ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 19-30.

УДК 517.925

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯМ ТИПА ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Ю.Ю. БАГДЕРИНА

Аннотация. Рассматривается проблема эквивалентности для уравнений вырожденного типа, которому, в частности, принадлежит первое уравнение Пенлеве. В терминах алгебраических и дифференциальных инвариантов класса уравнений с кубической нелинейностью по первой производной получены необходимые условия эквивалентности некоторым уравнениям этого типа с известным решением. Доказан критерий эквивалентности первому уравнению Пенлеве относительно точечных преобразований.

Ключевые слова: первое уравнение Пенлеве, эквивалентность, инвариант.

Mathematics Subject Classification: 34M55, 34M15

1. Введение

Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = S(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3R(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3Q(x,y)\frac{dy}{dx} + P(x,y) \tag{1}$$

относительно точечных замен переменных

$$z = \xi(x,y), \qquad w = \eta(x,y), \qquad \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0 \tag{2}$$

привлекает большое внимание с конца XIX в. [1]–[10]. Класс уравнений (1) замкнут относительно преобразований (2). Он содержит 50 уравнений [11, гл. 14], полученных при классификации ОДУ второго порядка, не имеющих подвижных критических точек, кроме полюсов [12, 13], в том числе шесть уравнений Пенлеве. Проблема эквивалентности ОДУ второго порядка первому уравнению Пенлеве

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z \tag{3}$$

относительно точечных преобразований исследовалась в [10] и [14]–[19]. В [20] рассматривалась проблема эквивалентности первого уравнения Пенлеве обобщенному уравнению Эмдена-Фаулера относительно (нелокального) преобразования Сундмана.

В [21] доказано, что все уравнения Пенлеве некоторой заменой переменных (2) приводимы к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y), \tag{4}$$

Yu.Yu. Bagderina, Equivalence of second-order ODEs to equations of first Painlevé equation type.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00078).

Поступила 14 октября 2014г.

и получена каноническая форма (4) для третьего, четвертого, пятого и шестого уравнений Пенлеве. Также в [21] показано, что только специальные замены переменных

$$\tilde{x} = k\int \phi^2(x)dx + x_0, \quad \tilde{y} = \phi(x)y + \chi(x), \quad k, x_0 = \mathrm{const}, \quad k, \phi(x) \neq 0 \tag{5}$$

не выводят уравнение (4) за пределы данного класса.

В большинстве работ, посвященных проблеме эквивалентности уравнений (1) [1]–[5, 8], исследуется только основной (невырожденный) случай, когда для уравнения (1) имеем $J_0 \neq 0$ (формула для вычисления J_0 приведена в следующем пункте). Для всех уравнений Пенлеве $J_0 = 0$ и, значит, они принадлежат вырожденным типам уравнения (1). В [1] рассматривались и вырожденные случаи уравнения (1), но полная их классификация еще не была осуществлена. Такая классификация была получена в [6, 7] методами дифференциальной геометрии. Позднее, в [9] она была проведена с помощью метода внешних форм Картана, а затем в [10] — с использованием инфинитезимального подхода С. Ли. При этом результат, применимый непосредственно к любому уравнению (1), содержат только работы [7, 10]. В [6] формулы для инвариантов уравнения (1) получены в специальной системе координат и их применение подразумевает предварительную замену переменных (т.е. требует выполнения некоторых операций интегрирования). Результат [9] для вырожденных типов уравнения (1), к которым, в частности, относятся уравнения Пенлеве, требует предварительного приведения исследуемого уравнения (1) к виду (4).

Уравнения (1) первого типа в [10] соответствуют случаю общего положения (основному случаю), определяемому в [6, 7]. Уравнения девятого типа в [10] совпадают со случаем максимального вырождения в [6, 7]. Для уравнений (1) остальных семи типов, определяемых в [10], вопрос об их соответствии семи случаям промежуточного вырождения из первоначальной классификации [6, 7] требует специального изучения. В основном случае формулы связи между инвариантами уравнения (1), построенными в [7] и [10], приводятся в [10, §1]. Подобные формулы в вырожденном случае, к которому относятся пять из шести уравнений Пенлеве, приводятся в [22, §7]. Соответствие между инвариантами из [10] и инвариантами, применяемыми в [1, 21, 23], установлено в [22, §3] и [24].

В данной работе условия эквивалентности получены с использованием алгебраических (зависящих от x, y) инвариантов класса уравнений (1), построенных в [10]. Эквивалентные уравнения имеют совпадающие множества (абсолютных) инвариантов. Согласно классификации [10] уравнение (3) принадлежит шестому типу уравнений (1). Остальные пять уравнений Пенлеве относятся к четвертому типу, и для них условия эквивалентности исследуются в [10, 19, 22, 23, 24]. Настоящая статья посвящена уравнениям шестого типа, т.е. наиболее вырожденным уравнениям (1), имеющим инварианты. В п. 2 описаны инварианты таких уравнений и показано, что все они некоторой заменой переменных (2) сводятся либо к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{4w^3} + F(z) = 0, \qquad F(z) \neq 0, \tag{6}$$

либо к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + f(z). \tag{7}$$

В п. 3, 4 вычислены инварианты этих уравнений и получены необходимые условия эквивалентности уравнениям (4) шестого типа, для которых в [25] приведено общее решение или понижен порядок. А именно, в теоремах 2–6 описаны пять неэквивалентных уравнений шестого типа, допускающих точечные симметрии. Из них четыре уравнения интегрируются и одно допускает понижение порядка. Преобразование (2), связывающее эквивалентные уравнения, строится с использованием как алгебраических, так и дифференциальных (зависящих от x, y, $y' = dy/dx$) инвариантов класса уравнений (1). В [26] показано, что при решении проблемы эквивалентности ОДУ второго порядка наибольшее число дифференцирований для построения инвариантов необходимо выполнить в случае уравнения (7) с $(f^{-1/4})'' \neq 0$.

Как видно из [14]–[19], критерий эквивалентности уравнению (3) может быть получен с помощью различных подходов. В п. 5 данной работы он воспроизведен в теореме 7. На примере первого уравнения Пенлеве показано, как доказывать достаточность условий эквивалентности уравнению (1), среди алгебраических инвариантов которого имеются инварианты I_j, I_k такие, что

$$\frac{\partial(I_j, I_k)}{\partial(x,y)} \neq 0. \tag{8}$$

Соотношение (8) выражает функциональную независимость инвариантов I_j и I_k. Подход, основанный на функциональной независимости инвариантов, известен и используется давно (см., например, [5, с. 7], [17], [18] или формулы (7) в [19]). В [22] этот подход применен при доказательстве критериев эквивалентности второму уравнению Пенлеве и приводимому к нему дифференциальной подстановкой уравнению XXXIV из [11]. Для остальных уравнений Пенлеве достаточность условий эквивалентности установлена, если применение этих условий к ОДУ (4) с точностью до преобразования (5) дает каноническую форму соответствующего уравнения Пенлеве из [21]. В случае третьего и четвертого уравнений Пенлеве этот подход использовался в работах [24] и [22], соответственно.

В п. 6 приведены примеры применения дифференциальных инвариантов при построении преобразования (2), связывающего два эквивалентных уравнения, не имеющих алгебраических инвариантов, удовлетворяющих условию (8). Рассматривается случай, когда все алгебраические инварианты уравнения постоянны, и случай, когда все они зависят от одного аргумента. Также показано, что обобщенное уравнение Эмдена-Фаулера, найденное в [20], связано с первым уравнением Пенлеве точечной заменой переменных вида (5).

2. Инварианты уравнений шестого типа

Здесь воспроизведена часть классификации ОДУ второго порядка из [10, теоремы 2, 7], касающаяся уравнений шестого типа.

Теорема 1. *Уравнение (1) шестого типа характеризуется соотношениями*

$$J_0 = 0, \quad \beta_1 \neq 0, \quad j_0 = 0, \quad j_1 = 0, \quad j_2 = 0, \quad j_3 \neq 0, \quad \Gamma_0 j_3 \neq 5\beta_1. \tag{9}$$

Базис его дифференциальных инвариантов образуют

$$\begin{gathered} I_0 = \frac{1}{j_3^{3/2}}\left(\frac{15e_0}{I_1 - 5} - \frac{3y'}{\beta_1(\beta_1 + y'\beta_2)}\right), \\ I_1 = \frac{\Gamma_0 j_3}{\beta_1}, \qquad I_2 = \frac{1}{5j_3^2}\left((5 - I_1)\Lambda + \frac{4\Gamma_0 e_0^2}{\beta_1}\right). \end{gathered} \tag{10}$$

Произвольный алгебраический инвариант уравнения (1) может быть получен применением к I_1, I_2 функционально-алгебраических операций и операторов инвариантного дифференцирования

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{j_3}(\beta_2\partial_x - \beta_1\partial_y), \quad \mathcal{D}_2 = \frac{15e_0}{(I_1-5)\sqrt{j_3}}(\beta_2\partial_x - \beta_1\partial_y) - \frac{3}{\beta_1\sqrt{j_3}}\partial_x. \tag{11}$$

Алгебраические инварианты всех уравнений шестого типа удовлетворяют тривиальным соотношениям

$$\begin{gathered} 5I_{11} + 3I_1(5 - I_1) = 0, \quad 5I_{12} - 2(2I_1 + 15)I_2 + (5 - I_1)\left(\tfrac{46}{45}I_1 + 33\right) = 0, \\ I_{21} = 0, \qquad \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2^n I_2) = \left(\tfrac{1}{10}(n+8)I_1 + \tfrac{3}{2}(n+4)\right)\mathcal{D}_2^n I_2, \quad n \in N. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь используется обозначение

$$I_{ij} = \mathcal{D}_i I_j, \quad I_{kij} = \mathcal{D}_k(\mathcal{D}_i I_j), \quad I_{lkij} = \mathcal{D}_l(\mathcal{D}_k(\mathcal{D}_i I_j)), \quad i, j, k, l = 1, 2, \tag{13}$$

для производных инвариантов, полученных применением к I_1, I_2 инвариантных дифференцирований (11). Образующие (9)–(11) величины

$$\begin{aligned}
&\Gamma_0 = 3\beta_2\gamma_{10} + \beta_1(\gamma_{20} - 4\gamma_{11}), \qquad \Gamma_1 = \beta_2(4\gamma_{20} - \gamma_{11}) - 3\beta_1\gamma_{21},\\
&J_0 = \frac{1}{3}(\beta_2\Gamma_0 - \beta_1\Gamma_1), \qquad j_0 = \frac{3}{\beta_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_{10} - \delta_{11}\right) + \frac{6\gamma_{10}}{\beta_1^2}\left(\gamma_{11} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10}\right),\\
&j_1 = \frac{5}{6}\left(2\beta_2\delta_{20} - \beta_1\delta_{30} - \frac{\beta_2^2}{\beta_1}\delta_{10}\right) + \left(\gamma_{20} + \gamma_{11} - 2\frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10}\right)\left(\gamma_{20} - \frac{2}{3}\gamma_{11} - \frac{\beta_2}{3\beta_1}\gamma_{10}\right),\\
&j_2 = \frac{1}{\beta_1}\left(\delta_{20} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\delta_{10}\right) + \frac{\gamma_{10}}{5\beta_1^2}\left(7\frac{\beta_2}{\beta_1}\gamma_{10} - 6\gamma_{20} - \gamma_{11}\right), \quad j_3 = \frac{3}{5}\left(\frac{\delta_{10}}{\beta_1^3} - \frac{6\gamma_{10}^2}{5\beta_1^4}\right),\\
&e_0 = \frac{\epsilon_{10}}{5\beta_1^4} - \frac{21\gamma_{10}\delta_{10}}{25\beta_1^5} + \frac{84\gamma_{10}^3}{125\beta_1^6}, \qquad \Lambda = \frac{\lambda_{10}}{5\beta_1^5} + \frac{4}{25\beta_1^6}(7\delta_{10}^2 - 8\gamma_{10}\epsilon_{10})
\end{aligned}$$

вычисляются с помощью относительных инвариантов

$$\beta_1 = \alpha_{1x} - \alpha_{0y} + R\alpha_0 - 2Q\alpha_1 + P\alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_{2x} - \alpha_{1y} + S\alpha_0 - 2R\alpha_1 + Q\alpha_2,$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{10} &= \beta_{1x} - Q\beta_1 + P\beta_2, & \delta_{10} &= \gamma_{10x} - 2Q\gamma_{10} + P(\gamma_{20} + \gamma_{11}) - 5\alpha_0\beta_1,\\
\gamma_{11} &= \beta_{2x} - R\beta_1 + Q\beta_2, & \delta_{11} &= \gamma_{11x} - R\gamma_{10} + P\gamma_{21} - \alpha_1\beta_1 - 4\alpha_0\beta_2,\\
\gamma_{20} &= \beta_{1y} - R\beta_1 + Q\beta_2, & \delta_{20} &= \gamma_{20x} - R\gamma_{10} + P\gamma_{21} - 4\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_2,\\
\gamma_{21} &= \beta_{2y} - S\beta_1 + R\beta_2, & \delta_{21} &= \gamma_{21x} - R(\gamma_{20} + \gamma_{11}) + 2Q\gamma_{21} - 5\alpha_1\beta_2,\\
& & \delta_{30} &= \gamma_{20y} - S\gamma_{10} + Q\gamma_{21} - 4\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2,
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{10} = \delta_{10x} - 3Q\delta_{10} + P(2\delta_{20} + \delta_{11}) - 12\alpha_0\gamma_{10},$$

$$\lambda_{10} = \epsilon_{10x} - 4Q\epsilon_{10} + P(3\epsilon_{20} + \epsilon_{11}) - 21\alpha_0\delta_{10},$$

где $\alpha_0 = Q_x - P_y + 2PR - 2Q^2, \qquad \alpha_1 = R_x - Q_y + PS - QR,$
$\alpha_2 = S_x - R_y + 2QS - 2R^2.$

В отличие от абсолютных инвариантов I_0, I_1, I_2, относительные инварианты являются инвариантами не всей группы преобразований эквивалентности класса уравнений (1), а только некоторой ее подгруппы. Подробное изложение процедуры построения относительных и абсолютных инвариантов класса уравнений (1) с помощью инфинитезимального метода С. Ли можно найти в [10]. Заметим, что соотношения (12) и их дифференциальные следствия выполняются для любого уравнения шестого типа. Такие тривиальные соотношения стоит исключать из необходимых условий эквивалентности, так как они не отражают существенных свойств исследуемого уравнения, отличающих его от других уравнений того же типа. При этом они играют важную роль при доказательстве достаточности условий эквивалентности, позволяя выразить часть инвариантов через некоторые "основные" инварианты. Эта возможность продемонстрирована в п. 5 при доказательстве теоремы 7.

Замечание. Уравнение (1) с $\beta_1 = 0$, $\beta_2 \neq 0$ преобразованием годографа приводится к уравнению с $\beta_1 \neq 0$.

В [21] показано, что любое ОДУ (1) с относительными инвариантами $J_0 = 0$, $j_0 = 0$ некоторой заменой переменных (2) приводится к виду (4). Условие $j_1 = 0$ для такого уравнения имеет вид

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)^2 - \frac{5}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0,$$

откуда следует, что правая часть ОДУ (4) равна либо

$$f(x,y) = b_0(x) + b_1(x)y + \frac{b_4(x)}{(y+b_3(x))^3}, \tag{14}$$

либо

$$f(x,y) = b_0(x) + b_1(x)y + b_2(x)y^2. \tag{15}$$

Наложение на $f(x,y)$ остальных условий (9) приводит к условиям $b_4 = \mathrm{const} \neq 0$, $b_0 - b_1 b_3 + b_3'' \neq 0$ на функцию (14) и условию $b_2 \neq 0$ на функцию (15). При таких условиях подходящим преобразованием (5) уравнение (4), (14) приводится к виду (6), а уравнение (4), (15) — к виду (7). Семейства уравнений (6), (7) неэквивалентны друг другу, поскольку для первого $I_1 \neq 0$, а для второго $I_1 = 0$. Необходимые условия эквивалентности уравнениям шестого типа с $I_1 \neq 0$ и $I_1 = 0$ получены в следующих пунктах с использованием инвариантов I_0, I_1, I_2, $\mathcal{D}_2^n I_2$, $n \in N$. Нетрудно видеть, что остальные производные инварианты (13) могут быть выражены из тривиальных соотношений (12) и их дифференциальных следствий в терминах инвариантов I_1, I_2, $\mathcal{D}_2^n I_2$, $n \in N$.

3. Уравнения шестого типа с $I_1 \neq 0$

Уравнение (6) имеет следующие инварианты (здесь $w' = dw/dz$)

$$I_1 = 5(1 + w^3 F),$$

$$I_2 = \frac{w^{10}(4F'^2 - 3FF'')}{27(1+w^3F)^2} - \frac{w^3 F}{36(1+w^3F)^2}(184w^6F^2 + 389w^3F + 196),$$

$$I_{22} = -\frac{w^{12}(9F^2F''' - 45FF'F'' + 40F'^3)}{27\sqrt{3}F(1+w^3F)^{5/2}}, \qquad I_0 = -\frac{w(wF' + 3w'F)}{\sqrt{3}F(1+w^3F)^{3/2}}.$$

Сравнивая инварианты I_1, I_2, I_{22}, можно заметить, что для уравнения (1) шестого типа с $I_1 \neq 0$ алгебраические инварианты

$$\hat{J}_1 = \frac{3^9 \cdot 5^4}{(I_1-5)^{10}} \left(I_1^2 I_2 + (I_1-5)\left(\frac{46}{45}I_1^2 + \frac{7}{12}I_1 - \frac{5}{4}\right)\right)^3, \quad \hat{J}_2 = \frac{3^7 \cdot 5^3 I_1^5 I_{22}^2}{(I_1-5)^8} \tag{16}$$

зависят от одного аргумента. В частности, для ОДУ (6) они равны

$$\hat{J}_1 = -\frac{(3FF'' - 4F'^2)^3}{F^{10}}, \qquad \hat{J}_2 = \frac{(9F^2F''' - 45FF'F'' + 40F'^3)^2}{F^{10}}.$$

Условие $\hat{J}_2 = 0$ совпадает с условием существования у уравнения точечной симметрии. А именно, ОДУ (6) допускает оператор симметрии X в случаях:

$$1) F(z) = \mathrm{const}, \qquad X = \partial_z;$$

$$2) F(z) = \frac{c}{z^{3/2}}, \qquad c = \mathrm{const} \neq 0, \qquad X = 2z\partial_z + w\partial_w.$$

В случае $I_1 \neq 0$ при получении необходимых условий эквивалентности вместо инвариантов I_0, I_1, I_2, I_{22} целесообразно применять базисные инварианты I_0, I_1 и инварианты (16). Если для данного уравнения $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2 \neq \mathrm{const}$, то исключение общего аргумента из выражений для $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ дает соотношение на $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, являющееся инвариантной характеристикой этого уравнения. Два уравнения с отличающимся соотношением на $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ не могут быть эквивалентными.

В [25, §2.4.2] проинтегрированы некоторые уравнения (4) шестого типа с $I_1 \neq 0$. Все они сводятся к двум ОДУ, необходимые условия эквивалентности которым сформулированы в следующих утверждениях.

Теорема 2. *Для того чтобы уравнение (1) было эквивалентно ОДУ*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{A_1}{w^3} + A_2, \qquad A_1, A_2 = \mathrm{const} \neq 0, \tag{17}$$

необходимо, чтобы оно являлось уравнением шестого типа, и его инварианты удовлетворяли условиям

$$I_1 \neq 0, \qquad \hat{J}_1 = 0, \qquad \hat{J}_2 = 0. \tag{18}$$

Если уравнения (1), (17) эквивалентны, то связывающая их замена переменных (2) находится из соотношений

$$I_1 = 5 + \frac{5A_2w^3}{4A_1}, \qquad I_0 = -\frac{4\sqrt{3}A_1ww'}{(-(4A_1 + A_2w^3))^{3/2}}. \tag{19}$$

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (1) было эквивалентно ОДУ*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{A_1}{w^3} + \frac{A_2}{z^{3/2}}, \qquad A_1, A_2 = \mathrm{const} \neq 0, \tag{20}$$

необходимо, чтобы оно являлось уравнением шестого типа, и его инварианты удовлетворяли условиям

$$I_1 \neq 0, \qquad \hat{J}_1 = \mathrm{const} \neq 0, \qquad \hat{J}_2 = 0. \tag{21}$$

Если уравнения (1), (20) эквивалентны, то связывающая их замена переменных (2) и связь между параметрами уравнений находятся из соотношений

$$\hat{J}_1 = \frac{729A_1}{16A_2^4}, \qquad I_1 = 5 + \frac{5A_2w^3}{4A_1z^{3/2}}, \qquad I_0 = \frac{2\sqrt{3}A_1z^{5/4}w(w - 2zw')}{(-(4A_1z^{3/2} + A_2w^3))^{3/2}}. \tag{22}$$

Если уравнения (1) и (17) (или (20)) эквивалентны, то их инварианты совпадают и, значит, удовлетворяют одним и тем же соотношениям. Поэтому доказательство этих утверждений состоит в непосредственном вычислении инвариантов I_0, I_1 и (16) уравнений (17) и (20).

4. Уравнения шестого типа с $I_1 = 0$

Уравнение (7) имеет следующие инварианты

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{11}{2} + \frac{f}{108w^2}, \quad \mathcal{D}_2^n I_2 = \frac{f^{(n)}}{(-2)^n 108 w^{2+n/2}}, \quad n \in N, \quad I_0 = -\frac{w'}{6w^{3/2}}.$$

Можно заметить, что для уравнения (1) шестого типа с $I_1 = 0$, $I_2 \neq 11/2$ алгебраические инварианты

$$\tilde{J}_1 = \frac{I_{22}^4}{27(2I_2 - 11)^5}, \qquad \tilde{J}_2 = \frac{I_{222}^2}{27(2I_2 - 11)^3} \tag{23}$$

зависят от одного аргумента. Таким образом, для таких уравнений шестого типа при получении необходимых условий эквивалентности наряду с базисными инвариантами (10) полезно применять инварианты (23). В частности, для ОДУ (7) с $f(z) \neq 0$ они равны

$$\tilde{J}_1 = \frac{(f')^4}{128f^5}, \qquad \tilde{J}_2 = \frac{(f'')^2}{32f^3}.$$

Уравнение (7) допускает операторы симметрии, если $2(2I_2 - 11)I_{222} - 5I_{22}^2 = 0$, т.е. в случаях:

$$\begin{aligned}
&1) f(z) = 0, \qquad X_1 = \partial_z, \qquad X_2 = z\partial_z - 2w\partial_w;\\
&2) f(z) = \mathrm{const} \neq 0, \qquad X = \partial_z;\\
&3) f(z) = \frac{c}{z^4}, \qquad c = \mathrm{const} \neq 0, \qquad X = z\partial_z - 2w\partial_w.
\end{aligned}$$

Рассмотренные в [25, §2.3.1, 2.4.2, 2.9.1] уравнения (4) шестого типа с $I_1 = 0$ сводятся к ОДУ (3), двум ОДУ, для которых в [25, §2.3.1] приведено общее решение, и к уравнению, допускающему понижение порядка. Критерий эквивалентности первому уравнению Пенлеве доказывается в следующем пункте, а необходимые условия эквивалентности трем другим уравнениям из [25] сформулированы в следующих утверждениях.

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение (1) было эквивалентно ОДУ*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = Aw^2, \qquad A = \mathrm{const} \neq 0, \tag{24}$$

необходимо, чтобы оно являлось уравнением шестого типа, и его инварианты удовлетворяли условиям

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = \frac{11}{2}. \tag{25}$$

Если уравнения (1), (24) эквивалентны, то связывающая их замена переменных (2) находится из соотношения

$$I_0 = -\frac{w'}{\sqrt{6A}w^{3/2}}. \tag{26}$$

Теорема 5. *Для того чтобы уравнение (1) было эквивалентно ОДУ*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{Aw^2}{z^{5/2}}, \qquad A = \mathrm{const} \neq 0, \tag{27}$$

необходимо, чтобы оно являлось уравнением шестого типа, и его инварианты удовлетворяли условиям

$$I_1 = 0, \qquad I_2 \neq \frac{11}{2}, \qquad \tilde{J}_1 = 0, \qquad \tilde{J}_2 = 0. \tag{28}$$

Если уравнения (1), (27) эквивалентны, то связывающая их замена переменных (2) находится из соотношений

$$I_2 = \frac{11}{2} - \frac{z}{18(\sqrt{z} + 8Aw)^2}, \qquad I_0 = \frac{8Az^{1/4}(w - 2zw')}{\sqrt{3}(\sqrt{z} + 8Aw)^{3/2}}. \tag{29}$$

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение (1) было эквивалентно ОДУ*

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{3}{25}\left(\frac{w^2}{z^3} + \frac{2cw}{z^2}\right), \qquad c = \mathrm{const} \neq \pm 1, \tag{30}$$

необходимо, чтобы оно являлось уравнением шестого типа, и его инварианты удовлетворяли условиям

$$I_1 = 0, \quad I_2 \neq \frac{11}{2}, \quad \tilde{J}_1 = \mathrm{const} \neq 0, \quad \tilde{J}_2 = \mathrm{const} \neq 0, \quad \frac{\tilde{J}_2}{\tilde{J}_1} = \frac{25}{4}. \tag{31}$$

Если уравнения (1), (30) эквивалентны, то связывающая их замена переменных (2) и связь между параметрами уравнений находятся из соотношений

$$\begin{aligned} &\tilde{J}_1 = \frac{4}{3(1 - c^2)}, \qquad I_2 = \frac{11}{2} + \frac{(1 - c^2)z^2}{18((c + 1)z + w)^2}, \\ &I_0 = \frac{\sqrt{z}(3w - 2(c + 1)z - 5zw')}{3\sqrt{2}((c + 1)z + w)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{32}$$

5. Критерий эквивалентности первому уравнению Пенлеве

Инвариантная характеристика (необходимые условия эквивалентности) в терминах инвариантов (10), (13) для уравнения (3) получена в [10]. Здесь установлена достаточность этих условий.

Теорема 7. *Уравнение (1) эквивалентно первому уравнению Пенлеве тогда и только тогда, когда оно является уравнением шестого типа, и его инварианты удовлетворяют условиям*

$$I_1 = 1, \qquad I_{222} = 0, \qquad \frac{\partial(I_2, I_{22})}{\partial(x,y)} \neq 0. \tag{33}$$

Замена переменных (2), преобразующая его в уравнение (3), находится из соотношений

$$w^5 = \frac{1}{6^6 I_{22}^2}, \qquad \frac{z}{w^2} = 54(2I_2 - 11). \tag{34}$$

Доказательство. Для доказательства необходимости найдем соотношения, которым удовлетворяют инварианты уравнения (3), и, значит, должны удовлетворять инварианты уравнения (1), эквивалентного ОДУ (3). Базисные алгебраические инварианты (10), операторы (11) и инварианты $\mathcal{D}_2^n I_2$, $n = 1, 2$ для ОДУ (3) равны

$$\begin{gathered} I_1 = 0, \qquad I_2 = \frac{11}{2} + \frac{z}{108w^2}, \qquad \mathcal{D}_1 = -3w\partial_w, \qquad \mathcal{D}_2 = -\frac{1}{2\sqrt{w}}\partial_z, \\ I_{22} = -\frac{1}{216w^{5/2}}, \qquad I_{222} = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Инварианты (35) удовлетворяют первым двум соотношениям (33) и условию $\partial(I_2, I_{22})/\partial(z,w) \neq 0$, которое инвариантно относительно невырожденной замены переменных. Выражения для I_2, I_{22} можно разрешить относительно w^5, zw^{-2}, что дает (34).

Для доказательства достаточности покажем, что при выполнении для уравнения (1) условий (33) замена переменных, определяемая из (34), преобразует его в уравнение (3). Дважды дифференцируя (34), для производных w по z получим выражения

$$\begin{gathered} w\frac{dw}{dz} = \frac{\Omega}{54(2(2I_2 - 11)\Omega - 5I_{22})}, \\ w^3\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{4(11 - 2I_2)\Omega^3 + 5I_{22}\Omega^2 + 25I_{22}^2 d\Omega/dI_2}{18^3(2(2I_2 - 11)\Omega - 5I_{22})^3}, \end{gathered} \tag{36}$$

где

$$\Omega = \frac{dI_{22}}{dI_2} = \frac{\partial_x I_{22} + y'\partial_y I_{22}}{\partial_x I_2 + y'\partial_y I_2}, \qquad \frac{d\Omega}{dI_2} = \frac{\partial_x \Omega + y'\partial_y \Omega + y''\partial_{y'}\Omega}{\partial_x I_2 + y'\partial_y I_2}. \tag{37}$$

Уравнение (3) представимо в виде

$$w^3\frac{d^2w}{dz^2} = w^5\left(6 + \frac{z}{w^2}\right).$$

Подстановка (34), (36) превращает его в

$$50I_{22}^4\frac{d\Omega}{dI_2} + 8(11 - 2I_2)I_{22}^2\Omega^3 + 10I_{22}^3\Omega^2 + 3(49 - 9I_2)(2(2I_2 - 11)\Omega - 5I_{22})^3 = 0. \tag{38}$$

Из равенств $I_{1j} = \mathcal{D}_1 I_j$, $I_{2j} = \mathcal{D}_2 I_j$, где в данном случае $I_j = I_2$ и $I_j = I_{22}$, а $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ определены в (11), можно выразить производные

$$\partial_x I_j = \frac{1}{3}(M_2 I_{1j} - M_1 I_{2j}), \qquad \partial_y I_j = \frac{1}{3}(M_4 I_{1j} - M_3 I_{2j}), \tag{39}$$

$$M_1 = \beta_1\sqrt{j_3}, \quad M_2 = \frac{15\beta_1 e_0}{j_3(I_1 - 5)}, \quad M_3 = \frac{\beta_2}{\beta_1}M_1, \quad M_4 = \frac{\beta_2}{\beta_1}M_2 - \frac{3\beta_1}{M_1^2}. \tag{40}$$

Второе выражение (37) зависит также от производных

$$\begin{aligned}
&\partial_x^2 I_j = \tfrac{1}{9}\left(M_2^2 I_{11j} - M_1 M_2 (I_{12j} + I_{21j}) + M_1^2 I_{22j}\right) + \tfrac{1}{3}\left(M_{2x} I_{1j} - M_{1x} I_{2j}\right),\\
&\partial_x \partial_y I_j = \tfrac{1}{9}\left(M_2(M_4 I_{11j} - M_3 I_{21j}) + M_1(M_3 I_{22j} - M_4 I_{12j})\right) +\\
&\qquad + \tfrac{1}{3}\left(M_{2y} I_{1j} - M_{1y} I_{2j}\right),\\
&\partial_y^2 I_j = \tfrac{1}{9}\left(M_4^2 I_{11j} - M_3 M_4 (I_{12j} + I_{21j}) + M_3^2 I_{22j}\right) + \tfrac{1}{3}\left(M_{4y} I_{1j} - M_{3y} I_{2j}\right).
\end{aligned} \tag{41}$$

Производные первых двух функций (40) равны

$$\begin{aligned}
M_{1x} &= \left(\frac{I_1 - 5}{10} M_2 + \frac{2\gamma_{10}}{5\beta_1} - P\frac{\beta_2}{\beta_1} + Q\right) M_1,\\
M_{1y} &= \left(\frac{I_1 - 5}{10} M_4 + \frac{2\gamma_{20} - 3\gamma_{11}}{5\beta_1} + \frac{3\beta_2\gamma_{10}}{5\beta_1^2} - Q\frac{\beta_2}{\beta_1} + R\right) M_1,\\
M_{2x} &= (15 - 2I_1)\frac{M_2^2}{15} + \frac{5M_1^2(49(5 - I_1) - 45I_2)}{3(I_1 - 5)^2} + \left(\frac{2\gamma_{10}}{5\beta_1} + Q\right) M_2 - PM_4,\\
M_{2y} &= (15 - 2I_1)\frac{M_2 M_4}{15} + \frac{5M_1 M_3}{3(I_1 - 5)^2}(49(5 - I_1) - 45I_2) +\\
&\quad + \left(\frac{\gamma_{20} + \gamma_{11}}{5\beta_1} - \frac{\beta_2\gamma_{10}}{5\beta_1^2} + R\right) M_2 + \left(\frac{\gamma_{10}}{5\beta_1} - Q\right) M_4,
\end{aligned}$$

а производные M_{3y}, M_{4y} вычисляются с помощью выражений для M_{1y}, M_{2y} и $\beta_{1y} = \gamma_{20} + R\beta_1 - Q\beta_2$, $\beta_{2y} = \gamma_{21} + S\beta_1 - R\beta_2$.

Подстановка величин (37), в которых производные инвариантов I_2, I_{22} вычислены с помощью (39), (41), а y'' заменена в силу (1), превращает (38) в равенство

$$\begin{aligned}
&\Lambda_0(M_2 + y'M_4)^3 + 3\Lambda_1(M_1 + y'M_3)(M_2 + y'M_4)^2 +\\
&\quad + 3\Lambda_2(M_1 + y'M_3)^2(M_2 + y'M_4) + \Lambda_3(M_1 + y'M_3)^3 = 0
\end{aligned} \tag{42}$$

с коэффициентами Λ_i, являющимися функциями инвариантов уравнения (1). Равенство (42) является условием того, что уравнения (1) и (3) связаны преобразованием, определяемым из (34). Остается показать, что Λ_i обращаются в нуль, если для инвариантов уравнения (1) выполнены соотношения (33).

Из тривиальных соотношений (12) и их следствий в терминах I_1, I_2, I_{22}, I_{222} можно выразить инварианты I_{12},

$$\begin{aligned}
&I_{112} = \frac{4}{25}(7I_1^2 + 45I_1 + 225)I_2 + \frac{I_1 - 5}{225}(92I_1^2 + 2217I_1 + 8910),\\
&I_{122} = \frac{3}{10}(3I_1 + 25)I_{22}, \quad I_{1122} = \frac{9}{20}(3I_1^2 + 24I_1 + 125)I_{22},\\
&I_{212} = \frac{2}{5}(2I_1 + 15)I_{22}, \quad I_{2122} = \frac{3}{10}(3I_1 + 25)I_{222}, \quad I_{1222} = (I_1 + 9)I_{222}.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в Λ_i, получим

$$\begin{aligned}
\Lambda_0 &= 2I_1 I_{22}^3[4I_1^2(9I_2 - 49)K_0^3 - 81I_1(33I_1 + 875)I_{22}^2 K_0\\
&\qquad + 243(3I_1 + 25)(23I_1^2 + 8460I_1 + 56125)I_{22}^2],\\
\Lambda_1 &= 30I_1 I_{22}^2[6I_1(9I_2 - 49)K_0^2 K_1 - 243(9I_1 + 175)I_{22}^2 K_1\\
&\qquad + (13K_2 - 10(17I_1 + 105)K_0 - 375(343I_1 + 2245))I_{22}^2 I_{222}],\\
\Lambda_2 &= 225I_{22}[18I_1(9I_2 - 49)K_0 K_1^2 - 162(3I_1 + 25)I_{22}^2 I_{222} K_1\\
&\qquad - 45(431I_1 + 3525)I_{22}^4 I_{222} + 2I_{22}^2(I_{222}^2 + 45I_{22}I_{2222})K_2],\\
\Lambda_3 &= 15^3[27(9I_2 - 49)K_1^3 + 36I_{22}^2 I_{222}^2 K_1 + 90I_{22}^4(46I_{222}^2 - 45I_{22}I_{2222})\\
&\qquad + 5I_{22}^4(I_1 - 5)^{-2}(49(I_1 - 5) + 45I_2)(135(3I_1 + 25)I_{22}^2 - 2I_{222}K_2)],
\end{aligned}$$

где $K_0 = 9I_2 + 23I_1 + 1073$, $K_1 = 2(2I_2 - 11)I_{222} - 5I_{22}^2$, $K_2 = 45(2I_1 + 15)\times$ $\times(2I_2 - 11) + I_1(46I_1 + 2245)$. Можно показать, что эти величины обращаются в нуль тогда и только тогда, когда $I_1 = 0$, $I_{222} = 0$, $I_{2222} = 0$, что и требовалось доказать.

6. Примеры эквивалентных уравнений

Помимо уравнений (17), (20), (24), (27) в [25] проинтегрированы и другие ОДУ (4) шестого типа эквивалентные этим четырем уравнениям. В следующих двух примерах показано, как с помощью инвариантов устанавливается эквивалентность уравнений и находится связывающее их преобразование (2). В третьем примере установлено, что полученное в [20] обобщенное преобразование Сундмана с точностью до точечных замен переменных можно рассматривать как автопреобразование первого уравнения Пенлеве.

Пример 1. В [25] приведено общее решение для ОДУ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{x^3}, \qquad A_1, A_2 = \text{const} \neq 0, \tag{43}$$

имеющего инварианты

$$I_1 = 5 + \frac{5A_2y^3}{4A_1x^3}, \quad I_0 = \frac{4\sqrt{3}A_1x^{7/2}y(y - xy')}{(-(4A_1x^3 + A_2y^3))^{3/2}}, \quad \hat{J}_1 = 0, \quad \hat{J}_2 = 0, \tag{44}$$

удовлетворяющие условиям (18) теоремы 2. Приравнивая инварианты I_1, задаваемые (19), (44), получим связывающее уравнения (43) и (17) преобразование в виде

$$z = \xi(x, y), \qquad w = \frac{y}{x}, \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{xy' - y}{x^2(\xi_x + y'\xi_y)}. \tag{45}$$

Приравнивая инварианты I_0 и подставляя (45), для определения функции ξ получим уравнения $\xi_x = x^{-2}$, $\xi_y = 0$. Их решением является $\xi = -1/x$. Нетрудно проверить, что замена переменных $z = -1/x$, $w = y/x$ преобразует (43) в уравнение (17).

Пример 2. Также в [25] проинтегрировано уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Ay^2}{x^2} - \frac{6y}{25x^2}, \qquad A = \text{const} \neq 0, \tag{46}$$

инварианты которого равны

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = \frac{11}{2}, \qquad I_0 = \frac{2y - 5xy'}{5\sqrt{6A}y^{3/2}}. \tag{47}$$

Сравнивая (47) с (25), (28), (31), можно заключить, что ОДУ (46) удовлетворяет условиям теоремы 4 и является эквивалентным уравнению (24). Связывающее (46) и (24) преобразование (2) находится из условия равенства дифференциальных инвариантов I_0 этих уравнений. Подставляя в это равенство

$$z = \xi(x, y), \qquad w = \eta(x, y), \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{\eta_x + y'\eta_y}{\xi_x + y'\xi_y}$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y', для определения ξ, η получим систему уравнений

$$5\sqrt{y}\eta_x + 2\eta^{3/2}\xi_x = 0, \qquad 5y^{3/2}\eta_y + \eta^{3/2}(2y\xi_y - 5x\xi_x) = 0, \qquad \xi_y = 0.$$

Одним из ее решений является $\xi = 5x^{1/5}$, $\eta = yx^{-2/5}$ и, следовательно, ОДУ (46) преобразуется в (24) заменой переменных $z = 5x^{1/5}$, $w = yx^{-2/5}$.

Пример 3. В [20] показано, что обобщенное уравнение Эмдена-Фаулера

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c_0y^2}{(x-k)^5} + \frac{c_1}{(x-k)^4} + \frac{c_2}{(x-k)^3}, \quad c_0, c_1, c_2, k = \text{const}, \quad c_0, c_1 \neq 0 \tag{48}$$

обобщенным преобразованием Сундмана

$$Z = -\frac{(c_0c_1)^{1/5}}{5^{4/5}}\left(\frac{1}{x-k}+\frac{c_2}{c_1}\right), \quad U(Z) = \frac{(5c_0c_1)^{4/5}}{6c_1}\int\frac{y(x)}{(x-k)^3}dx, \tag{49}$$

где $dU(Z)/dZ = W(Z)$, связано с первым уравнением Пенлеве

$$\frac{d^2W}{dZ^2} = 6W^2 - \frac{625}{6}Z.$$

Последнее уравнение растяжением $Z = -5^{-4/5}6^{1/5}z$, $W = 5^{8/5}6^{-2/5}w$ приводится к стандартному виду (3). ОДУ (48) является уравнением шестого типа. Его алгебраические инварианты

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{11}{2} + \frac{(x-k)(c_1+c_2(x-k))}{18c_0y^2}, \quad I_{22} = \frac{c_1(x-k)^{5/2}}{(6c_0)^{3/2}y^{5/2}}, \quad I_{222} = 0$$

удовлетворяют условиям (33) теоремы 7. Следовательно, уравнение (48) эквивалентно первому уравнению Пенлеве. Соответствующее преобразование

$$z = \frac{(c_0c_1)^{1/5}}{6^{1/5}}\left(\frac{1}{x-k}+\frac{c_2}{c_1}\right), \qquad w = \frac{c_0^{3/5}y}{6^{3/5}c_1^{2/5}(x-k)} \tag{50}$$

находится из соотношений (34), которые в данном случае принимают вид

$$w^5 = \frac{c_0^3y^5}{216c_1^2(x-k)^5}, \qquad \frac{z}{w^2} = \frac{6(x-k)(c_1+c_2(x-k))}{c_0y^2}.$$

Таким образом, уравнение (48) связано с первым уравнением Пенлеве не только нелокальным преобразованием (49), но и более простой точечной заменой переменных (50).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Liouville *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications* // J. École Polytechnique 1889. V. 59. P. 7–76.
2. A. Tresse *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* // Acta Math. 1894. V. 18, №1. P. 1–88.
3. É. Cartan *Sur les variétés à connexion projective* // Bull. Soc. Math. France 1924. V. 52. P. 205–241.
4. G. Thomsen *Über die topologischen Invarianten der Differentialgleichung* $y'' = f(x,y)y'^3 + g(x,y)y'^2 + h(x,y)y' + k(x,y)$ // Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. 1930. V. 7. P. 301–328.
5. V.V. Dmitrieva, R.A. Sharipov *On the point transformations for the second order differential equations* // e-print arXiv: math/9703003 (1997).
6. R.A. Sharipov *On the point transformations for the equations* $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // e-print arXiv: solv-int/9706003 (1997); см. также Вестник БашГУ. 1998. Т. 1, №1. С. 5–8.
7. R.A. Sharipov *Effective procedure of point classification for the equations* $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$ // e-print arXiv: math.DG/9802027 (1998).
8. V.A. Yumaguzhin *Differential invariants of second order ODEs. I* // Acta Appl. Math. 2010. V. 109. P. 283–313.
9. Морозов О.И. *Проблема точечной эквивалентности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. II* // Научный вестник МГТУ ГА 2010. №157. С. 98–104.
10. Yu.Yu. Bagderina *Invariants of a family of scalar second-order ordinary differential equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 2013. V. 46. 295201 (36pp).
11. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ОНТИ, ГНТИУ, 1939.
12. P. Painlevé *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme* // Acta Math. 1902. V. 25. P. 1–86.

13. B. Gambier *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes* // Acta Math. 1910. V. 33. P. 1–55.
14. N. Kamran, K.G. Lamb, W.F. Shadwick *The local equivalence problem for $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ and the Painlevé transcendents* // J. Diff. Geom. 1985. V. 22. P. 139–150.
15. N. Kamran, W.F. Shadwick *A differential geometric characterization of the first Painlevé transcendent* // Math. Ann. 1987. V. 279. P. 117–123.
16. Дмитриева В.В. *О классификации уравнений Пенлеве-I и Пенлеве-II относительно точечных преобразований общего вида* // Вестник БашГУ. 1998. Т. 1, №1. С. 9–11.
17. A.V. Bocharov, V.V. Sokolov, S.I. Svinolupov *On some equivalence problems for differential equations* // Preprint ESI 54, International Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics, Vienna, 1993.
18. R. Dridi *On the geometry of the first and second Painlevé equations* // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. 125201 (9pp).
19. Картак В.В. *Явное решение проблемы эквивалентности для некоторых уравнений Пенлеве* // УМЖ 2009. Т. 1, №3. С. 46–56.
20. M. Euler, N. Euler, A. Strömberg, E. Âström *Transformation between a generalized Emden-Fowler equation and the first Painlevé transcendent* // Math. Meth. Appl. Sci. 2007. V. 30, №16. P. 2121–2124.
21. M.V. Babich, L.A. Bordag *Projective differential geometrical structure of the Painlevé equations* // J. Differ. Equations 1999. V. 157, №2. P. 452–485.
22. Багдерина Ю.Ю. *Эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка уравнениям Пенлеве* // ТМФ 2015. Т. 182. №2. С. 256–276.
23. J. Hietarinta, V. Dryuma *Is my ODE a Painlevé equation in disguise?* // J. Nonlin. Math. Phys. 2002. V. 9, Suppl. 1. P. 67–74.
24. Yu.Yu. Bagderina, N.N. Tarkhanov *Solution of the equivalence problem for the third Painlevé equation* // J. Math. Phys. 2015. V. 56, №1. 013507. (15pp).
25. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Физматлит, 2001.
26. R. Milson, F. Valiquette *Point equivalence of second-order ODEs: maximal invariant classification order* // J. Symb. Comput. 2015. V. 67. P. 16–41.

Юлия Юрьевна Багдерина,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yulya@mail.rb.ru