ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 86-97.

УДК 517.521, 517.518, 519.654, 53.087.45, 53.088.6, 53.088.7

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНТАМИ

Р.А. ШАРИПОВ

Аннотация. В результате математической формализации одной из задач цифровой обработки сигналов возникает задача наилучшего приближения квадратично интегрируемой функции, заданной на некотором ограниченном интервале вещественной оси, линейными комбинациями экспонент. Она решается как оптимизационная задача путём минимизации среднеквадратичного отклонения по коэффициентам линейных комбинаций и по показателям экспонент. В отдельных случаях при минимизации по показателям экспонент проявляется вычислительная сингулярность, связанная с малыми знаменателями. В данной работе показано, что эта сингулярность является устранимой и описан механизм её устранения.

Ключевые слова: спектр сигнала, аппроксимация экспонентами, среднеквадратичное отклонение, малые знаменатели.

Mathematics Subject Classification: 46E30, 41A30, 65D15, 68W25

1. Введение

Сигналы в виде смеси затухающих и незатухающих синусоидальных колебаний с несколькими частотами возникают при различных измерениях. Частоты отдельных компонент в смеси составляют спектр сигнала, а сам процесс измерения сводится к выделению одной или нескольких компонент из смеси и определению их амплитуд. В большинстве случаев выделение компонент из смеси осуществляется радиотехническими средствами при помощи резонансных фильтров. Но иногда применение таких фильтров невозможно, например, в случае очень низких частот, когда периоды синусоидальных компонент сигнала превышают время измерения сигнала. В таких случаях сигнал оцифровывается, после чего возникает проблема разделения его на компоненты при помощи цифровых алгоритмов. В таком виде задача была поставлена автору генеральным директором группы компаний «ФизТех» А.С. Вишневским.

Измеренный и оцифрованный сигнал можно понимать как некоторую функцию $f(x)$, заданную своими значениями в конечном наборе точек числовой оси. Однако, дискретность аргумента не является принципиальным упрощением при математической формализации задачи. Поэтому в дальнейшем мы считаем входящий сигнал $f(x)$ функцией, заданной на некотором интервале $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Аппроксимирующую функцию для $f(x)$ обозначим через $\phi(x)$ и выберем в виде линейной комбинации

$$\phi(x) = a_1\,\phi_1(x) + \,\ldots a_n\,\phi_n(x), \tag{1.1}$$

где функции $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ — это экспоненты с попарно различными комплексными показателями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_i x},\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

R.A. Sharipov, On a problem associated with approximation by exponential functions.

Поступила 25 ноября 2014г.

Экспоненты с комплексными показателями (1.2) в (1.1) моделируют синусоидальные сигналы с затуханием. Они комплексны, поэтому коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ в (1.1) также следует считать комплексными числами.

На практике сигнал $f(x)$ вещественен. Однако его вещественность не является принципиальным упрощением. По этой причине и для большей общности функцию $f(x)$ мы в дальнейшем считаем комплекснозначной.

Аппроксимация функции $f(x)$ функцией $\phi(x)$ из (1.1) означает, что их разность $f - \phi$ должна быть сделана малой в каком-то смысле. Одним из вариантов понимания малости $f - \phi$ является малость в смысле среднеквадратичного отклонения $\| f - \phi \|$. В нашем случае $\| f - \phi \|$ вычисляется по формуле

$$\| f - \phi \|^2 = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b | f(x) - \phi(x) |^2 \, dx. \tag{1.3}$$

Минимизация среднеквадратичного отклонения $\| f - \phi \|$ лежит в основе метода наименьших квадратов [1], который часто используется при обработке цифровых данных для проверки различных зависимостей между ними.

На практике сигнал $f(x)$ является непрерывной функцией. Однако в теории от этого условия можно отказаться. В качестве единственного условия, обеспечивающего вычислимость интеграла (1.3), остаётся квадратичная интегрируемость функции $f(x)$. Далее, не ограничивая общности, можно считать, что $a = -\pi$ и $b = +\pi$. Тогда формула (1.3) запишется в виде

$$\| f - \phi \|^2 = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} | f(x) - \phi(x) |^2 \, dx, \tag{1.4}$$

что усиливает сходство сумм вида (1.1) с частичными суммами рядов экспонент [2], специальным случаем которых являются ряды Фурье.

В результате изложенной выше формализации проблемы обработки сигналов возникает следующая математическая задача.

Задача 1.1. *Для заданной функции $f(x)$ из гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций $L^2([-\pi, +\pi])$ при каждом фиксированном n найти сумму $\phi(x)$ вида* (1.1), *обеспечивающую наилучшее приближение функции $f(x)$ в смысле L^2-нормы $\| f - \phi \|$ из* (1.4).

Величина среднеквадратичного отклонения $\| f - \phi \|$ в (1.4) зависит от $2n$ комплексных переменных $a_1, \ldots, a_n$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Введём обозначение

$$F(a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \| f - \phi \|^2. \tag{1.5}$$

Тогда задача 1.1 формулируется как задача нахождения абсолютного минимума функции (1.5). Она подразделяется на две задачи. Первая из них — это задача нахождения минимума функции (1.5) по переменным $a_1, \ldots, a_n$ при фиксированных значениях переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \min_{a_1, \ldots, a_n} F(a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{1.6}$$

Вторая — это задача нахождения минимума функции (1.6) по $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$F_{\min} = \min_{\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n} \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{1.7}$$

Задача нахождения минимума в (1.6) оказывается линейной, в силу чего она решается в явном виде стандартными средствами линейной алгебры. Её решение приводится ниже (см. п. 2). Задача нахождения минимума в (1.7) уже нелинейна. Поэтому сформулированная выше задача 1.1 не всегда разрешима в исходной постановке. В данной работе исследуется один из таких случаев, когда минимум (1.7) не существует, а нижняя грань

$$F_{\min} = \inf_{\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n} \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

формируется в окрестности особой точки, в которой нарушается, по крайней мере, одно из условий несовпадения $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Работа [3], где задача 1.1 исследовалась на примере функции $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ при $n = 1$ и $n = 2$, показывает, что такие случаи действительно возникают в вычислительной практике.

Основной результат данной работы состоит в доказательстве того, что особые точки, нарушающие условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, являются устранимыми. Несмотря на наличие малого знаменателя в формуле для $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, функция $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ имеет конечный предел в таких особых точках. Этот предел вычисляется явно, после чего удаётся сформулировать расширенное понимание решений задачи 1.1, которое допускает повторение чисел в последовательности $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ с произвольными кратностями.

2. Решение линейной задачи

Линейная часть задачи 1.1 состоит в нахождении минимума в (1.6). Из (1.5) и (1.1) легко выводится следующая формула:

$$F = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} a^j \left\langle f \middle| \phi_j \right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{a^i} \left\langle \phi_i \middle| f \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, \overline{a^i}\, a^j. \tag{2.1}$$

Посредством угловых скобок в (2.1) обозначено L^2-скалярное произведение

$$\left\langle a \middle| b \right\rangle = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{a(x)}\, b(x)\, dx. \tag{2.2}$$

Черта над переменными и функциями в (2.1) и (2.2) означает комплексное сопряжение. Через g_{ij} в (2.1) обозначены компоненты матрицы Грама G:

$$g_{ij} = \left\langle \phi_i \middle| \phi_j \right\rangle. \tag{2.3}$$

Из (2.2) выводится следующее свойство L^2-скалярного произведения:

$$\overline{\left\langle a \middle| b \right\rangle} = \left\langle b \middle| a \right\rangle. \tag{2.4}$$

Далее из (2.4) выводятся соотношения

$$g_{ij} = \overline{g_{ji}}, \qquad\qquad \left\langle f \middle| \phi_i \right\rangle = \overline{\left\langle \phi_i \middle| f \right\rangle}. \tag{2.5}$$

Минимум функции (1.5) по переменным $a_1, \ldots, a_n$ определяется из условий зануления её частных производных по этим переменным:

$$\frac{\partial F}{\partial a^i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \overline{a^i}} = 0, \text{ где } i = 1, \ldots, n. \tag{2.6}$$

Посчитав производные (2.6) для функции (2.1), мы получаем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, \overline{a^i} = \left\langle f \middle| \phi_j \right\rangle, \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, a^j = \left\langle \phi_i \middle| f \right\rangle, \tag{2.7}$$

где $i = 1, \ldots, n$. Уравнения (2.7) линейны по переменным $a_1, \ldots, a_n$. По этой причине рассматриваемая в этом разделе задача нахождения минимума (1.6) называется линейной задачей.

В силу (2.5) две системы уравнений (2.7) отличаются друг от друга только комплексным сопряжением. Это означает, что достаточно решить только одну из двух систем уравнений.

Выберем для решения вторую систему уравнений (2.7). Она решается при помощи обратной матрицы Грама G^{-1}. Обозначим через g^{ij} компоненты матрицы, получающейся транспонированием обратной матрицы Грама: $(G^{-1})^\top$. Тогда величины g_{ij} и g^{ij} связаны друг с другом следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\, g^{jk} = \delta_i^j, \qquad \sum_{k=1}^{n} g^{kj}\, g_{ki} = \delta_i^j. \tag{2.8}$$

Здесь δ_i^j компоненты единичной матрицы. В контексте линейной адгебры и тензорного исчисления их называют символом Кронекера.

Применяя второе соотношение (2.8) ко второй системе уравнений (2.7), мы находим её решение. Это решение даётся формулой

$$a^j = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} \left\langle \phi_i \middle| f \right\rangle, \text{ где } j = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Подставив (2.9) в (2.1), выводим

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g^{ij} \left\langle \phi_i \middle| f \right\rangle \left\langle f \middle| \phi_j \right\rangle. \tag{2.10}$$

Формулы (2.9) и (2.10) дают решение линейной задачи, которая состоит в нахождении минимума (1.6).

3. Сходимость подпространств в гильбертовых пространствах

Геометрически значение функции $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, вычисленное по формуле (2.10), интерпретируется как L^2-расстояние от функции $f(x) \in L^2([-\pi, +\pi])$ до n-мерного подпространства

$$L = \left\langle \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x) \right\rangle, \tag{3.1}$$

порождённого экспонентами (1.2) в гильбертовом пространстве $L^2([-\pi, +\pi])$. Подпространство (3.1) зависит от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Для того чтобы описать такую зависимость, нам потребуется следующее определение.

Определение 3.1. *Скажем, что последовательность L_q из n-мерных подпространств гильбертова пространства $\mathcal{H}$ сходится к n-мерному подпространству M этого пространства, если в каждом подпространстве L_q имеется базис $\mathbf{e}_{1q}, \ldots, \mathbf{e}_{nq}$ и в M имеется базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, такой, что*

$$\mathbf{e}_{iq} \to \mathbf{e}_i \quad \textit{при} \quad q \to \infty$$

в смысле нормы гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

Определение сходимости подпространств конечномерного комплексного пространства можно найти в [4]. Определение 3.1 согласуется с определением из [4] и является его естественным обобщением на случай гильбертовых пространств (см. следствие 1.5.5 из утверждения 1.5.4 в [4]).

Каждая из экспонент $\phi_i = e^{\lambda_i x}$ непрерывно зависит от своего параметра λ_i в смысле сходимости по норме в пространстве $L^2([-\pi, +\pi])$. Отсюда вытекает непрерывная зависимость скалярных произведений $\left\langle \phi_i \middle| f \right\rangle$ и $\left\langle f \middle| \phi_j \right\rangle$, а также компонент матрицы Грама g_{ij} в (2.3) от параметров $\lambda_1, \ldots\ \lambda_n$. Но, помимо перечисленных величин, в формулу (2.10) входят компоненты g^{ij} матрицы $(G^{-1})^\top$. В особых точках, где нарушается условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, экспоненты (1.2) становятся линейно зависимыми, а построенная по ним матрица Грама G становится вырожденной. Поэтому

$$\det G \to 0 \tag{3.2}$$

при предельном переходе к особым точкам. Вычисление компонент обратной матрицы G^{-1} через миноры и алгебраические дополнения элементов исходной матрицы G включает в себя деление на $\det G$ [5]. Поэтому из соотношения (3.2) вытекает следующий результат.

Теорема 3.1. *Компоненты g^{ij} матрицы $(G^{-1})^\top$ в формуле (2.10), вычисленной по экспонентам (1.2), непрерывно зависят от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ всюду, кроме особых точек, где нарушается условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.*

Вычисление компонент матрицы $(G^{-1})^\top$ при конкретных значениях n показывает, что явные формулы для g^{ij} содержат малые знаменатели, обращающиеся в ноль в особых точках, где нарушается условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

4. Кластеризация показателей экспонент в окрестности особых точек

Рассмотрим некоторую особую точку, в которой нарушается условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Это означает, что в последовательности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеются повторы. Исключив повторы, мы получим меньшую последовательность $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ без повторов. В малой окрестности особой точки числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ попарно различны, но они группируются в кластеры, тяготеющие к числам $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$. В этой ситуации целесообразно перенумеровать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, записав

$$\lambda_{ij}, \text{ где } i = 1, \ldots, m \text{ и } j = 1, \ldots, k_i. \tag{4.1}$$

Здесь i — номер кластера, а j — номер числа внутри кластера. Числа $k_1, \ldots, k_m$ в (4.1) называются кратностями кластеров. Имеет место равенство

$$k_1 + \ldots + k_m = n. \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) выражает сохранение общего числа показателей экспонент при кластеризации (4.1). В силу (4.1) и (4.2) равенство (3.1) можно записать как

$$L = \left\langle \{e^{\lambda_{ij} x}\}_{j=1,\ldots,k_i}^{i=1,\ldots,m} \right\rangle \tag{4.3}$$

или как $L = \left\langle \{e^{\lambda_{ij} x}\} \right\rangle$ для краткости. Переход к особой точке от окружающих её неособых точек выражается как предельный переход

$$\lambda_{ij} \to \Lambda_i. \tag{4.4}$$

При рассмотрении предельного перехода (4.4) удобно ввести малый параметр

$$\varepsilon = \max\{|\lambda_{ij} - \Lambda_i|\}_{j=1,\ldots,k_i}^{i=1,\ldots,m}. \tag{4.5}$$

С учётом (4.5) формула (4.4) запишется в виде

$$\lambda_{ij} \to \Lambda_i \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{4.6}$$

Как уже отмечалось выше, в результате предельного перехода (4.6) экспоненты $e^{\lambda_{ij} x}$, составляющие базис подпространства L в (4.3), становятся линейно зависимыми и перестают образовывать базис. Они не подходят под определение 3.1. Наши дальнейшие усилия будут направлены на то, чтобы доказать существование другого базиса в L, к которому применимо определение 3.1.

5. Тейлоровские разложения экспонент

Этот раздел статьи является предварительным. Предположим на время, что имеется ровно один кластер (т. е. $m = 1$) с $\Lambda_1 = 0$. Тогда мы можем использовать первоначальные обозначения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ для показателей экспонент и записать формулу (4.4) как $\lambda_i \to 0$. Экспоненты из (1.2) имеют следующие тейлоровские разложения в нуле:

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x} = 1 + \lambda_1 x + \ldots + \frac{\lambda_1^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^q x^q}{q!}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &e^{\lambda_n x} = 1 + \lambda_n x + \ldots + \frac{\lambda_n^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^q x^q}{q!}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Начальные фрагменты степенных рядов (5.1) определяют полиномы

$$p_i(x) = 1 + \lambda_i\, x + \ldots + \frac{\lambda_i^{n-1}\, x^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ где } i = 1, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Используя полиномы (5.2), зададим следующее уравнение относительно включённых в него переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1\, p_1(x) + \ldots + \alpha_n\, p_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{5.3}$$

Полиномиальное уравнение (5.3) равносильно матричному уравнению

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{5.4}$$

Матрица (5.4) получается транспонированием матрицы Вандермонда [6]:

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{Vmatrix}. \tag{5.5}$$

Матрица Вандермонда (5.5) невырождена при несовпадающих лямбдах, т. е. когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В этом случае у неё есть обратная матрица $U = W^{-1}$ [7]. Для того чтобы выписать компоненты обратной матрицы U в явном виде, нам потребуются следующие полиномы по переменной λ:

$$P_q(\lambda) = \frac{\prod\limits_{s\neq q}^{n}(\lambda - \lambda_s)}{\prod\limits_{s\neq q}^{n}(\lambda_q - \lambda_s)}, \text{ где } q = 1, \ldots, n. \tag{5.6}$$

Легко видеть, что полиномы (5.6) удовлетворяют соотношению

$$P_q(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{для } q = i, \\ 0 & \text{для } q \neq i. \end{cases} \tag{5.7}$$

Если расписать полиномы (5.6) как суммы мономов

$$P_q(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} U_{rq}\, \lambda^{r-1} = U_{1q} + U_{2q}\, \lambda + \ldots + U_{nq}\, \lambda^{n-1}, \tag{5.8}$$

то соотношение (5.7) запишется в виде

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_i^{r-1}\, U_{rq} = \begin{cases} 1 & \text{для } q = i, \\ 0 & \text{для } q \neq i. \end{cases} \tag{5.9}$$

При внимательном рассмотрении матрицы (5.5) видно, что соотношение (5.9) равносильно матричному равенству $W \cdot U = 1$, где U — это матрица, компоненты которой совпадают с коэффициентами полиномов (5.8):

$$U = \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1n} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2n} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & \dots & U_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & U_{n3} & \dots & U_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{5.10}$$

Явное выражение для компонент матрицы (5.10) выводится из (5.6):

$$U_{rq} = \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}P_q(\lambda)}{d\lambda^{r-1}}\Big|_{\lambda=0}. \tag{5.11}$$

Равенство $W \cdot U = 1$, выведенное из (5.9), означает, что матрица (5.10) с компонентами (5.11) является обратной для матрицы Вандермонда (5.5).

Поскольку $(W^{\top})^{-1} = U^{\top}$, мы можем использовать транспонированную матрицу $U^{\top}$ для того, чтобы решить матричное уравнение (5.4):

$$\alpha_q = U_{nq} = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}P_q(\lambda)}{d\lambda^{n-1}}\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{\prod\limits_{s\neq q}^{n}(\lambda_q - \lambda_s)}. \tag{5.12}$$

Наряду с решением матричного уравнения (5.4), величины (5.12) дают также и решение полиномиального уравнения (5.3).

Теперь, используя найденные величины (5.12) в качестве коэффициентов, мы определим следующую линейную комбинацию экспонент (1.2):

$$f_n(x) = \alpha_1\, e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_n\, e^{\lambda_n x}. \tag{5.13}$$

Если принять во внимание (5.1), (5.2) и (5.3), то для функции $f_n(x)$ в (5.13) получается представление в виде степенного ряда

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{B_{n\,q}\, x^{n-1+q}}{(n-1+q)!}. \tag{5.14}$$

Коэффициенты $B_{n\,q}$ в (5.14) задаются формулой

$$B_{n\,q} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \lambda_i^{n-1+q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{n-1+q}}{\prod\limits_{s\neq i}^{n}(\lambda_i - \lambda_s)}. \tag{5.15}$$

Формально говоря, в степенной ряд (5.14) входят лишь величины (5.15) с $q \geqslant 1$. Но формулу (5.15) можно распространить и на случай $q = 0$. В этом случае, подставляя $q = 0$ в (5.15) и принимая во внимание матричное равенство (5.4) для величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, мы получаем равенство

$$B_{n\,0} = 1 \ \text{ для всех } \ n \geqslant 1. \tag{5.16}$$

Лемма 5.1. *Для попарно различных чисел $\lambda_i \neq \lambda_j$, взятых в неограниченном количестве $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots,$ и для $q \geqslant 1$ величины $B_{n\,q}$ из* (5.15) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$B_{n+1\,q} = B_{n\,q} + \lambda_{n+1}\, B_{n+1\,q-1}. \tag{5.17}$$

Лемма 5.1 легко доказывается прямыми вычислениями на основе формулы (5.15). При $n = 1$ формула (5.12) превращается в $a_1 = 1$. Тогда (5.15) даёт

$$B_{1\,q} = \lambda_1^q \ \text{ для всех } \ q \geqslant 0. \tag{5.18}$$

Формул (5.16) и (5.18) вместе с рекуррентными соотношениями (5.17) достаточно для того, чтобы определить значения всех величин $B_{n\,q}$ индукцией по двум параметрам n и q.

Лемма 5.2. *Величины $B_{n\,q}$, заданные попарно различными числами $\lambda_i \neq \lambda_j$ при помощи формулы* (5.15), *вычисляются в явном виде*

$$B_{n\,q} = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\,\ldots\,\leqslant i_q\leqslant n}\!\!\!\ldots\sum \lambda_{i_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{i_q}, \ \text{ где } \ n \geqslant 1 \ \text{ и } \ q \geqslant 1. \tag{5.19}$$

Для того чтобы доказать лемму 5.2, достаточно убедиться в выполнении равенств (5.17) и (5.18) после подстановки в них (5.19). После этого формулы (5.19) и (5.16) определят значения всех величин $B_{n\,q}$ в явном виде.

Обозначим через $N_{n\,q}$ число слагаемых в формуле (5.19) для $B_{n\,q}$. Это число оценивается в форме следующего неравенства:

$$N_{n\,q} \leqslant n^q. \tag{5.20}$$

Заметим, что в этом разделе статьи мы рассматриваем специальный случай, где число кластеров $m = 1$, кратность $k_1 = n$, и $\Lambda_1 = 0$. С учётом этого положим

$$\varepsilon = \max(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|). \tag{5.21}$$

Обозначение (5.21) — это вариант обозначения (4.5) применительно к рассматриваемому специальному случаю. Применим (5.20) и (5.21) для оценки слагаемых степенного ряда (5.14). При $q \geqslant 1$ мы получаем

$$\left|\frac{B_{n\,q}\,x^{n-1+q}}{(n-1+q)!}\right| \leqslant \frac{n^q\,\varepsilon^q\,|x|^{n-1+q}}{(n-1)!\,n\,(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+q-1)}. \tag{5.22}$$

Для наших целей достаточно более слабой оценки. Из (5.22) выводим

$$\left|\frac{B_{n\,q}\,x^{n-1+q}}{(n-1+q)!}\right| \leqslant \frac{\varepsilon^q\,|x|^{n-1+q}}{(n-1)!}, \ \text{ где } \ q \geqslant 1. \tag{5.23}$$

Далее из (5.23) легко выводится оценка по норме в $L^2([-\pi, +\pi])$:

$$\left\|\frac{B_{n\,q}\,x^{n-1+q}}{(n-1+q)!}\right\| \leqslant \sqrt{\frac{2\,\pi}{2\,n+2\,q-1}}\,\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}\,(\pi\,\varepsilon)^q. \tag{5.24}$$

Поскольку $n = \mathrm{const}$ в (5.1), (5.14) и (5.24), оценку (5.24) можно упростить. Для этого мы вводим следующую константу, не зависящую от $q \geqslant 1$:

$$C_n = \sqrt{\frac{2\,\pi}{2\,n+1}}\,\frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{5.25}$$

Использую константу (5.25), оценку (5.24) можно преобразовать к виду

$$\left\|\frac{B_{n\,q}\,x^{n-1+q}}{(n-1+q)!}\right\| \leqslant C_n\,(\pi\,\varepsilon)^q, \ \text{ где } \ q \geqslant 1. \tag{5.26}$$

При $\pi\,\varepsilon < 1/2$ оценка (5.26) порождает оценку для функции $f_n(x)$, заданной формулой (5.13) и представленной рядом (5.14). Вот эта оценка:

$$\left\|f_n(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\| \leqslant \frac{C_n\,\pi\,\varepsilon}{1-\pi\,\varepsilon} \leqslant 2\,C_n\,\pi\,\varepsilon. \tag{5.27}$$

В силу формулы (5.13) функция $f_n(x)$ является линейной комбинацией экспонент $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, т.е. она принадлежит подпространству L из (3.1). По этой причине мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.1. *Для любых n попарно не совпадающих комплексных величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, стремящихся к нулю, можно построить комплекснозначную функцию $f(x)$, принадлежащую подпространству L, порождённому экспонентами $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ в гильбертовом пространстве $H = L^2([-\pi, +\pi])$ квадратично интегрируемых функций, и такую, что*

$$\|f(x) - x^{n-1}\| \to 0, \tag{5.28}$$

когда величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ стремятся к нулю.

Теорема 5.1 является немедленным следствием неравенства (5.27). Важно отметить, что сходимость по норме в (5.28) не зависит ни от каких соотношений, связывающих $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ между собой, и не зависит от индивидуальных скоростей сходимости отдельных величин $\lambda_i \to 0$.

Имея n попарно различных комплексных величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, стремящихся к нулю, мы можем выделить часть из них $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$. Применив теорему 5.1 ко всем таким выборкам, мы получим следующий результат.

Теорема 5.2. *Для любых n попарно не совпадающих комплексных величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, стремящихся к нулю, можно построить n комплекснозначных функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, принадлежащих подпространству L, порождённому экспонентами $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций $H = L^2([-\pi, +\pi])$, и таких, что*

$$\|f_s(x) - x^{s-1}\| \to 0 \quad \text{при} \quad s = 1, \ldots, n, \tag{5.29}$$

когда величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ стремятся к нулю.

И снова важно отметить, что сходимость по норме в (5.29) не зависит ни от каких соотношений, связывающих $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ между собой, и не зависит от индивидуальных скоростей сходимости отдельных величин $\lambda_i \to 0$.

Сравнив теорему 5.2 с определением 3.1 для сходимости подпространств, немедленно выводим следующий результат.

Теорема 5.3. *Для любых n попарно не совпадающих комплексных величин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, стремящихся к нулю, линейная оболочка экспонент*

$$L = \left\langle e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \right\rangle$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2([-\pi, +\pi])$ квадратично интегрируемых функций сходится к линейной оболочке полиномов

$$M = \left\langle 1, x, \ldots, x^{n-1} \right\rangle,$$

когда величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ стремятся к нулю.

6. Случай многих кластеров

Перейдём к рассмотрению особых точек общего вида, в малой окрестности которых показатели экспонент $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ группируются в m кластеров с кратностями $k_1, \ldots, k_m$ (см. (4.1)). Они сходятся к m попарно различным комплексным числам $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ в соответствии с (4.4) м (4.6). По этой причине здесь мы вводим малые отклонения

$$\theta_{ij} = \lambda_{ij} - \Lambda_i,$$

стремящиеся к нулю, и вместо (5.1) записываем

$$e^{\lambda_{i1} x} = e^{\Lambda_i x} \left(1 + \theta_{i1}\, x + \ldots + \frac{\theta_{i1}^{n-1}\, x^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \ldots = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\theta_{i1}^{q}\, x^q\, e^{\Lambda_i x}}{q!},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e^{\lambda_{ik_i} x} = e^{\Lambda_i x} \left(1 + \theta_{ik_i}\, x + \ldots + \frac{\theta_{ik_i}^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}\right) + \ldots = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\theta_{ik_i}^{q}\, x^q\, e^{\Lambda_i x}}{q!}.$$

В результате этого вместо теоремы 5.1 мы получим следующую теорему.

Теорема 6.1. *Для множества попарно различных комплексных величин* λ_{ij}, *где* $i = 1, \ldots, m$ *и* $j = 1, \ldots, k_i$, *стремящихся к* m *попарно различным комплексным числам* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$, *существует функция* $f_s(x)$, *принадлежащая подпространству* $L = \left\langle \{e^{\lambda_{ij}x}\}_{j=1,\ldots,k_i}^{i=1,\ldots,m} \right\rangle$ *гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций* $\mathcal{H} = L^2([-\pi, +\pi])$ *и такая, что*

$$\|f_s(x) - x^{k_s-1}\, e^{\Lambda_s x}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda_{ij} \to \Lambda_i.$$

Доказательство теоремы 6.1 в основном повторяет доказательство теоремы 5.1. Единственное отличие состоит в том, что вместо полинома x^{n-1} здесь мы имеем квазиполином[1]. Квазиполином $x^{k_s-1}\, e^{\Lambda_s x}$ не единственен в контексте теоремы 6.1. Повторяя рассуждения, использованные при выводе теоремы 5.2 из теоремы 5.1, можно получить столько же квазиполиномов, сколько первоначально имеется экспонент.

Теорема 6.2. *Для множества попарно различных комплексных величин* λ_{ij}, *где* $i = 1, \ldots, m$ *и* $j = 1, \ldots, k_i$, *стремящихся к* m *попарно различным комплексным числам* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$, *существуют функции* $f_{ij}(x)$, *где* $i = 1, \ldots, m$ *и* $j = 1, \ldots, k_i$, *принадлежащие подпространству* $L = \left\langle \{e^{\lambda_{ij}x}\}_{j=1,\ldots,k_i}^{i=1,\ldots,m} \right\rangle$ *гильбертова пространства* $\mathcal{H} = L^2([-\pi, +\pi])$ *и такие, что*

$$\|f_{ij}(x) - x^{j-1}\, e^{\Lambda_i x}\| \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda_{ij} \to \Lambda_i.$$

Аналогом теоремы 5.3 здесь является следующая теорема.

Теорема 6.3. *Для множества попарно различных комплексных величин* λ_{ij}, *где* $i = 1, \ldots, m$ *и* $j = 1, \ldots, k_i$, *стремящихся к* m *попарно различным комплексным числам* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$, *линейная оболочка экспонент*

$$L = \left\langle \{e^{\lambda_{ij}x}\}_{j=1,\ldots,k_i}^{i=1,\ldots,m} \right\rangle$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2([-\pi, +\pi])$ *квадратично интегрируемых функций при* $\lambda_{ij} \to \Lambda_i$ *сходится к линейной оболочке квазиполиномов*

$$M = \left\langle \{x^{j-1}\, e^{\Lambda_i x}\}_{j=1,\ldots,k_i}^{i=1,\ldots,m} \right\rangle. \tag{6.1}$$

7. Устранение особенностей

Вернёмся к решению линейной задачи аппроксимации (1.6), которое представлено формулой (2.10). Как уже отмечалось выше в п. 3, геометрически значение функции $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ интерпретируется как L^2-расстояние от функции $f(x) \in L^2([-\pi, +\pi])$ до n-мерного подпространства L в (3.1). Это означает, что значение $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ зависит от L, но не зависит от выбора базиса внутри подпространства L, используемого в формуле (2.10). С другой стороны, в силу формулы (2.10) значение $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ непрерывным образом зависит от используемого базиса, когда этот базис изменяется вместе с подпространством L, не переставая быть базисом в нём. Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 7.1. *Функция* $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *дающая решение линейной задачи аппроксимации* (1.6), *непрерывно зависит от своих аргументов в неособых точках, где выполнено условие* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$, *и имеет конечный предел в особых точках, где это условие нарушается.*

---

[1] Термин «квазиполином» получил широкое распространение в русскоязычной литературе. Он обозначает выражения вида $c\, x^q\, e^{\lambda x}$ с целым неотрицательным показателем q и всевозможные суммы таких выражений. Однако, в англоязычной литературе соответствующий термин «quasi-polynomial» имеет другой смысл [8].

Для доказательства теоремы 7.1 достаточно заменить базис из экспонент (1.2) в L на базис из функций $f_{ij}(x)$, существование которых гарантируется теоремой 6.2. Для вычисления предельного значения функции $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в особой точке, определяемой числами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ и кратностями $k_1, \ldots, k_m$, надо заменить L на предельное подпространство M из (6.1) и использовать базис из квазиполиномов в нём для вычислений по формуле (2.10).

Теорема 7.1 означает что функцию $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ можно доопределить до непрерывной функции на всём пространстве $\mathbb{C}^n$. Этот факт важен при составлении числовых алгоритмов, нацеленных на решение нелинейной задачи аппроксимации и задачи 1.1 в целом. Сама задача 1.1 должна пониматься в расширенном виде, включая, наряду с минимизацией по экспонентам, также и минимизацию по квазиполиномам.

8. Обсуждения и выводы

Данная работа обсуждалась 19 ноября 2014 года в БашГУ на семинаре, который в настоящее время имеет статус городского семинара по теории функций им. А. Ф. Леонтьева. Во время обсуждении Н. Ф. Валеев высказал мысль, что теоремы типа 5.1, 5.2, 5.3 и 6.1, 6.2, 6.3 могут быть доказаны в рамках теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Р. С. Юлмухаметов предположил что результаты, сходные с этими теоремами, могут содержаться в ранних работах 1960 гг., труднодоступных для поиска через интернет. Через два дня после этого он прислал автору по электронной почте хитроумное и более короткое доказательство теоремы 5.1, придуманное им самим. В связи с этими обстоятельствами автор не претендует на приоритет формулировок теорем 5.1, 5.2, 5.3 и 6.1, 6.2, 6.3, но приводит их вместе с доказательствами для замкнутости изложения, а также по причине того, что приведённые доказательства достаточно конструктивны и могут использоваться для количественных оценок при составлении вычислительных алгоритмов. Основным результатом работы является теорема 7.1, имеющая прямое влияние на численное решение поставленной задачи 1.1.

Наряду с практическим применением, задача 1.1 требует дальнейшего теоретического исследования. Автор считает, что она имеет определённый потенциал для генерации новых результатов в теории и заслуживает популяризации.

9. Добавление по результатам первичного рецензирования и обсуждения на конференции

Со 2-го по 5-е декабря 2014 года в БашГУ проходила вторая Всероссийская научная молодёжная конференция «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники», организованная Р. З. Бахтизиным, где автор представил доклад в секции «Цифровая обработка информации и автоматизация измерений в нано- и микроэлектронике». Во время доклада обсуждалась исходная прикладная задача и предлагаемый алгоритм её решения. На ней же делает акцент и рецензент журнала, указывая на статью [9], где рассматривается метод неоднородного дискретного преобразования Фурье (NDFT) в приложении к созданию цифровых частотных фильтров. Некоторые из использованных выше формул встречаются в [9]. Например, формула для матрицы Вандермонда (5.5) и формула для интерполяционного полинома (5.6). В некоторых других статьях из книги [9] рассматриваются квадратичные L^2-нормы и среднеквадратичные отклонения. Однако прямого соответствия с формулами из разделов 2-4 в книге [9] не обнаруживается. Использование вейвлетов, о которых упоминает рецензент, состоит в замене экспонент более сложными функциями [10].

Многие из статей в книге [9] в той или иной форме используют теорему Котельникова [11]. О теореме Котельникова автору стало известно от Р. З. Бахтизина. Она описывает восстановление сигнала с ограниченным спектром по дискретной выборке в бесконечной последовательности точек. Сигналы в прикладной задаче от группы компаний «ФизТех» предполагаются имеющими ограниченный спектр. Но теорема Котельникова в данной работе не используется. Она может потребоваться в будущем при увеличении числа спектральных точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в пределе $n \to \infty$.

Выбор оптимальных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в прикладной задаче от группы компаний «ФизТех» в чём-то напоминает выбор частот для NDFT фильтров, но есть важное отличие. Выбор частот для фильтра производится однократно при его проектировании. В нашем случае частоты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ должны определяться on-fly при обработке каждого из поступивших сигналов индивидуально.

10. Благодарности

Автор признателен Н. Ф. Валееву, Р. С. Юлмухаметову и всем участникам семинара по теории функций за плодотворное обсуждение работы, а также Б. Н. Хабибуллину, с кем автор обсуждал задачу 1.1 около года назад, и кто высказался в пользу того, что она представляет определённый интерес. Автор признателен Р. З. Бахтизину за приглашение принять участие в организованной им конференции, С. С. Гоцу и всем участникам секции по цифровой обработке сигналов за полезное обсуждение работы во время конференции и после неё. Автор также признателен рецензенту УМЖ за информацию о книге [9] и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Метод наименьших квадратов*, Wikipedia, Wikimedia Found. Inc., San Francisco, USA.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* Наука. М.: 1976.
3. R.A. Sharipov *On root mean square approximation by exponential functions*, e-print **arXiv:1411.2467** в электронном архиве http://arXiv.org.
4. F. Chatelin *Eigenvalues of matrices*, SIAM Publishers, USA, 2013.
5. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* Наука. М.: 1968.
6. *Определитель Вантермонда*, Wikipedia, Wikimedia Found. Inc., San Francisco, USA.
7. L.R. Turner *Inverse of the Vandermonde matrix with applications*, NASA Technical Note D-3547, NASA, Washington, D.C., 1966.
8. *Quasi-polynomial*, Wikipedia, Wikimedia Found. Inc., San Francisco, USA.
9. S. Bagchi, S.K. Mitra *The nonuniform discrete Fourier transform*, in book «Nonuniform sampling: theory and practice», F. Marvasti, ed., Kluwer Academic / Plenum Publishers. 2001, P. 325–360.
10. Байков В.А., Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Основы теории вейвлетов.* Уфа: БашГУ. 2012.
11. *Теорема Котельникова*, Wikipedia, Wikimedia Found. Inc., San Francisco, USA.

Руслан Абдулович Шарипов,
Башкирский Государственный Университет,
ул. Заки Валиди, 32, 450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `r-sharipov@mail.ru`