

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ БЕЗ РАСХОЖДЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Получены формулы, задающие все возможные движения сплошной среды без расхождения с линейным полем скоростей: либо с линейным по времени матрицей, либо матрица имеет постоянные сингулярные числа.

Ключевые слова: движение с нулевой дивергенцией, линейное поле скоростей, сингулярные числа матрицы.

Mathematics Subject Classification: 35B06, 35Q35

ВВЕДЕНИЕ

При классификации движений сплошной среды с линейным полем скоростей [1, 2] возникает особый случай движения без расхождения, когда дивергенция скорости равна нулю. Получается переопределенная система обыкновенных дифференциальных уравнений и требуется изучить ее совместность. Для общего движения этому соответствует решения, например, уравнений сжимаемой жидкости с нулевой дивергенцией [3]

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0,$$

$$\rho_t + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad p_t + \vec{u} \cdot \nabla p = 0, \quad (0.1)$$

где \vec{u} , p и ρ – скорость, давление и плотность. Система (0.1) справедлива для любого уравнения состояния, из которого определяется энтропия. Переопределенная система (0.1) в пространственном случае не приведена в инволюцию и не известен произвол в решениях (как задавать начальные данные).

Физический смысл решений с нулевой дивергенцией состоит в следующем: для любого выделенного ограниченного объема сколько жидкости втекает в него столько же и вытекает из него.

Плоские движения без расхождения с линейным полем скоростей перечислены в [4]. В работе ставится задача найти все решения уравнений (0.1) с линейным полем скоростей в пространственном случае. Так же как и в плоском случае получаются решения либо с линейной по времени матрицей, либо матрица имеет постоянные сингулярные числа.

S.V. KHABIROV, SPACE MOTIONS WITH THE LINEAR FIELD OF VELOCITY WITHOUT DIVERGENCE.

©ХАБИРОВ С.В. 2015.

Работа поддержана РФФИ(14-01-97027), Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (НШ-2133.2014.1), грантом № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Поступила 16 мая 2014 г.

1. ЭЙЛЕРОВО И ЛАГРАНЖЕВО ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Решения системы (0.1) с линейным полем скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t) \quad (1.1)$$

определяют эйлерову подмодель из переопределенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \text{tr}A = 0, \quad A' + A^2 = B, \quad B' + A^T B + BA = 0, \\ \vec{u}'_0 + A\vec{u}_0 = \vec{a}, \quad \vec{a}' + A^T \vec{a} + B\vec{u}_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Лагранжевы переменные $t, \vec{\xi}$ вводятся как решение задачи

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{\xi}, \quad (1.3)$$

и задаются формулами

$$\vec{x} = \vec{x}_0(t) + M(t)\vec{\xi}, \quad M(t_0) = I, \quad \vec{x}_0(t_0) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь I – единичная матрица. Из равенств (1.3), (1.4) следуют выражения для матриц A, B и векторов \vec{u}_0, \vec{a} через матрицу M и вектор \vec{x}_0 :

$$\begin{aligned} A = M' M^{-1}, \quad B = M'' M^{-1}, \\ \vec{u}_0 = \vec{x}'_0 - M' M^{-1} \vec{x}_0, \quad \vec{a} = \vec{x}''_0 - M'' M^{-1} \vec{x}_0. \end{aligned}$$

Из уравнений (1.2) следуют уравнения лагранжевой подмодели

$$M^T M'' = C = S_0 + E < \vec{\omega}_0 >, \quad M^T \vec{x}''_0 = \vec{c}, \quad |M| = 1, \quad (1.5)$$

где C и \vec{c} – постоянные матрица и вектор как результат интегрирования, $S_0 = \|s_{ij}^0\|$ и $E < \vec{\omega}_0 >$ – симметричная и антисимметричная части матрицы C . Здесь использовано тождество

$$|M|' = |M| \text{tr}(M' M^{-1}).$$

Начальные условия системы (1.5) имеют вид

$$M(t_0) = I, \quad M'(t_0) = M_1 = S_1 + E < \vec{\omega}_1 >, \quad \text{tr}S_1 = 0, \quad (1.6)$$

где S_1 и $E < \vec{\omega}_1 >$ – симметричная и антисимметричная части матрицы M_1 . Антисимметричные матрицы задаются векторами по формуле

$$E < \vec{\omega}_i > = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_i^3 & \omega_i^2 \\ \omega_i^3 & 0 & -\omega_i^1 \\ -\omega_i^2 & \omega_i^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

В лагранжевых переменных уравнения (0.1) принимают вид

$$p_t = 0, \quad \rho_t = 0, \quad \nabla_{\xi} p = -\rho(\vec{\xi})(C\vec{\xi} + \vec{c}). \quad (1.7)$$

Условия совместности системы (1.7) таковы

$$\nabla_{\xi} \rho \times (S_0 \vec{\xi} + \vec{c} + \vec{\omega}_0 \times \vec{\xi}) = 2\rho \vec{\omega}_0.$$

Отсюда следуют равенства для движений с переменной плотностью

$$\vec{\omega}_0 \cdot \nabla_{\xi} \rho = 0, \quad \nabla_{\xi} \rho \times (S_0 \vec{\xi} + \vec{c}) + \vec{\omega}_0 (\vec{\xi} \cdot \nabla_{\xi} \rho - 2\rho) = 0, \quad (1.8)$$

$$\nabla_{\xi} \rho (\vec{\omega}_0 \cdot (S_0 \vec{\xi} + \vec{c})) = 0 \Rightarrow S_0 \vec{\omega}_0 = 0, \quad \vec{\omega}_0 \cdot \vec{c} = 0. \quad (1.9)$$

Если $\vec{\omega}_0 = 0$, то из уравнений (1.8) и (1.7) следуют выражения для плотности и давления

$$\rho = P'(J), \quad p = P_0 - P(J), \quad J = 2^{-1} \vec{\xi} \cdot S_0 \vec{\xi} + \vec{c} \cdot \vec{\xi}.$$

Здесь и далее P_0 – постоянная, $P(J)$ – произвольная функция.

Если $\vec{\omega}_0 \neq 0$, например, $\omega_0^1 \neq 0$, то скалярное уравнение в (1.8) имеет общее решение

$$\rho = \rho(\alpha, \beta), \quad \alpha = \xi^2 - \omega_0^2(\omega_0^1)^{-1}\xi^1, \quad \beta = \xi^3 - \omega_0^3(\omega_0^1)^{-1}\xi^1,$$

и векторное уравнение (1.8) сводится к уравнению

$$\rho_\alpha(c^3 + (s_{23}^0 + \omega_0^2)\alpha + s_{33}^0\beta) + \rho_\beta(-c^2 - s_{22}^0\alpha - (s_{23}^0 - \omega_0^1)\beta) = -2\omega_0^1\rho. \quad (1.10)$$

Если $\Delta = s_{22}^0s_{33}^0 - (s_{23}^0)^2 + (\omega_0^1)^2 \neq 0$, то возможно сдвинуть независимые переменные α, β на постоянные α_0, β_0

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_0, \\ \alpha_0 = \Delta^{-1}(c^3(s_{23}^0 - \omega_0^1) - c^2s_{33}^0), \quad \beta_0 = \Delta^{-1}(c^2(s_{23}^0 + \omega_0^1) - c^3s_{22}^0)$$

так, чтобы уравнение (1.10) допускало равномерное растяжение по переменным α_1 и β_1 . Тогда, вводя инвариант $K = \beta_1\alpha_1^{-1}$ в качестве новой независимой переменной вместе с α_1 , получим интегрируемое уравнение. Его решение и решение уравнения (1.7) представляются в виде

$$\rho = R''(J) \exp(2\omega_0^1 \int P^{-1}(K)dK), \quad J = \alpha_1^2 P(K) \exp(2\omega_0^1 \int P^{-1}(K)dK), \\ P(K) = s_{33}^0K^2 + 2s_{23}^0K + s_{22}^0, \quad p = P_0 + R(J) - JR'(J), \quad R'' > 0, \quad (1.11)$$

где $R(J)$ – произвольная функция.

Если $(s_{22}^0)^{-1}(s_{23}^0 - \omega_0^1) = s_{33}^0(s_{23}^0 + \omega_0^1)^{-1} = \lambda \neq 0$, то замена $K = \alpha + \beta\lambda$ приводит к интегрируемому уравнению (1.10). Его решение и решение уравнения (1.7) имеют вид

$$\rho = \frac{JP'(J)}{2\omega_0^1K + c^3 - \lambda c^2}, \quad J = |2\omega_0^1K + c^3 - \lambda c^2|^n \exp(\beta + 2^{-1}(\omega_0^1)^{-1}s_{22}^0K), \\ p = P_0 - P(J), \quad n = 4^{-1}(\omega_0^1)^{-2}((s_{23}^0 + \omega_0^1)c^2 - s_{22}^0c^3). \quad (1.12)$$

Если $\lambda = 0$, $s_{33}^0 = 0$, $s_{23}^0 = \omega_0^1$, то формулы (1.12) верны и в этом случае.

Для постоянной плотности из уравнения (1.7) следует

$$\vec{\omega}_0 = 0, \quad p = P_0 - \rho_0(\vec{c} \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot S_0\vec{\xi}).$$

Итак, формулы для плотности и давления получены в лагранжевых переменных.

2. РЕШЕНИЯ С ЛИНЕЙНОЙ МАТРИЦЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

Если матрица $C = 0$, то матрица M линейна по времени t ($t_0 = 0$)

$$M = I + tM_1.$$

Из уравнения $|M| = 1$ следуют равенства $|M_1| = 0$, $\text{tr}M_1 = 0$, $\text{tr}M_1^2 = 0$, то есть матрица M_1 нильпотентна $M_1^3 = 0$,

$$M^{-1} = I - M_1t + M_1^2t^2, \quad A = M'M^{-1} = M_1 - M_1^2t.$$

Выбором системы координат матрица M_1 приводится к жордановому виду. Все собственные числа матрицы M_1 нулевые. Возможно два типа жордановых матриц:

$$1) \quad M_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| = A, \quad \vec{u}_0 = \left\| \begin{array}{c} C_1t + C_2 \\ C_6 - (C_3 + 6C_5)t - C_4t^2 - C_5t^3 \\ C_3 + 2C_4t + 3C_5t^2 \end{array} \right\|;$$

$$2) \quad M_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad A = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\vec{u}_0 = \left\| \begin{array}{c} C_6 + (12C_1 - C_5)t + (C_4 - 3C_2)t^2 + (2C_1 + C_3)t^3 + C_2t^4 - C_1t^5 \\ C_5 + (6C_2 - C_4)t - (6C_1 + C_3)t^2 - C_2t^3 + C_1t^4 \\ C_4 + 2C_3t + 3C_2t^2 - 4C_1t^3 \end{array} \right\|.$$

Здесь C_i – постоянные.
Далее матрица C не нулевая.

3. ИНТЕГРАЛЫ ЛАГРАНЖЕВОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЯ

Симметричная часть матричного уравнения модели (1.5) имеет вид

$$M^T M'' + M''^T M = 2S_0. \quad (3.1)$$

Антисимметричная часть матричного уравнения (1.5) интегрируется

$$M^T M' - M'^T M = 2E \langle \vec{\omega} \rangle, \quad \vec{\omega} = t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1. \quad (3.2)$$

Здесь начальные условия (1.6) взяты при $t_0 = 0$.

Уравнения (1.5) допускают перенос по t . Начальные условия при $\vec{\omega}_0 \neq 0$ перенесем в $t_0 = -(\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1)|\vec{\omega}_0|^{-2}$, чтобы преобразованный вектор $\vec{\omega}'_1 = t_0\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1$ стал ортогональным вектору $\vec{\omega}_0$. Это все равно, что при $t_0 = 0$ выполнено равенство

$$\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0. \quad (3.3)$$

Матрицу M можно представить в виде произведения ортогональной и симметричной матриц

$$M = Q\Lambda, \quad QQ^T = I, \quad \Lambda^T = \Lambda, \quad |\Lambda| = 1, \quad |Q| = 1, \\ \Lambda(0) = I, \quad Q(0) = I, \quad \Lambda'(0) = S_1.$$

Матрица $E \langle \vec{q} \rangle = Q^T Q'$ антисимметрична, $\vec{q}(0) = \vec{\omega}_1$.

Интеграл (3.2) записывается в виде

$$\Lambda\Lambda' - \Lambda'\Lambda + 2E \langle \Lambda^{-1}\vec{q} \rangle = 2E \langle \vec{\omega} \rangle.$$

Отсюда определяется матрица

$$E \langle \vec{q} \rangle = E \langle \Lambda\vec{\omega} \rangle + 2^{-1}(\Lambda^{-1}\Lambda' - \Lambda'\Lambda^{-1}). \quad (3.4)$$

В силу (3.4) уравнение (3.1) представляется в виде

$$(\Lambda^2)'' = ((\Lambda^2)' - 2E \langle \vec{\omega} \rangle)\Lambda^{-2}((\Lambda^2)' + 2E \langle \vec{\omega} \rangle) + 4S_0. \quad (3.5)$$

Начальные условия (1.6) записываются в виде

$$\Lambda^2(0) = I, \quad (\Lambda^2)'(0) = 2S_1, \quad \text{tr}S_1 = 0, \quad (\Lambda^2)''(0) = 2(M_1^T M_1 + S_0). \quad (3.6)$$

Симметричную матрицу Λ^2 удобно представить в виде

$$\Lambda^2 = ODO^T, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad OO^T = I, \quad |O| = 1.$$

Выбором системы координат начальные условия можно представить в виде

$$O(0) = I, \quad D(0) = I, \quad D'(0) = 2S_1. \quad (3.7)$$

Матрицу поворота O можно задать вектором угловой скорости $\vec{\sigma}$

$$O' = OE \langle \vec{\sigma} \rangle.$$

Скалярное уравнение (1.5) принимает простой вид

$$|D| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1.$$

4. ПРОСТЕЙШЕЕ РЕШЕНИЕ

Система (3.5) совместна. Действительно, при $\Lambda^2 = I$ из равенств (3.5), (3.6) следуют условия совместности для параметров

$$S_0 = E < \vec{\omega} >^2, \quad S_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}_0 = 0, \quad S_0 = E < \vec{\omega}_1 >^2 \neq 0. \quad (4.1)$$

При этих значениях параметров из равенства (3.4) следуют соотношения

$$Q' = QE < \vec{\omega}_1 >, \quad M = Q, \quad O(0) = I.$$

Матричное уравнение интегрируется $Q = \exp(tE < \vec{\omega}_1 >)$ и следует, что матрицы Q и $E < \vec{\omega}_1 >$ перестановочны.

С помощью формулы

$$E < \vec{\omega}_1 >^{2k} = (-1)^k |\vec{\omega}_1|^{2k} \left(I - \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \otimes \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \right)$$

вычисляется матричная экспонента

$$\begin{aligned} M = \exp(tE < \vec{\omega}_1 >) &= I \cos(t|\vec{\omega}_1|) + \sin(t|\vec{\omega}_1|) E < \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} > + \\ &+ (1 - \cos(t|\vec{\omega}_1|)) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \otimes \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|}. \end{aligned}$$

Векторное уравнение (1.5) принимает вид

$$\vec{x}_0'' = \vec{c} \cos(t|\vec{\omega}_1|) + (1 - \cos(t|\vec{\omega}_1|)) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^2} (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{c}) + \sin(t|\vec{\omega}_1|) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|} \times \vec{c}.$$

Интегрирование дает

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 = & -\frac{\vec{c}}{|\vec{\omega}_1|^2} \cos(t|\vec{\omega}_1|) + \left(2^{-1}t^2 + \frac{\cos(t|\vec{\omega}_1|)}{|\vec{\omega}_1|^2} \right) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^2} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{c} - \\ & - \sin(t|\vec{\omega}_1|) \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^3} \times \vec{c} + t \left(\vec{c}_1 + \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{c}}{|\vec{\omega}_1|^2} \right) + \frac{\vec{c}}{|\vec{\omega}_1|^2} - \frac{\vec{\omega}_1}{|\vec{\omega}_1|^4} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{c}, \end{aligned}$$

где \vec{c} и \vec{c}_1 – постоянные векторы.

Вектор \vec{u}_0 определяется из выражения (1.1) по формуле

$$\vec{u}_0 = \vec{x}_0' - \vec{\omega}_1 \times \vec{x}_0.$$

Если $\Lambda^2 = I$, то движение среды происходит как движение твердого тела [6, §1].

Верно утверждение: условие $S_0 = E < \vec{\omega}_1 >^2$ необходимо и достаточно для существования простейшего решения. Это легко доказать непосредственно, но это же следует из последующего утверждения об отсутствии других решений.

5. ОБ ОТСУТСТВИИ ДРУГИХ РЕШЕНИЙ

Кроме решений с линейной матрицей M по времени и простейших решений с единичной матрицей $\Lambda^2 = I$ других решений уравнения (1.5) не имеют. Это было доказано в плоском случае в работе [4]. Собственные числа матрицы Λ^2 в плоском случае равны единице: $D = I$. Собственные числа матрицы Λ^2 в пространственном случае удовлетворяют соотношениям $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. По теореме о перемежаемости сингулярных чисел [5] выполняются неравенства

$$0 < \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2 \leq 1 \leq \lambda_3.$$

Значит, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = d$, $\lambda_3 = d^{-1}$ и $D = de_{11} + e_{22} + d^{-1}e_{33}$. Здесь и далее e_{ij} – матрица размера 3×3 , у которой на пересечении i -й строки и j -го столбца стоит единица, а в остальных местах нули.

Удобно в качестве независимой переменной выбрать значения функции $d(t)$, $d(0) = 1$. Функция $t(d)$ – обратная к функции $d(t)$. Уравнения (3.5) принимают вид

$$2\ddot{\Lambda}^2 t - 2\dot{\Lambda}^2 \dot{t} = \dot{t}(\dot{\Lambda}^2 - 2\dot{t}E < \vec{\omega} >) \Lambda^{-2}(\dot{\Lambda}^2 + 2\dot{t}E < \vec{\omega} >) + 4t^3 S_0, \quad (5.1)$$

$$\Lambda^2(1) = I, \quad \dot{\Lambda}^2(1) = 2t_1 S_1, \quad (5.2)$$

где точкой обозначена производная по переменной d .

Функция $t(d)$ представляется рядом

$$t = t_1(d-1) + \sum_{i \geq 2} t_i(d-1)^i.$$

При $t_1 \neq 0$ замена $t_i t_1^{-1} \rightarrow t_i$, $t_1^2 \vec{\omega}_0 \rightarrow \vec{\omega}_0$, $t_1 \vec{\omega}_1 \rightarrow \vec{\omega}_1$, $t_1^2 S_0 \rightarrow S_0$, $t_1 S_1 \rightarrow S_1$ делает $t_1 = 1$.

Матрица Λ^2 представляется в виде

$$\Lambda^2 = O \text{diag}(d, 1, d^{-1}) O^T = I + (d-1)(G_1 - d^{-1}G_3), \quad (5.3)$$

$$\Lambda^{-2} = I + (d-1)(G_3 - d^{-1}G_1), \quad (5.4)$$

где $G_k = O e_{kk} O^T$, $G_k^2 = G_k$, $O(1) = I$, $G_1 G_3 = 0$,

$$\dot{G}_k = \text{ad}(\vec{\sigma}) G_k, \quad G_k(1) = e_{kk}. \quad (5.5)$$

Из условия (5.2) следует равенство $e_{11} - e_{33} = 2S_1$. Уравнение (5.1) при $d = 1$ определяет матрицу

$$S_0 = E < \vec{\omega}_1 >^2 + \text{ad}(\vec{\sigma}_0 + 2^{-1}\vec{\omega}_1)(e_{11} - e_{33}) - 4^{-1}e_{11} + 4^{-1}3e_{33} - t_2(e_{11} - e_{33}), \quad (5.6)$$

где $\vec{\sigma}(1) = \vec{\sigma}_0$. Здесь использовано стандартное обозначение для коммутатора матриц

$$\text{ad}(\vec{\sigma})S = E < \vec{\sigma} > S - SE < \vec{\sigma} >.$$

Все величины, входящие в уравнение (5.1), выражаются через функции t , $\vec{\sigma}$ и параметры $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_1$, которые связаны четырьмя скалярными соотношениями $S_0 \vec{\omega}_0 = 0$, $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0$:

$$\dot{\Lambda}^2 = G_1 - d^{-2}G_3 + (d-1)\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3),$$

$$\ddot{\Lambda}^2 = 2d^{-3}G_3 + 2\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-2}G_3) + (d-1)(\text{ad}(\dot{\vec{\sigma}}) + \text{ad}(\vec{\sigma})^2)(G_1 - d^{-1}G_3).$$

Решение уравнения (5.1) представляются рядами

$$t = d - 1 + \sum_{i \geq 2} t_i(d-1)^i, \quad \vec{\sigma} = \sum_{i \geq 0} \vec{\sigma}_i(d-1)^i. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.1) после подстановки матрицы (5.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} & 4\dot{t}(d^{-3}G_3 + \text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-2}G_3)) - 2\ddot{t}(G_1 - d^{-2}G_3) - \dot{t}(G_1 + d^{-4}G_3) + \\ & + 2\dot{t}^2 \text{ad}(\vec{\omega}_1)(G_1 - d^{-2}G_3) - 4t^3 [\text{ad}(\vec{\sigma}_0 + 2^{-1}\vec{\omega}_1)(e_{11} - e_{33}) - 4^{-1}e_{11} + 4^{-1}3e_{33} - t_2(e_{11} - e_{33})] = \\ & = 2\ddot{t}(d-1)\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) - 2\dot{t}(d-1)(\text{ad}(\dot{\vec{\sigma}}) + \text{ad}(\vec{\sigma})^2)(G_1 - d^{-1}G_3) + \\ & + \dot{t}(d-1)[\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 + d^{-3}G_3) - d^{-2}(d-1)(G_1 E < \vec{\sigma} > G_3 - G_3 E < \vec{\sigma} > G_1)] + \\ & + \dot{t}(d-1)^2 (\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3))^2 - 2\dot{t}^2 t \text{ad}(\vec{\omega}_0)[G_1 - d^{-2}G_3 + (d-1)\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3)] - \\ & - 2\dot{t}(d-1)\text{ad}(\vec{\omega}_1)\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) - 4t^3 t (tE < \vec{\omega}_0 >^2 + \omega_0 \otimes \omega_1 + \omega_1 \otimes \omega_0) + \\ & + (d-1)\dot{t}[G_1 - d^{-2}G_3 + (d-1)\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) - 2\dot{t}E < \vec{\omega} >](G_3 - d^{-1}G_1)[G_1 - d^{-2}G_3 + \\ & + (d-1)\text{ad}(\vec{\sigma})(G_1 - d^{-1}G_3) + 2\dot{t}E < \vec{\omega} >]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Обнуление коэффициента при $d - 1$ в уравнении (5.8) дает матричное равенство

$$\begin{aligned} & -12(t_3 - 2t_2^2)(e_{11} - e_{33}) - 4t_2 \text{ad}(5\vec{\sigma}_0 + \vec{\omega}_1)(e_{11} - e_{33}) + 4t_2(e_{11} - 5e_{33}) + \\ & + \text{ad}(\vec{\sigma}_0)(11e_{33} - e_{11}) + 4\text{ad}(\vec{\omega}_1)e_{33} + 6(\text{ad}(\vec{\sigma}_1) + \text{ad}(\vec{\sigma}_0)^2)(e_{11} - e_{33}) - \\ & - 12t_3 \text{ad}(\vec{\sigma}_0)(e_{11} - e_{33}) - \text{ad}(\vec{\sigma}_0)(e_{11} + e_{33}) + 2\text{ad}(\vec{\omega}_0)(e_{11} - e_{33}) + 4\text{ad}(\vec{\omega}_1)\text{ad}(\vec{\sigma}_0)(e_{11} - e_{33}) + \\ & + 4\vec{\omega}_0 \otimes \vec{\omega}_1 + 4\vec{\omega}_1 \otimes \vec{\omega}_0 + e_{11} - 9e_{33} + 2\text{ad}(\vec{\omega}_1)(e_{11} + e_{33}) + 4E < \vec{\omega}_1 > (e_{33} - e_{11})E < \vec{\omega}_1 > = 0. \end{aligned}$$

След этого матричного равенства определяет параметр

$$t_2 = -2^{-1} + 4^{-1}((\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2).$$

Верхние диагональные элементы определяют параметр

$$12t_3 = 5 - (\omega_1^3)^2 + (\omega_1^1)^2 + 2^{-1}3((\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2)^2 - 12(\sigma_0^1)^2 - 24(\sigma_0^2)^2 - 8\omega_1^1\sigma_0^1 - 16\omega_1^2\sigma_0^2 - 8\omega_0^3\omega_1^3 - 4(\omega_1^2)^2.$$

Недиагональные элементы определяют вектор $\vec{\sigma}_1$. Средние диагональные элементы дают уравнение

$$3(\sigma_0^3)^2 - 3(\sigma_0^1)^2 + 2\omega_1^3\sigma_0^3 - 2\omega_1^1\sigma_0^1 + 2\omega_0^2\omega_1^2 + (\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2 = 0. \quad (5.9)$$

Равенство $S_0\vec{\omega}_0 = 0$ определяет вектор $\vec{\sigma}_0$ при $\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} 4\omega_0^1\omega_0^3(\sigma_0^2 + 2^{-1}\omega_1^2) &= \vec{\omega}_1^2((\omega_0^2)^2 - (\omega_0^1)^2 - (\omega_0^3)^2) + 4^{-1}((\omega_0^1)^2 + (\omega_0^3)^2) + \\ &+ 4^{-1}((\omega_0^1)^2 - (\omega_0^3)^2)((\omega_1^1)^2 - (\omega_1^3)^2), \\ \omega_0^2(\sigma_0^1 + 2^{-1}\omega_1^1) &= 2\omega_0^1(\sigma_0^2 + 2^{-1}\omega_1^2) + \omega_0^3(\vec{\omega}_1^2 - 4^{-1} + 4^{-1}(\omega_1^1)^2 - 4^{-1}(\omega_1^3)^2), \\ \omega_0^2(\sigma_0^3 + 2^{-1}\omega_1^3) &= 2\omega_0^3(\sigma_0^2 + 2^{-1}\omega_1^2) + \omega_0^1(\vec{\omega}_1^2 - 4^{-1} - 4^{-1}(\omega_1^1)^2 + 4^{-1}(\omega_1^3)^2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Итак, имеется два уравнения (5.9) и $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0$ для шести параметров.

Если $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^1\omega_0^3 \neq 0$, то из (5.10) определяется σ_0^2 и остается три уравнения

$$((\omega_1^1)^2 - (\omega_1^3)^2)(4\vec{\omega}_1^2 - 1 + (\omega_1^1)^2 + (\omega_1^3)^2) = 0$$

$$\omega_0^1\omega_1^1 + \omega_0^3\omega_1^3 = 0$$

$$3(\sigma_0^3)^2 + 2\omega_1^3\sigma_0^3 + (\omega_1^3)^2 = 3(\sigma_0^1)^2 + 2\omega_1^1\sigma_0^1 + (\omega_1^1)^2 \quad (5.11)$$

для семи параметров $\vec{\omega}_1$, ω_0^1 , ω_0^3 , σ_0^1 , σ_0^3 .

Если $\omega_0^2 = 0$, $\omega_0^1 = 0$, $\omega_0^3 \neq 0$, то $\sigma_0^2 = -2^{-1}\omega_1^2$, $\omega_1^3 = 0$ и остается два уравнения (5.11) и $5(\omega_1^1)^2 + 4(\omega_1^2)^2 = 1$ для пяти параметров σ_0^1 , σ_0^3 , ω_0^3 , ω_1^1 , ω_1^2 .

Если $\vec{\omega}_0 = 0$, то имеется только одно уравнение (5.11) для шести параметров $\vec{\sigma}_0$, $\vec{\omega}_1$.

Если $\omega_0^2 \neq 0$, $\omega_0^1 = 0$ (или $\omega_0^3 = 0$), то определяются σ_0^1 , σ_0^3 и остается три уравнения (5.9), $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0$ и

$$(\omega_1^2)^2(4\vec{\omega}_1^2 - 1) = (4\vec{\omega}_1^2 + 1)((\omega_1^3)^2 - (\omega_1^1)^2)$$

для шести параметров $\vec{\omega}_1$, ω_0^2 , ω_0^3 (или ω_0^1), σ_0^2 .

Наконец, если $\omega_0^1 = \omega_0^3 = 0$, $\omega_0^2 \neq 0$, то $\vec{\omega}_1 = 0$, $(\sigma_0^3)^2 = (\sigma_0^1)^2$. Есть только одно уравнение для четырех параметров $\vec{\sigma}_0$, ω_0^2 .

Обнуление коэффициента при $(d-1)^2$ в уравнении (5.8) дает шесть скалярных уравнений. При этом добавляются новые параметры t_4 , $\vec{\sigma}_2$, которые однозначно определяются. Остается два уравнения для отмеченных выше параметров.

Обнуление коэффициента при $(d-1)^3$ в уравнении (5.8) дает шесть новых скалярных уравнений. При этом добавляются новые параметры t_5 , $\vec{\sigma}_3$, которые однозначно определяются. Остается два уравнения для отмеченных выше параметров.

Обнуление коэффициента при $(d-1)^4$ в уравнении (5.8) дает шесть новых скалярных уравнений. При этом добавляются новые параметры t_6 , $\vec{\sigma}_4$, которые однозначно определяются. Остается два уравнения для отмеченных выше параметров, которые переопределяют алгебраическую систему.

На каждом шаге обнуление коэффициента при $(d-1)^k$ в уравнении (5.8) определяет параметры $t_{(k+1)}$, $\vec{\sigma}_k$ и добавляет два новых уравнения на отмеченные выше параметры. Таким образом, получается бесконечная цепочка уравнений на параметры, число которых не более шести. Этот факт неизбежно приводит к противоречию.

Оригинальное доказательство противоречия состоит в следующем. Уравнения $G_k^2 = G_k$, $k = 1, 3$ имеют решения $G_k = \vec{\lambda}_k \otimes \vec{\lambda}_k$, $\vec{\lambda}_k^2 = 1$. Из условия $G_1 G_3 = 0$ следует $\vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_3 = 0$. С обозначением $\vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_3 \times \vec{\lambda}_1$ трехвекторник $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3$ образует подвижный ортонормированный репер. Уравнения (5.5) определяют движения подвижного репера

$$\dot{\vec{\lambda}}_k = \vec{\sigma} \times \vec{\lambda}_k, \quad \vec{\lambda}_k(1) = \vec{e}_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

где

$$\vec{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

а $\vec{\sigma}$ – угловая скорость подвижного репера.

Из уравнения (5.12) следует равенство

$$2\vec{\sigma} = \vec{\lambda}_1 \times \dot{\vec{\lambda}}_1 + \vec{\lambda}_2 \times \dot{\vec{\lambda}}_2 + \vec{\lambda}_3 \times \dot{\vec{\lambda}}_3 \quad (5.13)$$

Из равенств $G_k^2 = G_k$ и (5.13) следует, что функции $\vec{\lambda}_k, \vec{\sigma}$ не имеют полюсов для любого значения d .

Справедливы формулы

$$\begin{aligned} \text{ad}(\vec{\sigma})G_k &= \dot{\vec{\lambda}}_k \otimes \vec{\lambda}_k + \vec{\lambda}_k \otimes \dot{\vec{\lambda}}_k, \\ (\text{ad}(\dot{\vec{\sigma}}) + \text{ad}(\vec{\sigma})^2)G_k &= \ddot{\vec{\lambda}}_k \otimes \vec{\lambda}_k + \vec{\lambda}_k \otimes \ddot{\vec{\lambda}}_k + 2\dot{\vec{\lambda}}_k \times \dot{\vec{\lambda}}_k, \end{aligned}$$

в силу которых уравнение (5.8) принимает вид

$$\begin{aligned} &2d^2\dot{t}[2\vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + 2d^3(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - 2d(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3) + \\ &+ d^3(d-1)(\ddot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \ddot{\vec{\lambda}}_1) + d^2(d-1)(\ddot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \ddot{\vec{\lambda}}_3 + 2\dot{\vec{\lambda}}_3 \times \dot{\vec{\lambda}}_3)] - \\ &- 2d^3\dot{t}[d^2\vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + d^2(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - d(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3)] = \\ &= t[d^2\vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 - \vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + d^2(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - d(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3) - \\ &- 2d^2\dot{t}E \langle t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \rangle](dI + (d-1)(d\vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 - \vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1)[d^2\vec{\lambda}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 - \\ &- \vec{\lambda}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + d^2(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_1 \otimes \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_1 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_1) - d(d-1)(\dot{\vec{\lambda}}_3 \otimes \vec{\lambda}_3 + \vec{\lambda}_3 \otimes \dot{\vec{\lambda}}_3) + \\ &+ 2d^2\dot{t}E \langle t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1 \rangle] + 4d^5\dot{t}^3S_0. \end{aligned}$$

Коэффициенты при t, \dot{t}, \ddot{t} не имеют полюсов в точке $d = 0$. Главные члены асимптотик этих коэффициентов дают приближенное равенство

$$(\dot{t} + 2^{-1}d\ddot{t})\vec{\lambda}_{03} \otimes \vec{\lambda}_{03} \simeq -d^2\dot{t}^3[(t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{\lambda}_{10}] \otimes ((t\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{\lambda}_{10}) + dS_0, \quad (5.14)$$

где $\vec{\lambda}_{k0} = \vec{\lambda}_k(0)$.

Пусть функция $t(d)$ имеет особенность в точке $d = 0$ типа полюса $t = t_{-j}d^{-j} + \dots, t_{-j} \neq 0, j > 0$. Тогда равенство (5.14) имеет следующие главные слагаемые

$$2^{-1}j(j-1)t_{-j}\vec{\lambda}_{30} \otimes \vec{\lambda}_{30} \simeq t_{-j}^5j^3d^{-4j}(\vec{\omega}_0 \times \vec{\lambda}_{10}) \otimes (\vec{\omega}_0 \times \vec{\lambda}_{10}).$$

Отсюда следует равенство $\vec{\lambda}_{10} = k\vec{\omega}_0$. С учетом полученного соотношения равенство (5.14) имеет следующие главные слагаемые

$$2^{-1}j(j-1)t_{-j}\vec{\lambda}_{30} \otimes \vec{\lambda}_{30} \simeq t_{-j}^3j^3d^{-2j}(\vec{\omega}_1 \times \vec{\lambda}_{10}) \otimes (\vec{\omega}_1 \times \vec{\lambda}_{10}).$$

Отсюда следует равенство $\vec{\lambda}_{10} = l\vec{\omega}_1$. Скалярное умножение полученных соотношений приводит к противоречию

$$1 = \vec{\lambda}_{10}^2 = kl\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_1 = 0.$$

Значит, функция $t(d)$ не имеет особенностей в нуле. Пусть $t = t_0 + t_k d^k + \dots$, $k > 0$, тогда (5.14) имеет следующие главные слагаемые

$$2^{-1}k(k+1)t_k \vec{\lambda}_{03} \otimes \vec{\lambda}_{03} \simeq k^3 t_k^3 d^{2k+2} [((t_0 \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{\lambda}_{10}) \otimes ((t_0 \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \times \vec{\lambda}_{10}) + dS_0].$$

Отсюда следует $t_k = 0$, $k > 0$ и t – постоянно. Противоречие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юлмухаметова Ю.В. *Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 128–136.
2. Юлмухаметова Ю.В. *Подмодели движения газа с линейным полем скоростей в вырожденном случае* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 139–150.
3. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики*. Москва–Ижевск: ИКТ, 2003. 336 с.
4. Хабиров С.В. *Плоские движения газа без расхождения с линейным полем скоростей* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 3. С. 107–113.
5. Годунов С.К. *Современные аспекты линейной алгебры*. Новосибирск: Научная книга, 1997. 390 с.
6. Годунов С.К., Роменский Е.И. *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*. Новосибирск: Научная книга, 1998. 280 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru