C^1(\overline{D^T})$, равных нулю в окрестности Γ_1 и имеющих компактный носитель. Пополнение этого линейного пространства относительно введенного скалярного произведения обозначим $\mathring{H}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$.

Обобщенным решением задачи (1), (3), (4) в D^T будем называть функцию $u(t,x)$, такую, что произведение $u\eta \in \mathring{H}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$ при любой липшицевой функции $\eta(x)$ с ограниченным носителем, и удовлетворяющую интегральному тождеству
$$\int\limits_{D^T} (-uv_t + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_g)\, d\nu dt = \int\limits_M \varphi(x)v(0,x)d\nu, \tag{7}$$
для любой функции $v(t,x) \in C_0^1(D^T\backslash\Gamma_1)$ такой, что $v(T,x)=0$.

Покажем, что для обобщенного решения задачи (1), (3), (4) применима стандартная техника осреднений Стеклова (см., например, [18], гл. 3, §2)
$$u_h(t,x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h u(t+\tau,x)d\tau.$$
Отметим сначала ограниченность операторов сдвига $T_z v(t) = v(t+z)$ и осреднения Стеклова в пространстве $\mathring{H}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$ в предположении, что функция $v(t)$ продолжена нулем для $t \leqslant 0$ и $t \geq T-h$:
$$\begin{aligned} \|T_z v\|_{H^{0,1}(D^T)} &\leqslant \|v\|_{H^{0,1}(D^T)},\\ \|v_h\|_{H^{0,1}(D^T)} &\leqslant \|v\|_{H^{0,1}(D^T)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Установим нужное для дальнейшего интегральное соотношение. Заменив в (7) функцию v на v_{-h}, $v \in C_0^1(D^T\backslash\Gamma_1)$, нетрудно получить тождество
$$\int\limits_{D^T} ((u_h)_t v + \langle (\nabla u)_h, \nabla v\rangle_g)\, d\nu dt = 0, \tag{9}$$
которое будет справедливо также и для функций $v(t,x) \in V$, где V состоит из элементов пространства $\mathring{H}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$, равных нулю при $t > T-\delta$, $\delta > 0$, и имеющих ограниченный носитель. В частности, если $\eta(x)$ – липшицева функция с ограниченным носителем, то, подставляя $v = \eta(x)u_h^\tau$, где $(u_h)^\tau$– продолженная нулем при $t>\tau$ функция u_h, получим
$$\int\limits_{D^\tau} \left[\frac{1}{2}((u_h^\tau)^2\eta)_t + \langle (\nabla u)_h, \nabla(\eta u_h^\tau)\rangle_g\right] d\nu dt = 0. \tag{10}$$

Обоснуем возможность предельного перехода в равенстве (10) при $h \to 0$ к соотношению
$$\int\limits_M (u^2(\tau,x) - \varphi^2(x))\eta d\nu + 2\int\limits_{D^\tau} \langle \nabla u, \nabla(\eta u)\rangle_g d\nu dt = 0. \tag{11}$$

Ограниченность носителя функции η при таком предельном переходе позволяет считать, что функция $u\eta$ является элементом пространства $\mathring{H}^{0,1}(D^T;\Gamma_1)$. Покажем, например, что

$$\int\limits_{D^T}\langle(\nabla u)_h,\nabla(v_h)\rangle_g d\nu dt\to\int\limits_{D^T}\langle\nabla u,\nabla v\rangle_g d\nu dt \tag{12}$$

при $h\to 0$ и $v\in V$. С этой целью рассмотрим выражение

$$\left|\int\limits_{D^T}\langle\nabla u,\nabla(v_h)_{-h}-\nabla v_h\rangle_g d\nu dt\right|=\left|\int\limits_{D^T}\langle\frac{\nabla u}{h},\int\limits_{-h}^{0}\nabla(v_h(t+z)-v_h(t))dz\rangle_g d\nu dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-h}^{0}\frac{dz}{h}\int\limits_{D^T}\langle(\nabla u,\nabla(v_h(t+z)-v_h(t)))\rangle_g d\nu dt\leqslant\int\limits_{-h}^{0}\frac{dz}{h}\|u\eta\|_{H^{0,1}}\|T_z v_h-v_h\|_{H^{0,1}}\equiv I,$$

где липшицева функция η с ограниченным носителем равна 1 в окрестности носителя функции v. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Для функции $v\in C_0^1(D_0^{T-\delta})$, пользуясь равностепенной непрерывностью семейства функций v_h и ∇v_h, выбором достаточно малого h, при $|z|\leqslant h$ добиваемся оценки

$$\|T_z v_h-v_h\|_{H^{0,1}(D^T)}\leqslant\varepsilon, \tag{13}$$

которая влечет неравенство $I\leqslant C\varepsilon$. Благодаря ограниченности операторов сдвига и осреднения Стеклова последняя оценка остается в силе и для функций $v(t,x)\in V$. Совершенно аналогично устанавливается малость величины

$$\left|\int\limits_{D^T}\langle\nabla u,\nabla v_h-\nabla v\rangle_g d\nu dt\right|\leqslant C\varepsilon$$

при достаточно малых h.

Таким образом, предельный переход (12) обоснован. В частности, полагая в 12 $v_h=\eta(x)u_h^\tau(t,x)$, получаем, что

$$\int\limits_{D^T}\langle(\nabla u)_h,\nabla(\eta u_h^\tau)\rangle_g d\nu dt\to\int\limits_{D^T}\langle\nabla u,\nabla(\eta u^\tau)\rangle_g d\nu dt,\qquad h\to 0. \tag{14}$$

Пользуясь (14), осуществляем предельный переход от (10) к (11). Конечно, при этом используется принадлежность $u(t,x)\eta(x)\in C([0,T];\,L_2(M))$, которая устанавливается из (9) как обычно (см., например, [18] лемма 4.1, глава 3, §4).

3. Доказательство теоремы 1

Мы будем следовать технике работы [5]. Теорема будет выведена из следующего утверждения.

Предложение 1. *Пусть $\varphi(x)=0,\ x\in M(R)$, и $u(t,x)$ – решение задачи (1), (3), (4). Тогда для всех $t>0$, $r\in(0,R]$ справедливо неравенство*

$$H^{t,r}(u)\leqslant\exp\left(1-2\kappa_1 t^{-1}(R-r)^2\right)\max_{\tau\in[0,t]}H^{\tau,R}(u), \tag{15}$$

где

$$H^{t,r}(u)=\int\limits_{M(r)}u^2(t,x)d\nu,$$

$\kappa_1=1/(16e^2)$.

Доказательство. Пусть $r \le R$, $\xi(\tau, r, \rho)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная единице при $\tau \leqslant r - \rho$ и нулю при $\tau \ge r$. В оставшемся интервале она удовлетворяет условию $\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -1/\rho$. Подставим в тождество (9) $\eta(x) = \xi^2(\sigma(x), r, \rho)$. Тогда из (11), в силу условия $\eta\varphi \equiv 0$, для любого $r > \rho > 0$ нетрудно получить неравенства

$$\int\limits_M \eta u^2(T,x)d\nu + 2\int\limits_{D^T} \langle \eta\nabla u, \nabla u\rangle_g d\nu dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{D^T} |\langle \nabla u, u\nabla\eta\rangle_g| d\nu dt \leqslant 2\int\limits_{D^T} (\varepsilon\xi^2|\nabla u|^2 + \varepsilon^{-1}u^2|\nabla\xi|^2) d\nu dt.$$

Преобразуя последнее при $\varepsilon = 1/2$, будем иметь

$$\int\limits_M \xi^2 u^2(T,x)d\nu \leqslant 4\int\limits_{D^T} u^2|\nabla\xi|^2 d\nu dt.$$

Используя вид функции ξ, нетрудно получить неравенство

$$\int\limits_{M(r-\rho)} u^2(t,x)d\nu \leqslant \frac{4}{\rho^2}\int\limits_0^t \int\limits_{M(r)\setminus M(r-\rho)} u^2 d\nu dt.$$

Запишем последнее, используя функцию H:

$$H^{t,r-\rho}(u) \leqslant \frac{4}{\rho^2}\int\limits_0^t H^{\tau,r}(u)d\tau. \tag{16}$$

Отметим, что выбирая $\varepsilon = 1/4$, можно получить также неравенство

$$\int\limits_{M(r-\rho)} u^2(t,x)d\nu + \frac{1}{2}\int\limits_{D^{T,r-\rho}} |\nabla u|^2 d\nu dt \leqslant \frac{8}{\rho^2}\int\limits_0^t \int\limits_{M(r)\setminus M(r-\rho)} u^2 d\nu dt. \tag{17}$$

Неравенство (16) будем применять индуктивно для последовательности $r_i = R - k\rho$, $i = 0, 1, 2, ...k$, где $\rho = (R-r)/k$. Число k выберем ниже. Учитывая, что $H^{t,r}(u) \leqslant A = \max\limits_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(u)$, будем иметь

$$H^{t,r_1}(u) = H^{t,r_0-\rho}(u) \le \frac{4At}{\rho^2}.$$

Далее, индукцией по k, установим неравенство

$$H^{t,r_k}(u) \leqslant \frac{A4^k t^k}{\rho^{2k}k!}. \tag{18}$$

Пользуясь неравенством Стирлинга, из (18) нетрудно получить

$$H^{t,r_k}(u) \leqslant \frac{A4^k e^k t^k}{\sqrt{2\pi k}\rho^{2k}k^k} \leqslant Ae^{-k\ln\frac{\rho^2 k}{4et}}. \tag{19}$$

Число k будем выбирать так, чтобы $4e^2t \leqslant \rho^2 k \leqslant 8e^2 t$. Тогда из (19) следует, что $H^{t,r_k}(u) \leqslant Ae^{-k}$. Далее, $(R-r)^2 = \rho^2k^2 \leqslant 8e^2tk$. В качестве k выбираем наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству. Тогда $k \ge \frac{(R-r)^2}{8e^2t}$, $\rho^2k^2 > 8e^2t(k-1)$, и $\rho^2k > 4e^2t$ при $k \ge 2$. Таким образом, неравенство (15) установлено для $k \ge 2$. При $k = 1$ оно тривиально.

□

Следствие. *Пусть $u(t,x)$ — обобщенное решение задачи (1), (3), (4) в D^T, $T \leqslant 1$. Тогда для всех $t \in (0,T]$, $r \in [0,R)$, справедливо неравенство*

$$H^{t,r}(u) \leqslant 12 \exp\left(-2\kappa_1 t^{-1} (R-r)^2\right) \max_{\tau \in [0,t]} H^{\tau,R}(u) + 14\|\varphi\|^2_{M(R)}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $v(t,x)$ — решение задачи (1), (3), (4) с начальной функцией $\varphi(x)\chi_{M(R)} \in L_2(M)$, где $\chi_{M(R)}$ — характеристическая функция множества $M(R)$. Для $v(t,x)$ из (11) при $\eta = 1$ нетрудно установить неравенство

$$\|v(t)\|^2 + \int\limits_0^t \int\limits_M |\nabla v|^2 d\nu dt \leqslant \|\varphi\|^2_{M(R)}. \tag{21}$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|^2_{M(R)} \geq \max_{\tau \in [0,t]} H^{\tau,R}(v), \quad t \in (0,T]. \tag{22}$$

Функция $w(t,x) = u(t,x) - v(t,x)$ удовлетворяет условию предложения 1, следовательно, для $t \in (0,T]$, $r \in [0,R)$ имеем

$$\begin{aligned} &H^{t,r}(u) \leqslant 2H^{t,r}(w) + 2H^{t,r}(v) \leqslant \\ &\leqslant 4\exp\left(1 - 2\kappa_1 t^{-1} (R-r)^2\right) \left\{ \max_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(u) + \max_{\tau\in[0,t]} H^{\tau,R}(v) \right\} + 2H^{t,R}(v). \end{aligned}$$

Используя (22), из последнего соотношения выводим неравенство (20). □

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное $t \in (0,T]$. Возьмем произвольное $R_0 > 1$ и оценим $\|u(t)\|^2_{M(R_0)}$ следующим образом. Рассмотрим последовательность $R_k = 2^k R_0$. Положим

$$\Delta t_k = \frac{\kappa_1}{4}\frac{R_k}{h(R_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

В силу монотонности функции $h(r)$, имеем

$$\sum_{k=1}^p \Delta t_k = \frac{\kappa_1}{4} \sum_{k=1}^p \frac{R_{k+1} - R_k}{h(R_k)} \geq \frac{\kappa_1}{4} \int\limits_{R_1}^{R_{p+1}} \frac{dr}{h(r)} \to \infty \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Следовательно, при любом выборе числа R_0 найдется такой номер p, что

$$\sum_{k=1}^{p+1} \Delta t_k \geq t. \tag{24}$$

Пусть $p = p(R_0)$ — наименьший из номеров p, удовлетворяющих неравенству (24), так что $\sum\limits_{k=1}^p \Delta t_k < t$. Переопределим Δt_{p+1} равенством

$$\Delta t_{p+1} = t - \sum_{k=1}^p \Delta t_k \leqslant \frac{\kappa_1}{4}\frac{R_{p+1}}{h(R_{p+1})}. \tag{25}$$

Определим убывающую последовательность времен $t_0 = t$, $t_1 = t_0 - \Delta t_1$, $t_2 = t_1 - \Delta t_2, \ldots, t_{p+1} = t_p - \Delta t_{p+1} = 0$. Очевидно, ввиду (23), (25), справедливы неравенства

$$\frac{\frac{\kappa_1}{2} R_k^2}{\Delta t_k} \geq 2R_k h(R_k), \quad k = \overline{1, p+1}. \tag{26}$$

Из (16) и (6) при $k \geq 1$ выводим соотношения

$$\|u(t)\|^2_{M(R_{k-1})} \leqslant S_k \int\limits_0^T \|u(t)\|^2_{M(R_k)} dt \leqslant S_k \exp(R_k h(R_k)), \quad t \in (0,T], \tag{27}$$

где

$$S_k = 4\Big(R_k - R_{k-1}\Big)^{-2} = 16(R_k)^{-2} \leq 16(R_1)^{-2} \equiv S/12.$$

Рассматривая функцию $u(t,x)$ как решение задачи для уравнения (1) с начальными данными при $t = t_1$, с помощью неравенства (20) и определения последовательности R_k, выводим соотношение

$$\|u(t_0)\|^2_{M(R_0)} \leqslant 12 \exp\left(-2\kappa_1 \frac{\left(\frac{R_1}{2}\right)^2}{\triangle t_1}\right) \max_{t\in[t_1,t_0]} \|u(t)\|^2_{M(R_1)} + 14\|u(t_1)\|^2_{M(R_1)}.$$

Воспользуемся неравенствами (27), (26):

$$\|u(t_0)\|^2_{M(R_0)} \leqslant S \exp\left(R_1 h(R_1)) - \kappa_1 \frac{R_1^2}{2\triangle t_1}\right) + 14\|u(t_1)\|^2_{M(R_1)} \leqslant \tag{28}$$
$$\leqslant S \exp\left(-R_1 h(R_1)\right) + 14\|u(t_1)\|^2_{M(R_1)}.$$

Совершенно аналогично выводятся неравенства при $k = \overline{2,p}$

$$\|u(t_1)\|^2_{M(R_1)} \leqslant S \exp\left(R_2 h(R_2)) - \kappa_1 \frac{R_2^2}{2\triangle t_2}\right) + 14\|u(t_2)\|^2_{M(R_2)}$$
$$\leqslant S \exp\left(-R_2 h(R_2)\right) + 14\|u(t_2)\|^2_{M(R_2)},$$

$$\|u(t_{k-1})\|^2_{M(R_{k-1})} \leqslant S \exp\left(-R_k h(R_k)\right) + 14\|u(t_k)\|^2_{M(R_k)}. \tag{29}$$

Поскольку $t_{p+1} = 0$, то, применяя (27), (26), находим, что

$$\|u(t_p)\|^2_{M(R_p)} \leqslant S \exp\left(-R_{p+1} h(R_{p+1})\right)).$$

Помножив (29), $k = \overline{1, p+1}$, на 14^{k-1} и складывая, получим при $R_0 \geq 1$

$$\|u(t)\|^2_{M(R_0)} \leqslant S \left\{\exp\left(-R_1 h(R_1)\right) + \ldots + 14^p \exp\left(-R_{p+1} h(R_{p+1})\right)\right\} \leqslant$$
$$\leqslant S \left\{\exp\left(-R_1 h(R_1)\right) \ldots + 14^p \exp\left(-2^p R_1 h(R_1)\right)\right\} \leq C_1 (R_1)^{-2}.$$

Итак, установлено, что монотонно неубывающая неотрицательная функция $\|u(t)\|^2_{M(R_0)}$ от аргумента R_0, стремится к нулю при $R_0 \to \infty$. Следовательно, $\|u(t)\|^2_{M(R_0)} = 0$ при любом $R_0 > 0$. Ввиду произвольности $t \in (0,T]$, решение $u(t,x) \equiv 0$ в D^T.

4. Классы единственности и примеры

В качестве простейшего примера рассмотрим многообразие $M = \mathbb{R}^n$ с метрикой $g_{ij} = (\rho(|x|))^{-1} \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, ρ – положительная непрерывная функция. Уравнение теплопроводности (1) принимает вид

$$u_t = \rho^{\frac{n}{2}}(|x|) \sum_{i=1}^n (\rho^{-\frac{n}{2}}(|x|) u_{x_i})_{x_i}.$$

Пусть $\sigma = \sigma(|x|)$. Выберем функцию σ так, чтобы $|\nabla\sigma|^2 = 1$,

$$|\nabla\sigma|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} = \sum_{i=1}^n g^{ij} \rho \sigma_{x_i}^2 = \rho(\sigma')^2 = 1.$$

Тогда $\sigma(s) = \int\limits_0^s \frac{dr}{\sqrt{\rho(r)}}$. Поскольку $\sigma(|x|) < r \Leftrightarrow |x| < \sigma^{-1}(r) = s$, то $D^{T,r} = \{(t,x) \in D^T \mid |x| < s\} \equiv D^T(s)$. Следовательно, условие (6) записывается в виде

$$\int\limits_{D^T(s)} u^2(t,x)\rho^{-\frac{n}{2}}(|x|)dxdt \leqslant \exp(2\sigma(s)h(\sigma(s))).$$

Пусть теперь $M = \mathbb{R}^2$ с метрикой $g_{ij} = (\rho_i(x_i))^{-1}\delta_{ij}$. Выберем функцию $\sigma(x) = \sqrt{f(x_1) + v(x_2)}$, где $f(r) = \left(\int\limits_0^r \frac{dx_1}{\sqrt{\rho_1(x_1)}}\right)^2$ и $v(r) = \left(\int\limits_0^r \frac{dx_1}{\sqrt{\rho_2(x_1)}}\right)^2$. Тогда $|\nabla\sigma|^2 = \sum\limits_{i=1}^2 \rho_i\sigma^2_{x_i} = 1$. Уравнение теплопроводности (1) принимает вид

$$u_t = \sqrt{\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)}\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)}}u_{x_i}\right)_{x_i},$$

а условие (6) записывается в виде

$$\int\limits_{D^{T,r}} \frac{u^2(t,x)}{\sqrt{\rho_1(x_1)\rho_2(x_2)}}dxdt \leqslant \exp(2(rh(r)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сб. Т. 42(84), №2. 1935. С. 199–216.
2. S. Tacklind *Sur les class quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique* // Nova Acta Reg. Soc. Schi. Uppsal. Ser. V 10, №3. 1936. P. 3–55.
3. Кожевникова Л.М. *Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях* // Матем. сб. Т. 198, №7. 2007. С. 59–102.
4. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений* // УМН Т. 33, №5. 1978. С. 7–76.
5. Гущин А.К. *О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 119(161), №4. 1982. С. 451–508.
6. Сонин И.М. *О классах единственности для вырождающихся параболических уравнений* // Матем. сб. Т. 85(127), №4(8). 1971. С. 459–473.
7. Камынин Л.И. *О единственности решения первой краевой задачи в неограниченной области для параболического уравнения второго порядка* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 24(9). 1984. С. 1331–1345.
8. Житомирский Я.И. *Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с быстро растущими коэффициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 31, №5. 1967. С. 1159–1178.
9. Ладыженская О.А. *О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 127(69), №2. 1950. С. 175–184.
10. Гилимшина В.Ф., Мукминов Ф.Х. *Об убывании решения вырождающегося линейного параболического уравнения* // Уфимск. матем. журн. Т. 3, №4. 2011. С. 43–56.
11. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функц. анализ и его прил. Т. 8, №4. 1974. С. 59–70.
12. Олейник О.А. *О единственности решения задачи Коши для общих параболических систем в классах быстрорастущих функций* // УМН. Т. 29, №5. 1974. С. 229–230.

13. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* // УМН. Т. 31, №6. 1976. С. 142–166.
14. Камынин Л.И., Химченко Б.И. *О проблеме Тихонова-Петровского для параболических уравнений второго порядка* // Сиб. матем. журн. Т. 22, №5. 1981. С. 78–115.
15. Мукминов Ф.Х. *О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения* // Матем. сб. Т. 181, №11. 1990. С. 1486–1509.
16. Кожевникова Л.М. *О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области* // Известия РАН Т. 65, №3. 2001. С. 51–66.
17. Жиков В.В. *О весовых соболевских пространствах* // Матем. сб. Т. 189, №8. 1998. С. 27–58.
18. Ладыженская О.А.,Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука 1967. 736 с.

Венера Фидарисовна Вильданова,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `gilvenera@mail.ru`

Фарит Хамзаевич Мукминов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `mfkh@rambler.ru`