ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 50-62.

УДК 517.98

# ОБРАТИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С ОПЕРАТОРНЫМИ МЕРАМИ

В.М. БРУК

**Аннотация.** На ограниченном замкнутом интервале рассматривается интегральное уравнение с операторными мерами в бесконечномерном случае. В терминах граничных значений устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых линейные отношения $S$, порожденные этим интегральным уравнением, обладают свойствами: $S$ замкнуто; $S$ обратимо; ядро $S$ конечномерно; $S$ имеет замкнутую область значений; $S$ непрерывно обратимо и другими. Результаты применяются к системе интегральных уравнений, переходящей в квазидифференциальное уравнение в случае абсолютно непрерывных мер, и к интегральному уравнению с многозначным импульсным воздействием.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, операторная мера, гильбертово пространство, линейное отношение, спектр, квазипроизводная, импульсное воздействие.

**Mathematics Subject Classification:** 47A06, 47A10, 34B27

## 1. Введение

Интегральные уравнения с операторными мерами являются достаточно общими. Например, они охватывают интегро-дифференциальные уравнения с интегралами Стилтьеса [1], дифференциальные уравнения, коэффициенты которых – обобщенные функции [2] (способ сведения интегрального уравнения к уравнению из [2] приводится в [3]).

В данной работе на отрезке $[a, b]$ рассматривается интегральное уравнение

$$y(t) = y_0 - iJ\int_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})y(s) - iJ\int_{t_0}^{t}(d\mathbf{m})f(s), \tag{1}$$

где $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Здесь $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$ – операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset [a, b]$ и принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$, причем мера $\mathbf{m}$ неотрицательна (эти меры продолжены на отрезок $[a_0, b_0] \supset (a_0, b_0) \supset [a, b]$ способом, указанным ниже); $J$ – оператор в $H$ со свойствами: $J^* = J$, $J^2 = E$ ($E$ – тождественный оператор), $y_0 \in H$; $y$ – неизвестная функция, $f \in \mathfrak{H} = L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$ ($\mathfrak{H}$ определено ниже). Предполагается, что меры $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$ имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$.

Отметим, что случай бесконечномерного $H$ существенно отличается от конечномерного. Это объясняется тем фактом, что достаточно сложно устроено пространство $\mathfrak{H} = L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$. Элементы этого пространства – необязательно функции со значениями в $H$.

---

V.M. Bruk, Invertibility of linear relations generated by integral equation with operator measures.



Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00378).

*Поступила 15 мая 2014 г.*

Уравнение (1) вместе с граничными условиями порождает, вообще говоря, не линейные операторы, а линейные отношения (многозначные операторы). Если граничные условия нулевые, то соответствующее отношение называется минимальным, а при отсутствии граничных условий – максимальным. Всякое линейное отношение, являющееся сужением максимального отношения $L$ и расширением минимального $L_0$, может быть определено с помощью некоторого линейного отношения $\theta$, входящего в граничные условия, причем взаимно однозначным является соответствие между такими отношениями $\theta$ и определяемыми ими отношениями $L_\theta$, $L_0 \subset L_\theta \subset L$. В связи с этим возникает задача: выделить граничные условия (т.е. отношения $\theta$), которые определяют отношения $L_\theta$ с некоторыми наперед заданными свойствами.

В данной работе рассматриваются свойства (называемые состояниями) из работ [4], [5] и устанавливается, что отношение $L_\theta$ тогда и только тогда обладает соответствующим свойством, когда то же свойство имеет отношение $\theta$. Среди этих свойств такие, как обратимость, непрерывная обратимость, фредгольмовость и другие. Доказательства основаны на утверждениях об абстрактных пространствах граничных значений из работ [6], [7].

В качестве приложения рассматривается система интегральных уравнений, переходящая в случае абсолютно непрерывных мер в квазидифференциальное уравнение с квазипроизводными в смысле работ [8], [9]. В последнем разделе изучается интегральное уравнение с импульсным воздействием. Подобные уравнения описывают поведение развивающихся во времени процессов, подверженных кратковременным возмущениям. Математическая модель таких процессов имеется, например, в монографии [10, гл. 1, п. 1, с. 5]. В данной работе импульсное воздействие задается линейным отношением, т.е. воздействие является многозначным. В статье [11] рассматривались дифференциальные операторы, порожденные сильно непрерывным семейством эволюционных операторов в банаховом пространстве, и установлены необходимые и достаточные условия непрерывной обратимости и фредгольмовости таких дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями. Метод (с незначительными изменениями) из данной работы применим к операторам, рассмотренным в [11].

Отметим, что линейные отношения впервые были использованы для описания в терминах граничных условий расширений дифференциальных операторов в статье [12].

## 2. Вспомогательные утверждения

Пусть $H$ – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \to \mathbf{P}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в $H$. Функция $\mathbf{P}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [13, гл. 5, п. 1, с. 324]), если $\mathbf{P}$ равна нулю на пустом множестве, и для любых непересекающихся борелевских множеств $\Delta_n$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\Delta_n)$$

с рядом, сходящимся в слабой операторной топологии. Через $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P})$ обозначим

$$\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_j \|\mathbf{P}(\Delta_j)\|,$$

где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_j \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{P})$ называется вариацией меры $\mathbf{P}$ на борелевском множестве $\Delta$.

Пусть мера $\mathbf{P}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для $\rho$-почти всех $\xi \in [a,b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в $H$, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$

справедливо равенство

$$\mathbf{P}(\Delta)=\int_\Delta \Psi(\xi)d\rho. \tag{2}$$

Функция $\Psi$ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой $\rho$-меры. Интеграл (2) сходится в смысле обычной нормы операторов ([13, гл. 5, теор. 1.2, с. 325]). Из (2) следует, что измеримые по Борелю ограниченные функции со значениями в $H$ интегрируемы по мере $\mathbf{P}$.

Далее всякую меру $\mathbf{P}$, имеющую ограниченную вариацию, продолжаем на некоторый отрезок $[a_0,b_0]\supset(a_0,b_0)\supset[a,b]$, полагая $\mathbf{P}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a_0,b_0]\backslash[a,b]$.

На множестве ступенчатых на отрезке $[a_0,b_0]$ функций, принимающих значения в $H$, введем квазискалярное произведение

$$(x,y)_{\mathbf{m}}=\int_{a_0}^{b_0}((d\mathbf{m})x(t),y(t)).$$

Отождествляя с нулем функции $y$, для которых $(y,y)_{\mathbf{m}}=0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство, обозначаемое $\mathfrak{H}=L_2(H,d\mathbf{m};a,b)$. Элементы $\mathfrak{H}$ – это классы функций, отождествленных между собой по норме $\|y\|_{\mathbf{m}}=(y,y)_{\mathbf{m}}^{1/2}$. Чтобы не усложнять терминологию, класс функций с представителем $y$ обозначаем тем же символом и пишем $y\in\mathfrak{H}$. Равенства между функциями из $\mathfrak{H}$ понимаются как равенства соответствующих классов эквивалентности. Описание пространства $\mathfrak{H}$ имеется в [14] (см. также библиографию там).

Пространство $\mathfrak{H}$ и рассматриваемые ниже линейные отношения не изменятся, если мы заменим интервал $(a_0,b_0)$ на $(a_0',b_0')$, где точки $a_0'$, $b_0'$ вводятся также, как точки $a_0$, $b_0$, т.е. $[a_0',b_0']\supset(a_0',b_0')\supset[a,b]$ и $\mathbf{p}(\Delta)=\mathbf{m}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a_0',b_0']\backslash[a,b]$.

Рассмотрим уравнения

$$y(t)=y_0-iJ\int_{t_0}^t(d\mathbf{p})y(s)-i\lambda J\int_{t_0}^t(d\mathbf{m})y(s)-iJ\int_{t_0}^t(d\mathbf{m})f(s), \tag{3}$$

$$z(t)=z_0-iJ\int_{t_0}^t(d\mathbf{p}^*)z(s)-i\bar\lambda J\int_{t_0}^t(d\mathbf{m})z(s)-iJ\int_{t_0}^t(d\mathbf{m})g(s), \tag{4}$$

где $y_0,z_0\in H$, $f,g\in\mathfrak{H}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $t,t_0\in[a_0,b_0]$. Отметим, что уравнение (1) получается из (3) при $\lambda=0$.

Из [3], [14] вытекает, что для любых $y_0,z_0\in H$, $f,g\in\mathfrak{H}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ уравнения (3), (4) имеют единственные решения. Эти решения непрерывны слева и $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$. Через $W(t,\lambda)$, $U(t,\bar\lambda)$ обозначим операторные решения уравнений

$$W(t,\lambda)x_0=x_0-iJ\int_{t_0}^t(d\mathbf{p})W(s,\lambda)x_0-i\lambda J\int_{t_0}^t(d\mathbf{m})W(s,\lambda)x_0,$$

$$U(t,\bar\lambda)\tilde x_0=\tilde x_0-iJ\int_{t_0}^t(d\mathbf{p}^*)U(s,\bar\lambda)\tilde x_0-i\bar\lambda J\int_{t_0}^t(d\mathbf{m})U(s,\bar\lambda)\tilde x_0,$$

где $x_0,\tilde x_0\in H$. Из [3], [14] следует, что $U^*(t,\bar\lambda)JW(t,\lambda)=J$, $W(t,\lambda)JU^*(t,\bar\lambda)=J$ и функции $\lambda\to W(t,\lambda)$, $\lambda\to U(t,\lambda)$ голоморфны при всех $\lambda\in\mathbb{C}$ при каждом фиксированном $t\in[a_0,b_0]$. Повторяя доказательство аналогичных утверждений из [3], [14], получим следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Функции $y$, $z$ тогда и только тогда являются решением уравнений* (3), (4) *соответственно, когда $y$, $z$ имеют вид*

$$y(t)=W(t,\lambda)y_0-W(t,\lambda)iJ\int_{t_0}^{t}U^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s), \tag{5}$$

$$z(t)=U(t,\bar{\lambda})z_0-U(t,\bar{\lambda})iJ\int_{t_0}^{t}W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})g(s). \tag{6}$$

## 3. Максимальное и минимальное отношения

Пусть $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ – банаховы пространства. Под линейным отношением $\mathrm{T}$ понимается любое линейное многообразие $\mathrm{T}\subset\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$. Терминологию по линейным отношениям можно найти, например, в [4], [5]. Далее используются следующие обозначения: $\{\cdot,\cdot\}$ – упорядоченная пара; $\ker\mathrm{T}$ – множество элементов $x\in\mathbf{B}_1$ таких, что $\{x,0\}\in\mathrm{T}$; $\mathrm{Ker}\mathrm{T}$ – множество упорядоченных пар вида $\{x,0\}\in\mathrm{T}$; $\mathcal{D}(\mathrm{T})$ – область определения $\mathrm{T}$, т.е. множество элементов $x\in\mathbf{B}_1$, для каждого из которых существует элемент $x'\in\mathbf{B}_2$ такой, что пара $\{x,x'\}\in\mathrm{T}$; $\mathcal{R}(\mathrm{T})$ – область значений $\mathrm{T}$, т.е. множество элементов $x'\in\mathbf{B}_2$, для каждого из которых существует элемент $x\in\mathbf{B}_1$ такой, что пара $\{x,x'\}\in\mathrm{T}$; $\mathrm{T}^{-1}$ – отношение, обратное к $\mathrm{T}$, т.е отношение, состоящее из пар $\{x',x\}$, где $\{x,x'\}\in\mathrm{T}$. Отношение $\mathrm{T}$ называется сюръективным, если $\mathcal{R}(\mathrm{T})=\mathbf{B}_2$; обратимым или инъективным, если $\ker\mathrm{T}=\{0\}$ (т.е. отношение $\mathrm{T}^{-1}$ является оператором); непрерывно обратимым, если оно замкнуто, обратимо и сюръективно (т.е. $\mathrm{T}^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором). Суммой отношений $\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2\subset\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$ называется отношение $\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2$, состоящее из всех пар вида $\{x,x_1+x_2\}$, где $x\in\mathcal{D}(\mathrm{T}_1)\cap\mathcal{D}(\mathrm{T}_2)$, $\{x,x_1\}\in\mathrm{T}_1$, $\{x,x_2\}\in\mathrm{T}_2$. Произведением отношений $\mathrm{T}\subset\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$, $\mathrm{S}\subset\mathbf{B}_2\times\mathbf{B}_3$ называется отношение $\mathrm{ST}$, состоящее из пар $\{x_1,x_3\}\in\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_3$, для каждой из которых существует такой элемент $x_2$, что $\{x_1,x_2\}\in\mathrm{T}$, $\{x_2,x_3\}\in\mathrm{S}$.

Далее $\rho(\mathrm{T})$ обозначает резольвентное множество замкнутого отношения $\mathrm{T}$, т.е. множество точек $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых отношение $(\mathrm{T}-\lambda E)^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором; $\sigma_c(\mathrm{T})$ ($\sigma_r(\mathrm{T})$) – непрерывный (остаточный) спектр отношения $\mathrm{T}$, т.е. множество таких точек $\lambda\in\mathbb{C}$, что отношение $(\mathrm{T}-\lambda E)^{-1}$ является плотно определенным и неограниченным (неплотно определенным) оператором; $\sigma_p(\mathrm{T})$ – точечный спектр отношения $\mathrm{T}$, т.е. множество точек $\lambda\in\mathbb{C}$, для которых отношение $(\mathrm{T}-\lambda E)^{-1}$ не является оператором. Линейные операторы считаются линейными отношениями, поэтому запись $\{x_1,x_2\}\in\mathrm{T}$ используется и для оператора $\mathrm{T}$. Поскольку все рассматриваемые отношения являются линейными, слово "линейное" часто будет опускаться.

Пусть $L'$ – отношение, состоящее из пар $\{\tilde{y},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, для каждой из которых существует пара $\{y,f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y},\tilde{f}\}$ и удовлетворяющая уравнению (1). Через $L$ обозначим замыкание $L'$ и назовем $L$ *максимальным отношением*, порожденным интегральным уравнением (1). Отношение $L$, вообще говоря, не будет оператором, так как может случиться, что функция $y$ отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$, а $f$ отлична от нуля. *Минимальное отношение* $L_0$ определим как сужение $L'$ на множество функций $y$ таких, что $y(a_0)=y(b_0)=0$, где $y$ – решение (1).

**Замечание 1.** Определение точек $a_0$, $b_0$ и равенства $\mathbf{p}(\Delta)=\mathbf{m}(\Delta)=0$, выполняющиеся для всех борелевских множеств $\Delta\subset[a_0,b_0]\backslash[a,b]$, влекут $y(a_0)=\lim\limits_{t\to a-0}y(t)$, $y(b_0)=\lim\limits_{t\to b+0}y(t)$. Максимальное и минимальное отношения не изменятся, если мы заменим интервал $(a_0,b_0)$ на $(a_0',b_0')$, где точки $a_0'$, $b_0'$ определяются так же, как $a_0$, $b_0$, а меры $\mathbf{p}$, $\mathbf{m}$ продолжаются на интервал $(a_0',b_0')$ так же, как на $(a_0,b_0)$. Поэтому минимальное отношение $L_0$ может быть определено как сужение $L'$ на множество функций $y$, финитных на $(a_0,b_0)$, где $y$ – решение (1).

Обозначим через $Q_0$ (через $\widehat{Q}_0$) множество элементов $x \in H$, для которых при $\mu \in \mathbb{C}$ функция $t \to W(t,\mu)x$ ($t \to U(t,\mu)x$ соответственно) отождествлена с нулем в $\mathfrak{H}$. Положим $Q = H \ominus Q_0$ и $\widehat{Q} = H \ominus \widehat{Q}_0$. Множества $Q_0$, $\widehat{Q}_0$ (и, следовательно, $Q$, $\widehat{Q}$) не зависят от замены точки $\mu$ другой точкой $\lambda \in \mathbb{C}$. Это вытекает из следующих равенств, получаемых из (5), (6),

$$W(t,\lambda)c = W(t,0)c - \lambda W(t,0)iJ\int_{t_0}^{t} U^*(s,0)(d\mathbf{m})W(s,\lambda)c, \tag{7}$$

$$W(t,0)c = W(t,\lambda)c + \lambda W(t,\lambda)iJ\int_{t_0}^{t} U^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})W(s,0)c, \quad c \in H. \tag{8}$$

Соответствующие равенства для $U(t,\lambda)$, $U(t,0)$ получаются из (7), (8) заменой $W$ на $U$ и $U$ на $W$.

На линейных многообразиях $Q$ и $\widehat{Q}$ введем нормы равенствами

$$\|c\|_- = \left(\int_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})W(s,\mu)c, W(s,\mu)c)\right)^{1/2}, \ \mu \in \mathbb{C}, \ c \in Q, \tag{9}$$

$$\|\widehat{c}\|_- = \left(\int_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})U(s,\mu)\widehat{c}, U(s,\mu)\widehat{c})\right)^{1/2}, \ \mu \in \mathbb{C}, \ \widehat{c} \in \widehat{Q}. \tag{10}$$

Из формулы (2), в которой мера $\mathbf{P}$ заменена на $\mathbf{m}$, получим

$$\|c\|_- = \left(\int_{a_0}^{b_0} (\Psi(s)W(s,\mu)c, W(s,\mu)c)\, d\rho\right)^{1/2} \leqslant \gamma\,\|c\|, \ \gamma > 0, \ c \in Q. \tag{11}$$

Через $Q_-$, $\widehat{Q}_-$ обозначим пополнение $Q$, $\widehat{Q}$ по нормам (9), (10) соответственно. Из (7), (8) следует, что замена $\mu$ на $\lambda \in \mathbb{C}$ в (9) (или в (10)) приводит к тому же множеству $Q_-$ ($\widehat{Q}_-$ соответственно) с эквивалентной нормой. Из (11) и аналогичного неравенства для нормы (10) вытекает, что пространства $Q_-$, $\widehat{Q}_-$ можно рассматривать как пространства с негативной нормой относительно $Q$ [13, гл. 1, п. 1, с. 45]. Через $Q_+$, $\widehat{Q}_+$ обозначим соответствующие пространства с позитивной нормой. Из определения пространств с позитивной и негативной нормами, следует, что $Q_+ \subset Q$, $\widehat{Q}_+ \subset Q$.

Предположим, что последовательности $\{c_n\}$ и $\{\widehat{c}_n\}$ ($c_n \in Q, \widehat{c}_n \in \widehat{Q}$) сходятся соответственно в $Q_-$ и $\widehat{Q}_-$ к $c_0 \in Q_-$ и $\widehat{c}_0 \in \widehat{Q}_-$. Тогда последовательности $\{W(\cdot,\lambda)c_n\}$, $\{U(\cdot,\lambda)\widehat{c}_n\}$ фундаментальны в $\mathfrak{H}$ и поэтому сходятся в $\mathfrak{H}$ к некоторым элементам из $\mathfrak{H}$. Через $W(\cdot,\lambda)c_0$ и $U(\cdot,\lambda)\widehat{c}_0$ обозначим эти элементы, а через $\mathcal{W}(\lambda)$, $\mathcal{U}(\lambda)$ – операторы $c \to W(\cdot,\lambda)c$ и $\widehat{c} \to U(\cdot,\lambda)\widehat{c}$, соответственно, где $c \in Q_-$, $\widehat{c} \in \widehat{Q}_-$. Операторы $\mathcal{W}(\lambda): Q_- \to \mathfrak{H}$, $\mathcal{U}(\lambda): \widehat{Q}_- \to \mathfrak{H}$ непрерывны, взаимно однозначны и их области значений замкнуты. Поэтому сопряженные операторы $\mathcal{W}^*(\lambda)$, $\mathcal{U}^*(\lambda)$ непрерывно отображают $\mathfrak{H}$ на $Q_+$, $\widehat{Q}_+$ соответственно. Для всех $x \in Q$, $f \in \mathfrak{H}$ имеем

$$(f, \mathcal{W}(\lambda)x)_{\mathbf{m}} \ = \ \int_{a_0}^{b_0} ((d\mathbf{m})f(s), W(s,\lambda)x) \ = \ \int_{a_0}^{b_0} (W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})f(s), x) \ = \ (\mathcal{W}^*(\lambda)f, x).$$

Аналогичное равенство выполняется для оператора $\mathcal{U}(\lambda)$. Отсюда, принимая во внимание, что $Q$, $\widehat{Q}$ плотно вкладываются в $Q_-$ и $\widehat{Q}_-$ соответственно, получим

$$\mathcal{W}^*(\lambda)f = \int_{a_0}^{b_0} W^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})f(s), \quad \mathcal{U}^*(\lambda)g = \int_{a_0}^{b_0} U^*(s,\lambda)(d\mathbf{m})g(s). \tag{12}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Операторы $\mathcal{W}^*(\lambda)$, $\mathcal{U}^*(\lambda)$ непрерывно отображают $\mathfrak{H}$ на $Q_+$, $\widehat{Q}_+$ соответственно и имеют вид* (12).

Следующая теорема и следствия доказываются аналогично соответствующим утверждениям из [3], [14], [15].

**Теорема 1.** *Пара* $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *тогда и только тогда принадлежит отношению* $L - \lambda E$, *когда существует пара* $\{y, f\}$, *отождествленная в* $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ *с* $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, *для которой выполняется равенство* (5), *где* $y_0 \in Q_-$, $f \in \mathfrak{H}$.

**Следствие 1.** *Отношение* $L_0$ *замкнуто.*

**Следствие 2.** *Область значений отношения* $L_0 - \lambda E$ *состоит из всех элементов* $f \in \mathfrak{H}$, *для которых выполняется равенство*

$$\mathcal{U}^*(\bar{\lambda})f = \int_{a_0}^{b_0} U^*(s, \bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s) = 0.$$

**Следствие 3.** *Оператор* $\mathcal{W}(\lambda)$ *является непрерывным взаимно однозначным отображением* $Q_-$ *на* $\ker(L - \lambda E)$.

## 4. Пространства граничных значений и состояния линейных отношений

Далее нам потребуется *пространство граничных значений* (ПГЗ) отношения $L - \lambda E$. Пусть $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $B_1$, $B_2$ – банаховы пространства, $T \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ – замкнутое линейное отношение, $\delta : T \to B_1 \times B_2$ – линейный оператор, $\delta_j = P_j\delta$, $j = 1, 2$ ($P_j$ обозначает естественную проекцию на множество $G_j$ в декартовом произведении $G = G_1 \times G_2$). Четверка $(B_1, B_2, \delta_1, \delta_2)$ называется ПГЗ для отношения $T$ (см. [6], [7] и библиографию там), если $\delta$ непрерывно отображает $T$ на $B_1 \times B_2$, и сужение $\delta_1$ на $\mathrm{Ker}T$ является взаимно однозначным отображением $\mathrm{Ker}T$ на $B_1$. Определим оператор $\Phi_\delta : B_1 \to B_2$ и отношение $T_0$ равенствами $\Phi_\delta = \delta_2(\delta_1|_{\mathrm{KerT}})^{-1}$, $T_0 = \ker\delta$. Отметим, что оператор $\Phi_\delta$ ограничен. Из определения ПГЗ следует, что между отношениями $\widehat{T}$ со свойством $T_0 \subset \widehat{T} \subset T$ и отношениями $\theta \subset B_1 \times B_2$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\delta\widehat{T} = \theta$. В этом случае обозначаем $\widehat{T} = T_\theta$. Подобные обозначения используются далее.

Пусть $S$ – линейное отношение, $S \subset B_1' \times B_2'$, где $B_1'$, $B_2'$ – банаховы пространства. Следующие условия взяты из [4], [5]: 1) $S$ замкнуто; 2) $\ker S = \{0\}$; 3) $\dim\ker S < \infty$; 4) отношение $S$ корректно; 5) $\overline{\mathcal{R}(S)} = \mathcal{R}(S)$; 6) $\mathcal{R}(S)$ – замкнутое подпространство в $B_2'$ конечной коразмерности; 7) $\mathcal{R}(S) = B_2'$; 8) $S$ непрерывно обратимо.

Следуя [4], [5], будем говорить, что отношение $S$ находится в *состоянии* $k$, если оно удовлетворяет условию $k$). Условие 4) означает обратимость отношения $S$ и замкнутость области значений $\mathcal{R}(S)$ [5]. Отношение $S$ называется *фредгольмовым*, если оно удовлетворяет условиям 3), 6).

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathcal{R}(T) = \mathbf{B}_2$. *Отношение* $T_\theta$ *тогда и только тогда находится в состоянии* $k$ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$, *когда в том же состоянии находится отношение* $\theta - \Phi_\delta$.

Доказательство вытекает из следующей леммы, установленной в [7].

**Лемма 3.** *Отношение* $T_\theta$ *замкнуто тогда и только тогда, когда отношение* $\theta$ *замкнуто. Пусть* $\mathcal{R}(T) = \mathbf{B}_2$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *область значений* $\mathcal{R}(T_\theta)$ *замкнута в том и только том случае, когда область значений* $\mathcal{R}(\theta - \Phi_\delta)$ *замкнута;*

2) $\dim \mathbf{B}_2/\overline{\mathcal{R}(T_\theta)} = \dim B_2/\overline{\mathcal{R}(\theta - \Phi_\delta)}$;

3) $\dim\ker T_\theta = \dim\ker(\theta - \Phi_\delta)$.

Построим пространство граничных значений для отношения $L$. Обозначим $Q_b = W(b_0, 0)J\widehat{Q}_+$. Оператор $W(b_0, 0)$ взаимно однозначно отображает $H$ на $H$. Используя последнее равенство, введем в $Q_b$ норму пространства $Q_+$. Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = a_0$, $W(a_0, \lambda) = E$.

Согласно теореме 1, пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ тогда и только тогда принадлежит отношению $L - \lambda E$, когда существует пара $\{y, f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ с $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, для которой выполняется равенство

$$y(t) = W(t,\lambda)c_\lambda + F_\lambda(t), \tag{13}$$

где $c_\lambda \in Q_-$,

$$F_\lambda(t) = -W(t,\lambda)iJ\int_{a_0}^{t} U^*(s,\bar{\lambda})(d\mathbf{m})f(s)ds. \tag{14}$$

Каждой паре $\{y, f\}$, представленной в виде (13) при $\lambda = 0$, поставим в соответствие пару граничных значений

$$\mathrm{Y} = \tilde{\delta}_1\{y,f\} = c_0 \in Q_-,$$

$$\mathrm{Y}' = \tilde{\delta}_2\{y,f\} = -W(b_0,0)J\int_{a_0}^{b_0} U^*(s,0)(d\mathbf{m})f(s)ds \in Q_b.$$

Из (13), (14) следует, что если пары $\{y,f\}, \{\tilde{y},\tilde{f}\} \in L$ отождествлены между собой в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, то их граничные значения совпадают.

Отметим, что если $c_0 \in Q$ (т.е. пара $\{y,f\} \in L'$), то

$$\mathrm{Y} = y(a_0), \quad \mathrm{Y}' = y(b_0) - W(b_0,0)y(a_0). \tag{15}$$

Положим $\tilde{\delta}\{y,f\} = \{\mathrm{Y},\mathrm{Y}'\}$. Из теоремы 1, леммы 2 и следствия 3 вытекает, что четверка $(Q_-, Q_b, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$ является ПГЗ для отношения $L$; при этом $\ker\tilde{\delta} = L_0$. Как и выше, $L_\theta$ – такое линейное отношение, что $L_0 \subset L_\theta \subset L$ и $\tilde{\delta}L_\theta = \theta \subset Q_- \times Q_b$.

Пусть пара $\{y,f\} \in L$. Тогда $\{y, f-\lambda y\} \in L - \lambda E$. Положим $\delta(\lambda)\{y, f-\lambda y\} = \tilde{\delta}\{y,f\}$ и $\delta_j(\lambda) = P_j\delta(\lambda)$, где $P_1$, $P_2$ – естественные проекции $Q_- \times Q_b$ на $Q_-$, $Q_b$ соответственно. Ясно, что $\tilde{\delta} = \delta(0)$.

Оператор $\tilde{\delta}$ непрерывно отображает $L$ на $Q_-\times Q_b$, а оператор, ставящий в соответствие каждой паре $\{y,f\} \in L$ пару $\{y, f-\lambda y\} \in L - \lambda E$, непрерывно и взаимно однозначно отображает $L$ на $L - \lambda E$. Поэтому оператор $\delta(\lambda)$ непрерывно отображает $L - \lambda E$ на $Q_-\times Q_b$. Из (7), (8) следует, что сужение $\delta_1(\lambda)$ на $\mathrm{Ker}(L-\lambda E)$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{Ker}(L-\lambda E)$ на $Q_-$. Таким образом, четверка $(Q_-, Q_b, \delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda))$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ является ПГЗ для отношения $L - \lambda E$. Оператор $\Phi_{\delta(\lambda)} = \delta_2(\lambda)(\delta_1(\lambda)|_{\mathrm{Ker}(L-\lambda E)})^{-1}$ имеет вид

$$\Phi_{\delta(\lambda)} = -\lambda W(b_0,0)J\int_{a_0}^{b_0} U^*(s,0)(d\mathbf{m})W(s,\lambda)ds.$$

Если $c_0 \in Q$, то

$$\Phi_{\delta(\lambda)}c_0 = (W(b_0,\lambda) - W(b_0,0))c_0. \tag{16}$$

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Отношение $L_\theta - \lambda E$ тогда и только тогда находится в состоянии $k$, когда в том же состоянии находится отношение $\theta - \Phi_{\delta(\lambda)}$.*

**Следствие 4.** *Пусть отношение $\theta$ замкнуто. Для принадлежности точки $\lambda$ точечному спектру $\sigma_p(L_\theta)$ отношения $L_\theta$ необходимо и достаточно, чтобы $\ker(\theta-\Phi_{\delta(\lambda)}) \neq \{0\}$. Точка $\lambda$ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(T_\theta)$ (непрерывному спектру $\sigma_c(L_\theta)$ ) тогда и только тогда, когда отношение $(\theta - \Phi_{\delta(\lambda)})^{-1}$ является неплотно определенным (плотно определенным и неограниченным) оператором. Точка $\lambda$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(L_\theta)$ в том и только том случае, когда $(\theta - \Phi_{\delta(\lambda)})^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором.*

В заключение этого раздела рассмотрим такие интегральные уравнения, которые в случае абсолютной непрерывности операторных мер переходят в квазидифференциальные уравнения.

Пусть $\mathcal{H}$ – конечномерное гильбертово пространство. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ систему, состоящую из $r \geqslant 2$ уравнений,

$$u_{j-1}(t) = u_{j-1}(t_0) + \sum_{k=1}^{j+1} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{j,k}) u_{k-1}(s), \;\; j = 1, ..., r-1,$$

$$u_{r-1}(t) = u_{r-1}(t_0) + \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{r,k}) u_{k-1}(s) + \lambda i^{-r} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}_1) u_0(s) + i^{-r} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}_1) f(s), \tag{17}$$

где $\mathbf{p}_{j,k}$, $\mathbf{m}_1$ – операторные меры на $[a,b]$, значения которых – линейные операторы в $\mathcal{H}$, причем мера $\mathbf{m}_1$ неотрицательна; $f \in L_2(\mathcal{H}, d\mathbf{m}_1; a, b)$; $\lambda \in \mathbb{C}$; $u = u_0, u_1, ..., u_{r-1}$ – неизвестные функции. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_{j,k}$ удовлетворяют условиям: (a) $\mathbf{p}_{j,k} = 0$ при $k > j+1$; (b) существуют такие операторные функции $t \to p_{j,j+1}(t)$ с нормами $t \to \|p_{j,j+1}(t)\| \in L_1(a,b)$, что $\mathbf{p}_{j,j+1}(\Delta) = \int_\Delta p_{j,j+1}(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta$ (т.е. меры $\mathbf{p}_{j,j+1}$ абсолютно непрерывны) и операторы $p_{j,j+1}(t)$ имеют обратные для всех $t \in [a,b]$.

Сведем систему (17) к уравнению первого порядка. Обозначим $\mathbf{p} = iJ\mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – матрица порядка $r$ с элементами $\mathbf{p}_{j,k}$, $J = i^{r+1}\Lambda$, $\Lambda$ – матрица, на побочной диагонали которой последовательно (сверху вниз) стоят $-E, E, ..., (-1)^r E$, остальные элементы равны нулю, $\mathbf{m}$ – матрица порядка $r$, у которой на пересечении первой строки и первого столбца стоит $\mathbf{m}_1$, остальные элементы равны нулю. Кроме того, положим $\widehat{u} = \mathrm{col}(u_0, ..., u_{r-1})$, $\check{f} = \mathrm{col}(f, 0, ..., 0)$ (столбец длины $r$). В столбце $\check{f}$ вместо нулей могут находиться произвольные функции. С использованием введенных обозначений система (17) запишется в виде (3), где $y = \widehat{u}$, $H = \mathcal{H}^r$:

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u}(t_0) - iJ \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}) \widehat{u}(s) - i\lambda J \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) \widehat{u}(s) - iJ \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{m}) \check{f}(s). \tag{18}$$

Функции $u_k$ ($k = 0, ..., r-1$), являющиеся решением системы (17), назовем *квазипроизводными* функции $u = u_0$ и обозначим $u_k = u^{[k]}$. Из (17) получим для всех $a_0 \leqslant t \leqslant b_0$, $j = 1, ..., r-1$

$$\int_{t_0}^{t} p_{j,j+1}(s) u_j(s) ds = u_{j-1}(t) - u_{j-1}(t_0) - \sum_{k=1}^{j} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{j,k}) u_{k-1}(s).$$

Левая (и, следовательно, правая) часть последнего равенства является абсолютно непрерывной функцией. Поэтому при $j = 1, ..., r-1$

$$u_j(t) = p_{j,j+1}^{-1}(t) \frac{d}{dt} \left( u_{j-1}(t) - u_{j-1}(t_0) - \sum_{k=1}^{j} \int_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}_{j,k}) u_{k-1}(s) \right). \tag{19}$$

Равенство (19) выполняется на отрезке $[a,b]$. Из (19) следует, что квазипроизводные $u_j$ однозначно определяются функцией $u = u_0$. Функцию $u$ назовем решением (17), если система функций $\widehat{u}$ является решением (18).

Пусть $W_m(t,\lambda)$ – операторное решение (17) при $f = 0$, $t_0 = a_0$, удовлетворяющее условию $W_m^{[j-1]}(a_0, \lambda) = \delta_{jm} E$ ($\delta_{jm}$ – символ Кронекера, $j, m = 1, ..., r$); $\widehat{W}(t,\lambda)$ – матрица с элементами $W_m^{[j-1]}(t,\lambda)$. Тогда функция $t \to \widehat{W}(t,\lambda)$ является решением уравнения (18) при $\check{f} = 0$.

Пространства $\mathfrak{H} = L_2(H, d\mathbf{m}; a, b)$ и $L_2(\mathcal{H}, d\mathbf{m}_1; a, b)$ совпадают. Всякая функция вида $\mathrm{col}(0, y_2, ..., y_{r-1})$ со значениями в $H = \mathcal{H}^r$ отождествлена в $\mathfrak{H}$ с нулем. В конечномерном случае $Q_- = Q$. Максимальное и минимальное отношения, порожденные системой (17), определяются следующим образом.

Максимальное отношение $L$ – это множество пар $\{\tilde{u},\tilde{f}\}\in\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$, для каждой из которых существует пара $\{u,f\}$, отождествленная в $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ с $\{\tilde{u},\tilde{f}\}$ и удовлетворяющая системе (17) при $\lambda=0$. Минимальное отношение $L_0$ – это сужение $L$ на множество функций $u$ таких, что $\widehat{u}(a_0)=\widehat{u}(b_0)=0$, где $u$ – решение (17).

Граничные значения определяются по формулам (15)

$$\mathrm{Y}=\tilde{\delta}_1\{u,f\}=\widehat{u}(a_0),\quad \mathrm{Y}'=\tilde{\delta}_2\{u,f\}=\widehat{u}(b_0)-\widehat{W}(b_0,0)\widehat{u}(a_0).$$

Тогда $\Phi_{\delta(\lambda)}=\widehat{W}(b_0,\lambda)-\widehat{W}(b_0,0)$.

Для системы интегральных уравнений (17) справедливо утверждение, аналогичное теореме 3. Отметим, что в конечномерном случае условия 1), 3), 5), 6) выполняются автоматически.

**Замечание 3.** Пусть все меры $\mathbf{p}_{j,k}$ абсолютно непрерывны, т.е. $\mathbf{p}_{j,k}(\Delta)=\int_\Delta p_{j,k}(t)dt$, $\|p_{j,k}(t)\|\in L_1(a,b)$, и $\mathbf{m}_1(\Delta)=\mu(\Delta)E$, где $\mu$ – обычная мера Лебега на $[a,b]$, т.е. $\mu([\alpha,\beta))=\beta-\alpha$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ (как и выше, полагаем $\mu(\Delta)=0$ для всякого борелевского множества $\Delta$ такого, что $[a,b]\cap\Delta=\varnothing$). Тогда $u^{[j]}$ являются квазипроизводными в смысле [8], [9]. При этом $u^{[r]}=i^{-r}f$, где

$$u^{[r]}=(u^{[r-1]})'-\sum_{k=1}^{r}p_{r,k}(t)u^{[k-1]}.$$

## 5. Интегральные уравнения с импульсными воздействиями

В этом разделе $H$ – сепарабельное гильбертово пространство и $\mathbf{m}(\Delta)=\mu(\Delta)E$, где $\mu$ – обычная мера Лебега на $[a,b]$. В этом случае отношение $L$ (и, следовательно, $L_0$) является оператором, $Q_-=Q_+=H$. Граничные значения определяются равенствами (15), а оператор $\Phi_{\delta(\lambda)}$ – равенством (16). Кроме того, при любом $\tau\in[a_0,b_0]$ оператор $\{y,f\}\to y(\tau)$ непрерывно отображает $L$ на $H$. Поэтому граничные значения можно определить формулами $\mathrm{Y}=y(a_0)$,$\mathrm{Y}'=y(b_0)$. Тогда $\Phi_{\delta(\lambda)}=W(b_0,\lambda)$. Таким образом, в теореме 3 и следствии 4 в качестве $\Phi_{\delta(\lambda)}$ может быть взят оператор, определенный равенством (16), или оператор $W(b_0,\lambda)$ (в зависимости от выбора ПГЗ).

Отметим, что в статье [16] другим способом получены утверждения, аналогичные теореме 3 и следствию 4, для дифференциального оператора, порожденного сильно непрерывным семейством эволюционных операторов $\mathcal{U}(t,s)$ в банаховом пространстве. Эти утверждения из [16] могут быть установлены методом (незначительно измененным), используемым в данной работе, с учетом теоремы 2, верной для банаховых пространств (при этом в качестве оператора $\Phi_{\delta(\lambda)}=W(b_0,\lambda)$ берется $e^{\lambda(b-a)}\mathcal{U}(b,a)$ ).

Переходим к рассмотрению уравнения (1) с многозначным импульсным воздействием, предполагая, что в (1) $\mathbf{m}(\Delta)=\mu(\Delta)E$, $t_0=a_0$.

Зафиксируем некоторую точку $t_1\in[a,b]$. Возможное изменение решения в точке $t_1$ определим следующим образом. Положим

$$y(t)=W(t,0)\tilde{c}_1-W(t,0)iJ\int_{a_0}^{t}U^*(s,0)f(s)ds,\ \ a_0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{20}$$

$$y(t)=W(t,0)W_+^{-1}(t_1,0)\tilde{c}_2-W(t,0)iJ\int_{t_1}^{t}U^*(s,0)f(s)ds,\ \ t_1<t\leqslant b_0. \tag{21}$$

где $f\in\mathfrak{H}$, $\tilde{c}_1,\tilde{c}_2\in H$, $W_+(t_1,0)=\lim\limits_{t\to t_1+0}W(t,0)$. Функция $y$, вообще говоря, имеет разрыв в точке $t_1$, обусловленный тем, что элемент $\tilde{c}_2\in H$ выбирается произвольно. Отметим, что $\tilde{c}_1=y(a_0)$, $\tilde{c}_2=\lim\limits_{t\to t_1+0}y(t)$.

Определим оператор $\mathcal{L}$ следующим образом. Считаем, что область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ состоит из функций $y$, имеющих вид (20), (21), и полагаем $\mathcal{L}y = f$. Оператор $\mathcal{L}$ замкнут.

В определении ПГЗ возьмем $B_1 = B_2 = H \times H$ и определим граничные значения равенствами

$$\gamma_1\{y,f\} = \mathrm{Y} = \{y(a_0), y^+(t_1)\}, \quad \gamma_2\{y,f\} = \mathrm{Y}' = \{y(t_1), y(b_0)\},$$

где $y^+(t_1) = \lim\limits_{t\to t_1+0} y(t)$. Из леммы 2 и следствия 3, непрерывной обратимости оператора $W(t,0)\colon H \to H$ следует, что четверка $(H\times H, H\times H, \gamma_1, \gamma_2)$ является ПГЗ для оператора $\mathcal{L}$. Положим $\gamma\{y,f\} = \{\mathrm{Y}, \mathrm{Y}'\}$.

Оператор $\Phi_\gamma$ задается равенством

$$\Phi_\gamma(\{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\}) = \{W(t_1,0)\tilde{c}_1, W(b_0,0)W_+^{-1}(t_1,0)\tilde{c}_2\}, \quad \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\} \in H \times H. \tag{22}$$

Здесь учтено, что функция $t \to W(t,0)$ непрерывна слева. В данном случае минимальный оператор $\mathcal{L}_0$ определяется как сужение оператора $\mathcal{L}$ на множество функций $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, для которых $y(a_0) = y(b_0) = y(t_1) = y^+(t_1) = 0$.

Пусть $\theta$ – линейное отношение, $\theta \subset (H \times H) \times (H \times H)$, $\mathcal{L}_\theta$ – такой оператор, что $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_\theta \subset \mathcal{L}$ и $\gamma\mathcal{L}_\theta = \theta$. Для оператора $\mathcal{L}_\theta$ справедливы утверждения, аналогичные теореме 3 и следствию 4.

Рассмотрим важный частный случай, когда отношение $\theta$ определяется двумя отношениями $\theta_{12}$ и $\theta_{21}$, состоящими соответственно из пар граничных значений в точке разрыва $t_1$ и пар граничных значений на концах $a_0$, $b_0$. Обозначим через $H_1$, $H_2$ первый и второй экземпляры пространства $H$ в декартовом произведении $H \times H$ и предположим, что отношение $\theta \subset (H_1 \times H_2) \times (H_1 \times H_2)$ состоит из пар вида

$$\{\mathrm{col}(x_1, x_2), \mathrm{col}(x_{12}, x_{21})\}, \tag{23}$$

где $\{x_2, x_{12}\} \in \theta_{12} \subset H_2 \times H_1$, $\{x_1, x_{21}\} \in \theta_{21} \subset H_1 \times H_2$ (здесь и далее пару $\{z_1, z_2\} \in H_1 \times H_2$ удобно обозначать как столбец $\mathrm{col}(z_1, z_2)$, чтобы проследить аналогию с операторами, задаваемыми матрицами). Таким образом, область определения оператора $\mathcal{L}_\theta$ состоит из функций $y$ вида (20), (21), удовлетворяющих граничным условиям

$$\{y(a_0), y(b_0)\} \in \theta_{21}, \quad \{y^+(t_1), y(t_1)\} \in \theta_{12}.$$

Отметим, что отношение $\theta$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуты отношения $\theta_{12}$ и $\theta_{21}$. Далее предполагаем замкнутость отношения $\theta$.

Для сокращения записи обозначим $\omega_1 = W(t_1, 0)$, $\omega_2 = W(b_0,0)W_+^{-1}(t_1,0)$. Пусть $\omega$ : $H_1 \times H_2 \to H_1 \times H_2$ – оператор, определяемый равенством $\omega\{x_1, x_2\} = \{\omega_1 x_1, \omega_2 x_2\}$, где $x_1 \in H_1 = H$, $x_2 \in H_2 = H$. Из (22), (23) следует, что отношение $\theta - \Phi_\gamma$ состоит из пар вида

$$\{\mathrm{col}(x_1, x_2), \mathrm{col}(-\omega_1 x_1 + x_{12}, x_{21} - \omega_2 x_2)\}, \tag{24}$$

где пары $\{x_2, x_{12}\} \in \theta_{12}$, $\{x_1, x_{21}\} \in \theta_{21}$.

Оператор $\omega$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $H_1 \times H_2$ на $H_1 \times H_2$. Поэтому отношения $\theta - \Phi_\gamma$ и $\zeta = \omega^{-1}(\theta - \Phi_\gamma)$ одновременно находятся или нет в состоянии $k$ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$. Обозначим $\zeta_{12} = \omega_1^{-1}\theta_{12}$, $\zeta_{21} = \omega_2^{-1}\theta_{21}$. Из (24) вытекает, что отношение $\zeta$ состоит из пар вида

$$\{\mathrm{col}(g_1, g_2), \mathrm{col}(-g_1 + g_{12}, g_{21} - g_2)\}, \tag{25}$$

где пары $\{g_2, g_{12}\} \in \zeta_{12}$, $\{g_1, g_{21}\} \in \zeta_{21}$.

**Лемма 4.** *Справедливы следующие утверждения: а)* $\dim\ker\zeta < \infty$ *тогда и только тогда, когда* $\dim\ker(\zeta_{12}\zeta_{21} - E) < \infty$ *и* $\dim\ker(\zeta_{21}\zeta_{12} - E) < \infty$*; б)* $\dim\ker\zeta = 0$ *в том и только том случае, когда* $\dim\ker(\zeta_{12}\zeta_{21} - E) = 0$ *и* $\dim\ker(\zeta_{21}\zeta_{12} - E) = 0$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{col}(g_1, g_2) \in \ker\zeta$. Из (25) следует существование таких элементов $g_{12}, g_{21} \in H$, что пары $\{g_2, g_{12}\} \in \zeta_{12}$, $\{g_1, g_{21}\} \in \zeta_{21}$ и $g_1 = g_{12}$, $g_2 = g_{21}$. Отсюда получаем, что $\{g_1, g_{12}\} \in \zeta_{12}\zeta_{21}$ и $g_1 \in \ker(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$. Аналогично получим $\{g_2, g_{21}\} \in \zeta_{21}\zeta_{12}$ и $g_2 \in \ker(\zeta_{21}\zeta_{12} - E)$.

С другой стороны, если $g_1 \in \ker(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$, то существуют такие элементы $g_{21}$ и $g_{12}$, что пары $\{g_1, g_{21}\} \in \zeta_{21}$, $\{g_{21}, g_{12}\} \in \zeta_{12}$ и $g_{12} = g_1$. Отсюда и из (25) следует $\mathrm{col}(g_1, g_{21}) \in \ker\zeta$. Аналогично получаем, что если $g_2 \in \ker(\zeta_{21}\zeta_{12} - E)$, то существует элемент $g_{12}$ со свойством $\mathrm{col}(g_{12}, g_2) \in \ker\zeta$. Из приведенных соотношений следуют все утверждения леммы. Лемма доказана.

Обозначим $Z_1 = \mathcal{R}(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$, $Z_2 = \mathcal{R}(\zeta_{21}\zeta_{12} - E)$.

**Лемма 5.** *Отношение $\zeta$ сюръективно тогда и только тогда, когда сюръективны отношения $\zeta_{12}\zeta_{21} - E$ и $\zeta_{21}\zeta_{12} - E$.*

Доказательство. Пусть отношение $\zeta$ сюръективно. Из (25) следует, что для любых $z_1, z_2 \in H$ найдутся такие пары $\{g_2, g_{12}\} \in \zeta_{12}$, $\{g_1, g_{21}\} \in \zeta_{21}$, что $-g_1 + g_{12} = z_1$, $g_{21} - g_2 = z_2$. Положим $z_2 = 0$. Тогда $g_2 = g_{21}$. Поэтому $\{g_1, g_{12}\} \in \zeta_{12}\zeta_{21}$ и $z_1 \in Z_1 = \mathcal{R}(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$. Отсюда в силу произвольности $z_1$ получаем $Z_1 = H$. Аналогично доказывается, что $Z_2 = \mathcal{R}(\zeta_{21}\zeta_{12} - E) = H$. Таким образом, отношения $\zeta_{12}\zeta_{21} - E$, $\zeta_{21}\zeta_{12} - E$ сюръективны.

Докажем обратное утверждение. Элемент $z_2 \in Z_2$ тогда и только тогда, когда найдется элемент $g_2$ такой, что пара $\{g_2, z_2\} \in \zeta_{21}\zeta_{12} - E$. Это равносильно существованию элементов $g_{12}$, $g_{21}$ со свойствами

$$\{g_2, g_{12}\} \in \zeta_{12}, \quad \{g_{12}, g_{21}\} \in \zeta_{21}, \quad g_{21} - g_2 = z_2. \tag{26}$$

Аналогично, элемент $z_1 \in Z_1$ в том и только том случае, когда существуют элементы $g_1$, $g'_{12}$, $g'_{21}$ со свойствами

$$\{g_1, z_1\} \in \zeta_{12}\zeta_{21} - E, \quad \{g_1, g'_{21}\} \in \zeta_{21}, \quad \{g'_{21}, g'_{12}\} \in \zeta_{12}, \quad g'_{12} - g_1 = z_1. \tag{27}$$

Из (26), (27) получаем, что $\{g_2 + g'_{21}, g_{12} + g'_{12}\} \in \zeta_{12}$, $\{g_{12} + g_1, g_{21} + g'_{21}\} \in \zeta_{21}$. Отсюда и из (25) следует $\{\mathrm{col}(g_{12} + g_1, g_2 + g'_{21}), \mathrm{col}(g'_{12} - g_1, g_{21} - g_2)\} \in \zeta$. Равенства (26), (27) влекут $\{\mathrm{col}(g_{12} + g_1, g_2 + g'_{21}), \mathrm{col}(z_1, z_2)\} \in \zeta$. Поэтому $\mathrm{col}(z_1, z_2) \in \mathcal{R}(\zeta)$.

Таким образом, если отношения $\zeta_{12}\zeta_{21} - E$ и $\zeta_{21}\zeta_{12} - E$ сюръективны, то сюръективно отношение $\zeta$. Лемма доказана.

**Замечание 2.** При доказательстве второй части леммы 5 фактически установлено следующее утверждение: если $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, то $\mathrm{col}(z_1, z_2) \in \mathcal{R}(\zeta)$.

**Теорема 4.** *Оператор $\mathcal{L}_\theta$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратимы отношения*

$$W^{-1}(t_1, 0)\theta_{12}W_+(t_1, 0)W^{-1}(b_0, 0)\theta_{21} - E,$$
$$W_+(t_1, 0)W^{-1}(b_0, 0)\theta_{21}W^{-1}(t_1, 0)\theta_{12} - E. \tag{28}$$

Доказательство. Отношения (28) соответственно равны $\zeta_{12}\zeta_{21} - E$ и $\zeta_{21}\zeta_{12} - E$. Выше установлено, что $\mathcal{L}_\theta$, $\theta - \Phi_\gamma$, $\zeta$ одновременно находятся в состоянии $k$ $(1 \leqslant k \leqslant 8)$. Теперь требуемое утверждение следует из лемм 4, 5.

**Лемма 6.** *Если область значений $\mathcal{R}(\zeta)$ замкнута и имеет конечную коразмерность, то области значений $Z_1 = \mathcal{R}(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$ и $Z_2 = \mathcal{R}(\zeta_{21}\zeta_{12} - E)$ имеют конечную коразмерность. Если $Z_1$, $Z_2$ имеют конечную коразмерность, то тем же свойством обладает $\mathcal{R}(\zeta)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}(\zeta)$ замкнута и имеет конечномерную коразмерность. Тогда $\mathcal{R}(\zeta) \cap (H \times \{0\})$ имеет конечную коразмерность. Пусть $\mathrm{col}(z_1, 0) \in \mathcal{R}(\zeta) \cap (H \times \{0\})$. Так же как в доказательстве первой части леммы 5 получим $z_1 \in Z_1$. Отсюда следует, что $Z_1$ имеет конечную коразмерность. Требуемое утверждение относительно $Z_2$ доказывается аналогично.

Пусть теперь $Z_1$ и $Z_2$ имеют конечную коразмерность $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$. Из замечания 2 получим $\mathrm{col}(z_1, z_2) \in \mathcal{R}(\zeta)$. Поэтому $\mathcal{R}(\zeta)$ имеет конечномерную коразмерность. Лемма доказана.

**Теорема 5.** *Оператор $\mathcal{L}_\theta$ фредгольмов тогда и только тогда, когда отношения* (28) *фредгольмовы.*

Доказательство. Оператор $\mathcal{L}_\theta$ и отношения $\theta - \Phi_\gamma$, $\zeta$ одновременно являются или нет фредгольмовыми. Пусть отношение $\zeta$ фредгольмово. Тогда область значений $\mathcal{R}(\zeta)$ замкнута. Докажем замкнутость $Z_1 = \mathcal{R}(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$. Пусть $z_{1,n} \in Z_1$ и последовательность $\{z_{1,n}\}$ сходится к $z$. Из замечания 2 следует, что $\mathrm{col}(z_{1,n}, 0)\} \in \mathcal{R}(\zeta)$. Замкнутость $\mathcal{R}(\zeta)$ влечет $\mathrm{col}(z, 0) \in \mathcal{R}(\zeta)$. Из доказательства первой части леммы 5 получим, что $z \in Z_1$. Замкнутость $Z_2 = \mathcal{R}(\zeta_{12}\zeta_{21} - E)$ устанавливается аналогично. Теперь фредгольмовость отношений (28) следует из лемм 4, 6.

Обратно, пусть отношения (28) фредгольмовы. Эти отношения соответственно равны $\zeta_{12}\zeta_{21} - E$ и $\zeta_{21}\zeta_{12} - E$. Следовательно, $Z_1$, $Z_2$ замкнуты. Поэтому замкнуто множество $Z_1 \times Z_2$. Оно имеет конечную коразмерность в $H \times H$, так как по условию конечную коразмерность имеют $Z_1$, $Z_2$. Следовательно, существует такое линейное многообразие $M \subset H \times H$, что $\dim M < \infty$, $(Z_1 \times Z_2) \cap M = \{0, 0\}$ и $H \times H = (Z_1 \times Z_2) \dotplus M$. Из замечания 2 получаем $Z_1 \times Z_2 \subset \mathcal{R}(\zeta)$. Поэтому $\mathcal{R}(\zeta) = (Z_1 \times Z_2) \dotplus (M \cap \mathcal{R}(\zeta))$. Из [17, гл. 1, утв. 3.3, (с. 35, рус.)] вытекает замкнутость $\mathcal{R}(\zeta)$. Теперь применение лемм 4, 6 завершает доказательство теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А. *Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач* // Успехи матем. наук. Т. 63, №1. 2008. С. 111–154. English transl.: Pokornyi Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. *Sturm-Liouville oscillation theory for impulsive problems* // Russian Mathematics Surveys. V. 63, №. 1. 2008. P. 109–153.
2. Савчук А. М., Шкаликов А. А. *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Мат. заметки. Т. 66, №6. 1999, С. 897–912. English transl.: Savchuk A. M., Shkalikov A. A. *Sturm-liouville operators with singular potentials* // Math. Notes. V. 66, №. 6. 1999. P. 741–753.
3. Брук В. М. *Об обратимых линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с неванлинновской мерой* // Изв. ВУЗов. Математика. №2. 2013. С. 16–29. English transl.: Bruk V. M. *Invertible linear relations generated by an integral equation with Nevanlinna measure* // Russian Mathematics. V. 57, №. 2. P. 13–24.
4. Баскаков А. Г. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений* // Изв. РАН. Сер. мат. Т. 73, №2. 2009. С. 3–68. English transl.: Baskakov A. G. *Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations* // Izvestiya: Mathematics. V. 73, №. 2. 2009. P. 215–278.
5. Баскаков А. Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* // Успехи матем. наук. Т. 68, №1. 2013. С. 77–128. English transl.: Baskakov A. G. *Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations* // Russian Mathematical Surveys. V. 68, №. 1. 2013. P. 69–116.
6. Брук В. М. *Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах* // Функц. анализ. Ульяновск. №28. 1988. С. 17–22.
7. V. M. Bruk *On linear relations generated by Nonnegative operator function and degenerate elliptic differential-operator expression* // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry. V. 5, №. 2. 2009. P. 123–144.

8. *Шин Д. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве* // Матем. сборник. Т. 13, № 1. 1943. С. 39–70.
9. A. Zettl *Formally self-adjoint quasi-differential operators* // Rocky Mountain J. Math. V. 5, № 3. 1975. P. 453–474.
10. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* Вища Школа. Киев. 1987. 288 с.
11. Диденко В. Б. *О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями* // Изв. РАН. Сер. мат. Т. 77, № 1. 2013. С. 5–22. English transl.: Didenko V. B. *On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multi-valued impulse effects* // Izvestiya: Mathematics. V. 77, № 1. 2013. P. 3–19.
12. Рофе-Бекетов Ф. С. *Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций* // Докл. Акад. Наук СССР. Т. 184, № 5. 1969. С. 1034–1037. English transl.: Rofe-Beketov F. S. *Selfadjoint extensions of differential operators in a space of vector functions* // Soviet. Math. Dokl. V. 10, №. 1. 1969. P. 188–192.
13. Березанский Ю. М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* Наукова Думка, Киев, 1965. 798 с. English transl.: Berezanski Yu. M. *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968. 822 p.
14. V. M. Bruk *On the characteristic operator of an integral equation with a nevanlinna measure in the infinite-dimensional case* // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry. V. 10, №. 2. 2014. P. 163–188.
15. Брук В. М. *Об обратимых сужениях отношений, порожденных дифференциальным выражением и неотрицательной операторной функцией* // Матем. заметки. Т. 82, № 5. 2007. С. 652–664. English transl.: Bruk V. M. *On invertible restrictions of relations generated by a differential expression and by a Nonnegative operator function* // Math. Notes. V. 82, № 5. P. 583–595.
16. Диденко В. Б. *О спектральных свойствах дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, определяемых линейным отношением* // Матем. заметки. Т. 89, № 2. 2011. С. 226–240. English transl.: Didenko V. B. *On the spectral properties of differential operators with unbounded operator coefficients determined by a linear relation* // Math. Notes. V. 89, № 2. P. 224–237.
17. H. Schaefer *Topological Vector Spaces.* The Macmillan Company. New York; Collier–Macmillan Limited. London, 1966. 306 p. (English); Рус. перевод: Х. Шефер, Топологические векторные пространства, Мир, М. 1971. 360 с.

Владислав Моисеевич Брук,
Саратовский государственный технический университет,
ул. Политехническая, 77,
410054, г. Саратов, Россия
E-mail: vladislavbruk@mail.ru