ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 3-12.

УДК 517.5

ПРАВИЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА ПРЯМОЙ

А.И. АБДУЛНАГИМОВ, А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются последовательности комплексных чисел первого порядка. Доказывается, что последовательность с ненулевой минимальной плотностью имеет подпоследовательность такой же плотности. Также доказывается, что вещественная последовательность с ненулевой минимальной плотностью имеет правильно распределенное подмножество. На этой основе доказывается результат о представлении целой функции экспоненциального типа с вещественными нулями в виде произведения двух функций такого же вида, одна из которых имеет регулярный рост. Как следствие, получен результат о полноте системы экспонент с вещественными показателями в пространстве функций, аналитических в ограниченной выпуклой области плоскости.

Ключевые слова: целая функция, регулярный рост, нулевое множество.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

В работе, в основном, изучаются вещественные последовательности первого порядка. Выясняются условия, при которых из такой последовательности можно выделить правильно распределенное множество заданной плотности. На этой основе доказывается результат о представлении целой функции экспоненциального типа с вещественными нулями в виде произведения двух функций такого же вида, одна из которых имеет регулярный рост. Как следствие, получен результат о полноте системы экспонент с вещественными показателями в пространстве функций, аналитических в ограниченной выпуклой области плоскости.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, пронумерованная в порядке неубывания модулей ее членов. При этом считаем, что она может быть кратной, т.е. некоторые λ_k могут совпадать между собой. Обозначим через $n(r,\Lambda)$ — число членов последовательности Λ, попавших в круг $|\lambda| < r$, $r > 0$. Нижней и верхней плотностью Λ называются соответственно величины:

$$\underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}, \qquad \overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Говорят, что последовательность Λ имеет плотность $n(\Lambda)$, если $\underline{n}(\Lambda) = \overline{n}(\Lambda) = n(\Lambda)$. Нетрудно заметить, что в этом случае верно также равенство

$$n(\Lambda) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|}.$$

A.I. Abdulnagimov, A.S. Krivosheyev, Properly distributed subsequence on the line.

Поступила 9 июля 2014 г.

Максимальной и минимальной плотностью последовательности Λ называются соответственно величины

$$\overline{n}_0(\Lambda)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r},\quad \underline{n}_0(\Lambda)=\underline{\lim_{\delta\to 0}}\,\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Лемма 1. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\overline{n}(\Lambda)<\infty$. Справедливы неравенства:*

$$\underline{n}_0(\Lambda)\leqslant\underline{n}(\Lambda)\leqslant\overline{n}(\Lambda)\leqslant\overline{n}_0(\Lambda). \tag{1}$$

Доказательство. Имеем:

$$\overline{n}_0(\Lambda)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}\geq\overline{\lim_{\delta\to 0}}\left(\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)}{\delta r}-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}\right)=$$

$$=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\left(\frac{\overline{n}(\Lambda)}{\delta}-(1-\delta)\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{(1-\delta)\delta r}\right)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\left(\frac{\overline{n}(\Lambda)}{\delta}-(1-\delta)\frac{\overline{n}(\Lambda)}{\delta}\right)=\overline{n}(\Lambda).$$

Таким образом, $\overline{n}(\Lambda)\leqslant\overline{n}_0(\Lambda)$.

Неравенство $\underline{n}(\Lambda)\leqslant\overline{n}(\Lambda)$ следует непосредственно из определения этих величин.

Для доказательства (1) осталось показать, что $\underline{n}_0(\Lambda)\leqslant\underline{n}(\Lambda)$. Пусть $\delta\in(0,1)$. Имеем:

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}\leqslant\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r,\Lambda)}{\delta r}-(1-\delta)\,\underline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}=$$

$$=\frac{\underline{n}(\Lambda)}{\delta}-(1-\delta)\frac{\underline{n}(\Lambda)}{\delta}=\underline{n}(\Lambda).$$

Отсюда следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\widetilde{\Lambda}=\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если Λ является подпоследовательностью $\widetilde{\Lambda}$, то будем писать $\Lambda\subset\widetilde{\Lambda}$. Доказательство следующего утверждения опирается на метод, изложенный при доказательстве леммы 5 в работе [1].

Лемма 2. *Пусть $\tau\geq 0$ и $\widetilde{\Lambda}=\{\tilde{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\underline{n}_0(\widetilde{\Lambda})\geq\tau$. Тогда существует последовательность $\Lambda\subset\widetilde{\Lambda}$, имеющая плотность τ.*

Доказательство. Поскольку аргументы членов $\widetilde{\Lambda}$ не влияют на ее всевозможные плотности, то можно считать, что вся последовательность $\widetilde{\Lambda}$ лежит на неотрицательной вещественной полуоси. Можно также считать, что $\tau>0$, т.к. случай $\tau=0$ тривиален.

Пусть $\alpha=1/\tau$, и $\widetilde{\Lambda}_m$ — набор всех членов $\widetilde{\Lambda}$, принадлежащих полуинтервалу $[(m-1)\alpha,m\alpha)$, $m\geq 1$. Последовательность Λ будем искать в виде объединения $\Lambda=\bigcup_{m\geq 1}\Lambda_m$, где Λ_m — подмножество $\widetilde{\Lambda}_m$. Множества Λ_m, $m\geq 1$, будем строить по индукции так, чтобы выполнялось следующее требование: для каждого $m\geq 1$ общее число точек множеств $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m$ должно быть меньше или равно m.

Пусть $m=1$. Если $\widetilde{\Lambda}_1$ не пусто, то из $\widetilde{\Lambda}_1$ произвольным образом выберем одну точку $\tilde{\lambda}_{n(1)}$, и положим $\lambda_1=\tilde{\lambda}_{n(1)}$, $\Lambda_1=\{\lambda_1\}$. В противном случае, полагаем $\Lambda_1=\emptyset$. По построению, число точек множества Λ_1 не превосходит единицы.

Предположим, что мы уже построили множества Λ_m для всех $m<p$, число точек в которых удовлетворяет указанному выше требованию. Определим Λ_p. Если общее число точек множеств $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_{p-1},\widetilde{\Lambda}_p$ меньше или равно p, то в качестве Λ_p возьмем множество $\widetilde{\Lambda}_p$. В противном случае, в качестве Λ_p выберем произвольное подмножество $\widetilde{\Lambda}_p$ такое, что общее число точек множеств $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p$ будет равно p. Таким образом, требование, наложенное выше, выполнено.

Покажем, что наше построение корректно, т.е. на последнем этапе в множестве $\widetilde{\Lambda}_p$ всегда найдется необходимое количество точек. Предположим, что это не так. Другими словами, для любого подмножества Λ_p (в том числе и пустого) множества $\widetilde{\Lambda}_p$, общее количество точек множеств $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p$ не равно p. Тогда для любого $\Lambda_p\subset\widetilde{\Lambda}_p$ общее число точек из $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p$ либо строго меньше p, либо строго больше p. Первый случай невозможен, так как для $\Lambda_p = \widetilde{\Lambda}_p$ на последнем этапе построения, предполагается, что общее число точек $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ строго больше p. Второй случай также невозможен, так как по допущению индукции, общее число точек множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{p-1}$ меньше или равно $p-1$, и, следовательно, для $\Lambda_p = \emptyset$ общее число точек $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$ также меньше p. Таким образом, доказали корректность построения.

Покажем что Λ — искомое множество, т.е. $\Lambda \subset \widetilde{\Lambda}$ и $n(r,\Lambda)/r \to \tau$ при $r \to \infty$. Первое верно по построению. Покажем второе. Пусть $r > 0$ и $q(r)$ обозначает максимальное натуральное число, для которого верно неравенство $\alpha q(r) \leqslant r$. По построению величина $n(\alpha(q(r)+1), \Lambda)$ совпадает с общим числом точек множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{q(r)+1}$, которое согласно наложенному выше требованию не превосходит $q(r)+1$. Следовательно,

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(\alpha(q(r)+1),\Lambda)}{\alpha q(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{q(r)+1}{\alpha q(r)} = \frac{1}{\alpha} = \tau. \tag{2}$$

Докажем теперь неравенство $\underline{n}(\Lambda) \geq \tau$. В силу (1) достаточно доказать, что $\underline{n}_0(\Lambda) \geq \tau$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно условию леммы и определению $\underline{n}_0(\widetilde{\Lambda})$ найдем $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\widetilde{\Lambda}) - n((1-\delta')r,\widetilde{\Lambda})}{\delta' r} \geq \underline{n}_0(\widetilde{\Lambda}) - \varepsilon \geq \tau - \varepsilon, \quad \delta' \in (0,\delta_0). \tag{3}$$

Пусть $r > 0$. По построению $\Lambda_p \subset \widetilde{\Lambda}_p$. Обозначим через $p(r)$ максимальный номер, такой, что $\alpha p(r) \leqslant r$ и $\Lambda_{p(r)}$ является собственным подмножеством $\widetilde{\Lambda}_{p(r)}$. Можно считать, что при больших r такой номер существует, т.к. в противном случае последовательности Λ и $\widetilde{\Lambda}$ совпадают. Тогда требуемое неравенство выполнено по условию: $\underline{n}_0(\Lambda) = \underline{n}_0(\widetilde{\Lambda}) \geq \tau$.

Фиксируем $\delta \in (0, \delta_0)$. Выберем последовательность $r_j \to \infty$ такую, что

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} = \lim_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda) - n((1-\delta)r_j,\Lambda)}{\delta r_j}. \tag{4}$$

Согласно построению и выбору чисел $p(r)$ и $q(r)$ пересечения полуинтервала $[\alpha p(r), \alpha q(r))$ с множествами Λ и $\widetilde{\Lambda}$ совпадают. Поэтому верно равенство

$$n(\alpha q(r),\Lambda) - n(\tilde{r},\Lambda) = n(\alpha q(r),\widetilde{\Lambda}) - n(\tilde{r},\widetilde{\Lambda}), \quad \alpha p(r) \leqslant \tilde{r} < \alpha q(r). \tag{5}$$

Пусть $\delta' \in (0,\delta)$. Тогда в силу определения $q(r)$ найдется $r(\delta') > 0$ такое, что $(1-\delta')r' \geq (1-\delta)r$ при $r \geq r(\delta')$, где $r' = \alpha q(r)$. Если $\alpha p(r_{j(k)}) \leqslant (1-\delta)r_{j(k)}$ для некоторой подпоследовательности $\{r_{j(k)}\}$, то из (3)–(5) получаем:

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} = \lim_{k\to\infty} \frac{n(r_{j(k)},\Lambda) - n((1-\delta)r_{j(k)},\Lambda)}{\delta r_{j(k)}} \geq$$

$$\geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{n(\alpha q(r_{j(k)}),\Lambda) - n((1-\delta)r_{j(k)},\Lambda)}{\delta r_{j(k)}} = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\alpha q(r_{j(k)}),\widetilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r_{j(k)},\widetilde{\Lambda})}{\delta r_{j(k)}} \geq$$

$$\geq \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(\alpha q(r),\widetilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r,\widetilde{\Lambda})}{\delta r} \geq \frac{\delta'}{\delta} \varliminf_{r\to\infty} \frac{r'\left(n(r',\widetilde{\Lambda}) - n((1-\delta')r',\widetilde{\Lambda}\right)}{r\delta' r'} =$$

$$= \frac{\delta'}{\delta} \varliminf_{r'\to\infty} \frac{n(\alpha q(r),\widetilde{\Lambda}) - n((1-\delta')r',\widetilde{\Lambda})}{\delta' r'} \geq \frac{\delta'}{\delta}(\tau - \varepsilon).$$

Так как последнее неравенство верно для любого $\delta' \in (0,\delta)$, то

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \geq \tau - \varepsilon. \tag{6}$$

Таким образом, можно считать, что $\alpha p(r_j) > (1-\delta)r_j$ для всех $j \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно также считать, что

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda)-n(\alpha p(r_j),\Lambda)}{\delta r_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda)-n(\alpha p(r_j),\Lambda)}{\delta r_j}.$$

Тогда имеем

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda)-n(\alpha p(r_j),\Lambda)+n(\alpha p(r_j),\Lambda)-n((1-\delta)r_j,\Lambda)}{\delta r_j} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda)-n(\alpha p(r_j),\Lambda)}{\delta r_j} + \lim_{j\to\infty} \frac{n(\alpha p(r_j),\Lambda)-n((1-\delta)r_j,\Lambda)}{\delta r_j}. \tag{7}$$

Оценим слагаемые в (7) по отдельности. Так как $\alpha p(r_j) \in ((1-\delta)r_j, r_j)$, то, переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $p(r_j)/r_j$ сходится к некоторому γ, причем $\alpha\gamma \in [1-\delta, 1]$. Рассмотрим второе слагаемое из (7). В силу выбора числа $p(r)$ множество $\Lambda_{p(r_j)}$ является собственным подмножеством $\widetilde{\Lambda}_{p(r_j)}$. Тогда по построению верно равенство $n(\alpha p(r_j),\Lambda) = p(r_j)$. Кроме того, согласно требованию, наложенному при построении, выполнено неравенство $n(\alpha m(r_j),\Lambda) \leqslant m(r_j)$, где $m(r_j)$ — минимальное натуральное число, такое, что $\alpha m(r_j) \geq (1-\delta)r_j$. Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n(\alpha p(r_j),\Lambda)-n((1-\delta)r_j,\Lambda)}{\delta r_j} \geq \lim_{j\to\infty} \frac{p(r_j)-m(r_j)}{\delta r_j} = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1-\delta}{\alpha\delta}. \tag{8}$$

Если $\alpha\gamma = 1$, то из (8), (7) и (4) получаем

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \geq \tau. \tag{9}$$

Пусть $\alpha\gamma < 1$ и $\tilde{\delta} \in (0, 1-\alpha\gamma) \subset (0,\delta)$. Тогда существует номер j_0 такой, что $\alpha p(r_j) \leqslant (1-\tilde{\delta})r'_j$, $j \geq j_0$, где $r'_j = \alpha q(r_j)$. Поэтому с учетом (5) и (3) получаем:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda)-n(\alpha p(r_j,\delta),\Lambda)}{\delta r_j} \geq \varliminf_{j\to\infty} \frac{n(\alpha q(r_j),\Lambda)-n((1-\tilde{\delta})r'_j,\Lambda)}{\delta r_j} =$$

$$= \frac{\tilde{\delta}}{\delta} \varliminf_{j\to\infty} \frac{r'_j\left(n(r'_j,\widetilde{\Lambda})-n((1-\tilde{\delta})r'_j,\widetilde{\Lambda})\right)}{r_j\tilde{\delta}r'_j} \geq \frac{\tilde{\delta}}{\delta}(\tau-\varepsilon).$$

Отсюда и из (4), (7), (8) имеем:

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \geq \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1-\delta}{\alpha\delta} + \frac{\tilde{\delta}}{\delta}(\tau-\varepsilon).$$

Так как $\alpha = 1/\tau$ и $\tilde{\delta}$ может быть сколь угодно близким к $1-\alpha\gamma < \delta$, то

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \geq \frac{\alpha\gamma}{\delta}\tau - \frac{1-\delta}{\delta}\tau + \frac{1-\alpha\gamma}{\delta}(\tau-\varepsilon) = \tau - \frac{1-\alpha\gamma}{\delta}\varepsilon \geq \tau-\varepsilon.$$

Таким образом, с учетом (9), (6) и произвольности числа $\varepsilon > 0$ получаем неравенство $\underline{n}_0(\Lambda) \geq \tau$. С учетом (1) и (2) это завершает доказательство леммы.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $r > 0$. Положим

$$V(r,\Lambda) = \sum_{0<|\lambda_k|<r} \frac{1}{\lambda_k}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только вещественные последовательности Λ и представлять их в виде $\Lambda = \Omega \cup \Xi$, где $\Omega = \{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\Xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ пронумерованы в порядке неубывания модулей их членов и состоят соответственно из неотрицательных и отрицательных членов Λ.

Лемма 3. *Пусть $\Lambda = \Omega \cup \Xi$, где Ω и Ξ имеют одинаковую плотность τ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r(\varepsilon)$ такое, что для любых $r_2 > r_1 > r(\varepsilon)$ верно неравенство:*

$$|V(r_2,\Lambda) - V(r_1,\Lambda)| \leqslant \ln(r_2/r_1) + \varepsilon.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\omega_k \neq 0$, $k \geq 1$. Согласно представлению Л. Эйлера имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \beta + \varepsilon(n), \tag{10}$$

где β — постоянная Эйлера и $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$. По условию Ω и Ξ имеют плотность τ, т.е. справедливы равенства:

$$\omega_k = |\omega_k| = k/(\tau + \delta'(k)), \quad \xi_k = -|\xi_k| = -k/(\tau + \delta''(k)), \tag{11}$$

$$n(r,\Omega) = \tau r + \varepsilon'(r) r, \quad n(r,\Xi) = \tau r + \varepsilon''(r) r, \tag{12}$$

где $\delta'(k), \delta''(k) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\varepsilon'(r), \varepsilon''(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Фиксируем $\tilde{\varepsilon} > 0$. Выберем номер m такой, что

$$|\delta'(k)| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \quad |\delta''(k)| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \quad |\varepsilon(n)| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \quad k, n \geq m. \tag{13}$$

Выберем теперь $r(\tilde{\varepsilon}) > 0$ так, что

$$n(r_1,\Omega) \geq m, \;\; n(r_1,\Xi) \geq m, \;\; \left|\ln \frac{\tau + \varepsilon'(r_2)}{\tau + \varepsilon'(r_1)}\right| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \;\; \left|\ln \frac{\tau + \varepsilon''(r_2)}{\tau + \varepsilon''(r_1)}\right| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \;\; r_2 > r_1 > r(\tilde{\varepsilon}). \tag{14}$$

Тогда из (10)–(14) получаем:

$$|V(r_2,\Lambda) - V(r_1,\Lambda)| = \left| \sum_{k=n(r_1,\Omega)+1}^{n(r_2,\Omega)} \frac{\tau + \delta'(k)}{k} - \sum_{k=n(r_1,\Xi)+1}^{n(r_2,\Xi)} \frac{\tau + \delta''(k)}{k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{k=n(r_1,\Omega)+1}^{n(r_2,\Omega)} \frac{\tau}{k} - \sum_{k=n(r_1,\Xi)+1}^{n(r_2,\Xi)} \frac{\tau}{k} \right| + \sum_{k=n(r_1,\Omega)+1}^{n(r_2,\Omega)} \frac{|\delta'(k)|}{k} + \sum_{k=n(r_1,\Xi)+1}^{n(r_2,\Xi)} \frac{|\delta''(k)|}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \tau \left| \ln \frac{n(r_2,\Omega)}{n(r_1,\Omega)} - \ln \frac{n(r_2,\Xi)}{n(r_1,\Xi)} \right| + 4\tau\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} \ln \frac{n(r_2,\Omega)}{n(r_1,\Omega)} + \tilde{\varepsilon} \ln \frac{n(r_2,\Xi)}{n(r_1,\Xi)} + 4\tilde{\varepsilon}^2 \leqslant$$

$$\leqslant 6\tau\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + 6\tilde{\varepsilon}^2, \quad r_2 > r_1 > r(\tilde{\varepsilon}).$$

Отсюда легко получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\Lambda = \Omega \cup \Xi$, где Ω и Ξ имеют одинаковую плотность τ. Тогда существует множество нулевой плотности $T \subset \Lambda$, такое что*

$$\lim_{r\to\infty} (V(r,\Lambda) - V(r,T)) = 0.$$

Доказательство. Если $\tau = 0$, то Λ имеет нулевую плотность. В этом случае утверждение леммы становится тривиальным, т. к. в качестве T можно взять Λ.

Пусть $\tau > 0$. Последовательность $T \subset \Lambda$, $T = \{t_p\}$ будем искать в виде объединения $T = \cup_{m\geq 1} T_m$, где $T_m = \{t_p\}_{p=p(m)}^{p(m+1)-1}$. Множества T_m будем строить по индукции. Пусть $m = 1$. В качестве $T_1 = \{t_p\}_{p=p(1)=1}^{p(2)-1}$ возьмем набор, состоящий из всех элементов Λ, принадлежащих интервалу $(-2, 2)$. Предположим, что мы уже построили множества T_m для всех $m < l$. Определим теперь T_l. Рассмотрим два случая.

1) $V(2^l,\Lambda) - \sum_{p=1}^{p(l)-1} 1/t_p \geq 0$.

a) Если

$$V(2^l,\Lambda)-\sum_{p=1}^{p(l)-1}\frac{1}{t_p}-\sum_{2^{l-1}\leqslant\omega_k<2^l}\frac{1}{\omega_k}\geq 0,$$

то в качестве T_l возьмем набор (он может оказаться пустым) всех элементов Ω, принадлежащих полуинтервалу $[2^{l-1},2^l)$.

b) Пусть

$$V(2^l,\Lambda)-\sum_{p=1}^{p(l)-1}\frac{1}{t_p}-\sum_{2^{l-1}\leqslant\omega_k<2^l}\frac{1}{\omega_k}<0.$$

Тогда полуинтервал $[2^{l-1},2^l)$ содержит точки ω_k последовательности Ω. Через $k(l)$ обозначим минимальный из номеров k, для которых $\omega_k\geq 2^{l-1}$. В качестве T_l возьмем набор элементов $\omega_{k(l)},\ldots,\omega_{k'(l)}$, где $k'(l)$ — минимальный номер, удовлетворяющий неравенству

$$V(2^l,\Lambda)-\sum_{p=1}^{p(l)-1}\frac{1}{t_p}-\sum_{k=k(l)}^{k'(l)}\frac{1}{\omega_k}<0.$$

В силу выбора $k'(l)$ точка $\omega_{k'(l)}$, а вместе с ней и все элементы набора T_l принадлежат полуинтервалу $[2^{l-1},2^l)$.

2) $V(2^l,\Lambda)-\sum\limits_{p=1}^{p(l)-1}1/t_p<0$.

a) Если

$$V(2^l,\Lambda)-\sum_{p=1}^{p(l)-1}\frac{1}{t_p}-\sum_{-2^l<\xi_n\leqslant-2^{l-1}}\frac{1}{\xi_n}<0,$$

то в качестве T_l возьмем набор всех элементов Ξ, лежащих на полуинтервале $(-2^l,-2^{l-1}]$.

b) Пусть

$$V(2^l,\Lambda)-\sum_{p=1}^{p(l)-1}\frac{1}{t_p}-\sum_{-2^l<\xi_n\leqslant-2^{l-1}}\frac{1}{\xi_n}\geq 0.$$

Тогда полуинтервал $(-2^l,-2^{l-1}]$ содержит точки ξ_n последовательности Ξ. Через $n(l)$ обозначим минимальный из номеров n, для которых $\xi_n\leqslant-2^{l-1}$. В качестве T_l возьмем набор элементов $\xi_{n(l)},\ldots,\xi_{n'(l)}$, где $n'(l)$ — минимальный номер, удовлетворяющий оценке

$$V(2^l,\Lambda)-\sum_{p=1}^{p(l)-1}\frac{1}{t_p}-\sum_{n=n(l)}^{n'(l)}\frac{1}{\xi_n}\geq 0.$$

В силу выбора $n'(l)$ точка $\omega_{k'(l)}$, а вместе с ней и все элементы набора T_l принадлежат полуинтервалу $[2^{l-1},2^l)$.

Таким образом, последовательность T полностью определена. Отметим, что по построению реализуется одна из двух следующих возможностей:

a) величина $V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)$ сохраняет знак (числу 0 мы приписываем знак "+") при переходе от $m=l-1$ к $m=l$ $(l>1)$, и тогда выполнено неравенство

$$|V(2^l,\Lambda)-V(2^l,T)|\leqslant|V(2^{l-1},\Lambda)-V(2^{l-1},T)|, \tag{15}$$

а набор T_l состоит из всех элементов Λ того же знака, что и величина $V(2^l,\Lambda)-V(2^l,T)$, лежащих в кольце $B(0,2^l)\setminus B(0,2^{l-1})$.

b) величина $V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)$ меняет знак при переходе от $m=l-1$ к $m=l$, и тогда имеет место оценка (она является следствием выбора номеров $k'(l)$ и $n'(l)$)

$$|V(2^l,\Lambda)-V(2^l,T)|\leqslant 1/\omega_{k'(l)}(1/|\xi_{n'(l)}|)\leqslant 1/2^{l-1}. \tag{16}$$

Предположим, что для некоторого номера $m(0)$ величина $V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)$ сохраняет знак для всех $m\geq m(0)$, например, "+". Тогда часть последовательности T, состоящая из элементов, лежащих вне круга $B(0,2^{m(0)})$, совпадает с соответствующей частью последовательности Ω. Поэтому в силу (15) сходится ряд $\sum 1/\xi_n$. Это означает, что $n/\xi_n\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. последовательность Ξ имеет нулевую плотность. Получили противоречие с тем, что $\tau>0$.

Таким образом, найдется последовательность номеров $m(j)$, $j\geq 1$, такая, что величина $V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)$ меняет знак при переходе от $m=m(j)$ к $m=m(j)+1$. Тогда из (15) и (16) следует, что

$$|V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)|\to 0,\quad m\to\infty. \tag{17}$$

Докажем теперь, что T имеет нулевую плотность. Пусть s_m — число элементов набора T_m. По построению все имеют одинаковый знак и лежат в кольце $B(0,2^m)\setminus B(0,2^{m-1})$. Следовательно, с учетом (17) и леммы 3 получаем:

$$\frac{s_m}{2^m}\leqslant\left|\sum_{p=p(m)}^{p(m+1)-1}\frac{1}{t_p}\right|=|V(2^m,T)-V(2^{m-1},T)|\leqslant|V(2^m,\Lambda)-V(2^{m-1},\Lambda)|+$$

$$+|V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)|+|V(2^{m-1},\Lambda)-V(2^{m-1},T)|\to 0,\quad m\to\infty.$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. Тогда существует номер $m(\varepsilon)$ такой, что

$$s_m/2^m\leqslant\varepsilon,\quad m\geq m(\varepsilon). \tag{18}$$

Пусть $r>2^{m(\varepsilon)}$ и n — минимальный из номеров, для которых $r\leqslant 2^n$. Тогда в силу (18)

$$\frac{n(r,T)}{r}\leqslant\frac{n(2^{m(\varepsilon)},T)}{r}+\frac{n(2^n,T)-n(2^{m(\varepsilon)},T)}{2^{n-1}}=\frac{n(2^{m(\varepsilon)},T)}{r}+$$

$$+\frac{s_{m(\varepsilon)+1}+s_{m(\varepsilon)+2}+\cdots+s_n}{2^{n-1}}\leqslant\frac{n(2^{m(\varepsilon)},T)}{r}+2\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-m(\varepsilon)-1}}\right).$$

Отсюда следует, что $\overline{n}(T)\leqslant 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon>0$ любое и $\underline{n}(T)\geq 0$, то это дает нам требуемое равенство $n(T)=0$.

Осталось показать, что $V(r,\Lambda)-V(r,T)\to 0$ при $r\to\infty$. Пусть $r>2$. Выберем номер m такой, что $2^m\leqslant r<2^{m+1}$. По доказанному T имеет нулевую плотность. Поэтому для последовательности T, как и для Λ, верно утверждение леммы 3. Тогда учетом (17) имеем:

$$|V(r,\Lambda)-V(r,T)|\leqslant|V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)|+|V(r,\Lambda)-V(2^m,\Lambda)|+$$

$$+|V(r,T)-V(2^m,T)|\leqslant|V(2^m,\Lambda)-V(2^m,T)|+2\varepsilon(r)(\ln 2+1)\to 0,\quad r\to\infty.$$

Лемма доказана.

Напомним, что множество $\Lambda=\Omega\cup\Xi$ называется правильно распределенным (см. [2], гл. II, §1), если последовательности Ω и Ξ имеют плотности и существует $\lim_{r\to\infty}V(r,\Lambda)$.

Теорема 1. *Пусть $\tau\geq 0$ и $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Omega}\cup\widetilde{\Xi}$ такие, что $\underline{n}(\widetilde{\Omega})\geq\tau$ и $\underline{n}(\widetilde{\Xi})\geq\tau$. Тогда существует правильно распределенное множество $\Lambda\subset\widetilde{\Lambda}$, $\Lambda=\Omega\cup\Xi$, где Ω и Ξ имеют одинаковую плотность τ и $\lim_{r\to\infty}V(r,\Lambda)=0$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 существует последовательность $\Lambda'\subset\widetilde{\Lambda}$, $\Lambda'=\Omega'\cup\Xi'$ такая, что $n(\Omega')=n(\Xi')=\tau$. Тогда по лемме 4 найдется последовательность $T\subset\Lambda'$, удовлетворяющая условию $\lim_{r\to\infty}(V(r,\Lambda')-V(r,T))=0$. Таким образом, $\Lambda=\Lambda'\setminus T$ обладает всеми необходимыми свойствами. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые применения теоремы 1.

Пусть f — целая функция экспоненциального типа (т.е. существуют $A,B>0$ такие, что верна оценка $|f(z)|\leqslant A+B|z|$, $z\in\mathbb{C}$). Верхним индикатором f называется функция

$$h_f(\lambda)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\ln|f(t\lambda)|/t,\quad\lambda\in\mathbb{C}.$$

Индикатор h_f является выпуклой положительно однородной порядка один функцией, которая совпадает с комплексной опорной функцией H_K некоторого выпуклого компакта K (другими словами, с обычной опорной функцией комплексно сопряженного с K компакта), называемого сопряженной диаграммой f (см., напр., [3], гл. I, §5, теорема 5.4):

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda) = \sup_{z\in K} Re(\lambda z), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Говорят (см. [2], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t\to\infty, t\notin E} \ln|f(t\lambda)|/t, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

где E — множество нулевой относительной меры на луче $(0,+\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0,r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r\to+\infty$.

Пусть K — выпуклый компакт. Точки $z(\varphi)$ пересечения опорной прямой $l(\varphi) = \{z : Re(ze^{i\varphi} = H_K(e^{i\varphi})\}$ и границы ∂K называются точками опоры прямой $l(\varphi)$.

Согласно теореме 4 главы III книги [2] функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество Λ (т.е. каждый нуль f встречается в Λ столько раз, какова его кратность) является правильно распределенным. При этом, если Λ является вещественным ($\Lambda = \Omega\cup\Xi$), то имеют место равенства (см. [2], гл. II,§1, формула (2.07))

$$n(\Omega) = S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi, \qquad -\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2,$$
$$n(\Xi) = S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi, \qquad \pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < 3\pi/2,$$

где K — сопряженная диаграмма, а $S_K(\varphi_1,\varphi_2)$ — длина дуги границы ∂K (измеряемая по часовой стрелке) между точками опоры $z(\varphi_1)$ и $z(\varphi_2)$. Отметим, что для всех указанных φ_1,φ_2 величина $S_K(\varphi_1,\varphi_2)$ постоянна. Это возможно в том и только том случае, когда K является вертикальным отрезком длины $2\pi\tau$, где $\tau = n(\Omega) = n(\Xi)$.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа с вещественным нулевым множеством $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Omega}\cup\widetilde{\Xi}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Выполнены неравенства $\underline{n}(\widetilde{\Omega}) \geq \tau$, $\underline{n}(\widetilde{\Xi}) \geq \tau$.

2) Верно представление $f = f_1f_2$, где f_1, f_2 — целые функции экспоненциального типа, f_1 является функцией регулярного роста, ее сопряженная диаграмма представляет из себя вертикальный отрезок длины $2\pi\tau$, и $h_{f_2} \equiv h_f - h_{f_1}$.

Доказательство. Пусть верно утверждение 1). Тогда по теореме 1 существует правильно распределенное множество $\Lambda\subset\widetilde{\Lambda}$, $\Lambda = \Omega\cup\Xi$, где Ω и Ξ имеют одинаковую плотность τ. Через f_1 обозначим каноническую функцию множества Λ. Она имеет экспоненциальный тип и регулярный рост (см. [2], гл. II, теорема 4). При этом, как отмечалось выше, сопряженная диаграмма f_1 совпадает с вертикальным отрезком длины $2\pi\tau$. Положим $f_2 = f/f_1$. Поскольку нулевое множество f_1 — часть нулевого множества f, то f_2 является целой функцией. Тогда согласно следствию 2 из теоремы 5 главы III книги [2] верно тождество $h_{f_2} \equiv h_f - h_{f_1}$. Из него, в частности, следует, что f_2 имеет экспоненциальный тип.

Пусть теперь верно утверждение 2). Тогда нулевое множество $\Lambda = \Omega\cup\Xi$ функции f_1 удовлетворяет равенствам $n(\Omega) = n(\Xi) = \tau$. Так как Λ является частью $\widetilde{\Lambda}$, то отсюда получаем: $\underline{n}(\widetilde{\Omega}) \geq \tau$, $\underline{n}(\widetilde{\Xi}) \geq \tau$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа с вещественным нулевым множеством $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Omega}\cup\widetilde{\Xi}$, где $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Xi}$ имеют плотности. Тогда верно представление $f = f_1f_2$, где f_1, f_2 — целые функции экспоненциального типа, f_1 является функцией регулярного роста, ее сопряженная диаграмма представляет из себя вертикальный отрезок, $h_{f_2} \equiv h_f - h_{f_1}$ и нулевое множество f_2 имеет нулевую плотность.*

Доказательство. Покажем вначале, что плотности $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Xi}$ одинаковы. Поскольку f имеет экспоненциальный тип, то по теореме Линделефа (см. [2], гл. I, теорема 15) существует

$c > 0$ такое, что $|V(r, \widetilde{\Lambda})| \leqslant c$, $r > 0$. Пусть $n(\widetilde{\Omega}) = \tau$ и $\underline{n}(\widetilde{\Xi}) = \gamma$. Предположим, что $\tau \neq \gamma$, например, $\tau > \gamma$ (случай $\tau < \gamma$ разбирается аналогично). Как и в лемме 3, имеем (не ограничивая общности, можно считать, что $0 \notin \widetilde{\Omega}$):

$$V(r, \widetilde{\Lambda}) = \sum_{k=1}^{n(r,\widetilde{\Omega})} \frac{\tau + \delta'(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n(r,\widetilde{\Xi})} \frac{\gamma + \delta''(k)}{k} = \tau \ln n(r, \widetilde{\Omega}) - \gamma \ln n(r, \widetilde{\Xi}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n(r,\widetilde{\Omega})} \frac{\delta'(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n(r,\widetilde{\Xi})} \frac{\delta''(k)}{k} + \varepsilon(n(r, \widetilde{\Omega})) - \varepsilon(n(r, \widetilde{\Xi})),$$

$$n(r, \widetilde{\Omega}) = \tau r + \varepsilon'(r) r, \quad n(r, \widetilde{\Xi}) = \tau r + \varepsilon''(r) r,$$

где $\varepsilon(k)$, $\delta'(k)$, $\delta''(k) \to 0$, $k \to \infty$ и $\varepsilon'(r), \varepsilon''(r) \to 0$, $r \to \infty$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем номер m такой, что $|\delta'(k)| \leqslant \varepsilon$, $|\delta''(k)| \leqslant \varepsilon$,$|\varepsilon(n)| \leqslant \varepsilon$, $k, n \geq m$. Выберем теперь $r(\varepsilon) > 0$ так, что $n(r, \widetilde{\Omega}) \geq m$, $n(r, \widetilde{\Xi}) \geq m$, $r > r(\varepsilon)$. Тогда из предыдущего с учетом (10) получаем

$$|V(r, \widetilde{\Lambda})| \geq (\tau - \gamma) \ln r - \tau |\ln(\tau + \varepsilon\varepsilon'(r))| - \gamma |\ln(\gamma + \varepsilon''(r))| - \sum_{k=1}^{m} \frac{|\delta'(k)| + |\delta''(k)|}{k} -$$

$$-2\varepsilon \ln r - \varepsilon |\ln(\tau + \varepsilon'(r))| - \varepsilon\varepsilon |\ln(\gamma + \varepsilon''(r))| - 2\varepsilon - 2\beta, \quad r > r(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что $|V(r, \widetilde{\Lambda})| \to \infty$ при $r \to \infty$. Получили противоречие с ограниченностью $|V(r, \widetilde{\Lambda})|$. Таким образом, последовательности $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Xi}$ имеют одинаковую плотность τ.

Как и в теореме 2, верно представление $f = f_1 f_2$, где f_1, f_2 — целые функции экспоненциального типа, f_1 имеет регулярный рост, ее сопряженная диаграмма является вертикальным отрезком длины $2\pi\tau$, и $h_{f_2} \equiv h_f - h_{f_1}$. При этом $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \cup \Lambda'$, где $\Lambda = \Omega \cup \Xi$,$\Lambda'$ — нулевые множества соответственно функций f_1, f_2, и $n(\Omega) = n(\Xi) = \tau$. Поскольку плотности последовательностей $\widetilde{\Omega}$ и $\widetilde{\Xi}$ также равны τ, то отсюда получаем

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \Lambda')}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \widetilde{\Lambda}) - n(r, \Lambda)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r, \widetilde{\Omega}) + n(r, \widetilde{\Xi}) - n(r, \Omega) - n(r, \Xi)}{r} = 0.$$

Теорема доказана.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D, и $H^*(D)$ — пространство, сильно сопряженное к $H(D)$. Через P_D обозначим пространство целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в области D. Преобразование Лапласа $f(\lambda) = \nu(\exp(\lambda z))$ устанавливает изоморфизм (см., например, [4], гл. III, §12, теорема 12.3) между $H^*(D)$ и P_D.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^{n-1} \exp(\lambda_k z)\}_{n=1,k}^{n(k)}$, где перебираются все различные точки λ_k, и $n(k)$ — кратность λ_k (т.е. число элементов последовательности Λ, совпадающих с λ_k). По теореме Хана-Банаха система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$ тогда и только тогда, когда существует ненулевой функционал $\nu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на элементах системы. Таким образом, неполнота $\mathcal{E}(\Lambda)$ равносильна существованию функции $f \in P_D$, которая обращается в ноль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем $n(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Если область D пуста, то для удобства будем считать, что любая система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в $H(D)$.

Пусть $\tau > 0$, $I(\tau) = [-i\pi\tau, i\pi\tau]$, и $D(\tau)$ обозначает выпуклую область, которая заметается при движении отрезка $I(\tau)$ внутри D. По определению имеет место вложение $D(\tau) \subset D$. Область $D(\tau)$ является пустой, если ни один из сдвигов отрезка $I(\tau)$ не лежит в D. Очевидно, верно представление $D(\tau) = D'(\tau) + I(\tau)$, где

$$D'(\tau) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\lambda) < H_D(\lambda) - \pi\tau |Im\lambda|, \quad \forall \lambda : |\lambda| = 1\},$$

$\pi\tau|Im\lambda|$ — опорная функция отрезка $I(\tau)$.

Теорема 4. *Пусть $\tau > 0$, D — выпуклая область, и $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Omega} \cup \widetilde{\Xi}$ — вещественная последовательность такая, что $\underline{n}(\widetilde{\Omega}) \geq \tau$, $\underline{n}(\widetilde{\Xi}) \geq \tau$. Система $\mathcal{E}(\widetilde{\Lambda})$ полна в $H(D)$ тогда и только тогда, когда она полна в $H(D(\tau))$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}(\widetilde{\Lambda})$ не полна в пространстве $H(D(\tau))$. Тогда существует целая функция f экспоненциального типа, обращающаяся в ноль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем $n(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, сопряженная диаграмма которой лежит в $D(\tau)$. Поскольку $D(\tau) \subset D$, то $f \in P_D$. Отсюда следует, что $\mathcal{E}(\widetilde{\Lambda})$ не полна в пространстве H(D).

Пусть теперь $\mathcal{E}(\widetilde{\Lambda})$ не полна в $H(D)$. Тогда найдется $f \in P_D$, которая обращается ноль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем $n(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $f \in P_{D(\tau)}$.

Согласно теореме 1 существует правильно распределенное множество $\Lambda \subset \widetilde{\Lambda}$, $\Lambda = \Omega \cup \Xi$, где Ω и Ξ имеют одинаковую плотность τ. Через f_1 обозначим каноническую функцию множества Λ. Она имеет экспоненциальный тип и регулярный рост, а ее сопряженная диаграмма K_1 представляется в виде $I(\tau) + z_0$ (z_0 — некоторая точка плоскости). Положим $f_2 = f/f_1$. Поскольку нулевое множество f_1 — часть нулевого множества f, то f_2 является целой функцией. Тогда согласно следствию 2 из теоремы 5 главы III книги [2] верно тождество $h_{f_2} \equiv h_f - h_{f_1}$. Из него, в частности, следует, что f_2 имеет экспоненциальный тип. Пусть K и K_2 — сопряженные диаграммы соответственно функций f и f_2. Тогда

$$H_{K_2} \equiv h_{f_2} \equiv h_f - h_{f_1} \equiv H_K - H_{K_1}.$$

Следовательно, $H_K \equiv H_{K_1} + H_{K_2}$, т.е. $K = K_1 + K_2 = I(\tau) + z_0 + K_2 \subset D$. Таким образом, если $z \in K$, то z принадлежит сдвигу отрезка $I(\tau)$, лежащему в области D. Это означает, что верно вложение $K \subset D(\tau)$. Отсюда следует, что $\mathcal{E}(\widetilde{\Lambda})$ не полна в $H(D(\tau))$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, № 3. С. 96–120.
2. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат. 1956.
3. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
4. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982.

Айдар Ирекович Абдулнагимов,
ФБГОУ ВПО "Уфимский государственный авиационный технический университет
ул. К. Маркса, 12, корпус 1,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `buffonishe@mail.ru`

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`