ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 13-18.

УДК 517.984.54

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОЛИНОМА В НЕРАСПАДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО НУЛЕВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

А.М. АХТЯМОВ, Р.Р. КУМУШБАЕВ

Аннотация. В работе рассматривается задача восстановления коэффициентов полинома в спектральных задачах с нераспадающимися краевыми условиями по одному кратному нулевому собственному значению и по n ненулевым попарно-различным собственным значениям. Доказана теорема единственности решения этой обратной задачи.

Ключевые слова: собственные значения, краевые условия, характеристический определитель.

Mathematics Subject Classification: 35L75, 65A18, 34K29

1. Введение

При решении прикладных задач математической физики возникают спектральные задачи с полиномиальным вхождением параметра в краевые условия [1]–[4], а также задачи с оператором в краевых условиях [5]. В соответствующих обратных задачах по известным спектрам восстанавливаются неизвестные коэффициенты в уравнении и краевых условиях [6]–[13]. В [14] идентифицировался полином в распадающихся краевых условиях по конечному набору различных собственных значений. В [15] восстанавливался полином степени m в нераспадающихся краевых условиях по $m+1$ различным собственным значениям. Однако, информация о кратности собственных значений в [15] не использовалась. В настоящей статье используется информация о кратности нулевого собственного значения. В этом случае для идентификации полинома используется меньшее число собственных значений ($< m$).

2. Постановка задачи

Рассмотрим спектральную задачу следующего вида:

$$y'' + p_1(x,\lambda)y' + p_2(x,\lambda)y = 0, \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}(\lambda)y'(0) + a_{i2}(\lambda)y(0) + a_{i3}(\lambda)y'(1) + a_{i4}(\lambda)y(1) = 0, \tag{2}$$

где λ — спектральный параметр; $i = 1,2$; $x \in [0,1]$; $p_1(x,\lambda)$, $p_2(x,\lambda)$ – непрерывно дифференцируемые функции по x и λ; a_{ij} $(i = 1,2,\ j = 1,2,3,4)$ – непрерывно дифференцируемые

A.M. Akhtyamov, R.R. Kumushbaev, Identification of a polynomial in nonseparated boundary conditions in the case of a multiple zero eigenvalue.

Работа поддержана Советом по грантам Президента РФ (грант НШ-1096.2014.1), РФФИ (гранты 14-01-97010-р_поволжье_а, 15-01-01095_а), Министерством образования науки Республики Казахстан (гранты МОН РК 2217/ГФЗ, МОН РК 2989/ГФЗ).

Поступила 24 августа 2014г.

функции по λ и

$$\sum_{j=1}^{4} |a_{ij}(\lambda)| \neq 0, \qquad \text{при } i = 1, 2 \text{ и любых } \lambda. \tag{3}$$

В настоящей статье решается следующая обратная задача. Пусть одна из функций $a_{2j}(\lambda)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, которую мы обозначим через $a_{2p}(\lambda)$, представляет собой полином следующего вида:

$$a_{2p}(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} a_{2ps}\lambda^s.$$

Известны $n + 1$ собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ задачи (1) – (2). Одно из них $\lambda_0 = 0$ кратности r_0, причем $m = n + r_0 - 1$ – степень полинома $a_{2p}(\lambda)$. Требуется восстановить полином $a_{2p}(\lambda)$.

3. Теорема единственности

Обозначим через $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ линейно независимые решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее в точке $x = 0$ условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \tag{4}$$

Собственные значения λ_k являются корнями характеристического определителя [16]

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(\lambda)\, A_{2j}(\lambda), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&A_{21}(\lambda) = a_{12}(\lambda) + a_{13}(\lambda)\, y_1'(1, \lambda) + a_{14}(\lambda) y_1(1, \lambda),\\
&A_{22}(\lambda) = -a_{11}(\lambda) - a_{13}(\lambda) y_2'(1, \lambda) - a_{14}(\lambda) y_2(1, \lambda),\\
&A_{23}(\lambda) = a_{12}(\lambda) y_2'(1, \lambda) + a_{14}(\lambda)\, W(1, \lambda) - a_{11}(\lambda) y_1'(1, \lambda),\\
&A_{24}(\lambda) = a_{12}(\lambda) y_2(1, \lambda) - a_{11}(\lambda) y_1(1, \lambda) - a_{13}(\lambda)\, W(1, \lambda),\\
&W(1, \lambda) = y_1(1, \lambda)\, y_2'(1, \lambda) - y_1'(1, \lambda)\, y_2(1, \lambda), \text{ при } k = 0, 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Если $p_1(x, \lambda) \equiv 0$, то из (4) и формулы Лиувилля для определителя Вронского [17, Гл. V, п. 17.1] следует, что $W(1, \lambda_k) = 1$.

Функция $A_{2p}(\lambda)$, определенная в (5), где p выбрано выше, выражается через известные коэффициенты a_{2j} и известные функции $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$.

Т е о р е м а. *Полином $a_{2p}(\lambda)$ степени m из краевого условия (2) однозначно восстанавливается по одному нулевому собственному значению $\lambda_0 = 0$ кратности r_0 и по $n = m - r_0 + 1$ ненулевым попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, если $A_{2p}(\lambda_k) \neq 0$, $k = 0, 1, ..., n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при $A_{2p}(\lambda_k) \neq 0$, то полином $a_{2p}(\lambda)$ восстанавливается однозначно, а при $A_{2p}(\lambda_k) = 0$ однозначное восстановление полинома невозможно.

Пусть $A_{2p}(\lambda_k) \neq 0$, то из равенств $\Delta(\lambda_k) = 0$ и (4) следует, что

$$a_{2p}(\lambda_k) = -\sum_{j=1,\ j\neq p}^{4} a_{2j}(\lambda_k)\, \frac{A_{2j}(\lambda_k)}{A_{2p}(\lambda_k)}, \qquad k = 0, 1, ..., n. \tag{6}$$

Подставляя в (4) известные собственные значения, получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{2ps}, где $s = 0, ..., m$.

$$a_{2p0} + a_{2p1}\lambda_k^1 + ... + a_{2pm}\lambda_k^m = -\sum_{j=1,\ j\neq p}^{4} a_{2j}(\lambda_k)\, \frac{A_{2j}(\lambda_k)}{A_{2p}(\lambda_k)}, \tag{7}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Система линейных алгебраических уравнений (7) имеет $m + 1$ неизвестных и $n + 1 = (m - r_0 + 2)$ уравнений. Однозначное определение коэффициентов полинома через данную систему уравнений невозможно, так как количество неизвестных в системе уравнений больше количества уравнений. Однако, по условию задачи $\lambda_0 = 0$ имеет кратность r_0.

Из определения кратности корня следует, что

$$\begin{cases} \Delta(\lambda_0) = 0, \\ \Delta'(\lambda_0) = 0, \\ \quad \ldots \\ \Delta^{(r_0-1)}(\lambda_0) = 0, \\ \Delta^{(r_0)}(\lambda_0) \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из (5) и (8) получаем

$$\begin{cases} \Delta(\lambda_0) = \sum\limits_{j=1}^{4} a_{2j}(\lambda_0)\, A_{2j}(\lambda_0), \\ \Delta'(\lambda_0) = \sum\limits_{j=1}^{4} \left(a'_{2j}(\lambda_0)\, A_{2j}(\lambda_0) + a_{2j}(\lambda_0) A'_{2j}(\lambda_0)\right), \\ \quad \ldots \\ \Delta^{(r_0-1)}(\lambda_0) = \sum\limits_{j=1}^{4} \left(C^0_{r_0-1} a^{(r_0-1)}_{2j}(\lambda_0)\, A_{2j}(\lambda_0) + \ldots + C^{r_0-1}_{r_0-1} a_{2j}(\lambda_0) A^{(r_0-1)}_{2j}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Используя (9) и собственное значение $\lambda_0 = 0$, определим первые r_0 коэффициентов полинома $a_{2ps}(\lambda)$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$a_{2pi} = \frac{-\sum\limits_{j=1,\, j\neq p}^{4} \left(C^0_i a^{(i)}_{2j}(0) A_{2j}(0) + C^1_i a^{(i-1)}_{2j}(0) A'_{2j}(0) + \cdots + C^i_i a_{2j}(0) A^{(i)}_{2j}(0)\right)}{A_{2p}(0)} - \\ - \frac{\left(C^1_i a_{2,p,i-1} A'_{2p}(0) + C^2_i a_{2,p,i-2} A''_{2p}(0) + \cdots + C^i_i a_{2p0} A^{(i)}_{2j}(0)\right)}{A_{2p}(0)}, \tag{10}$$

где $i = 0, 1, \ldots, r_0 - 1$.

Следовательно, восстанавливаемый полином имеет следующий вид:

$$a_{2p}(\lambda) = a_{2p0} + a_{2p1}\lambda + \ldots + a_{2\,p\,r_0-1}\lambda^{r_0-1} + \ldots + a_{2pm}\lambda^m,$$

где $a_{2p0}, \ldots, a_{2\,p\,r_0-1}$ находятся из рекуррентных соотношений (10), а оставшиеся $a_{2pr_0}, \ldots, a_{2pm}$ не известны. Восстановим их с помощью остальных $n = (m - r_0 + 1)$ известных ненулевых попарно-различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ задачи (1) – (2).

Обозначим известную часть полинома $a_{2p}(\lambda)$ следующим образом:

$$V(\lambda) := a_{2p0} + a_{2p1}\lambda + \ldots + a_{2\,p\,r_0-1}\lambda^{(r_0-1)},$$

тогда система уравнений (7) имеет следующий вид:

$$a_{2pr_0}\lambda_k^{r_0} + \ldots + a_{2pm}\lambda_k^m = -\sum_{j=1,\, j\neq p}^{4} a_{2j}(\lambda_k)\, \frac{A_{2j}(\lambda_k)}{A_{2p}(\lambda_k)} - V(\lambda_k), \tag{11}$$

где $A_{2p}(\lambda_k) \neq 0$, а $k = 1, 2, ..., m - r_0 + 1$. По условию задачи собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{m-r_0+1}$ попарно различны и отличны от нуля, поэтому, разделив все уравнения системы (11) на $\lambda_k^{r_0}$, где $k = \overline{1, m - r_0 + 1}$, получим:

$$a_{2pr_0} + ... + a_{2pm}\lambda_k^{m-r_0} = -\sum_{j=1,\, j\neq p}^{4} a_{2j}(\lambda_k)\,\frac{A_{2j}(\lambda_k)}{A_{2p}(\lambda_k)\lambda_k^{r_0}} - \frac{V(\lambda_k)}{\lambda_k^{r_0}}. \tag{12}$$

Определителем системы (12) относительно неизвестных a_{2ps}, где $s = r_0, ..., m$, представляет собой определитель Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^m \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^m \\ & & \dots & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^m \end{vmatrix} = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \dots (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0;$$

поэтому система уравнений (12) имеет однозначное решение, которое можно найти, например по формулам Крамера:

$$a_{2pr_0} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, a_{2pm} = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{13}$$

где определители Δ_i $(i = 1, \; ..., \; n)$ представляют собой определитель Δ, в котором i-й столбец заменен на столбец из свободных членов системы уравнений (12). В случае $A_{2p}(\lambda_k) \neq 0$ теорема доказана. Решение задачи определения коэффициентов полинома дается с помощью формул (10) и (13).

Если полином $A_{2p}(\lambda)$ обращается в нуль в точках $\lambda = \lambda_k$, то из представления (5) следует, что равенство $\Delta(\lambda_k) = 0$ возможно при любом $a_{2p}(\lambda_k)$. Поэтому в случае $A_{2p}(\lambda_k) = 0$ полином $a_{2p}(\lambda_k)$ восстанавливается неоднозначно. Что и требовалось доказать.

4. Примеры

П р и м е р 1. Рассмотрим задачу следующего вида

$$-y'' = \lambda^2 y,$$

$$y'(0) + y(1) = 0,$$

$$y'(1) - a_{24}(\lambda)\, y(1) = 0,$$

где $a_{24}(\lambda) = a_{240} + a_{241}\lambda + a_{242}\lambda^2 + a_{243}\lambda^3 + a_{244}\lambda^4$. Необходимо восстановить коэффициенты полинома $a_{24}(\lambda)$ по трем собственным значениям: по собственному значению $\lambda_0 = 0$, которое имеет кратность, равную трем, и по двум собственном значениям $\lambda_1 = \pi, \lambda_1 = 2\pi$. Характеристический определитель данной задачи имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) = 1 + \lambda\sin(\lambda) - a_{24}(\lambda)\cos\lambda.$$

Так как $p = 4$, то $A_{24} = -\cos\lambda$ и $A_{24}(0) = 1 \neq 0$. Используя уравнение (10) и собственное значение $\lambda_0 = 0$, найдем первые три коэффициента полинома $a_{24}(\lambda)$:

$$a_{240} = 1, \qquad a_{241} = 0, \qquad a_{242} = \frac{3}{2}.$$

Тогда наш искомый полином примет следующий вид:

$$a_{24}(\lambda) = 1 + \frac{3}{2}\lambda^2 + a_{243}\lambda^3 + a_{244}\lambda^4.$$

Коэффициенты a_{243} и a_{244} можно восстановить по собственным значениям $\lambda_1 = \pi$ и $\lambda = 2\pi$ по формуле (13):

$$a_{243} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{4}{\pi^3} - \frac{9}{4\,\pi}, \qquad a_{244} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{\pi^4} + \frac{3}{4\pi^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$a_{24}(\lambda) = 1 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \left(\frac{4}{\pi^3} + \frac{9}{4\pi}\right)\lambda^3 + \left(\frac{2}{\pi^4} + \frac{3}{4\pi^2}\right)\lambda^4.$$

П р и м е р 2. Для спектральной задачи

$$-y'' = \lambda^2 y,$$
$$y'(0) - y'(1) = 0,$$
$$y(1) - a_{22}\, y(0) = 0.$$

Характеристический определитель данной задачи имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) = (1 + a_{22})\ (\cos\lambda - 1)\,.$$

Однозначное восстановление коэффициента a_{22} по собственному значению $\lambda = 0$ этой задачи невозможно, так как не выполняется условие $A_{22}(0) \neq 0$. Действительно, $A_{22}(0) = -a_{11} - a_{13}\, y_2'(0) - a_{14}\, y_2(0) = -1 + 1 \cdot \cos(0) - 0 \cdot \sin(0) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.
2. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. *О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №1. С. 115–119.
3. Ахтямов А.М. *О вычислении коэффициентов разложений по производным цепочкам одной спектральной задачи* // Математические заметки. 1992. Т. 51, вып. 6. С. 137–139.
4. Ахтямов А.М. *О коэффициентах разложений по собственным функциям краевых задач с параметром в граничных условиях* // Математические заметки. 2004. Т. 75, вып. 4. С. 493–506.
5. S.S. Mirzoev, A.R. Aliev, L.A. Rustamova *On the Boundary Value Problem with the Operator in Boundary Conditions for the Operator-Differential Equation of Second Order with Discontinous Coefficients* // Журн. матем. физ., анал., геом. 2013. Vol. 9, №. 2. P. 207–226.
6. I.M. Nabiev, A.Sh. Shukurov *Properties of the spectrum and uniqueness of reconstruction of Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition* // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. Vol. 40. Special Issue. P. 332–341.
7. Kh.R. Mamedov, F. Cetinkaya *Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition* // Bound. Value Probl. 2013, Article ID 183, 16 p., electronic only. http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661
8. Мамедов Х.Р. *Об одной краевой задаче со спектральным параметром в граничных условиях* // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, Вып. 2. С. 281–290.
9. E.S. Panakhov, H. Koyunbakan, Ic. Unal *Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition* // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. Vol. 18, №1, P. 173–180.
10. M.V. Chugunova *Inverse spectral problem for the Sturm-Liouville operator with eigenvalue parameter dependent boundary conditions* // Oper. Theory: Adv. Appl. 2001. Vol. 123 (Basel: Birkhauser) P. 187–194.
11. Ван Дер Мей К., Пивоварчик В.Н. *Обратная задача Штурма-Лиувилля с зависящими от спектрального параметра краевыми условиями* // Функц. анализ и его приложения. 2002. Т. 36, № 4. С. 74–77.
12. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. *Обратная задача для пучка операторов с нераспадающимися краевыми условиями* // Доклады Академии наук. 2009. Т. 425. № 1. С. 31–33.

13. G. Freiling, V. Yurko *Inverse problems for Sturm–Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter* // Inverse Problems. 2010. Vol. 26, 055003. 17 p.
14. Ахтямов А.М. *Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений* // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.
15. Ахтямов А.М., Кумушбаев Р.Р. *Идентификация полинома в нераспадающихся краевых условиях* // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, вып. 11. С. 1549–1552.
16. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969. 526 с.
17. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука. 1976. 576 с.

Ахтямов Азамат Мухтарович,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа, Россия
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН,
пр. Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: AkhtyamovAM@mail.ru

Кумушбаев Рустем Райманович,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: KumushbaevR@gmail.com