ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 2 (2015). С. 109-113.

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВ У ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦА

**А.А. ЛИШАНСКИЙ**

**Аннотация.** В работе построен класс операторов Теплица с антианалитическим символом, имеющих замкнутое бесконечномерное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор — гиперциклический. А именно, если для функции $\varphi$, аналитической в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывной в его замыкании, выполнены условия $\varphi(\mathbb{T})\cap\mathbb{T}\neq\emptyset$ и $\varphi(\mathbb{D})\cap\mathbb{T}\neq\emptyset$, то оператор $\varphi(S^*)$ (где $S^*$ — оператор обратного сдвига в пространстве Харди) будет обладать указанным свойством. Доказательство основано на применении теоремы Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса.

**Ключевые слова:** операторы Теплица, гиперциклические операторы, существенный спектр, пространство Харди.

**Mathematics Subject Classification:** 47A16, 30H10, 47B35

## 1. Введение

Пусть $X$ — сепарабельное банахово пространство (или пространство Фреше), а $T$ — ограниченный линейный оператор в $X$. Если найдется такой $x\in X$, что множество $\{T^n x, n\in\mathbb{N}_0\}$ плотно в $X$, то говорят, что $T$ — *гиперциклический оператор*, а $x$ — его *гиперциклический вектор*. Здесь $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Динамика линейных операторов и, как частный случай, теория гиперциклических операторов активно разрабатывалась последние 20 лет. Подробный обзор результатов, полученных до конца 1990-х гг., содержится в статье [1]. Недавнее освещение теории ищите в монографиях [2, 3].

Тем не менее, первые примеры гиперциклических операторов появились намного раньше. В 1929 Биркгоф показал, что оператор сдвига $T_a : f(z)\mapsto f(z+a), a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, гиперциклический в пространстве Фреше всех целых функций $Hol(\mathbb{C})$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Позднее МакЛейн доказал гиперцикличность оператора дифференцирования $D : f\mapsto f'$ on $Hol(\mathbb{C})$. Первый пример гиперциклического оператора в банаховом пространстве был дан в 1969 г. Ролевичем [4], показавшим, что для любого $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|>1$, оператор $\lambda S^*$ гиперциклический в пространстве $\ell^p(\mathbb{N}_0), 1\leqslant p<\infty$, где $S^*$ — обратный сдвиг на $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, переводящий вектор $x=(x_0,x_1,\dots,x_n,\dots)\in\ell^p(\mathbb{N}_0)$ в вектор $(x_1,x_2,\dots,x_{n+1},\dots)$.

Что можно сказать о множестве гиперциклических векторов данного гиперциклического оператора $T$? Ясно, что если $x$ — гиперциклический вектор для оператора $T$, то $Tx, T^2x, T^3x,\dots$ также являются гиперциклическими векторами для $T$. Поэтому множество гиперциклических векторов плотно в $X$, если оно непусто.

---

А.А. Lishanskii, Existence of hypercyclic subspaces for Toeplitz operators.



Работа поддержана грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — докторов наук МД-5758.2015.1 и ООО "Газпромнефть".

*Поступила 20 апреля 2015 г.*

Следующий результат доказан Бурдоном [5] (специальный класс операторов, коммутирующих с обобщенным обратным сдвигом, был до этого рассмотрен Годфруа и Шапиро в статье [6]).

**Теорема (Bourdon, [5]).** *Пусть $T$ — гиперциклический оператор, действующий на гильбертовом пространстве $H$. Тогда существует всюду плотное линейное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор гиперциклический для $T$.*

**Определение.** Для гиперциклического оператора $T$ замкнутое бесконечномерное подпространство, в котором каждый ненулевой вектор гиперциклический для $T$, называется *гиперциклическим подпространством.*

Монтес-Родригес [7, Теорема 3.4] доказал, что оператор $\lambda S^*$, $|\lambda| > 1$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, не имеет гиперциклического подпространства. Тем не менее, для некоторого класса функций от обратного сдвига $S^*$ на $\ell^2(\mathbb{N})$ существует гиперциклическое подпространство, и это является основным результатом настоящей работы. Чтобы постулировать это, нужно ввести несколько обозначений. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность. Напомним, что *диск-алгебра* $A(\mathbb{D})$ — это пространство всех функций, непрерывных в замкнутом единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$ и аналитических в $\mathbb{D}$ (с нормой $\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |\varphi(z)|$).

**Основная теорема.** *Для любой функции $\varphi \in A(\mathbb{D})$ такой, что $\varphi(\mathbb{T}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ и $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, оператор $\varphi(S^*)$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, имеет гиперциклическое подпространство.*

Заметим, что $\varphi(z) = \lambda z$, $|\lambda| > 1$, не удовлетворяет этому условию.

Примеры применения основной теоремы могут быть интерпретированы как некоторые операторы Теплица в пространстве Харди. Пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ — это пространство всех функций вида $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, где $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, и поэтому может быть естественно отождествлено с $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Напомним, что для функции $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ оператор Теплица $T_\varphi$ с символом $\varphi$ определен как $T_\varphi f = P_+(\varphi f)$, где $P_+$ — ортогональный проектор с $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2$. Тогда оператор обратного сдвига $S^*$ соответствует теплицеву оператору $T_{\overline{z}}$. В работе [6] было показано, что любой антианалитический оператор Теплица $T_{\overline{\varphi}}$ (где $\varphi$ — ограниченная аналитическая функция в круге $\mathbb{D}$) является гиперциклическим всякий раз, когда $\varphi(\mathbb{D})$ пересекает $\mathbb{T}$. Наш основной результат дает класс антианалитических операторов Теплица, имеющих гиперциклическое подпространство.

Общее достаточное условие существования гиперциклического подпространства было дано Гонзалесом, Леон-Сааведрой и Монтес-Родригесом в статье [8]. Чтобы сформулировать его, нужна более сильная версия гиперцикличности:

**Определение.** Оператор $T$, действующий на сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{B}$ является *наследственно гиперциклическим*, если существует последовательность неотрицательных целых $\{n_k\}$, такая, что для каждой подпоследовательности $\{n_{k_i}\}$ существует вектор $x$, такой, что последовательность $\{T^{n_{k_i}} x\}$ всюду плотна в $\mathcal{B}$.

Напомним также определение существенного спектра.

**Определение.** Оператор $U$ называется *фредгольмовым*, если $\operatorname{Ran} U$ замкнут и имеет конечную коразмерность, а $\operatorname{Ker} U$ конечномерно. *Существенный спектр* оператора $T$ определяется как
$$\sigma_e(T) = \{\lambda : T - \lambda I \text{ не фредгольмов}\}.$$

**Теорема (Гонзалес, Леон-Сааведра и Монтес-Родригес,** [8, теорема 3.2]**).** *Пусть $T$ — наследственно гиперциклический ограниченный линейный оператор, действующий на сепарабельном банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Пусть также существенный спектр оператора $T$ пересекает замкнутый единичный круг. Тогда оператор $T$ обладает гиперциклическим подпространством.*

Мы намерены использовать эту теорему в доказательстве основного результата.

Упомянем несколько других результатов на эту тему. С. Шкарин [9] доказал, что оператор дифференцирования в стандартном пространстве Фреше $Hol(\mathbb{C})$ имеет гиперциклическое подпространство. К. Мене [10, следствие 5.5] обобщил этот результат: он доказал, что для каждого полинома $P$, не равного константе, оператор $P(D)$ обладает гиперциклическим подпространством. Он также получил некоторые результаты, касающиеся весовых сдвигов в $\ell^p$.

## 2. О существенном спектре линейных операторов

Следующая лемма хорошо известна. Приведем ее доказательство для удобства читателя.

**Лемма.** *Существенный спектр оператора $S^*$ — единичная окружность.*

**Доказательство:** Рассмотрим три случая:

Случай 1: $|\lambda| > 1$. Оператор $S^* - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}S^*)$ обратим и поэтому фредгольмов.

Случай 2: $|\lambda| < 1$. Имеем $S^* - \lambda I = S^*(I - \lambda S)$. Так как оператор $S^*$ фредгольмов (его ядро одномерно, а образ — все пространство $\ell^2$), а $I - \lambda S$ обратим, их композиция — также фредгольмов оператор.

Случай 3: $|\lambda| = 1$. Тогда оператор $S^* - \lambda I$ не фредгольмов, так как его образ имеет бесконечную коразмерность.

Действительно, прообраз последовательности $(\lambda y_1, \lambda^2 y_2, \lambda^3 y_3, \lambda^4 y_4, \ldots) \in \ell^2$ является последовательностью вида $(a, \lambda(y_1 + a), \lambda^2(y_1 + y_2 + a), \ldots)$, и равенство $a = -\sum\limits_{i=1}^{+\infty} y_i$ необходимо для вхождения этой последовательности в $\ell^2$.

Тогда прообраз последовательности

$$\Big(1, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\geq 2^2 - 1 \text{ раза}}, \frac{1}{4}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\geq 2^4 - 1 \text{ раз}}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\geq 2^{2^n} - 1 \text{ раз}}, \ldots\Big), \tag{1}$$

умноженной покомпонентно на $(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots)$, задается последовательностью

$$\Big(-2, -1, \underbrace{-\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{2}}_{\geq 2^2 \text{ раза}}, \underbrace{-\frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{4}}_{\geq 2^4 \text{ раз}}, \ldots, \underbrace{-\frac{1}{2^n}, \ldots, -\frac{1}{2^n}}_{\geq 2^{2^n} \text{ раз}}, \ldots\Big),$$

умноженной покомпонентно на $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$, но эти последовательности не лежат в $\ell^2$. Все последовательности вида (1), как легко заметить, формируют бесконечномерное подпространство в $\ell^2$. □

Следующую важную теорему об отображении существенного спектра можно найти, например, в книге [11, p. 107].

**Теорема об отображении существенного спектра.** *Для любого линейного ограниченного оператора $T$ в гильбертовом пространстве $H$ и для любого полинома $P$ имеем $\sigma_e(P(T)) = P(\sigma_e(T))$.*

## 3. Доказательство основного результата

В доказательстве наследственной гиперцикличности оператора $\varphi(S^*)$ мы будем использовать хорошо известный критерий Годфруа–Шапиро [6] (точную формулировку ищите в [3, теорема 3.1]):

**Теорема (критерий Годфруа–Шапиро).** *Let $T$ — ограниченный линейный оператор в сепарабельном банаховом пространстве. Предположим, что подпространства*

$$X_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < 1\},$$
$$Y_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > 1\},$$

*плотны в $X$. Тогда $T$ наследственно гиперциклический.*

**Доказательство основной теоремы** Нам нужно проверить два условия теоремы Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса.

Любую функцию $\varphi$ из диск-алгебры можно равномерно приблизить в $\overline{\mathbb{D}}$ последовательностью полиномов $P_n$. Поэтому $P_n(S^*)$ стремится $\varphi(S^*)$ в операторной норме.

Нам нужно показать, что $\sigma_e(\varphi(S^*))$ пересекает замкнутый единичный круг. Так как $\varphi(\mathbb{T}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, существуют $\lambda$, $\mu \in \mathbb{T}$, такие, что $\varphi(\lambda) = \mu$. Тогда $\mu_n = P_n(\lambda)$ стремится к $\mu$. По теореме об отображении существенного спектра для любого полинома $P$ имеем $\sigma_e(P(S^*)) = P(\sigma_e(S^*)) = P(\mathbb{T})$. В частности, $\mu_n = P_n(\lambda) \in \sigma_e(P_n(S^*))$ для любого $n$, и поэтому $P_n(S^*) - \mu_n I$ не фредгольмов.

Так как множество фредгольмовых операторов открыто в операторной норме (см., например, [12, теорема 4.3.11]), множество нефредгольмовых операторов замкнуто, откуда получаем, что предел $P_n(S^*) - \mu_n I$, равный $\varphi(S^*) - \mu I$, не фредгольмов, и $\mu$ лежит в существенном спектре $\varphi(S^*)$. Первое условие теоремы Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса проверено.

Хорошо известно, что условие $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ влечет, что $\varphi(S^*)$ удовлетворяет критерию Годфруа–Шапиро. Вкратце воспроизведем это рассуждение.

Напомним, что точечный спектр $S^*$ равен $\sigma_p(S^*) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, и собственные вектора равняются $(1, \lambda, \lambda^2, \cdots) \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, или если мы перейдем к пространству Харди $H^2(\mathbb{D})$, используя естественное отождествление $H^2$ с $\ell^2(\mathbb{N}_0)$,

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n z^n.$$

Функции $k_\lambda$ — это ядра Коши, являющиеся воспроизводящими ядрами в пространстве $H^2$. Ясно, что $k_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{D}$, также являются собственными векторами оператора $\varphi(S^*)$ с собственными числами $\varphi(\lambda)$.

По условию $\varphi(\mathbb{D}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ мы знаем, что $\varphi(\mathbb{D})$ — открытое множество, пересекающее $\mathbb{D}$ и $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Тогда понятно, что $X_0 = \{k_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}, |\varphi(\lambda)| > 1\}$ и $Y_0 = \{k_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}, |\varphi(\lambda)| < 1\}$ плотны в $H^2$. В самом деле, $f \in H^2$ ортогональна $k_\lambda$ в том и только в том случае, когда $f(\lambda) = 0$ и оба множества $\{\lambda \in \mathbb{D} : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ и $\{\lambda \in \mathbb{D} : |\varphi(\lambda)| < 1\}$ открыты. Поэтому выполнены условия критерия Годфруа–Шапиро, откуда следует наследственная гиперцикличность оператора $\varphi(S^*)$.

Следовательно, по теореме Гонзалеса, Леон-Сааведры и Монтес-Родригеса у оператора $\varphi(S^*)$ есть гиперциклическое подпространство. □

В завершение, сформулируем один открытый вопрос. Было бы интересно обобщить утверждение Монтес-Родригеса о том, что оператор $\lambda S^*$, $|\lambda| > 1$, действующий на $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, не имеет гиперциклического подпространства. Естественная гипотеза состоит в следующем:

**Гипотеза.** Пусть $B = p(S^*)$, где $p$ — полином, такой, что $|p(\lambda)| > 1$ при $|\lambda| = 1$. Тогда оператор $B$ не имеет гиперциклического подпространства.

**Благодарности.** Автор благодарен Контену Мене за полезные комментарии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. K.-G. Grosse-Erdmann, *Universal families and hypercyclic operators* // Bulletin of American Mathematical Society, (3) **36**. 1999. P. 345–381.
2. F. Bayart, E. Matheron, *Dynamics of Linear Operators* Cambridge University Press. 2009. 352 p.
3. K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot, *Linear Chaos* Springer. Berlin. 2011. 388 p.
4. S. Rolewicz, *On orbits of elements* // Studia Math **32**. 1969. P. 17–22.
5. P.S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors* // Proceedings of the American Mathematical Society, (3) **118**. 1993. P. 845–847.
6. G. Godefroy, J.H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // Journal of Functional Analysis, **98**. 1991. P. 229–269.
7. A. Montes-Rodriguez, *Banach spaces of hypercyclic vectors* // Michigan Mathematical Journal, **43**. 1996. P. 419–436.
8. M. Gonzalez, F. Leon-Saavedra, A. Montes-Rodriguez, *Semi-Fredholm Theory: Hypercyclic and supercyclic subspaces* // Proceedings of the London Mathematical Society, (3) **81**. 2000. P. 169–189.
9. S. Shkarin, *On the set of hypercyclic vectors for the differentiation operator* // Israel Journal of Mathematics, **180**. 2010. P. 271–283.
10. Q. Menet, *Hypercyclic subspaces and weighted shifts* //Advances in Mathematics, **255**. 2014. P. 305–337.
11. S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators* McGraw-Hill. New York. 1966. 199 p.
12. E.B. Davies, *Linear Operators and Their Spectra* // Cambridge Studies in Advanced Advanced Mathematics, Vol. 106, Cambridge University Press. 2007. 451 p.


Андрей Александрович Лишанский,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ
14-я линия В. О., 29Б,
199178, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Lishanskiyaa@gmail.com