ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 71-82.

УДК 517.9

УСЛОВИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

М.В. ДОНЦОВА

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида. Получены условия нелокальной разрешимости рассмотренной задачи Коши. Исследование нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений с правыми частями специального вида основано на методе дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки.

Mathematics Subject Classification: 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

1. Введение

Для исследования разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка применяются разнообразные методы. Например, классический метод характеристик, метод Галеркина, метод потоков, метод дополнительного аргумента [1].

Метод дополнительного аргумента — новый способ исследования разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, который не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их [2].

Применение этого метода позволяет во многих случаях более эффективно и конкретно определить условия локальной разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка без привлечения теоремы об обратной функции [2]–[13].

Впервые в работе [3] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x))\partial_x u(t,x) = 0, \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x))\partial_x v(t,x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

M.V. Dontsova, Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides.

Поступила 30 июня 2014 г.

где $u(t,x), v(t,x)$ —- неизвестные функции, a,c,b,g – известные положительные константы, $(t,x) \in \Omega_T$, где $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T, x \in (-\infty,\infty), T > 0\}$ с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - известные функции.

В работе [4] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (au(t,x) + bv(t,x) + h_1)\partial_x u(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (cu(t,x) + gv(t,x) + h_2)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{3}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, a,c,b,g,h_1,h_2 – известные положительные константы, f_1, f_2 – известные функции, $(t,x) \in \Omega_T$ с начальными условиями (2).

Системы вида (1), (3) встречаются в самых разных задачах из области естественных наук, например, при описании распространения возмущения конечной интенсивности при нестационарном одномерном течении идеального газа [5]. К системам такого вида приводится система уравнений Франкля [6], [7].

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1 u(t,x) + b_1 v(t,x))\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2 v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1 u(t,x) + g_1 v(t,x))\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{4}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $a_1,\ b_i,\ c_1,\ g_1,\ i = 1,2$ – известные положительные константы, $a_2,\ g_2$ – известные константы.

Для исследования разрешимости системы, близкой к системе (4), применялись самые разнообразные подходы. Описание многих современных подходов содержится в [1]. Например, в [1] содержится анализ разрешимости на основе классического метода характеристик, так и с использованием понятия обобщенного решения. Оба эти подхода, как и многие другие, имеют свои достоинства и недостатки. Так, в частности, в методе характеристик условием разрешимости в исходных координатах является существование обратной функции для решения характеристического уравнения. Нахождение обратной функции представляет собой более сложную проблему, чем исходная задача. Поэтому её не решают, а принимают допустимость обратного преобразования переменных в качестве условия [1].

В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента определяем условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы вида (4) с начальными условиями (2) на Ω_T, где $a_1,\ b_i,\ c_1,\ g_1,\ i = 1,2$ – известные положительные константы, $a_2,\ g_2$ – известные константы.

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (4), (2) расширенную характеристическую систему [7]–[11]:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = a_1 u(s,\eta_1(s,t,x)) + b_1 v(s,\eta_1(s,t,x)), \tag{5}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = c_1 u(s,\eta_2(s,t,x)) + g_1 v(s,\eta_2(s,t,x)), \tag{6}$$

$$\frac{du(s,\eta_1(s,t,x))}{ds} = a_2 u(s,\eta_1(s,t,x)) + b_2 v(s,\eta_1(s,t,x)), \tag{7}$$

$$\frac{v(s,\eta_2(s,t,x))}{ds} = g_2 v(s,\eta_2(s,t,x)), \tag{8}$$

$$\eta_1(t,t,x) = x,\ \eta_2(t,t,x) = x, \tag{9}$$

$$u(0,\eta_1(0,t,x)) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ v(0,\eta_2(0,t,x)) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{10}$$

Особенность полученной системы состоит в том, что неизвестные функции входят в нее в виде суперпозиции, что существенно затрудняет доказательство разрешимости задачи.

Вводим новые неизвестные функции:
$w_1(s,t,x) = u(s,\eta_1(s,t,x)),\ w_2(s,t,x) = v(s,\eta_2(s,t,x)),$
$w_3(s,t,x) = v(s,\eta_1(s,t,x)),\ w_4(s,t,x) = u(s,\eta_2(s,t,x)).$
Тогда расширенная характеристическая система примет вид:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = a_1 w_1(s,t,x) + b_1 w_3(s,t,x), \tag{11}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = c_1 w_4(s,t,x) + g_1 w_2(s,t,x), \tag{12}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = a_2 w_1(s,t,x) + b_2 w_3(s,t,x), \tag{13}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = g_2 w_2(s,t,x), \tag{14}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{15}$$

$$\eta_1(t,t,x) = x,\ \eta_2(t,t,x) = x, \tag{16}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{17}$$

Неизвестные функции $\eta_i,\ w_j,\ i = 1,2,\ j = \overline{1,4}$ зависят не только от t и x, но и от дополнительного аргумента s. Интегрируя уравнения (11)–(14) по аргументу s, и учитывая условия (15)–(17), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t (a_1 w_1 + b_1 w_3) d\tau, \tag{18}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t (c_1 w_4 + g_1 w_2) d\tau, \tag{19}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s (a_2 w_1 + b_2 w_3) d\tau, \tag{20}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int_0^s g_2 w_2 d\tau, \tag{21}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1), \tag{22}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{23}$$

Подставим (18), (19) в (20)–(23), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1 w_1 + b_1 w_3) d\tau) + \int_0^s (a_2 w_1(\tau,t,x) + b_2 w_3(\tau,t,x)) d\tau, \tag{24}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1 w_4(\tau,t,x) + g_1 w_2(\tau,t,x)) d\tau) + \int_0^s g_2 w_2(\tau,t,x) d\tau, \tag{25}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t (a_1 w_1 + b_1 w_3) d\tau), \tag{26}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t (c_1 w_4 + g_1 w_2) d\tau). \tag{27}$$

Мы будем писать, что константы $K_0,\ K_1,\ K_2...$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедлива лемма:

Лемма 1. *Пусть функции $w_1(s,t,x)$, $w_2(s,t,x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений* (24) - (27), *являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции $u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ будут решением задачи* (4), (2) *на Ω_{T_0}, $T_0 \le T$, где T_0 — константа, определяемая через исходные данные.*

Лемма 1 составляет основу метода дополнительного аргумента. Лемма 1 доказывается так же, как в работах [7]–[11].

2. Существование локального решения

Для доказательства существования решения задачи (4), (2) в классе ограниченных функций будем использовать систему интегральных уравнений (24)–(27).

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \le s \le t \le T,\ x \in (-\infty,+\infty),\ T > 0\}$,

$C_\varphi = \max\{\sup\limits_R \left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\}$, $l = max\{a_1,\ |a_2|,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ g_1,\ |g_2|\}$,

$\|U\| = \sup\limits_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|$, $\|f\| = \sup\limits_{\Omega_T} |f(t,x)|$, $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}(\Omega_*)$ — пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$ на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2.....$

Введем условия, играющие ключевую роль в доказательстве нелокальной разрешимости задачи Коши (4), (2):

$$a_1 > 0,\ b_i > 0,\ c_1 > 0,\ g_1 > 0,\ \varphi_1'(x) \ge 0,\ \varphi_2'(x) \ge 0,\ i = 1,2. \tag{28}$$

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (4), (2), у которого гладкость по переменной не ниже, чем у начальных данных.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_i \in \bar{C}^2(R)$, $i = 1,2$, и выполняются условия* (28). *Тогда для любого $T_2 > 0$, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$, задача Коши* (4), (2) *имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_{T_2})$, которое определяется из системы интегральных уравнений* (24) - (27).

Доказательство теоремы разбито на две леммы.

Лемма 2. *Система интегральных уравнений* (24)–(27) *имеет единственное решение $w_j \in \bar{C}^{1,1,1}(\Gamma_{T_2})$, где $j = \overline{1,4}$, $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$.*

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [13]. Поэтому приведем только его ключевые пункты.

Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (24)–(27) зададим равенствами:

$$w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x),\ w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x),\ w_{30}(s,t,x) = \varphi_2(x),\ w_{40}(s,t,x) = \varphi_1(x).$$

Первое и последующие приближения системы уравнений (24)–(27) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1,2,\ldots)$:

$$w_{1n}(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (a_1 w_{1n} + b_1 w_{3n}) d\tau) + \int\limits_0^s (a_2 w_{1n} + b_2 w_{3n}) d\tau, \tag{29}$$

$$w_{2n}(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (c_1 w_{4n}(\tau,t,x) + g_1 w_{2n}(\tau,t,x)) d\tau) + \int\limits_0^s g_2 w_{2n}(\tau,t,x) d\tau, \tag{30}$$

$$w_{3n}(s,t,x) = w_{2(n-1)}(s,s,x - \int\limits_s^t (a_1 w_{1n} + b_1 w_{3n}) d\tau), \tag{31}$$

$$w_{4n}(s,t,x) = w_{1(n-1)}(s,s,x - \int\limits_s^t (c_1 w_{4n} + g_1 w_{2n}) d\tau). \tag{32}$$

Для системы уравнений (29)–(32) нулевое приближение определим равенствами:

$$w_{jn}^0 = w_{j(n-1)},\ j = \overline{1,4}.$$

Для системы уравнений (29)–(32) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w_{1n}^{k+1}(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t (a_1 w_{1n}^k + b_1 w_{3n}^k) d\tau) + \int\limits_0^s (a_2 w_{1n}^k + b_2 w_{3n}^k) d\tau, \tag{33}$$

$$w_{2n}^{k+1}(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t (c_1 w_{4n}^k(\tau,t,x) + g_1 w_{2n}^k(\tau,t,x)) d\tau) + \int\limits_0^s g_2 w_{2n}^k(\tau,t,x) d\tau, \tag{34}$$

$$w_{3n}^{k+1}(s,t,x) = w_{2(n-1)}(s,s,x - \int\limits_s^t (a_1 w_{1n}^k + b_1 w_{3n}^k) d\tau), \tag{35}$$

$$w_{4n}^{k+1}(s,t,x) = w_{1(n-1)}(s,s,x - \int\limits_s^t (c_1 w_{4n}^k + g_1 w_{2n}^k) d\tau). \tag{36}$$

Так же, как в [13], установлено, что для всех $0 \le t \le T_1$, где
$T_1 = \min(\frac{1}{20 C_\varphi l}, \frac{1}{4l})$, последовательные приближения (33)–(36) ограничены, непрерывны, сходятся к непрерывному решению системы (29)–(32), для которого справедливы оценки: $\|w_{jn}\| \le 2C_\varphi,\ j = \overline{1,4}$.

Так же, как в [13], установлено, что для всех $0 \le t \le T_1$, где
$T_1 = \min(\frac{1}{20 C_\varphi l}, \frac{1}{4l})$, существуют производные $\partial_x w_{jn},\ j = \overline{1,4}$, и справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_{1n}\| \le 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\| \le 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\| \le 6C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\| \le 6C_\varphi.$$

Для всех $0 \le t \le T_1$, где $T_1 = \min(\frac{1}{20 C_\varphi l}, \frac{1}{4l})$, последовательные приближения, определяемые из системы (29)–(32), сходятся к решению системы (24)–(27), и справедливы оценки:

$$\|w_j\| \le 2C_\varphi,\ j = \overline{1,4}.$$

После доказывается, что $w_{jnx} \to w_{jx} = \partial_x w_j,\ j = \overline{1,4}$, где функции $\partial_x w_j$ являются непрерывными по всем своим аргументам на Γ_{T_2},
$T_2 = \min(\frac{1}{25 C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$. Справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_i\| \le 4C_\varphi,\ i = 1,2,\ \|\partial_x w_3\| \le 6C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\| \le 6C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что $w_j,\ j = \overline{1,4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_{T_2}. Единственность решения доказывается так же, как в статье [13].

Лемма 3. *При выполнении условий* (28) *функции* $\{w_j\}$, $j = \overline{1,4}$, *представляющие собой решение системы уравнений* (24)–(27), *имеют непрерывные и ограниченные производные* $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x t}$, $j = \overline{1,4}$ *на* Γ_{T_2}, *где* $T_2 = \min(\frac{1}{25 C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$.

Доказательство. Дважды продифференцируем последовательные приближения (29)–(32) по x и обозначим $\omega_j^n = w_{jnxx},\ j = \overline{1,4}$. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_1^n = -\varphi_1' \int\limits_0^t (a_1 \omega_1^n + b_1 \omega_3^n) d\tau + \int\limits_0^s (a_2 \omega_1^n + b_2 \omega_3^n) d\tau + \\ + \varphi_1'' \cdot (1 - \int\limits_0^t (a_1 w_{1nx} + b_1 w_{3nx}) d\tau)^2, \end{aligned} \tag{37}$$

$$\omega_2^n = -\varphi_2' \int\limits_0^t (c_1 \omega_4^n + g_1 \omega_2^n) d\tau + \int\limits_0^s g_2 \omega_2^n d\tau + \varphi_2'' \cdot (1 - \int\limits_0^t (c_1 w_{4nx} + g_1 w_{2nx}) d\tau)^2, \tag{38}$$

$$\omega_3^n = \omega_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(a_1w_{1nx}+b_1w_{3nx})d\tau)^2 - w_{2(n-1)x}\int\limits_s^t(a_1\omega_1^n+b_1\omega_3^n)d\tau, \tag{39}$$

$$\omega_4^n = \omega_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(c_1w_{4nx}+g_1w_{2nx})d\tau)^2 - w_{1(n-1)x}\int\limits_s^t(c_1\omega_4^n+g_1\omega_2^n)d\tau. \tag{40}$$

При выполнении условий (28), с учетом установленных выше оценок
$\|w_{jn}\| \le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$, имеем
$|\int\limits_s^t(aw_{1n}+bw_{3n})d\tau| \le tl(||w_{1n}||+||w_{3n}||) \le 4tlC_\varphi \le \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \le 0.16.$

Аналогично $|\int\limits_s^t(c_1w_{4n}+g_1w_{2n})d\tau| \le 0.16.$

Зафиксируем точку x_0. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x\,|x_0-0.16 \le x \le x_0+0.16\}.$$

Докажем равностепенную непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x при $x\in\Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x в выбранной, произвольной точке x_0, т.е. на R. Равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x используется для доказательства сходимости последовательных приближений $\omega_j^n,\ j=\overline{1,4}$.

Возьмем $x_1, x_2\in\Omega_{x_0}$. Докажем, что справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}(s,t,x_1)-\eta_{1n}(s,t,x_2)| \le |x_1-x_2|, \tag{41}$$

$$|\eta_{2n}(s,t,x_1)-\eta_{2n}(s,t,x_2)| \le |x_1-x_2|, \tag{42}$$

где

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x-\int\limits_s^t(a_1w_{1n}(\tau,t,x)+b_1w_{3n}(\tau,t,x))d\tau,$$

$$\eta_{2n}(s,t,x) = x-\int\limits_s^t(c_1w_{4n}(\tau,t,x)+g_1w_{2n}(\tau,t,x))d\tau.$$

Продифференцировав последовательные приближения (29)–(32) по x, получим

$$w_{1nx} = \varphi_1'(x-\int\limits_0^t(a_1w_1+b_1w_3)d\tau)\cdot(1-\int\limits_0^t(a_1w_{1nx}+b_1w_{3nx})d\tau)+ \\ +\int\limits_0^s(a_2w_{1nx}+b_2w_{3nx})d\tau, \tag{43}$$

$$w_{2nx} = \varphi_2'(x-\int\limits_0^t(c_1w_{4n}+g_1w_{2n})d\tau)\cdot(1-\int\limits_0^t(c_1w_{4nx}+g_1w_{2nx})d\tau)+\int\limits_0^s g_2w_{2nx}d\tau, \tag{44}$$

$$w_{3nx} = w_{2(n-1)x}\cdot(1-\int\limits_s^t(a_1w_{1nx}+b_1w_{3nx})d\tau), \tag{45}$$

$$w_{4nx} = w_{1(n-1)x}\cdot(1-\int\limits_s^t(c_1w_{4nx}+g_1w_{2nx})d\tau). \tag{46}$$

Система (43) – (46) эквивалентна следующей системе:

$$w_{1nx} = \varphi_1'(x-\int\limits_0^t(a_1w_1+b_1w_3)d\tau)\cdot(1-\int\limits_0^t(a_1w_{1nx}+b_1w_{3nx})d\tau)\exp(a_2s)+ \\ +\int\limits_0^s b_2w_{3nx}\exp(a_2(s-\tau))d\tau, \tag{47}$$

$$w_{2nx} = \varphi_2'(x-\int\limits_0^t(c_1w_{4n}+g_1w_{2n})d\tau)\cdot(1-\int\limits_0^t(c_1w_{4nx}+g_1w_{2nx})d\tau)\exp(g_2s), \tag{48}$$

$$w_{3nx} = w_{2(n-1)x}\cdot(1-\int\limits_s^t(a_1w_{1nx}+b_1w_{3nx})d\tau), \tag{49}$$

$$w_{4nx} = w_{1(n-1)x} \cdot (1 - \int\limits_s^t (c_1 w_{4nx} + g_1 w_{2nx}) d\tau). \tag{50}$$

Предположим, что

$$w_{1(n-1)x} \geq 0,\ w_{2(n-1)x} \geq 0. \tag{51}$$

При выполнении условий (28) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что для всех $n \in N$ на Γ_{T_2} справедливы неравенства:

$$1 - \int\limits_s^t (a_1 w_{1nx} + b_1 w_{3nx}) d\tau > 0,\ 1 - \int\limits_s^t (c_1 w_{4nx} + g_1 w_{2nx}) d\tau > 0. \tag{52}$$

Из (49)–(52) следует, что $w_{3nx} \geq 0,\ w_{4nx} \geq 0$.

Из (47), (48) при выполнении условий (28), с учетом неравенств (52), получаем

$$w_{1nx} \geq 0,\ w_{2nx} \geq 0.$$

Так как $w_{1nx} \geq 0,\ w_{2nx} \geq 0,\ w_{3nx} \geq 0,\ w_{4nx} \geq 0$, то

$$1 - \int\limits_s^t (a_1 w_{1nx} + b_1 w_{3nx}) d\tau \leq 1,\ 1 - \int\limits_s^t (c_1 w_{4nx} + g_1 w_{2nx}) d\tau \leq 1. \tag{53}$$

В силу неравенств (52), (53) по теореме о конечных приращениях получаем, что справедливы неравенства (41), (42).

Из (37), (39) при выполнении условий (28) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции получаем, что справедливы следующие неравества:

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \Phi_{1n} +$$
$$+(C_\varphi lt + lt)(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{2n} + |\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - \omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))| +$$
$$+4C_\varphi lt(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$

где

$$\Phi_{1n} = |(\varphi_1''(\eta_{1n}(0,t,x_1)) - \varphi_1''(\eta_{1n}(0,t,x_2)))\eta_{1nx}^2(s,t,x_1) +$$
$$+\varphi_1''(\eta_{1n}(0,t,x_2))[\eta_{1nx}^2(0,t,x_1) - \eta_{1nx}^2(0,t,x_2)] -$$
$$-(\varphi_1'(\eta_{1n}(0,t,x_1)) - \varphi_1'(\eta_{1n}(0,t,x_2))) \cdot \int\limits_0^t (a\omega_1^n(\tau,t,x_1) + b\omega_3^n(\tau,t,x_1)) d\tau|,$$
$$\Phi_{2n} = |\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2)) \cdot [\eta_{1nx}^2(s,t,x_1) - \eta_{1nx}^2(s,t,x_2)] -$$
$$-\int\limits_s^t (a\omega_1^n(\tau,t,x_1) + b\omega_3^n(\tau,t,x_1)) d\tau \cdot$$
$$\cdot [w_{2(n-1)x}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - w_{2(n-1)x}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))]|,$$
$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t (aw_{1n}(\tau,t,x) + bw_{3n}(\tau,t,x)) d\tau.$$

Следовательно, на Γ_{T_2}, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$, справедливы следующие неравества:

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < \Phi_{1n} +$$
$$+0.14(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|),$$
$$|\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{2n} + |\omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_1)) - \omega_2^{n-1}(s,s,\eta_{1n}(s,t,x_2))| +$$
$$+0.16(|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| + |\omega_3^n(s,t,x_1) - \omega_3^n(s,t,x_2)|).$$

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех функций, входящих в Φ_{1n}, Φ_{2n}, для любого сколько угодно малого числа ε можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех n будет

$\Phi_{1n} < 0.5\varepsilon,\ \Phi_{2n} < 0.5\varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Предположим, что $|\omega_2^{(n-1)}(s,t,x_1) - \omega_2^{(n-1)}(s,t,x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Тогда

$$|\omega_1^n(s,t,x_1) - \omega_1^n(s,t,x_2)| < 0.5\varepsilon +$$

$$+0.14(|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|),$$

$$|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)|+|\omega_3^n(s,t,x_1)-\omega_3^n(s,t,x_2)|<\frac{20}{7}\varepsilon.$$

Следовательно, $|\omega_1^n(s,t,x_1)-\omega_1^n(s,t,x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1-x_2| < \delta$. Аналогично $|\omega_2^n(s,t,x_1)-\omega_2^n(s,t,x_2)|<\varepsilon$ при $|x_1-x_2|<\delta$.

Итак, последовательности $\{\omega_i^n(s,t,x)\},\ i=1,2$ равностепенно непрерывны по x при $x\in\Omega_{x_0}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n=-\varphi_1'(\eta_1(0,t,x))\int\limits_0^t(a_1\tilde{\omega}_1^n+b_1\tilde{\omega}_3^n)d\tau+\int\limits_0^s(a_2\tilde{\omega}_1^n+b_2\tilde{\omega}_3^n)d\tau+$$

$$+\varphi_1''\cdot(1-\int\limits_0^t(a_1w_{1x}+b_1w_{3x})d\tau)^2,$$

$$\tilde{\omega}_2^n=-\varphi_2'(\eta_2(0,t,x))\int\limits_0^t(c_1\tilde{\omega}_4^n+g_1\tilde{\omega}_2^n)d\tau+\int\limits_0^s g_2\tilde{\omega}_2^n d\tau+$$

$$+\varphi_2''\cdot(1-\int\limits_0^t(c_1w_{4x}+g_1w_{2x})d\tau)^2,$$

$$\tilde{\omega}_3^n=\tilde{\omega}_2^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(a_1w_{1x}+b_1w_{3x})d\tau)^2-w_{2x}(s,s,\eta_1(s,t,x))\int\limits_s^t(a_1\tilde{\omega}_1^n+b_1\tilde{\omega}_3^n)d\tau,$$

$$\tilde{\omega}_4^n=\tilde{\omega}_1^{n-1}\cdot(1-\int\limits_s^t(c_1w_{4x}+g_1w_{2x})d\tau)^2-w_{1x}(s,s,\eta_2(s,t,x))\int\limits_s^t(c_1\tilde{\omega}_4^n+g_1\tilde{\omega}_2^n)d\tau.$$

При выполнении условий (28) на Γ_{T_2} установлено, что $\tilde{\omega}_j^n\to\tilde{\omega}_j,\ j=\overline{1,4}$, справедливы оценки:

$$\|\tilde{\omega}_1\|\le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_2\|\le 2C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_3\|\le 3C_\varphi,\ \|\tilde{\omega}_4\|\le 3C_\varphi.$$

Из неравенства

$$\left\|\omega_1^{N+k}-\tilde{\omega}_1\right\|+\left\|\omega_2^{N+k}-\tilde{\omega}_2\right\|\le\left(\frac{1}{3}\right)^k(\left\|\omega_1^N-\tilde{\omega}_1\right\|+\left\|\omega_2^N-\tilde{\omega}_2\right\|)+4\varepsilon,$$

следует, что $\omega_1^{N+k}\to\tilde{\omega}_1,\ \omega_2^{N+k}\to\tilde{\omega}_2$ при $N\to\infty,\ k\to\infty$. Также установлено, что $\omega_3^n\to\tilde{\omega}_3$ при $n\to\infty$, $\omega_4^n\to\tilde{\omega}_4$ при $n\to\infty$.

Получаем, что $w_{jnxx}\to w_{jxx}=\tilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ $j=\overline{1,4}$ непрерывные и ограниченные на Γ_{T_2} при выполнении условий (28).

Установлено, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial xt},\ j=\overline{1,4}$ на Γ_{T_2} при выполнении условий (28).

3. Существование нелокального решения

Теорема 2. *Пусть $\varphi_i\in\bar{C}^2(R),\ i=1,2,$ и выполняются условия* (28).

Тогда для любого $T>0$ задача Коши (4), (2) *имеет единственное решение $u(t,x),v(t,x)\in\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений* (24)–(27).

Доказательство. Продифференцируем систему уравнений (4) по x и обозначим $p(t,x)=u_x(t,x)$, $q(t,x)=v_x(t,x)$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\partial_t p+(a_1u(t,x)+b_1v(t,x))\partial_x p=-a_1p^2-b_1pq+a_2p+b_2q,\\ \partial_t q+(c_1u(t,x)+g_1v(t,x))\partial_x q=-g_1q^2-c_1pq+g_2q.\\ p(0,x)=\varphi_1'(x),\quad q(0,x)=\varphi_2'(x).\end{cases}\tag{54}$$

Добавим к системе уравнений (18)–(23) два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a_1\gamma_1^2 - b_1\gamma_1\gamma_2(s,s,\eta_1) + a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2(s,s,\eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g_1\gamma_2^2 - c_1\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2. \end{cases} \tag{55}$$

с условиями: $\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)$.

Перепишем систему уравнений (55) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-a_1\gamma_1^2 + (b_2 - b_1\gamma_1)\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1) + a_2\gamma_1]d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-g_1\gamma_2^2 - c_1\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2]d\tau. \end{cases} \tag{56}$$

Существование непрерывного решения системы (56) на Γ_{T_2}, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$ при выполнении условий (28) проводится с помощью метода последовательных приближений. Определим последовательные приближения:

$$\begin{cases} \gamma_1^{n+1} = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-a_1(\gamma_1^n)^2 + (b_2 - b_1\gamma_1^n)\gamma_2^n(\tau,\tau,\eta_1) + a_2\gamma_1^n]d\tau, \\ \gamma_2^{n+1} = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-g_1(\gamma_2^n)^2 - c_1\gamma_1^n(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2^n + g_2\gamma_2^n]d\tau, \end{cases} \tag{57}$$

при этом $\gamma_1^0 = \varphi_1'(\eta_1), \ \gamma_2^0 = \varphi_2'(\eta_2)$.

При выполнении условий (28) на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$|\gamma_i^{n+1}| \le 2C_\varphi, \ |\eta_{ix}| \le 1, |\ \gamma_{ix}^{n+1}| \le 5C_\varphi, \ i = 1,2.$$

Докажем сходимость последовательных приближений на Γ_{T_2}. Рассмотрим неравенства:

$$|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n| \le |\int\limits_0^s [a_1((\gamma_1^n)^2 - (\gamma_1^{n-1})^2) + b_1(\gamma_1^n\gamma_2^n - \gamma_1^{n-1}\gamma_2^{n-1})]d\tau| +$$

$$+|\int\limits_0^s [({\gamma_1}^n - {\gamma_1}^{n-1})a_2 + ({\gamma_2}^n - {\gamma_2}^{n-1})b_2]d\tau| \le$$

$$\le lt(\left\|\gamma_1^n + \gamma_1^{n-1}\right\| \cdot \left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\| + \left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\| \cdot \left\|\gamma_2^n\right\| + \left\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\right\| \cdot \left\|\gamma_1^{n-1}\right\|)$$

$$+lt(\left\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\right\| + \left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\|).$$

Учитывая оценки $|\gamma_i^{n+1}| \le 2C_\varphi, \ i = 1,2$, получим

$$\left\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\right\| \le (6ltC_\varphi + lt)\left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\| + (2ltC_\varphi + lt)\left\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\right\|.$$

Аналогично получаем, что справедливо неравенство:

$$\left\|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\right\| \le (6ltC_\varphi + lt)\left\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\right\| + 2ltC_\varphi\left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\|.$$

Сложим последние неравенства и в результате получим:

$$||\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n|| + ||\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n|| \le (8ltC_\varphi + 2lt)(||\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}|| + ||\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}||).$$

Установлено, что для всех $0 \le t \le T_2$, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$, справедливо неравество:

$$\left\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\right\| + \left\|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\right\| \le 0.52(\left\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\right\| + \left\|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\right\|).$$

Таким образом, приходим к выводу, что последовательные приближения $\{\gamma_i^n\}, \ i = 1,2$ сходятся к непрерывному решению системы (56) на Γ_{T_2} при выполнении условий (28). Для решения будут справедливы оценки:

$$|\gamma_i| \le 2C_\varphi, \ i = 1,2.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_{21} = \varphi_1''(\eta_1)\,\eta_{1x}+ \\ +\int\limits_0^s [(a_2 - 2a_1\gamma_1 - b_1\gamma_2\,(\tau,\tau,\eta_1))\omega_{21} + (b_2 - b_1\gamma_1)\omega_{22}\,(\tau,\tau,\eta_1)\,\eta_{1x}]d\tau, \\ \omega_{22} = \varphi_2''(\eta_2)\,\eta_{2x}+ \\ +\int\limits_0^s [(g_2 - 2g_1\gamma_2 - c_1\gamma_1\,(\tau,\tau,\eta_2))\omega_{22} - c_1\omega_{21}\,(\tau,\tau,\eta_2)\,\gamma_2\eta_{2x}]\,d\tau. \end{cases} \tag{58}$$

Доказательство существования непрерывного решения системы (58) проводится с помощью метода последовательных приближений:

$$\begin{cases} \omega_{21}^{n+1} = \varphi_1''(\eta_1)\,\eta_{1x}+ \\ +\int\limits_0^s [(a_2 - 2a_1\gamma_1 - b_1\gamma_2\,(\tau,\tau,\eta_1))\omega_{21}^n + (b_2 - b_1\gamma_1)\omega_{22}^n\,(\tau,\tau,\eta_1)\,\eta_{1x}]d\tau, \\ \omega_{22}^{n+1} = \varphi_2''(\eta_2)\,\eta_{2x}+ \\ +\int\limits_0^s [(g_2 - 2g_1\gamma_2 - c_1\gamma_1\,(\tau,\tau,\eta_2))\omega_{22}^n - c_1\omega_{21}^n\,(\tau,\tau,\eta_2)\,\gamma_2\eta_{2x}]\,d\tau. \end{cases} \tag{59}$$

При выполнении условий (28) на Γ_{T_2} справедливы оценки:

$$\left\|\omega_{2i}^{n+1}\right\| \le 5C_\varphi,\ \ i = 1,2.$$

Рассмотрим неравенства:

$$\left|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\right| \le l\int\limits_0^s (1 + 2\left|\gamma_1\right| + \left|\gamma_2\right|)\left|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\right| d\tau +$$

$$+l\int\limits_0^s (1 + \left|\gamma_1\right|)\cdot\left|\omega_{22}^n(\tau,\tau,\eta_1) - \omega_{22}^{n-1}(\tau,\tau,\eta_1)\right| d\tau$$

Учитывая оценки $|\gamma_i| \le 2C_\varphi,\ i = 1,2$, получим

$$\left\|\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n\right\| \le (6ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\right\| + (2ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\right\|.$$

Аналогично получаем, что справедливо неравенство:

$$\left\|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\right\| \le (6ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\right\| + (2ltC_\varphi + lt)\left\|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\right\|.$$

Сложим последние неравенства и в результате получим:

$$||\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n|| + ||\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n|| \le (8ltC_\varphi + 2lt)(||\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}|| + ||\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}||).$$

Установлено, что для всех $0 \le t \le T_2$, где $T_2 = \min(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l})$, справедливо неравество:

$$||\omega_{21}^{n+1} - \omega_{21}^n|| + ||\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n|| \le 0.52(||\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}|| + ||\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}||).$$

Следовательно, последовательные приближения $\{\omega_{2i}^n\},\ i = 1,2$ сходятся к непрерывному решению системы (58) на Γ_{T_2} при выполнении условий (28).

Из неравенства

$$\left\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\right\| + \left\|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\right\| \le (0.52)^p(\left\|\gamma_{1x}^N - \omega_{21}\right\| + \left\|\gamma_{2x}^N - \omega_{22}\right\|) + 3\varepsilon$$

следует, что $\left\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\right\| + \left\|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\right\| \to 0$ при $N \to \infty, p \to \infty$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} {\gamma_{ix}}^n = \omega_{2i},\ i = 1,2$. Следовательно, существует непрерывная производная по x у решения системы (56), $\gamma_{ix} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} = \omega_{2i}$, и справедливы оценки:

$$\|\gamma_{ix}\| \le 5C_\varphi,\ \ i = 1,2.$$

Так же, как в статье [3], доказано существование непрерывной производной по t у решения системы (56). Так как существует непрерывно дифференцируемое решение задачи (56), то $\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \partial_x u,\ \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \partial_x v$.

Так же, как в [3], установлено, что последовательные приближения (57) сходятся к непрерывному решению системы (56), у которого существуют непрерывные производные по t и x .

Следовательно, $\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \partial_x u,\ \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \partial_x v.$

Из (13)–(14) следует, что

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1)\exp(a_2 s) + \int\limits_0^s b_2 w_3 \exp(a_2(s-\tau))d\tau,$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2)\exp(g_2 s).$$

Получаем, что

$$\|w_2\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T),$$

$$\|w_1\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tb_2\exp(|g_2|T)),$$

следовательно, справедливы оценки:

$$\|v\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \|u\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tb_2\exp(|g_2|T)). \tag{60}$$

Из (55) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s (a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1) - a_2)d\tau) + \\ + \int\limits_0^s b_2\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1)\exp(-\int\limits_\tau^s (a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) - a_2)d\nu)d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s (g_1\gamma_2 + c_1\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2) - g_2)d\tau). \end{cases} \tag{61}$$

При выполнении условий (28) получаем: $\gamma_i \ge 0, i = 1,2$, значит,

$\|\gamma_2\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \|\gamma_1\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tb_2\exp(|g_2|T))$, следовательно, справедливы оценки:

$$\|\partial_x v\| \le C_\varphi \exp(|g_2|T),\ \|\partial_x u\| \le C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tb_2\exp(|g_2|T)). \tag{62}$$

Так же, как в статье [3] установлено, что при всех t и x справедливы оценки:

$$\left|\partial^2_{x^2} u\right| \le E_{11}\ ch(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}} sh(t\sqrt{C_{12}C_{21}}), \tag{63}$$

$$\left|\partial^2_{x^2} v\right| \le E_{21}\ ch(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{11}\sqrt{\frac{C_{21}}{C_{12}}} sh(t\sqrt{C_{12}C_{21}}), \tag{64}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{21}$ — постоянные, определяемые через исходные данные.

Полученные глобальные оценки (60), (62)–(64) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$. Взяв в качестве начальных значений $u(T_0,x),\ v(T_0,x)$, продлим решение на некоторый промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, беря в качестве начальных значений $u(T_1,x),\ v(T_1,x)$, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\|\partial_x u\|$, $\|\partial_x v\|$, которые ограничены глобальными оценками (62), справедливыми на любом промежутке разрешимости. Для вторых производных справедливы оценки (63), (64), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения задачи Коши (4), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для системы вида

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t u(t,x) + (u(t,x) + 4v(t,x))\partial_x u(t,x) = -2u(t,x) + 3v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (7u(t,x) + 5v(t,x))\partial_x v(t,x) = -v(t,x), \end{array} \right. \tag{65}$$

где $u(t,x), v(t,x)$ – неизвестные функции, $(t,x) \in \Omega_T$ с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = \frac{arctgx}{4},\ v(0,x) = \varphi_2(x) = -\frac{1}{5(e^x+1)}. \tag{66}$$

Так как $\varphi_i \in \bar{C}^2(R),\ i = 1,2,\ a_1 = 1 > 0,\ b_1 = 4 > 0,\ c_1 = 7 > 0,$
$g_1 = 5 > 0,\ b_2 = 3 > 0,\ \varphi_1'(x) = \frac{1}{4(1+x^2)} > 0,\ \varphi_2'(x) = \frac{e^x}{5(e^x+1)^2} > 0,$
то по теореме 2 задача Коши (65), (66) имеет единственное решение
$u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.И. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике* М.: Наука. 1978. 592 с.
2. Иманалиев М.И., Панков П.С., Алексеенко С.Н *Метод дополнительного аргумента* // Вестник КазНУ. Серия «Математика, механика, информатика». Спец. выпуск Алматы. №1. 2006. С. 60–64.
3. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Донцова М.В. *Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико – математические науки. Вып. 3 (177). 2013. С. 190–201.
4. Донцова М.В. *Исследование разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со свободными членами* // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2014». М.: МАКС Пресс. 2014. 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).
5. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа* М.: Наука. 1987. 840 с.
6. Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике* М.: Наука. 1973. 712 с.
7. Шемякина Т.А. *Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки. Вып. 2 (146). 2012. С. 130–131.
8. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. *Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта* // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Киров, ВятГГУ. Вып. 14. 2012. С. 34–41.
9. Алексеенко С.Н., Донцова М.В. *Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта* // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Киров, ВятГГУ. Вып. 15. 2013. С. 52–59.
10. Донцова М.В. *Условия локальной разрешимости задачи Коши для системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта* // XVIII Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки. 28–31 мая 2013 г. Н. Новгород, НИУ РАНХИГС. 2013. С. 183–185.
11. Иманалиев М. И., Ведь Ю. А. *О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом* // Дифференциальные уравнения. Т.25. №3. 1989. С. 465–477.
12. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. *К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема* // Доклады АН СССР. Т.325. №6. 1982. С. 1111–1115.
13. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. *К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // Доклады РАН. Т.379. №1. 2001. С. 16–21.

Донцова Марина Владимировна,
НГПУ имени К. Минина,
ул. Ульянова, 1,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru