ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 31-45.

УДК 517. 956

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Н.Б. ИСЛАМОВ

Аннотация. В данной статье доказана однозначная разрешимость задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, в случае, когда на первой и второй части характеристики задаётся краевое условие типа условия Бицадзе-Самарского.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, краевая задача, уравнение второго рода, условие типа Бицадзе-Самарского, существование и единственность решения задачи, принцип экстремума, интегральное уравнение Фредгольма.

Mathematics Subject Classification: 35L75, 35M10, 35L35, 34B53

1. Введение

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения эллитико-гиперболического и параболо-гиперболического типов первого рода в различных областях изучены в работах А.В. Бицадзе [1], М.С. Салахитдинова [2], Т.Д. Джураева [3], Е.И. Моисеева [4], А.М. Нахушева [5], Т.Ш. Кальменова [6], К.Б. Сабитова [7], М.С. Салахитдинова и Б.И. Исломова [8], G.C.Wen [9] и их учеников. Далее выяснилось, что эти задачи возникают при изучении различных проблем математической биологии, прогнозировании почвенной влаги, решение проблем физики, плазмы и при математическом моделировании процессов излучения лазера.

В работах М.В. Келдыша [10] и А.В. Бицадзе [1] впервые было указано существенное влияние младших членов уравнения на постановки краевых задач для вырождающихся эллиптических и гиперболических уравнений. В литературе принято называть уравнением смешанного типа второго рода уравнения, линия вырождения которых является одновременно огибающей семейства характеристик, т.е. сама является характеристикой.

Начиная с 1953 г., после публикации известной работы И.Л. Кароля [11] появился интерес к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода. Аналоги задачи Трикоми для уравнения эллитико-гиперболического типа второго рода в области, часть границы которой является линией вырождения, рассмотрены в работах [12]–[18], а в работах [19]–[20] изучена задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольных областях.

Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода без вырождения в параболической части были исследованы в работах [21]–[22]. Однако небольшое число работ посвящено уравнениям смешанного параболо-гиперболического типа второго рода с вырождением в параболической части. Отметим работы [23], [24].

Обобщенная задача Трикоми для уравнения эллитико-гиперболического типа первого рода, в случае, когда краевое условие на первой части характеристики задаётся локально, а на второй части и параллельной ей характеристике задаётся условие типа

N.B. Islamov, Analogue of Bitsadze - Samarskii problem for a class of parabolic-hyperbolic equation of second kind.

Поступила 12 июля 2014 г.

Бицадзе-Самарского, изучены в работах [25], [26]. Такие задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов второго рода исследованы сравнительно мало. Отметим работу [27].

В настоящей работе изучается краевая задача для вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, в случае, когда краевое условие на первой части характеристики задаётся нелокальное условие, а на второй части и параллельной ей характеристике задаётся условие типа Бицадзе-Самарского.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-|x|^p u_y, & p>0 \quad \text{в} D_j, \\ u_{xx}-(-y)^m u_{yy}, & 0<m<1 \quad \text{в} \quad D_3, \end{cases} \tag{1}$$

где D_j- область, ограниченная отрезками $OA_j,\ A_jB_j, RB_j,\quad OR$ прямых $y=0$, $x=(-1)^{j+1}, y=1,\ x=0,$ соответственно при $y>0$, здесь и далее $j=1$ при $x\geqslant 0$, $j=2$ при $x\leqslant 0$; D_3 — характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $A_1C\ :\quad x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=1,\ A_2C: x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=-1$, $A_1A_2:\ y=0,\ -1<x<1$ уравнения (1) при $y<0$. Здесь $2\beta=m/(m-2)$, причем

$$-1<2\beta<0. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения: $\quad J_1=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$,

$$J_2=\{(x,y):-1<x<0,\ y=0\}\,,\quad J_3=\{(x,y):x=0,\ \ 0<y<1\}\,,$$

$$OC_1:\ x-(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=0,\quad OC_2:\ x+(1-2\beta)(-y)^{1/(1-2\beta)}=0,$$

$$C\left(0;\ -(2/(2-m))^{2/(2-m)}\right),\qquad O(0,0)\in A_1A_2,\ C_1\in A_1C,\qquad C_2\in A_2C,$$

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup J_1\cup J_2\cup J_3,\quad D_4=D_1\cup D_2\cup J_3,$$

$$\Theta_j(x)=\left(\frac{x-1}{2};\quad -\left[\frac{x+1}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right),\quad (j=1,2), \tag{3_j}$$

$$\Theta^*(x)=\left(\frac{x}{2};\quad -\left[\frac{x}{2(1-2\beta)}\right]^{1-2\beta}\right), \tag{3}$$

$\Theta_1(x)$ и $\Theta_2(x)$ — точки пересечения характеристики A_2C с характеристикой, выходящей из точки $M_2(x,0), x\in[-1;0]$ и $M_1(x,0), x\in[0;1]$ соответственно, а $\Theta^*(x)$ — точки пересечения характеристики OC_1 с характеристикой, выходящей из точки $M_1(x,0),\ x\in[0;1]$.

Через $D_{31},\ \ D_{32}$ и D_{33} соответственно обозначим характеристические треугольники $OC_1A_1,\ \ A_2C_2O$ и четырехугольник OC_1CC_2.

Задача BS. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами:

1)$u(x,y)\in C(\overline{D})$;

2)$u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) на множествах $D_j\cup B_jR\ (j=1,2)$;

3)$u(x,y)$ является обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [28] в области $D_3\backslash\left(OC_1\cup OC_2\right)$;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{A_jB_j}=\varphi_j(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,\quad (j=1,2), \tag{4_j}$$

$$\frac{d}{dx}u\left[\Theta_1(x)\right]+a(x)u(x,0)=b(x),\qquad (x,0)\in\bar{J}_2\ , \tag{5}$$

$$u\left[\Theta_2(x)\right]=\mu u\left[\Theta^*(x)\right]+\rho(x),\qquad (x,0)\in\bar{J}_1; \tag{6}$$

5) $u_y \in C\left(D_1 \cup J_1\right) \cap C\left(D_2 \cup J_2\right) \cap C\left(D_3 \cup J_1 \cup J_2\right)$ и $u_x \in C\left(D_1 \cup J_3\right) \cap \cap C\left(D_2 \cup J_3\right)$ на интервалах $J_1 \cup J_2$ и J_3 соответственно выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to -0} \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y} = p_j(x) \lim_{y\to +0} \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial y} + q_j(x), \quad (x,0) \in J_j, \tag{7_j}$$

и

$$\lim_{x\to -0} \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x} = \lim_{x\to +0} \frac{\partial u\left(x,y\right)}{\partial x}, \quad (0,y) \in J_3, \tag{7_3}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\rho(x), \varphi_j(y)$ $p_j(x)$, $q_j(x)(j=1,2)$ — заданные функции, причем

$$b(-1)=0, \quad b(0)=0, \quad a(0)\neq 0, \quad \rho'(0)=0, \tag{8}$$

$$\mu = const > 0,\ a(x) \leqslant 0, \quad a'(x) \leqslant 0, \ \ \forall\, x \in [-1,1]\,, p_j(x) < 0, \quad \forall\, x \in \bar{J}_j, \tag{9}$$

$$\varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C\left(\bar{J}_3\right) \cap C^1(J_3), \tag{10}$$

$$a(x),\ b(x) \in C^2\left(\bar{J}_2\right), \quad \rho(x) \in C^2\left(\bar{J}_1\right), \ \ p_j(x), \ \ q_j(x) \in C\left(\bar{J}_j\right) \cap C^2\left(J_j\right). \tag{11}$$

3. Основные функциональные соотношения

Введем следующие обозначения

$$u\left(x,0\right) = \tau_j\left(x\right), (x,0) \in \bar{J}_j, \ \ u_y\left(x,\pm 0\right) = \nu_j^{\pm}\left(x\right), (x,0) \in J_j, (j=1,2), \tag{12_j}$$

$$u\left(0,y\right) = \tau_3\left(y\right), \quad (0,y) \in \bar{J}_3, \ \ u_x\left(\pm 0,y\right) = \nu_3\left(y\right), \quad (0,y) \in J_3. \tag{12_3}$$

Обобщенное решение задачи Коши с данными (12_1) для уравнения (1) из класса R_2 в области D_{31} даётся формулой [11], [28, стр. 230(27.5)]:

$$u\left(\xi,\eta\right) = \int\limits_0^{\xi} (\eta-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta} T_1\left(t\right) dt + \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta} N_1\left(t\right) dt, \tag{13_1}$$

где

$$N_1\left(t\right) = T_1\left(t\right)/2\cos\pi\beta - \gamma_1 \nu_1^{-}\left(t\right), \tag{14_1}$$

$$\gamma_1 = \left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{2\beta-1}\Gamma\left(2-2\beta\right)\big/\Gamma^2\left(1-\beta\right),$$

$$\xi = x - \left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}, \quad \eta = x + \left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}, \tag{15}$$

$$\tau_1\left(x\right) = \int\limits_0^{x} \left(x-t\right)^{-2\beta} T_1\left(t\right) dt, \qquad (x,0) \in J_1, \tag{16_1}$$

функции $T_1\left(x\right)$ и $\nu_1^{-}\left(x\right)$ непрерывны в $(0,1)$ и интегрируемы на $[0,1]$, а $\tau_1\left(x\right)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x \to 0$.

Обобщенное решение задачи Коши с данными (12_2) для уравнения (1) из класса R_2 в области $D_{3j}(j=2,3)$ даётся формулой:

$$u\left(\xi,\eta\right) = \int\limits_{-1}^{\xi} (\eta-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta} T_2\left(t\right) dt + \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta} N_2\left(t\right) dt, \tag{13_2}$$

где

$$N_2\left(t\right) = T_2\left(t\right)/2\cos\pi\beta - \gamma_1 \nu_2^{-}\left(t\right), \tag{14_2}$$

а ξ, η — определяется из (15);

$$\tau_2\left(x\right) = \int\limits_{-1}^{x} \left(x-t\right)^{-2\beta} T_2\left(t\right) dt, \qquad (x,0) \in J_2, \tag{16_2}$$

функции $T_2\left(x\right)$ и $\nu_2^{-}\left(x\right)$ непрерывны в $(-1,0)$ и интегрируемы на $[-1,0]$, а $\tau_2\left(x\right)$ обращается в нуль порядка не меньше -2β при $x \to -1$.

Положив $\xi = -1$ и $\eta = x$ в (13_2) с учётом (3_1), (5), (14_2) и

$$u\left[\Theta_1\left(x\right)\right] = \int\limits_{-1}^{x} \left(x-t\right)^{-\beta}\left(1+t\right)^{-\beta} N_2\left(t\right)dt, \quad (x,0)\in \bar{J}_2, \tag{17_1}$$

получим функциональное соотношение между $T_2\left(x\right)$ и $\nu_2^-\left(x\right)$, перенесенное из области D_{32} на J_2 :

$$\gamma_1\nu_2^-\left(x\right) = \frac{\left(1+x\right)^{\beta}}{\Gamma\left(1-\beta\right)} D_{-1x}^{-\beta} a\left(x\right)\tau_2\left(x\right) \quad +$$

$$+\frac{1}{2\cos\pi\beta}T_2\left(x\right) - \frac{\left(1+x\right)^{\beta}}{\Gamma\left(1-\beta\right)} D_{-1x}^{-\beta} b\left(x\right), \quad (x,0)\in J_2, \tag{18}$$

где $D_{cx}^{\alpha}\left[\cdot\right]$ — оператор интегродифференцирования дробного порядка α [28], а $\tau_2\left(x\right)$ — определяется из (16_2).

Точно также положив $\xi = -1$, $\eta = x$ и $\xi = 0$, $\eta = x$ соответственно в (13_2) и (13_1) с учётом (3_2), (3), после некоторых преобразований получим

$$u\left[\Theta_2\left(x\right)\right] = \int\limits_{-1}^{x} \left(x-t\right)^{-\beta}(1+t)^{-\beta} N_2\left(t\right)dt, \qquad (x,0)\in \bar{J}_2, \tag{17_2}$$

$$u\left[\Theta^*\left(x\right)\right] = \int\limits_{0}^{x} \left(x-t\right)^{-\beta} t^{-\beta} N_1\left(t\right)dt, \qquad (x,0)\in \bar{J}_1. \tag{19}$$

Дифференцируя (6) по x, а затем, применяя к обеим частям полученного равенства оператор $D_{0x}^{-\beta}\left[\cdot\right]$, имеем

$$D_{0x}^{-\beta}\frac{d}{dx}u\left[\Theta_2\left(x\right)\right] = \mu D_{0x}^{-\beta}\frac{d}{dx}u\left[\Theta^*\left(x\right)\right] + D_{0x}^{-\beta}\rho'\left(x\right). \tag{20}$$

Подставляя (17_2), (19) в (20) с учетом (5), (6), (14_1), (14_2), (18) и тождеств $D_{-1x}^{-\beta}D_{-1x}^{\beta}(1+x)^{-\beta}N_2\left(x\right) = (1+x)^{-\beta}N_2(x)$, $D_{0x}^{-\beta}D_{0x}^{\beta}x^{-\beta}N_1\left(x\right) = x^{-\beta}N_1(x)$, получим функциональное соотношение между $T_1\left(x\right)$ и $\nu_1^-\left(x\right)$, перенесенное из области D_{31} на J_1:

$$\gamma_1\nu_1^-\left(x\right) = \frac{T_1\left(x\right)}{2\cos\pi\beta} + \frac{x^{\beta}}{\mu\Gamma\left(1-\beta\right)} D_{0x}^{-\beta} a\left(x\right)\tau_2\left(x\right) + F_1\left(x\right), \quad (x,0)\in J_1, \tag{21}$$

где $\tau_2\left(x\right)$ определяется из (16_2),

$$F_1\left(x\right) = \frac{x^{\beta}}{\mu\Gamma\left(1-\beta\right)}\left\{D_{0x}^{-\beta}\rho'\left(x\right) - D_{0x}^{-\beta}b\left(x\right)\right\}. \tag{22}$$

В силу условия $\rho'(0) = 0$, $b(0) = 0$, $a(0) \neq 0$ с учетом (17_1), (17_2), (19) из (5) и (6) следует, что $u\left(0,0\right) = 0$. Следовательно, в силу условий задачи **BS** имеем $\tau_1\left(0\right) = \tau_2\left(0\right) = \tau_3\left(0\right) = 0$.

Переходя к пределу при $y \to +0$ в уравнении (1) при $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y > 0$ с учетом (4_1), (4_2), (8), (16_1), $(12_j)(j = \overline{1,3})$, сответственно имеем

$$\tau_1''\left(x\right) = x^p\nu_1^+\left(x\right), \quad (x,0)\in J_1, \tag{23_1}$$

$$\tau_1\left(0\right) = \tau_3\left(0\right) = 0, \qquad \tau_1\left(1\right) = \varphi_1(0) \tag{24_1}$$

и

$$\tau_2''\left(x\right) = (-x)^p\nu_2^+\left(x\right), \quad (x,0)\in J_2, \tag{23_2}$$

$$\tau_2\left(-1\right) = \varphi_2\left(0\right), \quad \tau_2\left(0\right) = \tau_3\left(0\right) = 0. \tag{24_2}$$

Решая задачу (23_j) и (24_j), получим функциональное соотношение между $\tau_j(x)$ и $\nu_j^+(x)$, перенесенное из области D_j на J_j (j=1,2):

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^1 G_1(x,t)\, t^p \nu_1^+(t)dt + \Phi_1(x), \qquad (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{25_1}$$

$$\tau_2(x) = \int\limits_{-1}^0 G_2(x,t)\, (-t)^p \nu_2^+(t)dt + \Phi_2(x), \qquad (x,0) \in \bar{J}_2, \tag{25_2}$$

где

$$\Phi_1(x) = x\varphi_1(0), \tag{26_1}$$

$$\Phi_2(x) = -x\,\varphi_2(0), \tag{26_2}$$

$$G_1(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & t \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{27_1}$$

$$G_2(x,t) = \begin{cases} t(1+x), & -1 \leqslant x \leqslant t, \\ x(1+t), & t \leqslant x \leqslant 0. \end{cases} \tag{27_2}$$

4. Единственность решения задачи BS

Теорема 1. *Если выполнены условия (2), (8), (9), то в области D решение задачи* **BS** *единственно.*

При доказательстве теоремы 1 важную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Если выполнены условия (2), (8), то решение $u(x,y) \in C\left(\bar{D}_4\right) \cap C^{2,1}_{x,y}\left(D_1 \cup RB_1 \cup D_2 \cup B_2R\right)$, $u_x(x,y) \in C(D_4 \cup B_1B_2)$ уравнения (1) при $y > 0$, достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{D}_4$ лишь на $\overline{A_1B_1} \cup \overline{A_2B_2} \cup J_1 \cup J_2$.*

Доказательство леммы 1. В силу принципа экстремума для параболических уравнений [29], [30] решение $u(x,y)$ уравнения (1) при $y > 0$ внутри области D_1 и D_2 не может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума.

Покажем, что решение $u(x,y)$ уравнения (1) при $y > 0$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на $\overline{J}_3$.

Предположим обратное. Пусть $u(x,y)$ в некоторой точке $(0,y_0)$ интервала J_3 достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум). Тогда на основе принципа экстремума [31], [32] из области D_1 имеем

$$u_x(+0,y_0) < 0 \qquad (>0). \tag{28}$$

А с другой стороны, из области D_2 получим

$$u_x(-0,y_0) > 0 \; (<0).$$

Это неравенство в силу (7_3) противоречит отношению (28). Следовательно, $u(x,y)$ не достигается положительный максимум (отрицательный минимум) на интервале J_3.

В силу условия (8) из (5) и (6) следует, что $u(0,0) = 0$. Значит, $u(x,y)$ не достигает своего экстремума в точке $O(0,0)$.

Используя леммы 1.1 и 1.2 [33, Гл. 2, § 2.3. стр. 93-94], можно доказать, что в точке (0,1) не существует положительный максимум (отрицательный минимум).

Таким образом, $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале $\bar{J}_3$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\tau_2(x) \in C[-1,0] \cap C^{(1,k)}(-1,0)$, *где* $k > -2\beta$ *в точке* $x = x_0$ $(x_0 \in (-1,0))$ *принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение. Тогда функцию*

$$T_2(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{-1x}^{1-2\beta} \tau_2(x) = \frac{sin2\pi\beta}{2\pi\beta} \frac{d^2}{dx^2} \int\limits_{-1}^{x} \tau_2(t)(x-t)^{2\beta} dt \tag{29}$$

в точке $x = x_0$ *можно представить в виде*

$$T_2(x_0) = \frac{sin2\pi\beta}{\pi} \left[(1+x_0)^{2\beta-1} \ \tau_2(x_0) + (1-2\beta) \int\limits_{-1}^{x_0} \frac{\tau_2(x_0) - \tau_2(t)}{(x_0-t)^{2-2\beta}} d\,t \right], \tag{30}$$

причём

$$T_2(x_0) < 0 \quad (T_2(x_0) > 0), \quad (x_0, 0) \in J_2. \tag{31}$$

Лемма 2 доказывается с помощью теоремы 1 [14, стр. 1080-1081] и леммы 27.1 [28, стр. 231-232].

Точно так же, как выше, можно доказать леммы 2 в случае, когда $x_0 \in (0,1)$. Следовательно, имеет место тождество

$$T_1(x_0) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x_0}^{1-2\beta} \tau_1(x_0) = \frac{sin2\pi\beta}{\pi} \left[x_0^{2\beta-1} \tau_1(x_0) + \right.$$

$$\left. + (1-2\beta) \int\limits_{0}^{x_0} [\tau_1(x_0) - \tau_1(t)] (x_0-t)^{2\beta-2} dt \right] \tag{32}$$

и неравенство

$$T_1(x_0) < 0 \, (T_1(x_0) > 0), \tag{33}$$

где $(x_0, 0) \in J_1$ точка положительного максимума (отрицательного минимума) функции $\tau_1(x) \in C(\bar{J}_1) \cap C^{(1,k)}(J_1)$.

Лемма 3. *(аналог принципа экстремума А.В. Бицадзе.) Если выполнены условия (2),(8),(9), то решение* $u(x,y)$ *задачи* **BS** *при* $\rho(x) \equiv 0$, $q_1(x) \equiv 0$, $q_2(x) \equiv 0$, $b(x) \equiv 0$, *свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* $\bar{D}_4$ *достигает лишь на* $\overline{A_1B_1} \cup \overline{A_2B_2}$.

Доказательство леммы 3. В силу леммы 1 решение $u(x,y)$ уравнения (1) при $y > 0$ свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{D}_4$ достигает лишь на $\overline{A_1B_1} \cup \overline{A_2B_2} \cup J_1 \cup J_2$.

Покажем, что решение $u(x,y)$ уравнения (1) не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервалах J_j $(j = 1,2)$ и в точке $O(0,0)$. Предположим обратное. Пусть $u(x,y)$ в некоторой точке $Q(x_0,0) \in J_2$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум).

Тогда равенство (18) при $b(x) \equiv 0$ принимает вид

$$\gamma_1 \nu_2^-(x) = \frac{1}{2\cos\pi\beta} T_2(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)} D_{-1x}^{-\beta} a(x) \tau_2(x), \qquad (x,0) \in J_2. \tag{34}$$

В силу (7_2) при $q_2(x) \equiv 0$ с учетом определения и принципа экстремума оператора интегродифференцирования дробного порядка [28, стр. 16-19, (4.1), (4.6)] из (34) после некоторых вычислений получим

$$\gamma_1 p_2(x) \nu_2^+(x) = \frac{1}{2\cos\pi\beta} T_2(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)} \left[(1+x)^\beta a(x) \tau_2(x) - \right.$$

$$-\beta\int\limits_{-1}^{x}\frac{\tau_2(x)-\tau_2(t)}{x-t}a(t)(x-t)^{\beta}dt-\beta\tau_2(x)\int\limits_{-1}^{x}\frac{a(x)-a(t)}{x-t}(x-t)^{\beta}dt\Bigg]. \tag{35}$$

Принимая во внимание (2), (9), (11) с учетом леммы 2 из (35), заключаем, что в точке $Q(x_0,0)$ положительного максимума (отрицательного минимума)

$$\nu_2^+(x_0)>0\left(\nu_2^+(x_0)<0\right). \tag{36}$$

С другой стороны, в точке $Q(x_0,0)$ с учётом $\tau_2''(x_0)\leqslant 0\,[\tau_2''(x_0)\geqslant 0]$ из (23_2) получим $\nu_2^+(x_0)\leqslant 0\ \left[\nu_2^+(x_0)\geqslant 0\right]$. Это неравенство противоречит неравенству (36).

Таким образом, $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале J_2.

Аналогично, принимая во внимание (2), (7_1), (9), (11), (23_1), (33) из (21) при $b(x)\equiv 0$, $\rho(x)\equiv 0$, $q_1(x)\equiv 0$, заключаем, что $u(x,y)$ не достигает своего положительного максимума (отрицательного минимума) на интервале J_1.

В силу (8) следует, что $u(x,y)$ не достигает своего экстремума в точке $O(0,0)$.

Лемма 3 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1.

Пусть $\varphi_1(y)\equiv\varphi_2(y)\equiv b(x)\equiv\rho(x)\equiv q_1(x)\equiv q_2(x)\equiv 0$, тогда в силу леммы 3 с учетом (4_1) и (4_2) имеем

$$u(x,y)\equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_4.$$

Отсюда следует, что

$$u(x,0)\equiv 0,(x,0)\in\bar{J}_j,\quad u_y(x,\pm 0)\equiv 0,(x,0)\in J_j,(j=1,2). \tag{37}$$

Принимая во внимание (14_1), (14_2), (29), (32), (37) из решения задачи Коши (13_j) для уравнения (1) в областях $D_{3j}(j=\overline{1,3})$, получим $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_3$.

Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$ в области $\bar{D}$. Тем самым, решение задачи **BS** единственно.

Теорема 1 доказана.

5. Существование решение задачи BS

Теорема 2. *Если выполнены условия (2), (8), (10) и (11), то в области D решение задачи* **BS** *существует.*

Доказательство теоремы 2. В силу (16_1) с учетом $\tau_1(0)=0$ из (21) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{0x}^{-2\beta}\tau_1'(x)=$$

$$=2cos\pi\beta\left[\gamma_1\nu_1^-(x)-\frac{x^{\beta}}{\mu\Gamma(1-\beta)}\,D_{0x}^{-\beta}a(x)\tau_2(x)-F_1(x)\right],(x,0)\in J_1. \tag{38}$$

Из (18) с учетом (16_2) после некоторых вычислений получим интегральное уравнение относительно $T_2(x)$:

$$T_2(x)+\int\limits_{-1}^{x}K_2(x,t)T_2(t)\,dt=F_2(x),\quad (x,0)\in J_2, \tag{39}$$

где

$$K_2(x,t)=\frac{2\cos\pi\beta\,(1+x)^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\beta)}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{t}^{x}a'(z)\,(x-z)^{\beta}\,(z-t)^{-2\beta}\,dz-2\beta\int\limits_{t}^{x}a(z)\,(x-z)^{\beta}\,(z-t)^{-2\beta-1}\,dz\right\}, \tag{40}$$

$$F_2(x) = 2\cos\pi\beta \left[\gamma_1\nu^-(x) + \frac{(1+x)^\beta}{\Gamma(1-\beta)}\, D_{-1x}^{-\beta} b(x)\right]. \tag{41}$$

Принимая во внимание (2), (11), из (40) следует, что ядро $K_2(x,t)$ допускает оценку

$$|K_2(x,t)| \leqslant const\,(1+x)^\beta. \tag{42}$$

В силу (11) с учетом класса R_2 (см.(13_2)) из (41) следует, что правая часть уравнения (39) непрерывна в интервале $(-1,0)$ и интегрируема на $[-1,\ 0]$.

В силу (2), (42) уравнение (39) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Из постановки задачи **BS** с учетом (42) и свойства функции $F_2(x)$ следует, что решение уравнения (39) надо искать в классе функции непрерывна в $(-1,0)$ и интегрируема на $[-1,\ 0]$.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [34], заключаем, что интегральное уравнение (39) однозначно разрешимо, и его решение дается формулой

$$T_2(x) = F_2(x) - \int_{-1}^{x} K_2^*(x,t)F_2(t)dt, \quad (x,0)\in J_2, \tag{43}$$

где $K_2^*(x,t)$ — резольвента ядра $K_2(x,t)$.

В силу (16_2) с учетом $\tau_2(-1)=0$ из (43) получим

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{-1x}^{-2\beta}\tau_2'(x) =$$

$$= \gamma_3\nu_2^-(x) - \gamma_3\int_{-1}^{x} K_2^*(x,t)\nu_2^-(t)\,dt + F_3(x), \quad (x,0)\in J_2, \tag{44}$$

где $\gamma_3 = 2\gamma_1 cos\pi\beta$,

$$F_3(x) = \frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\left[(1+x)^\beta D_{-1x}^{-\beta} b(x) - \int_{-1}^{x} K_2^*(x,t)\,(1+t)^\beta D_{-1\,t}^{-\beta} b(t)\,dt\right.. \tag{45}$$

Исключив $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ из соотношений (38), (25_1) и (44), (25_2) с учетом (7_1) и (7_2), соответственно имеем

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{-2\beta}\left[\int_0^1 G_{1x}'(x,t)\,t^p\nu_1^+(t)dt + \Phi_1'(x)\right] = \gamma_3\left[p_1(x)\nu_1^+(x) + q_1(x)\right] -$$

$$-\frac{2cos\pi\beta x^\beta}{\mu\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^\beta a(t)dt\int_{-1}^{0} G_2(t,z)\,(-z)^p\nu_2^+(z)dz+$$

$$+F_4(x), \quad (x,0)\in J_1, \tag{46}$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{-1x}^{-2\beta}\left[\int_{-1}^{0} G_{2x}'(x,t)\,(-t)^p\nu_2^+(t)dt + \Phi_2'(x)\right] = \gamma_3\left[p_2(x)\nu_2^+(x) + q_2(x)\right] -$$

$$-\gamma_3\int_{-1}^{x} K_2^*(x,t)\ \left[p_2(t)\nu_2^+(t) + q_2(t)\right]dt + F_3(x), \quad (x,0)\in J_2, \tag{47}$$

где

$$F_4(x) = -2cos\pi\beta\left[\frac{x^\beta}{\mu\Gamma(1-\beta)}D_{0x}^{-\beta}a\left(x\right)\Phi_2\left(x\right)-F_1(x)\right]. \tag{48}$$

Введем обозначения

$$R_1(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)}D_{0x}^{-2\beta}\int\limits_0^1 G'_{1x}\left(x,t\right)t^p\nu_1^+(t)dt, \quad 0<x<1, \tag{46_1}$$

$$R_2(x) = \frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)}D_{-1x}^{-2\beta}\int\limits_{-1}^0 G'_{2x}\left(x,t\right)(-t)^p\nu_2^+(t)dt, \quad -1<x<0. \tag{47_1}$$

Тогда в силу (27_1) и (27_2) с учетом определения оператора интегродифференцирования дробного порядка [28, см.формулы (4.1) и (4.6)], а также, используя свойства бета-функций [28, (1.7)] из (46_1) и (47_1), имеем

$$R_1(x) = \gamma_4\left[\int\limits_0^x P_{11}(x,t)\nu_1^+\left(t\right)dt + \int\limits_x^1 P_{12}(x,t)\nu_1^+\left(t\right)dt\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 P_1\left(x,t\right)\nu_1^+(t)dt, \tag{46_2}$$

$$R_2(x) = \gamma_4\left[\int\limits_{-1}^x P_{21}(x,t)\nu_2^+\left(t\right)dt + \int\limits_x^0 P_{22}(x,t)\nu_2^+\left(t\right)dt\right] =$$

$$= \int\limits_{-1}^0 P_2\left(x,t\right)\nu_2^+(t)dt, \tag{47_2}$$

где $\quad \gamma_4 = 1/\Gamma\left(1-2\beta\right)\Gamma(1+2\beta)$,

$$P_1\left(x,t\right) = \begin{cases} \gamma_4 P_{11}\left(x,t\right), & 0\leqslant t\leqslant x, \\ \gamma_4 P_{12}\left(x,t\right)\;, & x\leqslant t\leqslant 1, \end{cases} \tag{46_3}$$

$$P_2\left(x,t\right) = \begin{cases} \gamma_4 P_{21}\left(x,t\right), & -1\leqslant t\leqslant x, \\ \gamma_4 P_{22}\left(x,t\right), & x\leqslant t\leqslant 0, \end{cases} \tag{47_3}$$

$$P_{11}\left(x,t\right) = (x-t)^{2\beta}t^p + x^{2\beta}\cdot t^p(t-1), \quad P_{12}\left(x,t\right) = x^{2\beta}t^p(t-1),$$

$$P_{21}\left(x,t\right) = (x-t)^{2\beta}\cdot(-t)^{p+1} + (x-t)^{2\beta}\cdot(1+t)\left(-t\right)^p - (x+1)^{2\beta}\left(-t\right)^p,$$

$$P_{22}\left(x,t\right) = -\left(x+1\right)^{2\beta}\left(-t\right)^{p+1}.$$

Подставляя (46_2) и (47_2) в (46) и (47), соответственно, находим

$$\nu_2^+\left(x\right) - \int\limits_{-1}^0 P\left(x,t\right)\nu_2^+\left(t\right)dt = F_5\left(x\right), \quad -1<x<0, \tag{49}$$

$$\nu_1^+\left(x\right) - \int\limits_0^1 Q\left(x,t\right)\nu_1^+\left(t\right)dt = F_6\left(x\right) + \int\limits_{-1}^0 K_1\left(x,t\right)\nu_2^+(t)dt, \quad 0<x<1, \tag{50}$$

где

$$P(x,t)=\begin{cases}[P_2(x,t)+\gamma_3 K_2^*(x,t)p(t)]/\gamma_3 p_2(x), & -1\leqslant t\leqslant x,\\ P_2(x,t)/\gamma_3 p_2(x), & x\leqslant t\leqslant 0,\end{cases} \tag{51}$$

$$Q(x,t)=P_1(x,t)/\gamma_3 p_1(x), \tag{52}$$

$$F_5(x)=\frac{D_{-1x}^{-2\beta}\Phi_2'(x)}{\Gamma(1-2\beta)\gamma_3 p_2(x)}-\frac{\gamma_3 q_2(x)+F_3(x)}{\gamma_3 p_2(x)}+\int\limits_{-1}^{x}\frac{K_2^*(x,t)q_2(t)}{p_2(x)}dt\,, \tag{53}$$

$$F_6(x)=\frac{D_{0x}^{-2\beta}\Phi_1'(x)}{\Gamma(1-2\beta)\gamma_3 p_1(x)}-\frac{F_4(x)+\gamma_3 q_1(x)}{\gamma_3 p_1(x)}, \tag{54}$$

$$K_1(x,t)=\frac{2cos\pi\beta x^{\beta}(-t)^{p}}{\gamma_1\mu\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)p_1(x)}\frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{x}a(z)(x-z)^{\beta}G_2(z,t)dz. \tag{55}$$

В силу (2), (11), (40), (42), (46_3), (47_3) из (51) и (52) получим оценки

$$|P(x,t)|\leqslant\begin{cases}const\,(x-t)^{2\beta}, & -1\leqslant t\leqslant x,\\ const\,(1+t)^{2\beta}, & x\leqslant t\leqslant 0,\end{cases} \tag{56}$$

$$|Q(x,t)|\leqslant\begin{cases}const\,(x-t)^{2\beta}, & 0\leqslant t\leqslant x,\\ const\;x^{2\beta}, & x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{57}$$

Из (56) и (57) следует, что уравнения (49) и (50) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода со слабой особенностью.

В силу (2), (8), (10), (11) из (53) и (54) с учетом (22), (26_1), (26_2), (40), (41), (42), (45), (48) заключаем, что:

1) функция $F_5(x)$ непрерывна в $(-1,0)$ и интегрируема на $[-1,0]$, причем функция $F_5(x)$ при $x\to-1$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β;

2) функция $F_6(x)$ непрерывна в $(0,1)$ и интегрируема на $[0,1]$, причем функция $F_6(x)$ при $x\to 0$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β.

Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма второго рода (49) и (50) (в силу эквивалентности его задаче **BS**) вытекает из единственности решения задачи **BS** и соответственно дается формулой [34]:

$$\nu_2^+(x)=\int\limits_{-1}^{0}P^*(x,t)F_5(t)\,dt+F_5(x)\,,\quad -1<x<0 \tag{58}$$

и принадлежит классу, $\nu_2^+(x)\in C(-1,0)\cap L_1[-1,0]$, $\nu_2^+(x)$ функция при $x\to-1$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β;

$$\nu_1^+(x)=\int\limits_{0}^{1}Q^*(x,t)F_7(t)\,dt+F_7(x)\,,\quad 0<x<1 \tag{59}$$

и принадлежит классу, $\nu_1^+(x)\in C(0,1)\cap L_1[0,1]$, причем функция $\nu_1^+(x)$ при $x\to 0$ обращается в бесконечность порядка меньше -2β. Здесь

$$F_7(x)=F_6(x)-\int\limits_{-1}^{0}K_1(x,t)\left[\int\limits_{-1}^{0}P^*(t,z)F_5(z)\,dz+F_5(t)\right]dt,$$

а $P^*(x,t)$ и $Q^*(x,t)$ — резольвента ядра $P(x,t)$ и $Q(x,t)$ соответственно.

Поставляя (58) и (59) в (25_1) и (25_2), соответственно определим $\tau_2(x)$ и $\tau_1(x)$ функцию из класса

$$\tau_2(x) \in C^1[-1,0] \cap L_1[-1,0] \quad \text{и} \quad \tau_1(x) \in C^1[0,1] \cap L_1[0,1]. \tag{60}$$

Теперь решим следующую задачу.

Задача AD. Найти решение $u(x,y) \in C\left(\bar{D}_4\right) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1 \cup RB_1 \cup D_2 \cup B_2R)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4_1), (4_2), (7_3) и

$$u(x,0) = \tau_1(x),\, (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{61_1}$$

$$u(x,0) = \tau_2(x),\, (x,0) \in \bar{J}_2, \tag{62_2}$$

где $\tau_j(x)$ $(j = 1,2)$ — заданные функции, удовлетворяющие условию (60), причем $\tau_1(0) = \tau_2(0)$.

Теорема 3. *Если выполнены условия (2), (10), (60), то задача* **AD** *в области D_4 однозначно разрешима.*

Доказательство теоремы 3. Решение первой краевой задачи с условиями (4_1), (61_1) и $u(0,y) = \tau_3(y)$, $(0,y) \in \overline{J}_3$ для уравнения (1) в $D_1 \cup RB_1$ имеет вид [29], [31]:

$$u(x,y) = \int_0^1 G_0(x,t,y,\alpha)t^p\tau_1(t)dt + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(1)}(x,t,y,\alpha)\tau_3(t)dt +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(2)}(x,t,y,\alpha)\varphi_1(t)dt \tag{62}$$

и принадлежит классу $u(x,y) \in C\left(\overline{D}_1\right) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1 \cup RB_1)$, если выполняется (10), (60) и $\tau_3(y) \in C\left(\overline{J}_3\right) \cap C^1(J_3)$. Здесь $G^{(j)}(x,t,y,\alpha)$, $(j = 1,2)$ определяются формулами

$$G^{(1)}(x,t,y,\alpha) = \frac{(1-\alpha)^{2(\alpha-1)} - x}{(1-\alpha)^{2(\alpha-1)}} - \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{2(\alpha-1)} - t}{(1-\alpha)^{2(\alpha-1)}} G_0(x,t,y,\alpha)\, t^p dt, \tag{63}$$

$$G^{(2)}(x,t,y,\alpha) = (1-\alpha)^{2(1-\alpha)}x - \int_0^1 G_0(x,t,y,\alpha)\,(1-\alpha)^{2(1-\alpha)}t^p dt, \tag{64}$$

а $G_0(x,\xi,y,\alpha)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области D_1 имеет вид

$$G_0(x,\xi,y,\alpha) = \sum_{s=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_s^2 y}{4}}(1-\alpha)\sqrt{x\xi}\times$$

$$\times\frac{J_{1-\alpha}\left(\lambda_s(1-\alpha)x^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\right)J_{1-\alpha}\left(\lambda_s(1-\alpha)\xi^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}\right)}{J^2_{2-\alpha}(\lambda_s)},$$

где $J_\chi(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s+\chi+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\chi+2s}$ — функция Бесселя первого рода, $\alpha = \frac{p+1}{p+2}$, причем

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1, \tag{65}$$

а λ_s — положительные корни уравнения $J_{1-\alpha}(\lambda_s) = 0$, $\quad s = 0,1,2,\dots$.

Дифференцируя (62) по x и переходя к пределу при $x \to +0$ с учетом (12_3), находим

$$\nu_3(y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y Z(y-t)\tau_3(t)dt + F_8(y), \quad (0,y) \in J_3, \tag{66}$$

где

$$Z(y-t) = (1-\alpha)^{2\alpha-1} \lim_{x\to+0} \frac{\partial G^{(1)}(x,y-t,\alpha)}{\partial x} =$$

$$= -(1-\alpha) - \frac{2^{2\alpha}}{\Gamma^2(1-\alpha)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda_s^{-2\alpha} e^{-\frac{\lambda_s^2(y-t)}{4}}}{J_{2-\alpha}^2(\lambda_s)},$$

$$F_8(y) = \lim_{x\to+0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^1 G_0(x,t,y,\alpha) t^p \tau_1(t)dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y G^{(2)}(x,t,y,\alpha)\varphi_1(t)dt. \right. \tag{67}$$

На основании свойства функции $J_\chi(z)$ функция $Z(y-t)$ представима в виде [21], [31]:

$$Z(y-t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(y-t)^{\alpha-1} + B(y-t), \tag{68}$$

где $B(y-t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция при $y \geqslant t$.

Подставляя (68) в (66), получим функциональное соотношение между $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$, принесенное из области D_1 на J_3:

$$\nu_3(y) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1}\tau_3(t)dt + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y B(y-t)\tau_1(t)dt + F_8(y). \tag{69}$$

Нетрудно заметить, что решение первой краевой задачи с условиями (4_2), (61_2) и $u(0,y) = \tau_3(y),\ \ (0,y) \in \bar{J}_3$ для уравнения (1) в $D_2 \cup RB_2$ даётся формулой:

$$u(x,y) = \int_{-1}^{0} G_0(-x,t,y,\alpha)(-t)^p\tau_2(t)dt - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(1)}(-x,t,y,\alpha)\tau_3(t)dt -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(2)}(-x,t,y,\alpha)\varphi_2(t)dt. \tag{70}$$

Точно так же, как выше, дифференцируя (70) по x и переходя к пределу $x \to -0$ с учетом (12_3), (68), получим функциональное соотношение между $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$, принесенное из области D_2 на J_3:

$$\nu_3(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1}\tau_3(t)dt - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y B(y-t)\tau_3(t)dt + F_9(y), \tag{71}$$

где

$$F_9(y) = \lim_{x\to-0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{-1}^{0} G_0(-x,t,y,\alpha)(-t)^p\tau_2(t)dt - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y G^{(2)}(-x,t,y,\alpha)\varphi_2(t)dt \right\}. \tag{72}$$

В силу (7_3) из соотношений (69) и (71) получим равенство относительно $\tau_3(y)$:

$$\frac{2}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y-t)^{\alpha-1}\tau_3(t)dt - 2\frac{\partial}{\partial y} \int_0^y B(y-t)\tau_3(t)dt = F_8(y) - F_9(y).$$

Отсюда, в силу определения оператора интегродифференцирования дробного порядка [28, (4.1), (4.6)] имеем

$$\frac{2\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} D_{0y}^{1-\alpha}\tau_1(y) - 2B(0)\tau_3(y) - 2\int\limits_0^y B'_y(y-t)\tau_3(t)dt = F_8(y) - F_9(y). \tag{73}$$

Применяя оператор $D_{0y}^{\alpha-1}$ к обеим частям равенства (73), с учетом $\tau_3(0)=0$ и

$$D_{0y}^{\alpha-1} D_{0y}^{1-\alpha}\tau_3(y) = \tau_3(y), \tag{74}$$

получим интегральное уравнение относительно $\tau_3(y)$:

$$\tau_3(y) = \int\limits_0^y M(y,t)\tau_3(t)dt + F_{10}(y), \quad (0,y)\in \bar{J}_3, \tag{75}$$

где

$$M(y,t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left\{B(0)(y-t)^{-\alpha} + \int\limits_t^y B_z(z-t)(y-z)^{-\alpha}dz\right\},$$

$$F_{10}(y) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\Gamma(\alpha)} D_{0y}^{\alpha-1}\left[F_8(y) - F_9(y)\right]. \tag{76}$$

Ядро $M(y,t)\in C\left([0,1]\times[0,1]\right)$ при $y\neq t$, а при $y=t$ допускает оценку

$$|M(y,t)| \leqslant const(y-t)^{-\alpha}. \tag{77}$$

Исследуем теперь функцию $F_{10}(y)$. В работах [21] и [33], используя свойства функции $G_0(x,\xi,y-\eta,\alpha)$, $J_\chi(z)$ с учетом (2), (10), (60), доказано, что функция $F_i(y)$, $(i=8,9)$ принадлежит классу

$$F_i(y)\in C\left(\overline{J}\right)\cap C^1(J), \quad (i=8,9). \tag{78}$$

В силу (77), (78) с учетом определения оператора интегродифференцирования дробного порядка [28, (4.1)] из (76) получим оценку

$$|F_{10}(y)| \leqslant \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}\left[|F_8(t)| + |F_9(t)|\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant const\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}dt \leqslant const\, y^{1-\alpha}.$$

Отсюда, применяя во внимание (65) и $0\leqslant y\leqslant 1$, имеем

$$|F_{10}(y)| < const. \tag{79}$$

В силу (10), (60), (65) с учетом (79) из (76) следует, что

$$F_{10}(y)\in C\left(\overline{J}_3\right)\cap C^1(J_3). \tag{80}$$

Таким образом, в силу (77), (79), (80) уравнение (75) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [34], заключаем, что интегральное уравнение (75) однозначно разрешимо в классе $C\left(\bar{J}_3\right)\cap C^1(J_3)$, и его решение дается формулой

$$\tau_3(y) = F_{10}(y) + \int\limits_0^y M^*(y,t)F_{10}(t)dt, \quad (0,y)\in\bar{J}_3, \tag{81}$$

где $M^*(y,t)$ — резольвента ядра $M(y,t)$.

Следовательно, задача **AD** однозначно разрешима в силу эквивалентности ее интегральному уравнению Вольтерра второго рода (75).

Подставляя $\tau_3(y)$ из (81) в (62) и (70), восстановим решение задачи **AD** как решение первой краевой задачи в областях D_1 и D_2 соответственно.

Таким образом, решение задачи **BS** можно восстановить в областях D_1 и D_2 как решение первой краевой задачи для уравнения (1) (см.(62), (70)), а в области D_3 как решение задачи Коши для уравнения (1) (см. (13_j) $(j = 1, 2)$).

Теорема 2 доказана.

Автор выражает признательность научному руководителю академику АН РУз Салахитдинову М.С. за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. *Избранные труды.* Изд. КБНЦРАН, Россия, 2012. 400 с.
2. Салахитдинов М.С. *Избранные научные труды* Ташкент. МУМТОЗ СЎЗ. 2013. 500 с.
3. Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа.* Ташкент: ФАН. 1979. 240 с.
4. Моисеев Е.И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* Изд. МГУ. Россия. 1988. 152 с.
5. Нахушев А.М. *Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка.* Россия. Нальчик. 1992. 156 с.
6. Кальменов Т.Ш. *Научные труды, воспоминания и размышление в начале века.* Алматы. 2006. 108 с.
7. Сабитов К.Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения со степенным вырождением на переходной линии* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1474–1481.
8. Салахитдинов М.С., Исломов Б. *Нелокальная краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения* // Известия вузов. Математика. 2011. № 1. С. 49–58.
9. G.C. Wen *Solvability of the Tricomi problem for second or der equations of mixed type with degenerate curve on the sides of on angle* // Math. Anachr. 281(2008). P. 1047–1062.
10. Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области* // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
11. Кароль И.Л. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа* // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 2. С. 197–200.
12. Салахитдинов М.М., Исамухамедов С.С. *О некоторых смешанных задачах для уравнения* $sgny|y|^{-m}u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < m < 1$ // Изв. АН УзССР. Сер. физ-мат. наук. 1970. № 5. С. 15–19.
13. Смирнов М.М. *Краевая задача для уравнения смешанного типа 2-го рода со смещением* // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 931–943.
14. Ивашкина Г.А. *О задачах типа Бицадзе-Самарского для уравнения* $u_{xx} + sgny|y|^m u_{yy} = 0$, $0 < m < 1$. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 1078–1089.
15. Сабитов К.Б., Бибакова С.Л. *Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение* // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. № 1. С. 83–94.
16. Сабитов К.Б. *О постановке краевых задач для уравнения смешанного типа с вырождением второго рода на границе бесконечной области* // Сибирский математический журнал. 1980. Т. 21. № 4. С. 146–150.
17. Хайруллин Р.С. *К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода* // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35. № 4. С. 927–936.
18. Хайруллин Р.С. *К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 528–534.
19. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области* // Известия вузов. Математика. 2007. № 4. С. 45–53.

20. Сабитов К.Б., Сулейманова А.Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области* // Известия вузов. Математика. 2009. № 11. С. 43–52.
21. Джураев Н. *Задача Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения второго рода* // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 2. С. 19–23.
22. Салахитдинов М.М., Эргашев Т.Г. *О двух краевых задачах со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода* // Доклады АН УзССР. 1991. № 7. С. 3–5.
23. Исломов Б., Жумоев Б. *Аналог задачи Трикоми для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения второго рода* // Меж. Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики.» Россия. Нальчик. 2010. С. 106–108.
24. Жумоев Б. *Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода, вырождающегося внутри области* // Узбекский мат. журнал. 2012. № 1. С. 38–46.
25. Салахитдинов М.М., Мирсабуров М. *Нелокальные задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами.* Ташкент. Университет. 2005. 223 с.
26. Мирсабуров М. *Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1281–1284.
27. Исламов Н.Б. *Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода* // Узбекский мат. журнал. 2012. № 4. С. 38–50.
28. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* М.: Высшая школа. 1985. С. 304.
29. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. *Краевая задача для смешанного эллиптико-параболического уравнения с различными порядками вырождения внутри области* // Узбекский мат. журнал. 1994. № 4. С. 51–60.
30. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17. Вып. 3(105). С. 3–141.
31. Терсенов С.А. *Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени.* Новосибирск. 1978. 53 с.
32. Терсенов С.А. *Введение в теорию уравнения вырождающегося на границе.* Новосибирск. НГУ. 1973. 144 с.
33. Акбарова С.Х. *Краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения.* Дис... канд. физ.-мат. наук. Ташкент: ИМ АН РУз. 1995. 120 с.
34. Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматгиз. 1959. 232 с.

Носир Бозорович Исламов,
Ташкентский государственный экономический университет, Узбекистан,
ул. Узбекистан, 49,
100003, г. Ташкент, Узбекистан,
E-mail: `islamovnosir@yandex.ru`