ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 102-110.

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА НА ОДНОМЕРНЫЙ РЕШЕТКЕ

М.Э. МУМИНОВ, А.М. ХУРРАМОВ

Аннотация. Рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на одномерной решетке со специальными дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на узел), взаимодействующих с помощью выбранного потенциала притяжения. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h(k)$ от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k\in\mathbb{T}$ ($\mathbb{T}-$ одномерный тор). В зависимости от энергии взаимодействия частиц найдены условия, при которых левее существенного спектра существует многократное собственное значение оператора $h(k)$.

Ключевые слова: двухчастичный гамильтониан на одномерной решетке, собственное значение, многократное собственное значение.

Mathematics Subject Classification: 44A55, 81Q10

1. Введение

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шрёдингера с помощью выделения энергии движения центра масс так, что одночастичные "связанные состояния"суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса) [1]. На решетке "выделению центра масс"системы отвечает реализация гамильтониана как "расслоенного оператора т. е. "прямого интеграла"семейства операторов $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k\in\mathbb{T}^d$ ($\mathbb{T}^d-$ d-мерный тор) [2, 3]. Решетчатые двухчастичные гамильтонианы исследованы в работах [4, 5]. В работе [4] показано появление уровней связанных состояний, отстоящих от непрерывного спектра на определенном расстоянии, при некоторых значениях полного квазиимпульса системы. Спектральные свойства двухчастичного оператора, зависящие от полного квазиимпульса, изучены в [5].

В работе [3] доказано, что в случае, когда оператор $h(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень на левом крае существенного спектра, дискретный спектр оператора $h(k)$, лежащий левее существенного спектра, всегда является не пустым при всех $k\in\mathbb{T}^d\setminus\{\mathbf{0}\}$. В работе [6], предполагая дисперсионные соотношения частиц $\varepsilon_1(\cdot)$ и $\varepsilon_2(\cdot)$ линейно зависимыми функциями, доказано, что из положительности $h(\mathbf{0})$ следует положительность $h(k)$ при всех $k\in\mathbb{T}^3\setminus\{\mathbf{0}\}$.

В [7] исследована система двух частиц на трехмерной решетке с некоторой дисперсионной функцией, описывающей перенос частицы с узла на соседний узел, взаимодействующих с помощью потенциала притяжения только на ближайших соседних узлах. Изучены спектральные свойства семейства операторов $h(k)$, в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k\in\mathbb{T}^3$ ($\mathbb{T}^3-$ 3-мерной тор).

M.E. Muminov, A.M. Khurramov, Spectral properties of two particle Hamiltonian on one-dimensional lattice.

Поступила 30 января 2014 г.

В работе рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $h(k)$, $k \in \mathbb{T}$, соответствующий системе двух частиц на одномерной решетке, где в качестве потенциала берется некоторый $2N+1$ – мерный интегральный оператор, и в зависимости от N выбирается дисперсионная функция. Изучено существование собственных значений семейства операторов $h(k)$, в зависимости от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса k.

2. Формулировка основных результатов

Пусть $\mathbb{Z}$ — одномерная целочисленная решетка, $(\mathbb{Z})^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ — декартова степень $\mathbb{Z}$ и $\ell_2((\mathbb{Z})^2)$ — гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z})^2$.

Рассмотрим координатное представление гамильтониана системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с парным короткодействующим потенциалом $\hat{v}(\cdot)$ на одномерной решетке, действующего в пространстве $\ell_2((\mathbb{Z})^2)$ по формуле:

$$\hat{h} = \hat{h}_0 - \hat{v},$$

где $\hat{h}_0$ и $\hat{v}$ действуют по правилам:

$$(\hat{h}_0\hat{\psi})(n_1, n_2) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} [\hat{\varepsilon}_1(s)\hat{\psi}(n_1 + s, n_2) + \hat{\varepsilon}_2(s)\hat{\psi}(n_1, n_2 + s)],$$

$$(\hat{v}\hat{\psi})(n_1, n_2) = \hat{v}(n_1 - n_2)\hat{\psi}(n_1, n_2).$$

Здесь $\hat{\varepsilon}_1(s)$ и $\hat{\varepsilon}_2(s)$– вещественнозначные четные функции, описывающие перенос частицы с узла на соседний узел, определенные по формуле

$$\hat{\varepsilon}_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{m_i} & \text{при} \qquad s = 0, \\ -\frac{1}{2m_i} & \text{при} \qquad s = \pm 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$\hat{v}(s) = \begin{cases} 2\pi\mu_0 & \text{при} \qquad s = 0, \\ \pi\mu_l & \text{при} \qquad s = \pm l,\ l = \overline{1, N}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $m_i > 0$ — масса i-ой частицы, $i = 1, 2$, $\mu_l > 0$, n– натуральное число.

Введем следующие многочлены

$$P_0(x) \equiv 0, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x)) + 2P_{k-1}(x) - P_{k-2}(x) + 2P_1(x), \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Пусть Δ — решетчатый лапласиан на одномерной решетке. Он действует в $\ell_2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(\Delta f)(s) = f(s+1) + f(s-1) - 2f(s).$$

Предложение 1. *Для любого $f \in \ell_2(\mathbb{Z})$ имеет место равенство*

$$f(s+k) + f(s-k) - 2f(s) = (P_k(\Delta)f)(s), \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Доказательство. Предположим, что при $k = l, l \geq 2$ выполняется равенство

$$f(s+l) + f(s-l) - 2f(s) = (P_l(\Delta)f)(s).$$

Тогда имеем

$$(P_1(P_l(\Delta))f)(s) = [f(s+l+1) + f(s-(l-1)) - 2f(s+1)]+$$
$$+[f(s-(l+1)) + f(s+(l-1)) - 2f(s-1)] - 2(P_l(\Delta)f)(s) =$$
$$= (P_{l+1}(\Delta)f)(s) + (P_{l-1}(\Delta)f)(s) - 2(P_1(\Delta)f)(s) - (P_l(\Delta)f)(s).$$

Отсюда вытекает, что

$$f(s+l+1)+f(s-(l+1))-2f(s)=(P_1(\Delta)f)(s)+2(P_l(\Delta)f)(s)-(P_{l-1}(\Delta)f)(s)+$$
$$+2(P_1(\Delta)f)(s)=(P_{l+1}(\Delta)f)(s).$$

Предложение доказано.

Заметим, что свободный гамильтониан $\hat{h}_0$ системы двух произвольных частиц на одномерной решетке действует в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$ по формуле:

$$\hat{h}_0=\frac{1}{2m_1}P_{2n}(\Delta)\times E+\frac{1}{2m_2}E\times P_{2n}(\Delta),$$

где E — единичный оператор в $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Отметим, что рассматриваемый оператор $\hat{h}$ является ограниченным, самосопряженным в $\ell_2((Z)^2)$.

Пусть $\mathbb{T}=(-\pi,\pi]$, $L_2(\mathbb{T})$– гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}$. С помощью преобразования Фурье [3], [6]

$$\Im:\ \ell_2((\mathbb{Z})^2)\to L_2((\mathbb{T})^2),\quad (\Im\hat{f})(p)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s\in(\mathbb{Z})^2}\hat{f}(s)e^{-i(p,s)},$$

получим импульсное представление h оператора $\hat{h}$, т. е. $h=\Im\hat{h}\Im^{-1}$. Далее оператор h разложим в прямой операторный интеграл

$$h=\int\limits_{\mathbb{T}}\oplus h(k)dk,$$

где $h(k), k\in\mathbb{T},$– самосопряженный оператор, действующий в $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$h(k)=h_0(k)-\mathbf{v},$$

здесь $h_0(k)$– оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p)=\frac{1}{m_1}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k),\quad \varepsilon(p)=\sum_{s\in Z}\hat{\varepsilon}(s)e^{ips}=1-\cos 2np$$

и $\mathbf{v}$– интегральный оператор с ядром

$$v(p-q)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s\in Z}\hat{v}(s)e^{-i(p-q)s}=\sum_{l=0}^{N}\mu_l\cos l(p-q).$$

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [8] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ состоит из области значения функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$, т. е.

$$\sigma_{ess}(h(k))=\sigma(h_0(k))=[m(k),M(k)],$$

где $m(k)=\min\limits_{p\in\mathbb{T}}\mathcal{E}_k(p),\quad M(k)=\max\limits_{p\in\mathbb{T}}\mathcal{E}_k(p).$

Поскольку $\mathbf{v}\geq 0$, то

$$\sup(h(k)f,f)\leqslant\sup(h_0(k)f,f)=M(k)(f,f),\qquad f\in L_2(\mathbb{T}).$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h(k))\cap(M(k),\infty)=\emptyset.$$

В дальнейшем будем считать, что

$$n=\begin{cases}\text{НОК}\{2,4,...,2(N-1)\} & \text{при}\quad N>1,\\ 1,\text{если}\quad N=1,\end{cases}$$

где НОК — наименьшее общее кратное. Следует отметить, что если N представляется в виде степени некоторого простого числа, то число $\frac{n}{2N}$ является дробным. В противном случае число $\frac{n}{2N}$ является натуральным.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} d(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\quad c_N(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\cos^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\\ s_N(k;z)=\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z},\qquad z<m(k), \end{gathered} \tag{1}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p)=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2nk+\frac{1}{m_2^2}}\cos 2np.$$

Из представления $\tilde{\mathcal{E}}_k(p)$ следует, что $\min\limits_{p\in[-\pi,\pi]}\tilde{\mathcal{E}}_k(p)$ достигается только в нуле. Поэтому интеграл $\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 Nsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-m(k)}$ сходится и принимает положительное значение.

Обозначим

$$\mu^0(k)=\frac{1}{s_N(k;m(k))}. \tag{2}$$

Предположение 1. *Предположим, что $m=m_1=m_2$ и $k=\pm\frac{\pi}{2n}$.*

Отметим, что если $\frac{n}{2N}$ — натуральное (дробное) число, то $c_N(k;z)=s_N(k;z)$ $\Big(c_N(k;z)>s_N(k;z)\Big)$.

Теорема 1. *Пусть не выполняется предположение 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\frac{n}{2N}$— натуральное число, то для любого $\mu=(\mu_0,...,\mu_N)\in\mathbb{R}_+^{N+1}$ оператор $h(k)$ имеет ровно*

$$2N+1$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра.

2. *Если $\frac{n}{2N}$— дробное число, то для любого $\mu=(\mu_0,...,\mu_{N-1})\in\mathbb{R}_+^{N}$ и $\mu_N\in M_\alpha$, оператор $h(k)$ имеет ровно*

$$2N+\alpha$$

собственных значений, с учетом кратности, лежащих левее существенного спектра, где $M_0=(0;\mu^0(k)]$, $M_1=(\mu^0(k);\infty)$, $\alpha\in\{0,1\}$.

Теорема 2. *Пусть выполняется предположение 1. Тогда $\tilde{\mathcal{E}}_k(p)\equiv\frac{2}{m}$ и для любого $\mu=(\mu_0,...,\mu_N)\in\mathbb{R}_+^{N+1}$ оператор $h(k)$ имеет ровно*

$$2N+1$$

собственных значений, которые имеют вид: $z_0=\frac{2}{m}-2\mu_0\pi$, $z_l=\frac{2}{m}-\mu_l\pi$, $l=\overline{1,N}$. При этом z_0 — простое, а z_l, $l\geq 1$ — двукратное собственное значение.

Замечание. *Следует отметить, что если $1-\frac{\mu^*}{2}d(k,z^*)=0$, $z^*<m(k)$, $\mu^*>0$ (см. лемма 2) и $\mu_l=\mu^*$ для всех $l\in\{1,2,3,...,N-1\}$, то число $z=z^*$ является не менее*

$$2N-2$$

кратным собственным значением оператора $h(k)$.

3. Собственные значения $h(k)$

Введем оператор $\tilde h(k)$, действующий в $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$\tilde h(k) = \tilde h_0(k) - \mathbf{v},$$

где $\tilde h_0(k)$– оператор умножения на функцию

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}}\cos 2np.$$

Пусть унитарный оператор $U : L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$ определен по формуле

$$(Uf)(p) = f(p - \frac{1}{2n}\theta(k)),$$

где

$$\theta(k) = \arccos \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\cos 2nk}{\sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}}}.$$

Тогда

$$(U^{-1}f)(p) = f(p + \frac{1}{2n}\theta(k)), \quad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Лемма 1. *Оператор $h(k)$ является унитарно эквивалентным оператору $\tilde h(k)$, т.е.*

$$\tilde h(k) = U^{-1} h(k) U.$$

Доказательство. Поскольку имеет место представление

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}}\cos(2np - \theta(k)),$$

то

$$(h_0(k)Uf)(p) = \Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}}\cos(2np - \theta(k))\Big)\times$$
$$\times f(p - \frac{1}{2n}\theta(k)).$$

Легко проверить, что

$$(U^{-1}h_0(k)Uf)(p) = \Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2nk + \frac{1}{m_2^2}}\cos 2np\Big) f(p),$$

т. е.

$$U^{-1} h_0(k) U = \tilde h_0(k).$$

Ясно, что

$$(U^{-1}\mathbf{v}Uf)(p) = U^{-1}\left(\int_{\mathbb{T}} v(s-p) f(s - \frac{1}{2n}\theta(k)) ds\right) =$$
$$= \int_{\mathbb{T}} v(s - (p + \frac{1}{2n}\theta(k))) f(s - \frac{1}{2n}\theta(k)) ds.$$

В последнем интеграле произведя замену $s - \frac{1}{2n}\theta(k) = t$, имеем

$$(U^{-1}\mathbf{v}Uf)(p) = \int_{\mathbb{T}} v(t-p) f(t) dt,$$

т.е.

$$U^{-1}\mathbf{v}U = \mathbf{v}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Число $z, z < m(k)$ является собственным значением оператора $\tilde{h}(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(k;z) = 0$, где*

$$\Delta(k;z) = (1 - \mu_0 d(k;z)) \prod_{l=1}^{N} \left(1 - \frac{\mu_l}{2} d(k;z)\right)^2 \quad \text{при натуральном} \quad \frac{n}{2N},$$

$$\Delta(k;z) = (1 - \mu_0 d(k;z)) \prod_{l=1}^{N-1} \left(1 - \frac{\mu_l}{2} d(k;z)\right)^2 (1 - \mu_N c_N(k;z))\,(1 - \mu_N s_N(k;z))$$

при дробном $n/2N$. При этом кратность нуля функции $\Delta(k;\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $h(k)$.

Доказательство. Пусть $z < m(k)-$ собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ и $f-$ соответствующий собственный вектор, т.е. уравнение

$$\tilde{h}(k)f = zf$$

имеет нетривиальное решение f. Тогда

$$f = r_0(z)\mathbf{v}f, \tag{3}$$

где $r_0(z)-$ оператор умножения на функцию $\frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p)-z}$. Введя обозначения

$$\varphi_l = \int_{\mathbb{T}} \cos ls f(s)ds, \tag{4}$$

$$\psi_l = \int_{\mathbb{T}} \sin ls f(s)ds. \tag{5}$$

перепишем равенство (3) в виде

$$f(p) = \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z} \sum_{l=0}^{N} \mu_l(\varphi_l \cos lp + \psi_l \sin lp). \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в (4) и (5), пользуясь четностью функции $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$, получим систему линейных уравнений

$$\varphi_l = \int_{\mathbb{T}} \sum_{r=1}^{N} \mu_r \varphi_r \frac{\cos ls \cos rs}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds, \quad l = 0, \dots, N, \tag{7}$$

$$\psi_l = \int_{\mathbb{T}} \sum_{r=1}^{N} \mu_r \psi_r \frac{\sin ls \sin rs}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds, \quad l = 1, \dots, N. \tag{8}$$

Из определения числа n следует, что число $\frac{n}{2l}$ является натуральным для всех $l = 1, \dots, N-1$. Отсюда следует, что функция $\tilde{\mathcal{E}}_k(\cdot)$ является периодической, с периодом $\frac{\pi}{2l}$ для всех $l = 1, \dots, N-1$. Покажем, что при всех $l = 1, \dots, 2N-1$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos ls}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds = 0. \tag{9}$$

Действительно, если $l-$ нечетное (четное) число, то, заменяя переменную $s = t + \pi(s = t + \frac{\pi}{l})$ в интеграле в левой части равенства (9), имеем

$$I_l(z) = -\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{coslt}{\tilde{\mathcal{E}}_k(t) - z} dt = -I_l(z).$$

Отсюда следует равенство (9). Из элементарных равенств

$$\cos ls \cos rs = \frac{1}{2}(\cos(l+r)s + \cos(l-r)s),$$

$$\sin ls \sin rs = \frac{1}{2}(\cos(l-r)s - \cos(l+r)s)$$

и из равенства (9) получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\cos ls \cos rs}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin ls \sin rs}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds = 0, \quad l \neq r,\ l, r = 1, \ldots, N. \tag{10}$$

В силу (10) равенства (7) и (8) приобретают вид

$$\varphi_l = \mu_l \varphi_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 ls}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds, \quad l = 0, \ldots, N,$$

$$\psi_l = \mu_l \psi_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 ls}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} ds, \quad l = 1, \ldots, N.$$

Определитель системы линейних уравнений относительно неизвестных $\varphi_0,\ \varphi_1, ..., \varphi_N$, $\psi_1, ..., \psi_N$ имеет вид

$$\Delta(k; z) = \prod_{l=0}^{N} \left(1 - \mu_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 lsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \right) \prod_{l=1}^{N} \left(1 - \mu_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 lsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \right).$$

При этом, если $z < m(k)-$ собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$, то

$$\Delta(k; z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^{N} \left(1 - \mu_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 lsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \right) \left(1 - \mu_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 lsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} \right) = 0.$$

Легко показать, что согласно (10) для всякого $l \leqslant N$ при натуральном $n/2N$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 lsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 lsds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = \frac{1}{2} d(k; z).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\Delta(k; z) = (1 - \mu_0 d(k; z)) \prod_{l=1}^{N} \Big(1 - \frac{\mu_l}{2} d(k; z) \Big)^2.$$

Обратно, пусть $\Delta(k; z) = 0$. Тогда для некоторых $l \in \{0, ..., N\}$ и $z < m(k)$, хотя бы один из множителей $\Delta(k; z)$ обращается в нуль, т.е. либо $1 - \mu_0 \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z} = 0$, либо $\big(1 - \frac{\mu_l}{2} d(k; z)\big)^2$.

При этом легко проверить, что число $z < m(k)$ – собственное значение оператора $\tilde{h}(k)$ и

$$\text{либо} \ \ \frac{1}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}, \ \text{либо} \ \ \frac{\cos lp}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z} \ \text{ и } \frac{\sin lp}{\tilde{\mathcal{E}}_k(p) - z}$$

соответствующие собственные функции.

При дробном $n/2N$ применимы точно такие же рассуждения.

Заметим также, что кратность нуля функции $\Delta(k;\cdot)$ совпадает с кратностью собственного значения оператора $\tilde{h}(k)$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть не выполняется предположение 1. Тогда для всякого $k \in \mathbb{T}$ число $\mu^0(k)$, определенное по формуле (2), является конечным.

Имеют место соотношения

$$1-\mu_0 d(k;z) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \\ -\infty \quad \text{при} \quad z \to m(k), \\ \text{монотонно убывает для всякого} \quad z \in (-\infty, m(k)), \end{cases}$$

$$1-\frac{\mu_l}{2} d(k;z) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \\ -\infty \quad \text{при} \quad z \to m(k), \\ \text{монотонно убывает для всякого} \quad z \in (-\infty, m(k)), \end{cases}$$

$$1-\mu_N c_N(k;z) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \\ -\infty \quad \text{при} \quad z \to m(k), \\ \text{монотонно убывает для всякого} \quad z \in (-\infty, m(k)), \end{cases}$$

$$1-\mu_N s_N(k;z) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad z \to -\infty, \\ \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu_N \in (0, \mu^0(k)] \quad \text{для всякого} \quad z \in (-\infty, m(k)), \\ < 0 \quad \text{при} \quad \mu_N > \mu^0(k), \quad z = m(k). \end{cases}$$

Заметим, что функции $d(k;\cdot), c_N(k;\cdot), s_N(k;\cdot)$, определенные по формуле (1), являются положительными, монотонно возрастающими на $(-\infty, m(k))$. Поэтому из последних соотношений имеем

$$1-\mu_0 d(k;\cdot) \quad \text{имеет единственный нуль для любого } \mu_0 > 0,$$

$$1-\frac{\mu_l}{2} d(k;\cdot) \quad \text{имеет единственный нуль для любого } \mu_l > 0,$$

$$1-\mu_N c_N(k;\cdot) \quad \text{имеет единственный нуль для любого } \mu_N > 0,$$

$$1-\mu_N s_N(k;\cdot) = \begin{cases} \text{не имеет нулей при} \quad \mu_N \in (0;\mu^0(k)], \\ \text{имеет единственный нуль при} \quad \mu_N \in (\mu^0(k);\infty). \end{cases}$$

Отсюда и согласно леммам 2 и 1 получим доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняется предположение 1. Тогда $\tilde{\mathcal{E}}_k(p) \equiv \frac{2}{m}$ и

$$\Delta(k;z) = (1-\mu_0 d(k;z)) \prod_{l=1}^{N} \left(1-\mu_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 ls}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z} ds\right) \left(1-\mu_l \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 ls}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z} ds\right) =$$

$$= \left(1-\frac{2\mu_0\pi}{\frac{2}{m}-z}\right) \prod_{l=1}^{N} \left(1-\frac{\mu_l \pi}{\frac{2}{m}-z}\right)^2 = 0.$$

Отсюда легко находим нули функции $\Delta(k;\cdot)$: $z_0 = \frac{2}{m} - 2\mu_0\pi$ — однократный нуль, $z_l = \frac{2}{m} - \mu_l \pi$ — двукратный нуль, $l \in \{1, ..., N\}$. Согласно леммам 2 и 1 эти числа являются собственными значениями $h(k)$. Легко проверить, что этим собственным значениям соответствуют следующие собственные функции:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\mu_0\pi}, \quad \varphi_l^+ = \frac{\cos lp}{\mu_l \pi}, \quad \varphi_l^- = \frac{\sin lp}{\mu_l \pi}, \quad l = \overline{1, N}.$$

Теорема 2 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное чтение работы и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л.Д. *Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.* Труды матем. инс-та. АН СССР. 1963. 122 с.
2. D.C. Mattis *The few-body problem on lattice* // Rew. mod. Phys. **58**. 1986. P. 361–379.
3. S. Albeverio, S.N. Lakaev, K.A. Makarov, Z.I. Muminov *The threshold effects for the two-particle Hamiltonians* // Commun. Math. Phys. **262**. 2006. P. 91–115.
4. E.L. Lakshtanov, R.A. Minlos *The spectrum of two-particle bound states of transfer matrices of Gibbs fields (fields on a two-dimensional lattice: adjacent levels)* // Funct. Anal. Appl. Vol. 39, №. 1. 2005. P. 31–45.
5. P.A. Faria da Veiga, L. Ioriatti and M. O'Carroll *Energy momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians* // Physical review E, Vol. 66:1, 6130. 2002.
6. Муминов М.Э. *О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке* // Теор. Мат. Физика. Т. 153, №. 3. 2007. С. 381–387.
7. Муминов М.Э., Хуррамов А.М. *Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке* // Теор. Мат. Физика. Т. 177, №. 3. 2013. С. 480–493.
8. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики* М.: Мир. Т. 4. Анализ операторов. 1982.

Мухиддин Эшкобилович Муминов,
Самаркандский государственный университет, Узбекистан
ул. Университетский бульвар 15,
140101, г. Самарканд, Узбекистан
Faculty of Sains, Universiti Teknologi Malaysia (UTM)
Skudai,
81310, s. Johor, Malaysia
E-mail: mmuminov@mail.ru

Абдимажид Моликович Хуррамов,
Самаркандский государственный университет,
ул. Университетский бульвар 15,
140101, г. Самарканд, Узбекистан
E-mail: xurramov@mail.ru