ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 3-16.

УДК 517.95

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М.А. ГАЦУНАЕВ, А.А. КЛЯЧИН

Аннотация. В работе рассматриваются кусочно-линейные решения уравнения минимальной поверхности над заданной триангуляцией многогранной области. Показывается, что при определенных условиях градиенты таких функций остаются по модулю ограниченными при стремлении к нулю максимального диаметра треугольников триангуляции. Подчеркивается, что это свойство выполняется, если кусочно-линейные функции приближают значение площади графика гладкой функции с необходимой точностью. Следствием полученных свойств является равномерная сходимость кусочно-линейных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности.

Ключевые слова: кусочно-линейные функции, уравнение минимальной поверхности, аппроксимация функционала площади.

Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J93, 65N30

1. Введение

Некоторые задачи, возникающие при проектировании архитектурных сооружений, сводятся к построению поверхностей минимальной площади. Это достаточно подробно отражено в книге [1], а также в работе [2], где изучается проблема разработки тентовых тканевых конструкций. Подробный анализ приведенных там результатов приводит к задаче разработки эффективных методов приближенного решения уравнения минимальной поверхности и математическому обоснованию найденных методов в плане устойчивости и сходимости приближенных решений. Основная трудность при исследовании данных вопросов заключается в том, что уравнение минимальной поверхности является нелинейным, и поэтому традиционные методы, используемые для линейных уравнений, не пригодны.

Наш подход заключается в том, что мы определяем понятие кусочно-линейного решения уравнения минимальной поверхности над заданной триангуляцией расчетной области и устанавливаем необходимые свойства этих решений. Именно, показываем, что порядок точности аппроксимации функционала площади относительно диаметров треугольников равен двум, устанавливаем, что частные производные ограничены постоянной, независящей от мелкости разбиения при достаточной степени аппроксимации функционала площади и т. д. Доказанные утверждения позволяют, в частности, установить равномерную сходимость кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности при стремлении к нулю диаметров треугольников триангуляции.

M.A. Gatsunaev, A.A. Klyachin, On uniform convergence of piecewise-linear solutions to minimal surface equation.

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-97034 р_поволжье_а).

Поступила 11 марта 2014 г.

2. Кусочно-линейные решения уравнения минимальной поверхности.

Пусть задана многогранная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим некоторое разбиение этого многогранника на невырожденные тетраэдры T_1, T_2, ..., T_N. Пусть M_1, M_2, $\dots$, M_m – все вершины этих тетраэдров. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной грани и ни одного ребра тетраэдров.

Для произвольного набора значений $u_1, u_2, \dots, u_m$ определим кусочно-линейную функцию $u : \Omega \to \mathbf{R}$ так, что $u(M_i) = u_i, i = 1, \dots, m$ и функция $u(x) = p_1^k x_1 + \dots + p_n^k x_n + b^k$ на каждом тетраэдре $T_k, k = 1, \dots, N$. Данная функция будет непрерывной в Ω, и в каждом тетраэдре T_k определен градиент $\nabla u \equiv p^k = (p_1^k, \dots, p_n^k)$. Поэтому площадь графика функции u вычисляется суммой

$$S(p) = S(p^1, \dots, p^N) = \sum_{k=1}^N \int\limits_{T_k} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx = \sum_{k=1}^N \sqrt{1 + |p^k|^2}\; v(T_k),$$

где $v(T_k)$ – n-мерный объем тетраэдра T_k.

Так как векторы $p^1, \dots, p^N$ однозначно определяются значениями $u_1, \dots, u_m$, то можем записать значение площади $S(p)$ через переменные $u = (u_1, \dots, u_m)$: $S(u) = S(u_1, \dots, u_m)$. Действительно, значения переменных $p^1, \dots, p^N$ выражаются линейно через переменные $u_1, \dots, u_m$. Тогда найдутся такие числа a_{li}^k, что

$$p_l^k = \sum_{i=1}^m a_{li}^k u_i,\ k = 1, \dots, N,\ l = 1, \dots, n.$$

Коэффициенты a_{li}^k однозначно определяются разбиением области Ω на тетраэдры $T_1, \dots, T_N$. Поэтому

$$S(u) = S(u_1, \dots, u_m) = \sum_{k=1}^N \sqrt{1 + \sum_{l=1}^n (\sum_{i=1}^m a_{li}^k u_i)^2}\; \cdot v(T_k).$$

Пусть теперь в вершинах $M_1, \dots, M_m$ заданы некоторым образом значения $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Соответствующую кусочно-линейную функцию, построенную по этим значениям, обозначим через φ. Поставим задачу нахождения такой кусочно-линейной функции u, на которой достигается минимум площади $S(u)$ и удовлетворяющей граничному условию, т. е. задачу

$$S(u_1, \dots, u_m) \to \min, \quad u(M_i) = \varphi_i, \quad \forall\ M_i \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Замечание. Пусть $u^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$ – решение задачи (1). Через u^* будем также обозначать соответствующую кусочно-линейную функцию. Предположим, что $h(x)$ произвольная кусочно-линейная функция, удовлетворяющая условию $h(M_i) = 0$ для любой точки $M_i \in \partial\Omega$. Тогда функция $\sigma(t) = S(u^* + th)$ в точке $t = 0$ достигает своего минимального значения. Таким образом, $\sigma'(0) = 0$, что равносильно равенству

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{T_k} \frac{\langle \nabla u^*, \nabla h\rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u^*|^2}} dx = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Отметим, что функция $S(u_1, \dots, u_m)$ является выпуклой вниз по совокупности переменных $u_1, \dots, u_m$. При этом, так как в граничных точках значения функции u фиксированы,

$$\lim_{|u| \to +\infty} S(u) = +\infty,$$

где $|u| = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |u_i|$. Поэтому функция $S(u)$ достигает своего минимума в некоторой точке u^*. Покажем единственность. Предположим противное, т. е. найдется еще одно решение v^* задачи (1). Тогда для кусочно-линейной функции v^* также выполнено условие (2). Полагая в качестве $h = v^* - u^*$, приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \left(\frac{\langle \nabla v^*, \nabla (v^* - u^*) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla v^*|^2}} - \frac{\langle \nabla u^*, \nabla (v^* - u^*) \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u^*|^2}} \right) dx = 0. \tag{3}$$

Ниже нам понадобится неравенство

$$\langle \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}}, \xi - \eta \rangle \geq \frac{|\xi - \eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)}, \tag{4}$$

которое выполняется для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Отметим, что похожие неравенства получены в работах [3], [4], [5] и также используются для исследования вопросов единственности решений уравнения минимальной поверхности. Неравенство (4), из которого мы получим единственность, нам понадобится ниже и для оценки градиента кусочно-линейного решения u^*. А применить для этой оценки неравенства из вышеприведенных работ не удается. Потому-то мы и используем неравенство (4). Оно выводится следующим образом. Для начала заметим, что

$$\sqrt{1+|\xi|^2} \geq \sqrt{1+|\eta|^2} + \frac{\langle \eta, \xi - \eta \rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}}, \xi - \eta \rangle &= -\frac{\langle \xi, \eta - \xi \rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\langle \eta, \xi - \eta \rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}} \geq \\ \geq \sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi \rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} &= \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} - \langle \xi, \eta \rangle - 1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \geq \\ &\geq \frac{|\xi - \eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая $\xi = \nabla u^*$ и $\eta = \nabla v^*$, в неравенстве (4) из (3) получаем, что $\nabla u^* \equiv \nabla v^*$. Используя, что на границе $\partial\Omega$ функции u^* и v^* совпадают, получаем нужное равенство $u^* \equiv v^*$.

3. Оценка модуля градиента

Пусть f – решение уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{6}$$

в области Ω, непрерывное в $\overline{\Omega}$, причем $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$, где $\varphi(x)$ – непрерывная функция, заданная на границе области Ω. Стоит заметить, что соответствующая задача Дирихле для произвольной области (даже с гладкой границей) не всегда имеет решение. Для плоских областей необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для произвольной непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ является условие выпуклости этой области. В пространстве размерности больше двух таким условием является неотрицательность средней кривизны относительно внешней нормали границы области. С точными формулировками и доказательствами данных результатов можно ознакомиться по работам [6]–[13]. В нашей статье мы не накладываем никаких условий на область Ω, однако предполагаем, что для данной граничной функции $\varphi(x)$ решение задачи Дирихле существует. Понятно, что такие функции $\varphi(x)$ существуют для произвольной области Ω.

Далее через u^* мы обозначаем единственное решение задачи (1) с граничными данными $\varphi_i = \varphi(M_i)$, $M_i \in \partial\Omega$.

Введем величину для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$

$$\delta(\xi,\eta) = \sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}.$$

Из неравенства (5) следует, что $\delta(\xi,\eta) > 0$ при всех $\xi \neq \eta$. Полагая $\xi = \nabla f$, $\eta = \nabla u^*$ и используя уравнение (6), получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \delta(\nabla f, \nabla u^*)\, dx = S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS,$$

где ν – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точках, где он существует. Пользуясь неравенством (см. доказательство теоремы 1)

$$\sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \geq$$

$$\geq \frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)},$$

заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \frac{|\nabla f - \nabla u^*|^2\, dx}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}(\sqrt{1+|\nabla f|^2}\sqrt{1+|\nabla u^*|^2} + |\nabla f||\nabla u^*| + 1)} \leqslant$$

$$\leqslant S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS.$$

Зафиксируем произвольное $k = 1, \ldots, N$. Тогда

$$\int\limits_{T^k} \frac{|\nabla f - \nabla u^*|^2\, dx}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}(\sqrt{1+|\nabla f|^2}\sqrt{1+|\nabla u^*|^2} + |\nabla f||\nabla u^*| + 1)} \leqslant$$

$$\leqslant S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS \equiv B. \tag{7}$$

Далее мы предполагаем, что $|\nabla f| \leqslant P_0$ в области Ω. Тогда из неравенства (7) получаем

$$\int\limits_{T^k} \frac{|\nabla f - \nabla u^*|^2}{\sqrt{1+|\nabla u^*|^2}} dx \leqslant 3(1+P_0^2)B. \tag{8}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\int\limits_{T^k} \frac{|\nabla u^*|^2}{\sqrt{1+|\nabla u^*|^2}} dx \leqslant 3(1+P_0^2)B + 2P_0 v(T^k)$$

или

$$\int\limits_{T^k} \sqrt{1+|\nabla u^*|^2} dx \leqslant 3(1+P_0^2)B + (2P_0+1)v(T^k).$$

Тогда из (8), применяя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\int\limits_{T^k} |\nabla f - \nabla u^*| dx \leqslant 3(1+P_0^2)\left(\left(B + v(T^k)\right) B\right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{T^k} |\nabla u^*| dx \leqslant P_0 v(T^k) + 3(1+P_0^2)\left(\left(B + v(T^k)\right) B\right)^{1/2}.$$

В силу того, что градиент ∇u^* постоянен в T_k, получаем неравенство

$$v(T_k)|\nabla u^*(x)| \leqslant P_0 v(T_k) + 3(1+P_0^2)\left(\left(B + v(T_k)\right) B\right)^{1/2}, \quad x \in T_k.$$

Разделив на $v(T_k)$, приходим к оценке градиента

$$|\nabla u^*(x)| \leqslant P_0 + 3(1+P_0^2)\sqrt{(\alpha_k + 1)\,\alpha_k}\,, \tag{9}$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{v(T_k)}\left(S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *– решение уравнения* (6) *такое, что* $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ *и* $P_0 = \sup\limits_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$. *Предположим, что* u^* *является решением задачи* (1) *с условием* $u^*(M_i) = \varphi(M_i)$, $M_i \in \partial\Omega$. *Тогда справедливо неравенство* (9) *для любой точки* $x \in \Omega$.

Замечание. Обозначим через f^L кусочно-линейную функцию, построенную по значениям функции f в точках $M_i, i = 1\dots, m$. Если величина

$$A(f) = \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N} v(T_k)}\left(S(f^L) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS\right)$$

остается ограниченной при определенном стремлении мелкости разбиения $\mu = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} \operatorname{diam} T_k$ области Ω к нулю для достаточно гладких функций f, то из теоремы 2 и неравенства $S(u^*) \leqslant S(f^L)$ мы заключаем, что приближенное решение u^* имеет градиент, ограниченный постоянной, независящей от мелкости разбиения.

4. Аппроксимация функционала площади

Исследуем величину $S(f^L) - S(f)$ для функций $f \in C^3(\Omega)$ при $n = 2$, где Ω замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Рассмотрим поверхность, заданную в виде графика функции $z = f(x, y)$ над множеством Ω.

Пусть $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. Тогда Ω разбивается на прямоугольники $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Далее разделим каждый такой прямоугольник правой или левой диагональю. Все дальнейшие рассуждения будем проводить с прямоугольником $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ так как оценка погрешности вычисления площади для остальных прямоугольников аналогична.

Если разделение происходит правой диагональю, то площадь графика кусочно-линейной функции над диагональю равна

$$S_U^r = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)}{x_1 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{y_1 - y_0}\right)^2},$$

а для треугольника, лежащего ниже нее

$$S_D^l = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_0, y_1) - f(x_1, y_1)}{y_1 - y_0}\right)^2}.$$

Если прямоугольник делился левой диагональю, то площадь графика кусочно-линейной функции над диагональю равна

$$S_U^l = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_0,y_1) - f(x_1,y_1)}{x_1 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_1,y_0) - f(x_1,y_1)}{y_1 - y_0}\right)^2},$$

а для треугольника, лежащего ниже нее

$$S_D^l = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1,y_0) - f(x_0,y_1)}{x_1 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_0,y_1) - f(x_0,y_0)}{y_1 - y_0}\right)^2}.$$

Обозначим через S площадь полученной кусочно-линейной поверхности. Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть* $f(x,y) \in C^3(\Omega)$ *и*

$$M_2 = \sup_{\Omega} \max\{|f''_{xx}|, |f''_{xy}|, |f''_{yy}|\},\ \ M_3 = \sup_{\Omega} \max\{|f'''_{xxx}|, |f'''_{xxy}|, |f'''_{xyy}|, |f'''_{yyy}|\},$$

$$h_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}), h_2 = \max_{1\leqslant j\leqslant m}(y_j - y_{j-1}), h = \max(h_1, h_2).$$

Тогда

$$\left|\iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f(x,y)|^2}\, dxdy - S\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\Omega|\left(2M_3 + 12\left(3 + \frac{h}{\min\{h_1,h_2\}}\right)M_2^2 + \frac{5}{2}M_3^2 h^2\right)h^2.$$

Доказательство. Для краткости изложения предположим, что прямоугольники разбиения множества Ω делились правой диагональю. Результаты, полученные в рассматриваемом и общем случае, будут совпадать.

Рассмотрим прямоугольник $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$. С помощью интерполяционной формулы Ньютона (см. [14], гл. 3, §12), получаем линейное приближение l_U и l_D функции $f(x,y)$ над верхним и нижним треугольниками разбиения этого прямоугольника, сответственно

$$\begin{gathered}
f(x,y) = l_U(x,y) + R_U(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)f(x_0;x_1,y_0) + \\
+(y - y_0)f(x_0,y_0;y_1) + (y - y_0)(y - y_1)f(x,y_0;y_1;y) + \\
+(x - x_0)(y - y_1)f(x_0;x,y_0;y_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0;x_1;x,y_0), \\
f(x,y) = l_D(x,y) + R_D(x,y) = f(x_1,y_1) + (x - x_1)f(x_1;x_0,y_1) + \\
+(y - y_1)f(x_1,y_1;y_0) + (y - y_1)(y - y_0)f(x,y;y_1;y_0) + \\
+(x - x_1)(y - y_0)f(x_0;x,y_1;y_0) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0;x_1;x,y_1),
\end{gathered}$$

где $f(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\cdots;\alpha_n,\beta_1;\beta_2;\beta_3;\cdots;\beta_m)$ — разделенные разности функции $f(x,y)$ (см. [14], гл. 2, §5). В частности,

$$f(x_0;x_1,y_0) = \frac{f(x_1,y_0) - f(x_0,y_0)}{x_1 - x_0}, \qquad f(x_0,y_0;y_1) = \frac{f(x_0,y_1) - f(x_0,y_0)}{y_1 - y_0},$$

$$f(x_0;x_1,y_1) = \frac{f(x_1,y_1) - f(x_0,y_1)}{x_1 - x_0}, \qquad f(x_1;y_0,y_1) = \frac{f(x_1,y_1) - f(x_1,y_0)}{y_1 - y_0}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x_1,y_0) - f(x_0,y_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{f(x_0,y_1) - f(x_0,y_0)}{y_1 - y_0} + \frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}+\frac{\partial R_D}{\partial x}(x,y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)}{y_1-y_0}+\frac{\partial R_D}{\partial y}(x,y).$$

Рассмотрим разность площадей графика заданной функции и графика полученной интерполяцией линейной функции над верхним треугольником разбиения

$$\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy-S_U^r=\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy-$$
$$-\iint\limits_U \sqrt{1+\left(\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right)^2+\left(\frac{f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)}{y_1-y_0}\right)^2}\,dxdy=$$
$$=\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy-$$
$$-\iint\limits_U \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y)\right)^2}=$$
$$=\iint\limits_U C_U(x,y)\left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y)+2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y)-\left(\frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y)\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y)\right)^2\right)dxdy,$$

где

$$C_U(x,y)=\left(\sqrt{1+|\nabla f|^2}+\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial R_U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial R_U}{\partial y}\right)^2}\right)^{-1}.$$

Пусть $y=\Gamma_1(x)$ задает гипотенузу треугольника разбиения и $x=\Gamma_2(y)$ – обратная к ней функция. Применим интегрирование по частям к интегралу, полученному в правой части равенства

$$\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy-S_U^r=2\int\limits_{y_0}^{y_1}\left(R_U(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)C_U(x,y)\Big|_{x=x_0}^{x=\Gamma_2(y)}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{x_0}^{\Gamma_2(y)} R_U(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial C_U}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)C_U(x,y)\right]dx\right)dy+$$
$$+2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(R_U(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)C_U(x,y)\Big|_{y=\Gamma_1(x)}^{y=y_1}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\Gamma_1(x)}^{y_1} R_U(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial C_U}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)C_U(x,y)\right]dy\right)dx-$$
$$-\iint\limits_U |\nabla R_U(x,y)|^2dxdy.$$

Обозначим через $C_D(x,y)$ функцию на D, аналогичную функции $C_U(x,y)$. Тем же образом на D выводится равенство

$$\iint\limits_D \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy - S_D^r = 2\int\limits_{y_0}^{y_1}\left(R_D(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)C_D(x,y)|_{x=\Gamma_2(y)}^{x=x_1} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Gamma_2(y)}^{x_1} R_D(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial}{\partial C_D x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)C_D(x,y)\right]\,dx\right)dy +$$

$$+2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(R_D(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)C_D(x,y)|_{y=y_0}^{y=\Gamma_1(x)} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{y=y_0}^{\Gamma_1(x)} R_D(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial C_D}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)C_D(x,y)\right]\,dy\right)dx -$$

$$-\iint\limits_D |\nabla R_D(x,y)|^2 dxdy.$$

Просуммируем полученные равенства, учитывая, что на Γ значения непрерывных функций совпадают

$$\iint\limits_{U\cup D} \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy - \left(S_U^r + S_D^r\right) =$$

$$= 2\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(R_U(x,y_1)f'_y(x,y_1)C_U(x,y_1) - R_D(x,y_0)f'_y(x,y_0)C_D(x,y_0)\Big)dx +$$

$$+2\int\limits_{y_0}^{y_1}\Big(R_D(x_1,y)f'_x(x_1,y)C_D(x_1,y) - R_U(x_0,y)f'_x(x_0,y)C_U(x_0,y)\Big)dy +$$

$$+2\int\limits_{x_0}^{x_1} R_U(\Gamma_1(x))f'_y(\Gamma_1(x))\Big(C_U(\Gamma_1(x)) - C_D(\Gamma_1(x))\Big)dx -$$

$$-2\int\limits_{y_0}^{y_1} R_U(\Gamma_2(y))f'_x(\Gamma_2(y))\Big(C_D(\Gamma_2(y)) - C_U(\Gamma_2(y))\Big)dy -$$

$$-2\iint\limits_U \left(R_U \operatorname{div}(C_U(x,y)\nabla f(x,y)) + \frac{1}{2}|\nabla R_U(x,y)|^2\right)dxdy -$$

$$-2\iint\limits_D \left(R_D \operatorname{div}(C_D(x,y)\nabla f(x,y)) + \frac{1}{2}|\nabla R_D(x,y)|^2\right)dxdy. \tag{10}$$

Нетрудно установить, что

$$\begin{gathered}|C_U(x,y) - C_D(x,y)| \leqslant 2C_U(x,y)C_D(x,y)M_2h,\\ |C_U(x_1,y) - C_D(x_0,y)| \leqslant 4C_U(x,y)C_D(x,y)M_2h_1,\\ |C_U(x,y_1) - C_D(x,y_0)| \leqslant 4C_U(x,y)C_D(x,y)M_2h_2.\end{gathered} \tag{11}$$

Тогда, используя то, что разделенные разности равны значениям соответствующих производных в некоторой точке области определения, получим

$$\left|\int_{x_0}^{x_1}\left(R_U(x,y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)C_U(x,y_1)-R_D(x,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)C_D(x,y_0)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)C_U(x,y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\xi_1,\eta_1)(y_1-y_0)+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_2,\eta_2)C_U(x,y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_3,y_0)(y_1-y_0)+$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_3,y_0)f_y(x,y_0)\Big(C_U(x,y_1)-C_D(x,y_0)\Big)\right]dx\right|\leqslant\frac{1}{4}h_1h_2\Big(M_3+5M_2^2\Big)h_1^2. \qquad (12)$$

Аналогично,

$$\left|\int_{y_0}^{y_1}\left(R_D(x_1,y)f_x(x_1,y)C_U(x_1,y)-R_U(x_0,y)f_x(x_0,y)C_U(x_0,y)\right)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}h_1h_2\Big(M_3+5M_2^2\Big)h_2^2. \qquad (13)$$

Оценим модули погрешностей интерполяции над каждым из треугольников:

$$|R_U(x,y)|\leqslant M_2(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2),\quad |R_D(x,y)|\leqslant M_2(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2). \qquad (14)$$

Эти неравенства можно использовать в качестве оценок погрешностей $R_U(\Gamma)$ и $R_D(\Gamma)$ на диагонали Γ

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

рассматриваемого прямоугольника. Тогда из соотношений (11) следует

$$\left|\int_{x_0}^{x_1}R_U(\Gamma_1(x))f'_y(\Gamma_1(x))\Big(C_U(\Gamma_1(x))-C_D(\Gamma_1(x))\Big)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2M_2^2\left(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2\right)h_1h, \qquad (15)$$

$$\left|\int_{y_0}^{y_1}R_U(\Gamma_2(y))f'_x(\Gamma_2(y))\Big(C_D(\Gamma_2(y))-C_U(\Gamma_2(y))\Big)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2M_2^2\left(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2\right)h_2h. \qquad (16)$$

Оценим квадраты модулей градиентов погрешностей

$$\frac{\partial R_U}{\partial x}=(y-y_0)(y-y_1)f(x;x,y_0;y_1;y)+(y-y_1)f(x_0;x,y_0;y_1)+$$

$$+(x-x_0)(y-y_1)f(x_0;x;x,y_0;y_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x;x,y_0)+$$

$$+2\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)f(x_0;x_1;x,y_0),$$

$$\frac{\partial R_U}{\partial y}=(y-y_0)(y-y_1)f(x,y_0;y_1;y;y)+2\left(y-\frac{y_0+y_1}{2}\right)f(x,y_0;y_1;y)+$$

$$+(x-x_0)f(x_0;x,y_0;y_1),$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial x}=(y-y_1)(y-y_0)f(x;x,y_1;y_0;y)+(y-y_1)f(x_0;x,y_1;y_0)+$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x;x,y_1)+2\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)f(x_0;x_1;x;x,y_1)+$$

$$+(x-x_1)(y-y_1)f(x_0;x;x,y_1;y_0),$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial y}=(y-y_1)(y-y_0)f(x,y;y;y_1;y_0)+2\left(y-\frac{y_0+y_1}{2}\right)f(x,y;y_1;y_0)+$$

$$+(x-x_1)f(x_0;x,y_1;y_0).$$

Отсюда, с помощью неравенства Коши–Буняковского, можно получить

$$\left|\frac{\partial R_U}{\partial x}\right|^2\leqslant\frac{1}{16}M_3^2h_2^4+M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^4+M_2^2h_1^2,$$

$$\left|\frac{\partial R_U}{\partial y}\right|^2\leqslant\frac{1}{16}M_3^2h_2^4+M_2^2h_2^2+M_2^2h_1^2,$$

$$\left|\nabla R_U\right|^2\leqslant\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+2M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^2+2M_2^2h_1^2. \tag{17}$$

Аналогично,

$$\left|\nabla R_D\right|^2\leqslant\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+2M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^2+2M_2^2h_1^2. \tag{18}$$

Далее, заметим, что для U выполнено

$$\operatorname{div}(C_U\nabla f)=C_U\Delta f+\langle\nabla C_U,\nabla f\rangle,$$

$$\frac{\partial C_U}{\partial x}=-(C_U)^2\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+|\nabla f|^2}=-(C_U)^2\frac{f'_xf''_{xx}+f'_yf''_{xy}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}},$$

$$\frac{\partial C_U}{\partial y}=-(C_U)^2\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{1+|\nabla f|^2}=-(C_U)^2\frac{f'_xf''_{xy}+f'_yf''_{yy}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

Поэтому,

$$\left|\langle\nabla f,\nabla C_U\rangle\right|=\left|\frac{C_U^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left((f'_x)^2f''_{xx}+2f'_xf'_yf''_{xy}+(f'_y)^2f''_{yy}\right)\right|\leqslant 4M_2.$$

А так как

$$|C_U\Delta f|\leqslant 2M_2,$$

то

$$|\operatorname{div}(C_U\nabla f)|\leqslant 6M_2. \tag{19}$$

Аналогично для D

$$|\operatorname{div}(C_D\nabla f)|\leqslant 6M_2. \tag{20}$$

Оценим теперь по модулю сумму в правой части равенства (10). Пользуясь неравенствами (14), (17)–(20), получим

$$\left|\iint\limits_U\left(R_U\operatorname{div}(C_U(x,y)\nabla f(x,y))+\frac{1}{2}|\nabla R_U(x,y)|^2\right)dxdy+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_D\left(R_D\operatorname{div}(C_D(x,y)\nabla f(x,y))+\frac{1}{2}|\nabla R_D(x,y)|^2\right)dxdy\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left(3M_2^2(h_2^2+4h_1h_2+h_1^2)+\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+2M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^2+2M_2^2h_1^2\right)|P| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+5M_2^2h_2^2+3M_2^2h_1h_2+M_3^2h_1^2h_2^2+5M_2^2h_1^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^4\right)|P|, \qquad (21)$$

где $|P|$ – площадь прямоугольника $P=[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$. Теперь, в силу (10), (12), (13), (15), (16) , (21) и того, что площадь прямоугольника P не превосходит h_1h_2, мы имеем

$$\Big|\iint\limits_P \sqrt{1+|\nabla f|^2}dxdy-\Big(S_U^r+S_D^r\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}h_1h_2\Big(M_3+5M_2^2\Big)(h_1^2+h_2^2)+4M_2^2\left(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2\right)h(h_1+h_2)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+5M_2^2h_2^2+3M_2^2h_1h_2+M_3^2h_1^2h_2^2+5M_2^2h_1^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^4\right)h_1h_2 \leqslant$$

$$h_1h_2\left(2M_3h^2+\left(36+12\frac{h}{\min\{h_1,h_2\}}\right)M_2^2h^2+\frac{5}{2}M_3^2h^4\right).$$

Суммируя неравенство по всем прямоугольникам разбиения множества Ω, окончательно получим

$$\Big|\iint\limits_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}dxdy-S\Big| \leqslant |\Omega|\left(2M_3+12\left(3+\frac{h}{\min\{h_1,h_2\}}\right)M_2^2+\frac{5}{2}M_3^2h^2\right)h^2.$$

5. Равномерная сходимость приближенных решений

Теперь получим равномерную оценку для кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности. Итак, пусть f – решение уравнения (6) в области Ω. Мы будем предполагать, что

$$\sup_\Omega|\nabla f|=P_0<+\infty.$$

Далее будем рассуждать так же, как и в работах [15], [16]. Обозначим через f^L кусочно-линейную функцию такую, что $f^L(M_i)=f(M_i)$. Положим $f^t(x)=u^*(x)+t(f^L(x)-u^*(x))$ и $P_1=\sup\limits_\Omega|\nabla u^*|$, $P=\max\{1,P_0,P_1\}$. Понятно, что $u^*|_{\partial\Omega}=f^L|_{\partial\Omega}$. Для любого $t\in\mathbf{R}$ функция $f^t(x)$ является кусочно-линейной и можно вычислить площадь ее графика

$$\sigma(t)=\int\limits_\Omega\sqrt{1+|\nabla f^t|^2}dx.$$

Так как при $t=0$ функция $\sigma(t)$ принимает минимальное значение, то $\sigma'(0)=0$. Используя это равенство, получаем

$$S(f^L)-S(u^*)=\int\limits_0^1 ds\int\limits_0^s\sigma''(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^1 ds\int\limits_0^s dt\int\limits_\Omega\frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f^L-\nabla u^*|^2-\langle\nabla f^t,\nabla f^L-\nabla u^*\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}}dx\geq$$

$$\geq \int_0^1 ds \int_0^s dt \int_\Omega \frac{|\nabla f^L - \nabla u^*|^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \int_\Omega |\nabla f^L - \nabla u^*|^2 dx. \qquad (22)$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре (см., например, [17], п. 7.8) для функции $h(x) = f^L(x) - u^*(x)$, $h|_{\partial\Omega} = 0$. Из (22) получаем

$$S(f^L) - S(u^*) \geq \frac{\lambda(\Omega)}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \int_\Omega |h(x)|^2 dx,$$

где постоянная $\lambda(\Omega) = (\omega_n/|\Omega|)^{2/n}$ и ω_n, $|\Omega|$ – n-мерные объемы единичного шара и области Ω, соответственно. Далее, положим $M = \sup\limits_\Omega |h|$ и, не ограничивая общности, можем считать, что найдется точка $x_0 \in \Omega$, в которой $h(x_0) = M$. Покажем, что шар $B_{M/4P}(x_0) \subset \Omega$. Действительно, пусть $x' \in \partial\Omega$ такая, что $|x_0 - x'| = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. Тогда

$$2P|x_0 - x'| \geq h(x_0) - h(x') = M - h(x') \geq M - M' \geq M/2.$$

Таким образом, расстояние от точки x_0 до границы $\partial\Omega$ больше чем $M/4P$. Следовательно, $B_{M/4P}(x_0) \subset \Omega$. Предположим теперь, что $x \in B_{M/4P}(x_0)$. Тогда

$$h(x) \geq h(x_0) - 2P|x - x_0| > M - 2P\frac{M}{4P} = M/2.$$

Таким образом, шар $B_{M/4P}(x_0) \subset D_M$, где

$$D_M = \{x \in \Omega : |h| > M/2\} \subset\subset \Omega.$$

Поэтому

$$\int_\Omega |h(x)|^2 dx \geq \int_{D_M} |h|^2 dx \geq$$

$$\geq \int_{B_{M/4P}(x_0)} \left(\frac{M}{2}\right)^2 dx = \frac{M^2}{4}\left(\frac{M}{4P}\right)^n \omega_n = \frac{M^{n+2}}{4^{n+1}P^n}\omega_n.$$

Таким образом,

$$\max_\Omega |f^L - u^*| \leqslant 4P^{4/3}\left(\frac{S(f^L) - S(u^*)}{\lambda(\Omega)\omega_n}\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

Теорема 4. *Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – решение уравнения минимальной поверхности (6) и u^* кусочно-линейная функция, являющаяся решением задачи (1) с $\varphi_i = f(M_i)$, для всех $M_i \in \partial\Omega$. Предположим, что $P_0 = \sup\limits_\Omega |\nabla f| < +\infty$ и $P_1 = \sup\limits_\Omega |\nabla u^*|$. Тогда*

$$\max_\Omega |f^L - u^*| \leqslant 4P^{4/3}\left(\frac{S(f^L) - S(u^*)}{\lambda(\Omega)\omega_n}\right)^{\frac{1}{n+2}},$$

где $P = \max\{1, P_0, P_1\}$.

Пусть теперь Ω – прямоугольник $[a,b]\times[c,d]$. Зафиксируем натуральное число m и рассмотрим разбиение прямоугольника, заданное точками $x_i = a + \frac{i}{m}(b-a)$, $y_j = c + \frac{j}{m}(d-c)$, $i,j = 0,1,\ldots,m$. Каждый из получившихся прямоугольников $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i,j = 0,1,\ldots,m-1$, разобьем диагональю, соединяющей вершины (x_i, y_j) и (x_{i+1}, y_{j+1}), на два треугольника. Предположим, что в прямоугольнике Ω задано решение f уравнения минимальной поверхности, $f \in C^3(\overline{\Omega})$. Положим u_m^* решение задачи (1), соответствующее данному разбиению и удовлетворяющее граничным условиям

$$u_m^*(x_i, c) = f(x_i, c),\ u_m^*(x_i, d) = f(x_i, d), \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$u_m^*(a,y_j)=f(a,y_j),\ u_m^*(b,y_j)=f(b,y_j),\quad j=0,\dots,m.$$

Следствие. *Последовательность u_m^* равномерно в Ω сходится к решению f, при этом*

$$\sup_\Omega |f(x,y)-u_m^*(x,y)|=O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

при $m\to\infty$.

Доказательство. Обозначим через f^L кусочно-линейную функцию такую, что $f^L(x_i,y_j)=f(x_i,y_j)$, $i,j=0,\dots,m$. Покажем в начале, что градиенты функций u_m^* ограничены постоянной, независящей от m. Для этого воспользуемся неравенством (9). Из теоремы 3 следует, что для некоторой постоянной C_1, независящей от m, выполнено

$$|S(f)-S(f^L)|\leqslant\frac{C_1}{m^2},$$

а применяя формулу трапеций численного интегрирования (см. [14], гл. 3), получим

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\langle\nabla f,\nu\rangle(u_m^*-f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}dS\right|\leqslant\frac{C_2}{m^2}.$$

Таким образом,

$$|A(f)|\leqslant\frac{2}{(b-a)(d-c)}(C_1+C_2)\equiv C_3.$$

Тогда, если $P_0=\sup\limits_\Omega|\nabla f|$, то из неравенства (9) следует

$$|\nabla u_m^*|\leqslant P_0+3(1+P_0^2)\sqrt{C_3(1+C_3)}\equiv P_1.$$

Оценим теперь величину $S(f^L)-S(u_m^*)$. Построим произвольным образом функцию $\tilde u_m$ такую, что $\tilde u_m=u_m^*$ в прямоугольнике $\Omega_m=[x_1,x_{m-1}]\times[y_1,y_{m-1}]$, $\tilde u_m=f$ на $\partial\Omega$ и $|\nabla\tilde u_m-\nabla u_m^*|\leqslant C_4/m$, где постоянная C_4 не зависит от m. Тогда

$$\begin{aligned}0\leqslant S(f^L)-S(u_m^*)&=S(f^L)-S(f)+S(f)-S(\tilde u_m)+S(\tilde u_m)-S(u_m^*)\leqslant\\&\leqslant S(f^L)-S(f)+S(\tilde u_m)-S(u_m^*)\leqslant\frac{C_1}{m^2}+\\&+\iint\limits_{\Omega\setminus\Omega_m}\left(\sqrt{1+|\nabla\tilde u_m|^2}-\sqrt{1+|\nabla u_m^*|^2}\right)dxdy\leqslant\\&\leqslant\frac{C_1}{m^2}+\frac{C_4}{m}(b-a)(d-c)(1-(1-2/m)^2)=\\&=\frac{C_1}{m^2}+\frac{C_5}{m}(1-(1-2/m)^2),\end{aligned}$$

где $C_5=C_4(b-a)(d-c)$. Следовательно, из теоремы 4 получаем

$$|f-u_m^*|\leqslant|f-f^L|+|f^L-u_m^*|\leqslant|f-f^L|+4P^{4/3}\left(\frac{S(f^L)-S(u_m^*)}{\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac14},$$

где $P=\max\{1,P_0,P_1\}$. Применяя предыдущее неравенство, получаем

$$\begin{aligned}&\sup_\Omega|f(x,y)-u_m^*(x,y)|\leqslant\\&\leqslant P_0\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}\frac{1}{m}+4P^{4/3}\left(\frac{\frac{C_1}{m^2}+\frac{C_5}{m}(1-(1-2/m)^2)}{\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac14}\leqslant\\&\leqslant\frac1m P_0\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}+4P^{4/3}\left(\frac{C_1+4C_5}{m^2\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac14}\to0\end{aligned}$$

при $m\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. *Конструирование форм современных архитектурных сооружений.* Киев:Будiвельник. 1978. 138 с.
2. Абдюшев А.А., Мифтахутдинов И.Х., Осипов П.П. *Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности* // Известия КазГАСУ. Строительные конструкции, здания и сооружения. 2009. № 2 (12).
3. Миклюков В.М. *Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности* // Матем. сб. 1979. № 108 (150). С. 268–289.
4. Hwang, Jenn-Fang *A uniqueness theorem for the minimal surface equation* // Pacific Journal of Mathematics. 1996. № 176(2). P. 357–364.
5. Hwang, Jenn-Fang *How many theorems can be derived from a vector function - on uniqueness theorems for the minimal surface equation* // Taiwanese J. Math. 2003. № 7(4). P. 513–539.
6. R. Finn *Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature* // J. d'Analyse Math. 1965. № 14. P. 139–160.
7. T. Rado *The problem of the least area and the problem of Plateau* // J. d'Analyse Math. Z. 1930. № 32. P. 763–796.
8. Бернштейн С.Н. *Об уравнениях вариационного исчисления* // УМН. 1941. № 8. С. 8–31.
9. Бернштейн С.Н., Петровский И.Г. *О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям* // УМН. 1941. № 8. С. 32–74.
10. J. Serrin *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables* // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1964. A264. P. 313–496.
11. G. Stampacchia *On some multiple integral problems in the calculus of variations* // Comm. Pure Appl. Math. 1963. № 16. P. 382–422.
12. H. Jenkins, J. Serrin *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension* // J. ReineAngew. Math. 1968. № 229. P. 170–187.
13. R.C. Bassanezi, U. Massari *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-regular domains* // Ann. Univ. Ferrara. 1978. № 24. P. 181–189.
14. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* Том 1, М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1962.
15. Клячин А.А. *О скорости сходимости последовательности, минимизирующей функционал площади*// Записки семинара "Сверхмедленные процессы вып. 2. -Волгоград: Изд-во ВолГУ. 2007. С. 136–142.
16. Клячин А.А. *О скорости сходимости последовательности, доставляющей минимум в вариационной задаче* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2012. № 1 (16). С. 12–20.
17. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989, 464 с.

Михаил Андреевич Гацунаев,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `mihpost@mail.ru`

Алексей Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `klyachin-aa@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 17-27.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ А.Ф. ЛЕОНТЬЕВА

О.А. ИВАНОВА, С.Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. В работе определяется и исследуется абстрактный вариант интерполирующего функционала. Он вводится с помощью оператора Поммье, действующего в счетном индуктивном пределе весовых пространств Фреше целых функций и некоторой целой функции двух комплексных переменных. Изучены свойства соответствующего оператора Поммье. Частными случаями введенного интерполирующего функционала являются интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева, широко применяющаяся в теории рядов экспонент и операторов свертки, а также интерполирующий функционал, использованный ранее при решении проблемы о существовании линейного непрерывного правого обратного к оператору представления рядами из квазиполиномов функций, аналитических в ограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}$.

Ключевые слова: интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева, интерполирующий функционал, оператор Поммье.

Mathematics Subject Classification: 30B50, 46A13, 47B38

Введение

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $A(\bar{G})$ — пространство ростков всех функций, аналитических на замыкании $\bar{G}$ области G с естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств. А. Ф. Леонтьев (см. [1, гл. IV, §2, с.237]) ввел интерполирующую функцию $\omega_L(\mu, f)$, задаваемую некоторой специальной целой функцией L экспоненциального типа, и применил ее к вычислению коэффициентов разложений функций из $A(\bar{G})$ в ряды экспонент с показателями — нулями L. Интерполирующая функция вводилась и в отличных от упомянутой выше ситуациях и была использована для вычисления коэффициентов рядов экспонент или обобщенных экспонент для функций из различных пространств; она применялась также и в других вопросах теории рядов экспонент, в теории полиномов из экспонент, операторов свертки, в интерполяционных задачах.

Для решения проблемы существования линейного непрерывного правого обратного (коротко: ЛНПО) к оператору представления рядами из квазиполиномов функций, аналитических в G, в [2, §3] введен интерполирующий функционал $\Omega_Q(\mu, z, f)$ — аналог интерполирующей функции $\omega_L(\mu, f)$, задаваемый некоторой целой функцией $Q(\mu, z)$ двух комплексных переменных μ, z. Функционал Ω_Q и его аналоги были использованы затем при решении проблемы наличия ЛНПО к оператору представления рядами из квазимономов функций, аналитических в ограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}$ [3]; к оператору представления рядами экспонент функций, аналитических на ограниченном выпуклом локально замкнутом множестве в $\mathbb{C}$ [4]; к оператору представления рядами из функций Миттаг-Леффлера функций, аналитических в ρ-выпуклой области ($\rho > 0$) [5]. Кроме того, вариант функционала Ω_Q был применен при решении задачи о наличии ЛНПО к оператору представления рядами из обобщенных экспонент ультрараспределений типа Бьерлинга на многомерном вещественном кубе [6].

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov, On A.F. Leont'ev's interpolating function.

Поступила 22 апреля 2014 г.

В настоящей работе вводится абстрактная версия интерполирующего функционала, в частности, интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева. Она определяется с помощью оператора Поммье, действующего в весовом (LF)-пространстве целых в $\mathbb{C}$ функций. В связи с этим в §1 изучаются свойства оператора Поммье. Интерполирующий функционал вводится и изучается в §2. В §3 приводятся реализации интерполирующего функционала для конкретных пространств. В данной работе мы ограничились примерами, явившимися побудительным мотивом настоящего исследования. Интерполирующий функционал может быть полезен и во многих других ситуациях, в которых сопряженное к основному пространству реализуется как весовое пространство целых функций. Анализу таких ситуаций, применениям интерполирующего функционала к теории рядов экспонент, операторов свертки предполагается посвятить отдельную статью.

1. Операторы Поммье, их свойства

В этом параграфе мы изучим оператор Поммье, действующий в некотором весовом (LF)-пространстве (т.е. в счетном индуктивном пределе пространств Фреше) E целых функций. Для непрерывной функции $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, для функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим

$$p_v(f) := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp v(z)}.$$

Пусть непрерывные функции $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ таковы, что

$$v_{n,k+1} \le v_{n,k} \le v_{n+1,k},\ n, k \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, $A(\mathbb{C})$ обозначает пространство всех целых (в $\mathbb{C}$) функций. Определим банаховы пространства

$$E_{nk} := \{f \in A(\mathbb{C}) : p_{v_{n,k}}(f) < +\infty\},\ n, k \in \mathbb{N},$$

весовые пространства Фреше

$$E_n := \{f \in A(\mathbb{C}) : p_{v_{n,k}}(f) < +\infty\ \forall k \in \mathbb{N}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. Весовое (LF)-пространство E определим следующим образом:

$$E := \operatorname*{ind}_{n\to} E_n.$$

Введем следующие условия для функций $v_{n,k}$:

$$\forall n\ \exists m\ \forall k\ \exists s\ \exists C \ge 0 : \sup_{|t-z|\le 1} v_{n,s}(t) \le \inf_{|t-z|\le 1} v_{m,k}(t) + C,\ z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

и

$$\forall n\ \exists m\ \forall k\ \exists s : \lim_{z\to\infty} (v_{m,k}(z) - v_{n,s}(z)) = +\infty. \tag{2}$$

Для $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}$ положим $\tau_h(f)(z) := f(z + h)$, $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 1. 1) Пусть выполняется условие (1). Тогда

(a) Пространство E инвариантно относительно дифференцирования, т.е. для любой функции $f \in E$ также $f' \in E$.

(b) Пространство E инвариантно относительно сдвига, т.е. $\tau_h(f) \in E$ для любых $f \in E$ и $h \in \mathbb{C}$.

2) Пусть выполняется условие (2). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m.

□ Утверждения 1) очевидны.

2) Пусть множество B ограничено в E_n. Выберем $m \in \mathbb{N}$ по n по условию (2). Возьмем последовательность $f_j \in B$, $j \in \mathbb{N}$. Так как она ограничена на каждом компакте в $\mathbb{C}$, то по теореме Монтеля существует подпоследовательность $(f_{j_r})_{r\in\mathbb{N}}$, равномерно сходящаяся

на любом компакте в $\mathbb{C}$ к некоторой функции $f \in A(\mathbb{C})$. Очевидно, что $f \in E_n \subseteq E_m$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим $s \in \mathbb{N}$ по (2). Так как $\sup\limits_{r\in\mathbb{N}} p_{v_{n,s}}(f_{j_r}) < +\infty$, то

$$p_{v_{m,k}}(f_{j_r} - f) \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Следовательно, множество B относительно компактно в E_m. ■

Лемма 2. Пусть выполняются условия (1) и (2). Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что в E_m

$$\lim_{\mu\to z} \frac{\tau_\mu(f) - \tau_z(f)}{\mu - z} = \tau_z(f').$$

□ Очевидно, что

$$\lim_{\mu\to z} \frac{\tau_\mu(f)(t) - \tau_z(f)(t)}{\mu - z} = f'(t+z) = \tau_z(f')(t)$$

для любого $t \in \mathbb{C}$. Из принципа максимума модуля и условия (1) вытекает, что множество $\{\frac{\tau_\mu(f)-\tau_z(f)}{\mu-z} : 0 < |\mu - z| \le 1\}$ ограничено в некотором пространстве E_n, а значит, относительно компактно в некотором пространстве E_m. Следовательно, в E_m существует $\lim\limits_{\mu\to z} \frac{\tau_\mu(f)-\tau_z(f)}{\mu-z}$, равный $\tau_z(f')$. ■

Будем предполагать, что пространство E содержит функцию, отличную от тождественного нуля. Тогда существует функция $g_0 \in E$ такая, что $g_0(0) = 1$.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Оператор $D_z : E \to A(\mathbb{C})$ вводится следующим образом: для $f \in E$

$$D_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t-z)f(z)}{t-z}, & t \ne z, \\ f'(z) - g_0'(0)f(z), & t = z. \end{cases}$$

Замечание 3. Ранее оператор D_z исследовался и применялся в случае $g_0 \equiv 1$ в пространствах аналитических функций без ограничений на их рост (см., например, работы [7]–[12] и библиографию в них). В этом случае он называется оператором Поммье. Мы будем использовать это название и для оператора D_z, введенного выше.

Докажем далее некоторые свойства оператора D_z.

Лемма 4. Для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$D_\mu(f) - D_z(f) = (\mu - z)D_\mu(D_z(f)) + f(z)D_\mu(\tau_{-z}(g_0)),\ \ f \in E. \tag{3}$$

□ Возьмем $\mu, z \in \mathbb{C}$, $\mu \ne z$. Если $t \ne z$, $t \ne \mu$, то

$$D_\mu(f)(t) - D_z(f)(t) = \frac{f(t) - g_0(t-\mu)f(\mu)}{t-\mu} - \frac{f(t) - g_0(t-z)f(z)}{t-z} =$$

$$= \frac{f(t)(\mu - z) + g_0(t-z)f(z)(t-\mu) - g_0(t-\mu)f(\mu)(t-z)}{(t-\mu)(t-z)}$$

и

$$D_\mu(D_z(f))(t) = \frac{\frac{f(t)-g_0(t-z)f(z)}{t-z} - g_0(t-\mu)\frac{f(\mu)-g_0(\mu-z)f(z)}{\mu-z}}{t-\mu} =$$

$$= \Big(f(t)(\mu - z) - g_0(t-z)f(z)(\mu-z) - g_0(t-\mu)f(\mu)(t-z) +$$
$$+ g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)f(z)(t-z)\Big)/\Big((\mu-z)(t-z)(t-\mu)\Big).$$

Поэтому

$$(\mu - z)D_\mu(D_z(f))(t) =$$
$$= \Big(f(t)(\mu - z) + g_0(t-z)f(z)(t-\mu) - g_0(t-\mu)f(\mu)(t-z) -$$

$$-g_0(t-z)f(z)(t-\mu) - g_0(t-z)f(z)(\mu-z)-$$
$$+g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)f(z)(t-z)\Big)/\Big((t-z)(t-\mu)\Big) =$$
$$= D_\mu(f)(t) - D_z(f)(t)+$$
$$+\frac{-g_0(t-z)f(z)(t-z)+g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)f(z)(t-z)}{(t-z)(t-\mu)} =$$
$$= D_\mu(f)(t) - D_z(f)(t) + f(z)\frac{g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)-g_0(t-z)}{t-\mu} =$$
$$= D_\mu(f)(t) - D_z(f)(t) - f(z)D_\mu(\tau_{-z}(g_0))(t).$$

Ясно, что равенство
$$(\mu-z)D_\mu(D_z(f))(t) = D_\mu(f)(t) - D_z(f)(t) - f(z)D_\mu(\tau_{-z}(g_0))(t)$$
выполняется при $t=\mu$ и $t=z$ (ведь функции, стоящие в обеих частях этого равенства, целые по t). Поскольку $D_\mu(\tau_{-z}(g_0))(t) = 0$, $t\in\mathbb{C}$, при $\mu=z$, то последнее равенство справедливо и при $\mu=z$. ■

Замечание 5. Если $g_0\equiv 1$, то равенство (3) имеет вид:
$$D_\mu - D_z = (\mu-z)D_\mu\circ D_z.$$

Лемма 6. Предположим, что выполняется условие (1). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Для любых $n\in\mathbb{N}$, ограниченного в $\mathbb{C}$ множества M, существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $z\in M$ оператор D_z линейно и непрерывно отображает E_n в E_m.

(ii) Для любых $n\in\mathbb{N}$, ограниченного в E_n множества B, ограниченного в $\mathbb{C}$ множества M, существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что множество
$$\{D_z(f):\ z\in M, f\in B\}$$
ограничено в E_m.

□ (i): Вследствие (1) найдется $n_1\in\mathbb{N}$, для которого множество
$$\{\tau_{-z}(g_0) : z\in M\}$$
ограничено в E_{n_1}. Выберем $m\in\mathbb{N}$ по $n_2:=\max\{n,n_1\}$ по (1) и для $k\in\mathbb{N}$ определим $s\in\mathbb{N}$ (тоже по (1)).

Возьмем $f\in E_n$. Зафиксируем $z\in M$. Пусть $|t-z|>1$. Тогда
$$\frac{|D_z(f)(t)|}{\exp v_{m,k}(t)} \le \frac{|f(t)-g_0(t-z)f(z)|}{\exp v_{m,k}(t)} \le \frac{|f(t)|}{\exp v_{m,k}(t)} + |f(z)|\frac{|g_0(t-z)|}{\exp v_{m,k}(t)}. \tag{4}$$

Если $|t-z|\le 1$, то
$$\frac{|D_z(f)(t)|}{\exp v_{m,k}(t)} \le \frac{\sup\limits_{|w-z|=1}|f(w)-g_0(w-z)f(z)|}{\exp v_{m,k}(t)} \le \tag{5}$$
$$\le \frac{\sup\limits_{|w-z|=1}|f(w)|}{\exp v_{m,k}(t)} + |f(z)|\frac{\sup\limits_{|w-z|=1}|g_0(w-z)|}{\exp v_{m,k}(t)} \le$$
$$\le \Big(p_{v_{n_2,s}}(f) + |f(z)|p_{v_{n_2,s}}(\tau_{-z}(g_0))\Big)\exp\Big(\sup_{|w-z|\le 1} v_{n_2,s}(w) - \inf_{|w-z|\le 1} v_{m,k}(w)\Big).$$

Таким образом, для любого $k\in\mathbb{N}$
$$p_{v_{m,k}}(D_z(f)) < +\infty,$$

т.е. $D_z(f) \in E_m$. Значит, для каждого $z \in M$ оператор D_z (линейно) отображает E_n в E_m. Поскольку график оператора $D_z : E_n \to E_m$ замкнут, то по теореме о замкнутом графике [13, с.615, теорема 6.7.1] операторы $D_z : E_n \to E_m$, $z \in M$, непрерывны.

(ii): Пусть множество B ограничено в E_n, т.е. $\sup\limits_{f \in B} p_{v_{n,l}}(f) < +\infty$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Из условия (1) следует, что множество $\{\tau_{-z}(g_0) : z \in M\}$ ограничено в некотором пространстве E_{n_1}. Положим $n_2 := \max\{n; n_1\}$. Выберем m по n_2 согласно (1) и, зафиксировав k, определим s по (1). Так как B ограничено в E_n, то $\sup\limits_{z \in M, f \in B} |f(z)| < +\infty$. Вследствие неравенств (4)-(5), учитывая, что множества B и $\{\tau_{-z}(g_0) : z \in M\}$ ограничены в E_m, получим:

$$\sup_{z \in M, f \in B} p_{m,k}(D_z(f)) < +\infty.$$

Значит, множество $\{D_z(f) : z \in M, f \in B\}$ ограничено в E_m. ■

Лемма 7. Пусть выполняются условия (1) и (2). Тогда справедливы следующие утверждения:

(iii) Для любого $n \in \mathbb{N}$, любого ограниченного в E_n множества B существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\lim\limits_{\mu \to z} D_\mu(f) = D_z(f)$ в E_m равномерно (по f) на B.

(iv) Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что в E_r существует $\lim\limits_{\mu \to z} \frac{D_\mu(\tau_{-z}(f))}{\mu - z}$, равный $D_z(\tau_{-z}(f'))$.

(v) Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что в E_r

$$\lim_{\mu \to z} \frac{D_\mu(f) - D_z(f)}{\mu - z} = D_z^2(f) + f(z) D_z(\tau_{-z}(g_0')).$$

□ (iii): Пусть $n \in \mathbb{N}$ и множество B ограничено в E_n. По замечанию 1, 2) существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что B относительно компактно в E_{m_1}.

Ясно, что $D_\mu(f) \to D_z(f)$ при $\mu \to z$ поточечно для любой функции $f \in E$. По свойству (ii) леммы 6 существует m_2, для которого множество

$$\{D_\mu(f) : \ |\mu - z| \le 1, f \in B\}$$

ограничено в E_{m_2}, а значит, по замечанию 1, 2) и относительно компактно в некотором пространстве E_{m_3}, где $m_3 \ge m_1$. Отсюда следует, что для любого $f \in B$ в E_{m_3} существует $\lim\limits_{\mu \to z} D_\mu(f)$, равный $D_z(f)$. По свойству (i) леммы 6 найдется $m \ge m_3$ такое, что операторы D_μ, $|\mu - z| \le 1$, линейно и непрерывно отображают E_{m_1} в E_m. По теореме Банаха-Штейнгауза [13, следствие 7.1.4] $\lim\limits_{\mu \to z} D_\mu(f) = D_z(f)$ в E_m равномерно (по f) на B, т.е.

$$\lim_{\mu \to z} \sup_{f \in B} p_{v_{m,k}}(D_\mu(f) - D_z(f)) = 0$$

для любого $k \in \mathbb{N}$.

(iv): Зафиксируем $f \in E$ и $z \in \mathbb{C}$. При $\mu \ne z$, вследствие $D_\mu(\tau_{-\mu}(f)) = 0$,

$$\frac{D_\mu(\tau_{-z}(f))}{\mu - z} = D_\mu\Big(\frac{\tau_{-z}(f) - \tau_{-\mu}(f)}{\mu - z}\Big). \tag{6}$$

По лемме 2 найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что в E_m существует $\lim\limits_{\mu \to z} \frac{\tau_{-z}(f) - \tau_{-\mu}(f)}{\mu - z}$, равный $\tau_{-z}(f')$, а множество $B = \left\{\frac{\tau_{-z}(f) - \tau_{-\mu}(f)}{\mu - z} : \ 0 < |\mu - z| \le 1\right\}$ относительно компактно в E_m (см. доказательство леммы 2). По (iii) и свойству (i) леммы 6 найдется $r \in \mathbb{N}$, для которого $\lim\limits_{\mu \to z} D_\mu(g) = D_z(g)$ в E_r равномерно (по g) на B, и оператор D_z линейно и непрерывно отображает E_m в E_r. Используя это и равенство (6), легко показать, что в E_r существует $\lim\limits_{\mu \to z} \frac{D_\mu(\tau_{-z}(f))}{\mu - z}$, равный $D_z(\tau_{-z}(f'))$.

(v): Вследствие равенства (3) при $\mu \neq z$

$$\frac{D_\mu(f) - D_z(f)}{\mu - z} = D_\mu(D_z(f)) + f(z)\frac{D_\mu(\tau_{-z}(g_0))}{\mu - z}.$$

Поэтому утверждение (v) следует из (iii) и (iv). ■

Докажем еще один результат об оценке роста $D_\mu(f)(t)$ по t и μ для $f \in E$.

Лемма 8. Пусть выполняется условие (1) и $g_0 \equiv 1$. Тогда $\forall f \in E\ \exists m\ \forall k, l\ \exists A \geq 0$:

$$|D_\mu(f)(t)| \leq A \exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)),\ t, \mu \in \mathbb{C}.$$

□ Заметим, что функция $g_0 \equiv 1$ принадлежит E тогда и только тогда, когда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n \geq n_0$ и $s \in \mathbb{N}$

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} v_{n,s}(z) > -\infty. \tag{7}$$

(Без ограничения общности можно считать, что $n_0 = 1$.) Пусть $f \in E_r$. По условию (1) существует $m \geq r$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$ найдутся $s \in \mathbb{N}$ и $C \geq 0$, для которых

$$\sup_{|w-t| \leq 2} v_{r,s}(w) \leq v_{m,l}(t) + C,\ t \in \mathbb{C}.$$

Для $k, l \in \mathbb{N}$ (используя принцип максимума, если $|t - \mu| \leq 1$) получим: для любых $t, \mu \in \mathbb{C}$

$$|D_\mu(f)(t)| \leq \sup_{|w-t| \leq 2} |f(w)| + |f(\mu)| \leq$$

$$\leq p_{v_{r,s}}(f) \exp(v_{m,l}(t) + C) + p_{v_{m,k}}(f) \exp v_{m,k}(\mu) =$$

$$= \Big(p_{v_{r,s}}(f) \exp(C - v_{m,k}(\mu)) + p_{v_{m,k}}(f) \exp(-v_{m,l}(t))\Big) \exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)).$$

Остается отметить, что, вследствие (7),

$$\sup_{t, \mu \in \mathbb{C}} (p_{v_{r,s}}(f) \exp(C - v_{m,k}(\mu)) + p_{v_{m,k}}(f) \exp(-v_{m,l}(t))) < +\infty.$$

■

2. Q-интерполирующий функционал, его свойства

Далее E — пространство целых функций такое, как в §1, причем задающее его семейство функций $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Предположим, что F — некоторое комплексное локально выпуклое пространство (коротко: ЛВП), обладающее следующими свойствами:

(F1) (F, E) — дуальная пара относительно билинейной формы $\langle x, f \rangle$, $x \in F$, $f \in E$.
(F2) Топологии F и E мажорируют слабые топологии $\sigma(F, E)$ и $\sigma(E, F)$ соответственно.
(F3) Существуют элементы $e_\lambda \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такие, что

$$\langle e_\lambda, g \rangle = g(\lambda),\ g \in E, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Замечание 9. Естественным примером пространства F, удовлетворяющего условиям (F1)-(F3), является топологическое сопряженное E' к E с топологией, мажорирующей слабую топологию $\sigma(E', E)$. В этом случае e_λ — дельта-функции:

$$\langle e_\lambda, f \rangle = e_\lambda(f) = f(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},\ f \in E.$$

(По поводу используемых здесь понятий из теории двойственности см., например, [14, гл.2].)

Определение 10. Пусть Q — целая в $\mathbb{C}^2$ функция такая, что $Q(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Q-интерполирующим функционалом назовем отображение $\Omega_Q : \mathbb{C}^2 \times F \to \mathbb{C}$, задаваемое равенством

$$\Omega_Q(\mu, z, x) := \langle x, D_\mu(Q(\cdot, z)) \rangle,\ \mu, z \in \mathbb{C},\ x \in F.$$

Докажем некоторые свойства функционала Ω_Q. Положим $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для ЛВП H символ H' обозначает топологическое сопряженное к H.

Теорема 11. (i) Для любых $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$

$$(\lambda - \mu)\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = Q(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)Q(\mu, z).$$

(ii) $\Omega_Q(\mu, z, \cdot) \in F'$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.

(iii) Предположим, что отображение $z \mapsto Q(\cdot, z)$ обладает следующим свойством: для любого компакта M в $\mathbb{C}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z \in M} p_{v_{n,s}}(Q(\cdot, z)) < +\infty.$$

Тогда $\Omega_Q(\cdot, \cdot, x) \in A(\mathbb{C}^2)$ для любого $x \in F$.

(iv) Если $g_0 \equiv 1$, то $\Omega_Q(\cdot, z, x) \in E$ для любых $z \in \mathbb{C}$ и $x \in F$.

□ (i): Для $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \neq \lambda$, учитывая свойство (F3), получим:

$$(\lambda - \mu)\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = (\lambda - \mu)\langle e_\lambda, D_\mu(Q(\cdot, z))\rangle = (\lambda - \mu)D_\mu(Q(\cdot, z))(\lambda) =$$

$$= (\lambda - \mu)\frac{Q(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)Q(\mu, z)}{\lambda - \mu} = Q(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)Q(\mu, z).$$

Если $\mu = \lambda$, равенство (i) очевидно.

Утверждение (ii) следует из свойства (F2).

(iii): Зафиксируем $x \in F$ и $z \in \mathbb{C}$. Возьмем $\mu \in \mathbb{C}$. По свойству (v) леммы 7 найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что в E_r существует $\lim\limits_{\triangle\mu \to 0} \frac{D_{\mu+\triangle\mu} - D_\mu}{\triangle\mu}(Q(\cdot, z))$, равный $D^2_\mu(Q(\cdot, z)) + Q(\mu, z)D_\mu(\tau_{-\mu}(g_0')) =: h$. Поэтому, вследствие (F2), существует $\lim\limits_{\triangle\mu \to 0} \frac{\Omega_Q(\mu+\triangle\mu, z, x) - \Omega_Q(\mu, z, x)}{\triangle\mu}$, равный $\langle x, h\rangle$. Таким образом, функция $\Omega_Q(\mu, z, x)$ является целой по μ.

Зафиксируем $x \in F$ и $\mu \in \mathbb{C}$. Раскладывая (при фиксированном $t \in \mathbb{C}$) целую (по z) функцию $Q(t, z)$ в степенной ряд, получим:

$$Q(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) z^j, \ t, z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

где $a_j \in A(\mathbb{C})$. Возьмем $z \in \mathbb{C}$. В силу неравенств Коши

$$|a_j(t)| \leq \frac{\sup\limits_{|\xi| \leq |z|+1} |Q(t, \xi)|}{(|z| + 1)^j}, \ j \in \mathbb{N}_0, \ t \in \mathbb{C}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$C_s := \sup_{|\xi| \leq |z|+1} p_{v_{n,s}}(Q(\cdot, \xi)) < +\infty.$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{C}$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}_0$

$$|a_j(t)| \leq \frac{C_s \exp v_{n,s}(t)}{(|z| + 1)^j}.$$

Следовательно, ряд (8) сходится абсолютно в некотором пространстве E_n (n зависит от z) по переменной t к $Q(t, z)$. По лемме 6 (i) существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что D_μ линейно и непрерывно отображает E_n в E_m. По свойству (F2) линейный функционал

$$g \mapsto \langle x, g\rangle, \ g \in E, \tag{9}$$

непрерывен на E, а значит, непрерывно его сужение на любое пространство E_l, $l \in \mathbb{N}$, в частности, на E_m [14, гл.5, предложение 5]. Поэтому

$$\Omega_Q(\mu, z, x) = \langle x, (D_\mu)_t(Q(t,z))\rangle = \Big\langle x, (D_\mu)_t\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)z^j\Big)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle x, \sum_{j=0}^{\infty} D_\mu(a_j)z^j\Big\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\langle x, D_\mu(a_j)\rangle z^j,$$

причем последний числовой ряд абсолютно сходится. Таким образом, функция $\Omega_Q(\mu, z, x)$ является целой по z. По теореме Хартогса [15, гл 1, §2, п.6] $\Omega_Q(z, \mu, x)$ — целая в $\mathbb{C}^2$ функция (по (μ, z)) для любого $x \in F$.

(iv): Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$ и $x \in F$. По (iii) $\Omega_Q(\mu, z, x)$ — целая (по μ) функция. Так как линейный функционал (9) непрерывен на $E = \operatorname{ind}_{n\to} \operatorname{proj}_{\leftarrow s} E_{ns}$, то $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists s \in \mathbb{N}\ \exists \tilde{B} \geq 0$:

$$|\Omega_Q(\mu, z, x)| \leq \tilde{B} p_{v_{n,s}}(D_\mu(Q(\cdot, z))). \tag{10}$$

По лемме 8 $\exists m\ \forall k, l\ \exists A \geq 0$:

$$|D_\mu(Q(\cdot, z))(t)| \leq A\exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)),\ \ \mu, t \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) (в них $n = m$, $l = s$) следует: для любого $k \in \mathbb{N}$

$$|\Omega_Q(\mu, z, x)| \leq A\tilde{B}\exp v_{m,k}(\mu),\ \ \mu \in \mathbb{C}.$$

Значит, $\Omega_Q(\cdot, z, x) \in E$. ■

3. Примеры

1) Интерполирующая функция $\omega_L(\mu, x)$, введенная А. Ф. Леонтьевым (см. [1, гл. IV, §2, с.237]) — частный случай функционала Ω_Q.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\bar{G}$ — замыкание G в $\mathbb{C}$; $0 \in G$; $A(\bar{G})$ — пространство всех функций, аналитических на $\bar{G}$, с естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств. Пусть H_G — опорная функция $\bar{G}$, т.е.

$$H_G(z) := \sup_{t\in\bar{G}} \operatorname{Re}(zt),\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Положим $F := A(\bar{G})$. В качестве E рассмотрим весовое пространство Фреше:

$$E := \Big\{f \in A(\mathbb{C})\ \Big|\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_G(z) + |z|/n)} < +\infty\Big\},$$

т.е. в данном случае

$$v_{n,k}(z) = H_G(z) + |z|/k,\ \ n, k \in \mathbb{N},\ \ z \in \mathbb{C},$$

и все ЛВП E_n совпадают между собой. Семейство функций $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Через $\mathcal{F}$ обозначим преобразование Лапласа:

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi_t(\exp(tz)),\ \ z \in \mathbb{C},\ \ \varphi \in A(\bar{G})'.$$

Как известно [16, теорема 4.5.3], $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $A(\bar{G})'_b$ к $A(\bar{G})$ на E. Билинейная форма

$$\langle x, f\rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(x),\ \ x \in F,\ \ f \in E, \tag{12}$$

задает двойственность между F и E, т.е. условие (F1) выполняется. Вследствие (12) условие (F2) тоже имеет место. Если $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$, то

$$\langle e_\lambda, f\rangle = f(\lambda),\ \ \lambda \in \mathbb{C},\ \ f \in E,$$

а значит, выполнено условие (F3). Пусть L — целая функция экспоненциального типа с сопряженной диаграммой $\bar{G}$. Согласно [1, гл. IV, §2, с.237]

$$\omega_L(\mu, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma(t) \Big(\int\limits_0^t x(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \Big) dt,$$

где γ – функция, ассоциированная по Борелю с L, C — контур, охватывающий $\bar{G}$ и лежащий в области аналитичности x и γ.

Положим $Q(\mu, z) := L(\mu)$, $\mu, z \in \mathbb{C}$. Поскольку $0 \in G$, то в качестве g_0 можно взять $g_0 \equiv 1$. Покажем, что

$$\Omega_Q(\mu, z, x) = \omega_L(\mu, x), \ \mu, z \in \mathbb{C}, \ x \in F.$$

Поскольку для $\mu, z \in \mathbb{C}$ линейные функционалы $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ и $\omega_L(\mu, \cdot)$ непрерывны на F (теорема 11 (ii) и [1, свойство 5, с.243] соответственно), то, в силу полноты семейства $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в F, достаточно показать, что

$$\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \omega_L(\mu, e_\lambda)$$

для $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $\Omega(\mu, z) = L(\mu)$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$, то

$$\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \frac{Q(\lambda, z) - Q(\mu, z)}{\lambda - \mu} = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

По [1, свойство 3, с.242] также

$$\omega_L(\mu, e_\lambda) = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

2) Интерполирующий функционал, введенный в [2, §3] на основе интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, — тоже частный случай изученного в данной работе.

Пусть G, H_G — такие, как выше в 1); $F := A(G)$ — пространство всех функций, аналитических в G, с топологией равномерной сходимости на компактах G. В качестве E рассмотрим счетный индуктивный предел весовых банаховых пространств:

$$E := \Big\{ f \in A(\mathbb{C}) \ \Big| \ \exists n \in \mathbb{N} \ |f|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_G(z) - |z|/n)} < +\infty \Big\},$$

т.е. в данном случае

$$v_{n,k}(z) = H_G(z) - |z|/n, \ n, k \in \mathbb{N}, \ z \in \mathbb{C},$$

и все ЛВП E_n являются банаховыми пространствами. Семейство функций $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Пусть $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$.

Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \ z \in \mathbb{C}, \ \varphi \in A(G)',$$

является [16, теорема 4.5.3] топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $A(G)'_b$ к $A(G)$ на E. Билинейная форма

$$\langle x, f \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(x), \ x \in F, \ f \in E,$$

устанавливает двойственность между F и E. Как и в 1), условия (F1)-(F3) выполняются.

Пусть Q — целая в $\mathbb{C}^2$ функция, такая, что $Q(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Согласно [2, §3, определение 3.1], Q-интерполирующий функционал определяется так (чтобы все же отличать его от исследованного здесь, обозначим его несколько иначе, чем в [2]):

$$\tilde{\Omega}_Q(\mu, z, x) := \mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, z))_t \Big(\int\limits_0^t x(t-\xi) \exp(\mu\xi) d\xi \Big), \ \mu, z \in \mathbb{C}, \ x \in A(G).$$

В данном случае тоже можно взять $g_0 \equiv 1$. Из непрерывности функционалов $\tilde{\Omega}_Q(\mu, z, \cdot)$ и $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ на $A(G) = F$ ([2, §3, лемма 3.2 (б)] и теорема 11 (ii) соответственно), полноты системы $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в $A(G)$ и равенства $\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \tilde{\Omega}_Q(\mu, z, e_\lambda)$ для любых $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$, следует, что $\Omega_Q = \tilde{\Omega}_Q$ на $\mathbb{C}^2 \times F$. (Заметим, что равенство $\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \frac{Q(\lambda,z)-Q(\mu,z)}{\lambda-\mu}$ установлено в [2, лемма 3.2 (б)] при $\mu = z$; очевидно, оно имеет место для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.)

3) Пусть теперь G — ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{C}$, содержащее 0. Предположим, что G локально замкнуто, т.е. имеет счетную фундаментальную систему компактных подмножеств $G_n \subseteq G$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что все компакты G_n выпуклые и $G_n \subseteq G_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [4], [17], [18]). Пусть $F := A(G) := \operatorname{proj}_{\leftarrow n} A(G_n)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на G, с топологией проективного предела (LB)-пространств $A(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Введем весовое (LF)-пространство $E := \operatorname{ind}_{n\to} \operatorname{proj}_{\leftarrow k} A_{nk}$, где банахово пространство A_{nk} определено следующим образом:

$$A_{nk} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \|f\|_{nk} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_{G_n}(z) + |z|/k)} < +\infty \right\}$$

(H_{G_n} — опорная функция G_n). В данном случае

$$v_{n,k}(z) := H_{G_n}(z) + |z|/k, \ z \in \mathbb{C}, \ n, k \in \mathbb{N};$$

семейство $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Как и ранее, $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \ z \in \mathbb{C}, \ \varphi \in A(G)',$$

устанавливает топологический изоморфизм сильного сопряженного $A(G)'_b$ к $A(G)$ на E [17, lemma 1.10]. Билинейная форма

$$< x, f >:= \mathcal{F}^{-1}(f)(x), \ x \in F, \ f \in E,$$

устанавливает естественную двойственность между F и E; свойства (F1)-(F3) выполняются.

Пусть $\tilde{L}$ — целая (в $\mathbb{C}^2$) функция такая, что $\tilde{L}(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. $\tilde{L}$-интерполирующий функционал $\Omega_{\tilde{L}}$ в [4, §3] определяется так:

$$\Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, x) := \mathcal{F}^{-1}(\tilde{L}(\cdot, z))_t \Big(\int_0^t x(t-\xi) \exp(\mu\xi) d\xi \Big), \ \mu, z \in \mathbb{C}, \ x \in F.$$

И в этом случае можно взять $g_0 \equiv 1$. Положим $Q := \tilde{L}$. Как и в 1) и 2), вследствие непрерывности функционалов $\Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, \cdot)$ и $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ на F ([4, lemma 3.3] и теорема 11 (ii) соответственно), полноты системы $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в F и равенства $\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, e_\lambda)$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$, равенство $\Omega_{\tilde{L}} = \Omega_Q$ выполняется на $\mathbb{C}^2 \times F$. (Заметим, что равенство $\Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, e_\lambda) = \frac{\tilde{L}(\lambda,z)-\tilde{L}(\mu,z)}{\lambda-\mu}$ установлено в [4, lemma 3.3] при $\mu = z$; очевидно, оно имеет место для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.)

Авторы выражают благодарность А.В. Абанину за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976. 536 с.
2. Мелихов С.Н. *Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов* // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 105–128.
3. Иванова О.А., Мелихов С.Н. *О представлении аналитических функций рядами из квазимономов* // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Владикавказ, изд-во ВНЦ РАН и РСО-А. 2008. С. 30–37.
4. S.N. Melikhov, S. Momm *On the expansions of analytic functions on convex locally closed sets in exponential series* // Владикавк. матем. журн. 2011. Т. 13, № 1. С. 44–58.

5. Иванова О.А., Мелихов С.Н. *О формулах для коэффициентов рядов по функциям Миттаг-Леффлера для аналитических функций* // Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2014. С. 251–260. (Матем. форум. Т.8. Ч.1. Итоги науки. Юг России).
6. S.N. Melikhov *Generalized Fourier expansions for distributions and ultradistributions* // Rev. Mat. Compl. 1999. V. 12, № 2. P. 349–379.
7. M. Pommies *Sur les restes successifs des séries de Taylor* // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 1960. V. 24, № 4. P. 77–165.
8. Коробейник Ю.Ф. *К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям* // Матем. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 723–737.
9. Линчук С.С., Нагнибида Н.И. *Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций* // Сибирский матем. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 507—513.
10. I.N. Dimovski, V.Z. Hristov *Commutants of the Pommiez operator* // Int. J. Math. and Math. Sc. 2005. Issue 8. P. 1239–1251.
11. Шерстюков В.Б. *Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей* // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 458—473.
12. Yu.S. Linchuk *Description of the generalized eigenvalues and eigenvectors of some classical operators.* (Ukrainian. English summary). // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky. 2013. № 2. P. 25–29.
13. Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения* . М.: Мир, 1969. 1072 с.
14. Робертсон А.П., Робертсон В.Д. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967. 257 с.
15. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ. Часть 2.* М.: Наука, 1985. 464 с.
16. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир, 1968. 279 с.
17. S.N. Melikhov, S. Momm *Analytic solutions of convolution equations on convex sets with obstacle in the boundary* // Math. Scand. 2000. V. 86. P. 293–319.
18. Мелихов С.Н., Момм З. *О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент на выпуклых локально замкнутых множествах* // Владикавк. матем. журн. 2008. Т. 10, № 2. С. 36—45.

Ольга Александровна Иванова,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Ворровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: *neo_ivolga@mail.ru*

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Ворровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: *melih@math.rsu.ru*

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 28-34.

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.В. КАРПИКОВА

Аннотация. Для исследования спектральных свойств оператора Штурма—Лиувилля, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = -y'' - vy$ с комплексным потенциалом v, и определяемого периодическими краевыми условиями $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$, используется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра оператора.

Ключевые слова: метод подобных операторов, оператор Штурма—Лиувилля, спектр оператора, асимптотика спектра.

Mathematics Subject Classification: 34L20, 34L40, 47E05

1. Введение

Пусть $L_2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых на $[0, 2\pi]$ и суммируемых с квадратом модуля функций со скалярным произведением вида:

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau, \qquad x, y \in L_2[0, 2\pi].$$

Через $W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2[0, 2\pi] : y'$ абсолютно непрерывна и $y'' \in L_2[0, 2\pi]\}$.

Рассматривается одномерный оператор Штурма-Лиувилля $L : D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, который определяется дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' - vy,$$

с областью определения $y \in D(L) = \{y \in W_2^2[0, 2\pi] : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)\}$, задаваемой периодическими краевыми условиями. Предполагается, что потенциал v принадлежит $L_2[0, 2\pi]$ и $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$, – его ряд Фурье.

Оператор L представим в виде $L = A - B$, где оператор $A : D(A) = D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$ задаётся дифференциальным выражением

$$l_0(y) = -y'',$$

а оператор B — оператор умножения на потенциал v. Он корректно определён, в силу условия $D(B) \supset D(A)$. Оператор B будет играть роль возмущения.

Оператор A является самосопряженным с компактной резольвентой. Его спектр $\sigma(A)$ имеет вид: $\sigma(A) = \{n^2, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $E_n^0 = Span\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)}\}$ – собственное подпространство для собственного значения n^2 , $n \neq 0$, где $e_n^{(1)}(t) = e_n(t) = e^{int}, e_n^{(2)}(t) = e_{-n}(t) = e^{-int}$; $E_0^0 = \{\alpha\}, \alpha \in \mathbb{C}$.

A.V. Karpikova, Asymptotics for eigenvalues of Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований(гранты 13-01-00378, 14-01-31196).

Поступила 15 февраля 2014 г.

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора Штурма-Лиувилля используется метод подобных операторов, разработанный в [1]–[6]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Таким образом существенно упрощается изучение исследуемого оператора L.

Одним из основных результатов статьи является теорема 1, в которой получена уточненная асимптотика собственных значений оператора L. В доказательстве этой теоремы используются следующие двусторонние последовательности комплексных чисел:

$$c_{n,n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{n-j}\frac{v_{j-n}}{j^2-n^2}, \qquad c_{-n,-n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{-(n+j)}\frac{v_{j+n}}{j^2-n^2},$$
$$c_{-n,n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{-(n+j)}\frac{v_{j-n}}{j^2-n^2}, \qquad c_{n,-n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{n-j}\frac{v_{j+n}}{j^2-n^2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Отметим, что $c_{n,n} = c_{-n,-n}$.

Теорема 1. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n \right), \tag{1}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n \geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенствами

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 - \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{v_k v_{-k}}{k} \pm \sqrt{v_{2n}v_{-2n}} + \frac{\beta_n^{\pm}}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq m+1, \tag{2}$$

где последовательность $\beta_n^{\pm}$ обладает свойством $\sum\limits_{n\geq m+1} |\beta_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Отметим, что в статье В.Ткаченко [7; теорема 3.6] была приведена асимптотика спектра оператора L вида:

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 + \alpha_n^{\pm}, \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

где $v_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(t)dt$— среднее потенциала v, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n^{\pm}|^2 < \infty$.

Асимптотика спектра из теоремы 1 является более точной по порядку, по сравнению с асимптотикой в формуле (3), так как выписывается еще одно вычислимое приближение, за счет которого повышается порядок остатка.

В случае вещественного потенциала v, асимптотика спектра оператора L приводилась в монографии Марченко В.А. [8; теорема 1.5.2]. Если потенциал v вещественный, то имеет место

Теорема 2. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора L представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n \right), \tag{4}$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n \geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенствами

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 - \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{|v_k|^2}{k} \pm |v_{2n}| + \frac{\beta_n^{\pm}}{n}, \qquad n \geq m+1, \tag{5}$$

где последовательность $\beta_n^{\pm}$ обладает свойством $\sum\limits_{n\geq m+1} |\beta_n^{\pm}| < \infty$.

2. Предварительные преобразования подобия

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Через End$\mathcal{H}$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Компактный оператор $X \in \mathrm{End}\mathcal{H}$ называется оператором Гильберта–Шмидта (см.[9], с.138), если след самосопряжённого оператора XX^* конечен, т.е. $tr(XX^*) < \infty$. Совокупность операторов Гильберта–Шмидта образует двусторонний идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$(см.[9], с.138) из алгебры End$\mathcal{H}$. Идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $< X, Y >= tr(X, Y^*)$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Символом $\|X\|_2$ обозначается норма Гильберта–Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т.е. $\|X\|_2^2 = tr(XX^*)$. Отметим, что если $e_1, e_2, ..., e_n, ...$— произвольный ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то оператор $X \in \mathrm{End}\mathcal{H}$ является оператором Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{i,j\geq 1} |(Xe_j, e_i)|^2 < \infty$ (см.[9], с.138). Здесь можно ввести идеал $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов.

Определение 1. *Два линейных оператора $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются* подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\mathcal{H}$ такой, что $UD(\mathcal{A}_2) = D(\mathcal{A}_1)$ и $\mathcal{A}_1 Ux = U\mathcal{A}_2 x$,$x \in D(\mathcal{A}_2)$. Оператор U называется* оператором преобразования *оператора $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}_2$.*

Важно отметить, что подобные операторы имеют одинаковый спектр. Этот факт постоянно используется здесь при приводимых преобразованиях подобия.

Вернемся к рассмотрению дифференциального оператора $L = A - B$. Далее рассматривается гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2[0, 2\pi]$ и система ортопроекторов $P_n : L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi], n \in \mathbb{Z}_+$, вида:

$$P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, n \in \mathbb{N}, \qquad P_0 x = (x, e_0)e_0. \tag{6}$$

Отметим, что $AP_n = \lambda_n P_n, n \geq 0$.

Символом ΓB обозначим оператор Гильберта–Шмидта

$$((\Gamma B)x)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G(s,\tau)x(\tau)d\tau, \qquad x \in \mathcal{H},$$

где

$$G(s,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}(-u(\frac{s+\tau}{2}) + 2(\frac{s-\tau}{2\pi})u_2(\frac{s+\tau}{2})), & \tau \leqslant s, \\ \frac{1}{4}(u(\frac{s+\tau}{2}) + 2(\frac{s-\tau}{2\pi})u_2(\frac{s+\tau}{2})), & \tau > s, \end{cases} \tag{7}$$

$$u(s) = u_1(s) + u_2(s), u_1(s) = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{Z}+1\\ k\neq 0}} \frac{v_k}{ik}e^{iks}, u_2(s) = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{v_k}{ik}e^{iks}.$$

В дальнейшем, делается предположение $v_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(t)dt = 0$, которое не является ограничительным, так как сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную и не меняет его собственных функций. Однако в формулировке теорем об асимптотике собственных значений эта постоянная учитывается.

В лемме 1 используется наряду с ΓB оператор $JB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ вида

$$((JB)x)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(s+\tau)x(\tau)d\tau, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Введем в рассмотрение операторы, где используется проектор P_k, определенный равенством (6),

$$J_k B = JB - J(P_{(k)}BP_{(k)}) + P_{(k)}BP_{(k)}, \tag{8}$$

$$\Gamma_k B = \Gamma B - \Gamma(P_{(k)}BP_{(k)}), \tag{9}$$

где $P_{(k)} = \sum\limits_{|j|\leqslant k} P_j$.

Ясно, что $J_0B = JB, \Gamma_0 B = \Gamma B$. Из определения операторов J_kB и $\Gamma_k B$ получаем следующие представления

$$J_kB = JB - P_{(k)}JBP_{(k)} + P_{(k)}BP_{(k)}, \qquad \Gamma_k B = \Gamma B - (P_{(k)}\Gamma BP_{(k)}), \tag{10}$$

из которых следует, что $J_kB, \Gamma_k B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для всех $k \geq 0$.

Доказательство следующей леммы фактически дублирует доказательство леммы 7 статьи [6].

Лемма 1. *Операторы $\Gamma B, JB, B$ удовлетворяют следующим условиям:*
*(**a**)$\Gamma B \in End\mathcal{H}$ и $\|\Gamma B\| < 1$; (**b**)$(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$; (**c**)$B\Gamma B, (\Gamma B)JB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$; (**d**) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$; (**e**) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.*

Доказательство следующей теоремы проводится аналогичным образом, что и в теореме 2 статьи [6].

Теорема 3. *Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что*

$$\|\Gamma_k B\|_2 < 1, \tag{11}$$

то оператор $L = A - B$, где $A = L_0, B$ — оператор умножения на потенциал v, подобен оператору

$$\widetilde{L} = L_0 - \widetilde{B},$$

где

$$\widetilde{B} = \widetilde{B}_k = J_kB + (I + \Gamma_k B)^{-1}(B\Gamma_k B - (\Gamma_k B)J_k B),$$

причем имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma_k B) = (I + \Gamma_k B)(A - \widetilde{B}). \tag{12}$$

Операторы $J_kB, \Gamma_kB, B\Gamma_kB, (\Gamma_kB)(J_kB), \widetilde{B}, \widetilde{B}_k$ являются операторами Гильберта–Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$, оператор $\widetilde{B}$ из (12) представим в виде

$$\widetilde{B} = JB + B\Gamma B - (\Gamma B)JB + C \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi]), \tag{13}$$

где оператор C принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ ядерных операторов [9], определенных на $L_2[0, 2\pi]$.

Полученный в теореме 3 результат позволяет свести изучение оператора $L = A - B$ к изучению оператора $A - \widetilde{B}$, где оператор $\widetilde{B}$, есть оператор Гильберта–Шмидта. Таким образом, $\sigma(A - B) = \sigma(A - \widetilde{B})$.

Для формулировки теоремы 4 введем в рассмотрение трансформаторы (т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов; терминология М.Г.Крейна) $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi]) \to \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ со следующими свойствами:

1) J– проектор, $\|J\| = 1$, и он представим в виде безусловно сходящегося в равномерной операторной топологии ряда

$$JX = \sum_{n=0}^{\infty} P_n X P_n = X_0, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi]). \tag{14}$$

2) Трансформатор Γ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ корректно определен равенством (см. [6])

$$\Gamma X = \sum_{\substack{i,j\geq 0 \\ i\neq j}} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\|JX\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n X P_n\| \leqslant \|X\|_2^2, \qquad \|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i\neq j}} \frac{\|P_i X P_j\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leqslant \gamma_0^{-1}\|X\|_2^2,$$

где $\gamma_0 = \inf\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j\geq m}} |\lambda_i - \lambda_j|$.

Далее рассмотрим последовательности трансформаторов $(J_m), (\Gamma_m), m \in \mathbb{Z}_+$, определенные равенствами

$$J_m X = P_{(m)} X P_{(m)} + \sum_{|k|\geq m+1} P_k X P_k = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)},$$

$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}),$$

где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что J_m– проектор. Поскольку он является самосопряженным оператором, то $\|J_m\| = 1$. Трансформатор Γ_m является антисамосопряженным оператором, т.е. $\Gamma_m^* = -\Gamma_m$ и $\|\Gamma_m\| = \gamma_0^{-1} = (\inf\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j\geq m}} |\lambda_i - \lambda_j|)^{-1}$.

Отметим, что при доказательстве теоремы 1 будут использоваться следующие свойства трансформаторов J_k, Γ_k

$$J_k\left((\Gamma_k X)(J_k Y)\right) = 0, \qquad J_k\left((\Gamma_k X) J_k(Y \Gamma_k X)\right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где $X, Y \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$.

В дальнейшем используется компактный самосопряженный оператор A_0 вида:

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} P_k + P_0.$$

Теорема 4 ([1],[3],[6])**.** *Для любого числа $k \in \mathbb{Z}_+$, для которого выполнено неравенство*

$$\|\widetilde{B}\|_2 = \|\widetilde{B}_k\|_2 < \frac{2k+3}{4}, \tag{17}$$

оператор $A - \widetilde{B}$ подобен оператору $A - J_k\widetilde{X}$, где оператор $\widetilde{X}$ является решением (нелинейного) уравнения

$$X = \widetilde{B}\Gamma_k X - (\Gamma_k X)(J_k \widetilde{B}) - (\Gamma_k X) J_k(\widetilde{B}\Gamma_k X) + \widetilde{B} = \Phi(X), \tag{18}$$

рассматриваемого в $\mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$. Решение $\widetilde{X}$ представимо в виде $X_0 A_0^{-\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ и его можно найти методом простых итераций. Преобразование подобия оператора $A - \widetilde{B}$ в оператор $A - J_k\widetilde{X}$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma_k\widetilde{X} \in \mathrm{End}(L_2[0, 2\pi])$.

3. Доказательство теоремы 1

Дальнейший выбор числа $k \in \mathbb{Z}_+$ обусловлен выполнением условия (17) теоремы 4, обозначения которой мы далее используем.

Применяя трансформатор J_k к обеим частям уравнения (18), а также используя свойство (16) трансформаторов J_k, Γ_k, получаем:

$$\begin{aligned} J_k\widetilde{X} &= J_k(\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{X}) + J_k\widetilde{B} = J_k\widetilde{B} + J_k(\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{B}) + J_k(\widetilde{B}\Gamma_k(\widetilde{X} - \widetilde{B})) = \\ &= J_k\widetilde{B} + J_k(\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B}) + K = J_k B + J_k(B\Gamma B) + T_1 = JB + J(B\Gamma B) + T_2, \end{aligned}$$

где операторы K, T_1, T_2 представимы в виде $K = K_0 A_0^{-\frac{1}{2}}, T_1 = T_{1,0} A_0^{-\frac{1}{2}}, T_2 = T_{2,0} A_0^{-\frac{1}{2}}$ и операторы $K_0, T_{1,0}, T_{2,0}$ принадлежат идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(L_2[0, 2\pi])$. Ясно, что

$J_kT_j = T_j, j = 0, 1$. При получении этих равенств также использовались следующие свойства: произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором, а операторы $J_kX - JX, \Gamma_kX - \Gamma X, X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$, $k \geq 0$, являются операторами конечного ранга.

Таким образом, применяя теоремы 3 и 4 к рассматриваемому оператору $L = A - B$, получаем, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - (JB + J(B\Gamma B) + T_1) = A - B_0$ и $\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0)$, где $B_0 = JB + J(B\Gamma B) + T_1, T_1 \in \mathfrak{S}_1(L_2[0, 2\pi])$.

Матрица сужения B_n оператора $P_nB_0P_n$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе e_n, e_{-n} имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & v_{2n} \\ v_{-2n} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{n,n} & c_{n,-n} \\ c_{-n,n} & c_{-n,-n} \end{pmatrix} + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) \\ f_3(n) & f_4(n) \end{pmatrix},$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – суммируемые последовательности.

Собственные значения $\mu_n^{\pm}$ оператора B_n имеют следующий вид:

$$\mu_n^{\pm} = c_{n,n} + \frac{f_1(n) + f_4(n)}{2n} \pm$$
$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{f_1(n) - f_4(n)}{n}\right)^2 + 4\left(v_{2n} + c_{n,-n} + \frac{f_2(n)}{n}\right)\left(v_{-2n} + c_{-n,n} + \frac{f_3(n)}{n}\right)} =$$
$$= c_{n,n} + \frac{f_1(n) + f_4(n)}{2n} \pm \frac{\sqrt{4(v_{2n} + c_{n,-n})(v_{-2n} + c_{-n,n})}}{2} \pm$$
$$\pm (\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{f_1(n) - f_4(n)}{n}\right)^2 + 4\left(v_{2n} + c_{n,-n} + \frac{f_2(n)}{n}\right)\left(v_{-2n} + c_{-n,n} + \frac{f_3(n)}{n}\right)} -$$
$$- \frac{\sqrt{4(v_{2n} + c_{n,-n})(v_{-2n} + c_{-n,n})}}{2}).$$

Тогда $\mu_n^{\pm} = c_{n,n} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^{\pm}$, где $\beta_n^{\pm} = \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{|n| \geq m+1} |\alpha(n)|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Последовательность $c_{n,n}, n = 0, 1, ...,$ можно представить следующим образом

$$c_{n,n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{n-j}\frac{v_{j-n}}{j^2 - n^2} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{v_kv_{-k}}{k(k + 2n)} = \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{v_kv_{-k}}{k} -$$
$$- \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{v_kv_{-k}}{k + 2n} = \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{v_kv_{-k}}{k} - \frac{1}{2n}\frac{v_{2n}v_{-2n}}{-2n} -$$
$$- \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -2n}} \frac{v_kv_{-k}}{k + 2n} = \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{v_kv_{-k}}{k} + \omega_n' + \frac{\alpha_n'}{n^2},$$

где $\omega_n' = -\frac{1}{2n}\sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -2n}} \frac{v_kv_{-k}}{k+2n}$, (α_n') – некоторая суммируемая последовательность.

Докажем, что $\sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -2n}} \left|\frac{v_kv_{-k}}{k+2n}\right|^2 < \infty$. Для этого рассмотрим свертку

$$(\omega * \gamma)(n) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \omega(k)\gamma(n - k), n \in \mathbb{Z},$$

последовательности

$\omega : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, w(k) = v_k v_{-k}, k \in \mathbb{Z}$, со свойством $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\omega(k)| < \infty$, с последовательностью $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\gamma(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$ со свойством $\sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}} |\gamma(k)|^2 < \infty$. Тогда последовательность $\omega'_n = -(\omega * \gamma)(-2n), n \in \mathbb{Z}$, как свертка суммируемой последовательности и последовательности, суммируемой с квадратом, является последовательностью, суммируемой с квадратом.

Таким образом получаем доказываемое представление (2).

В случае вещественного потенциала v последовательность α будет суммируемой, и поэтому верно утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов.* Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та. 1987. 165 с.
2. Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов* // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 1. С. 21–39.
3. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазипериодических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 3–32.
4. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1424–1433.
5. Баскаков А.Г. *Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений* // Известия АН СССР. сер. матем. 1986. Т. 50. № 3. С. 435–457.
6. Баскаков А.Г. *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом* // Известия РАН. сер. матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
7. F. Gesztesy, V. Tkachenko *A criterion for Hill operators to be spectral operators of scalar type* // Journal d'Analyse Mathe'matique. 2009. P. 287–353.
8. Марченко В.А. *Операторы Штурма Лиувилля и их приложения.* М.: Наука. 1977. 330 с.
9. Гохберг И.Ц. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965. 448 с.

Алина Вячеславовна Карпикова,
Воронежский государственный университет,
ул. Университетская площадь, 1,
394000, г. Воронеж, Россия
E-mail: KarpikovaAV@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 35-71.

УДК 515.168+517.983

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИИ С ОТМЕЧЕННЫМ ПОДМНОГООБРАЗИЕМ

Ю.А. КОРДЮКОВ, В.А. ПАВЛЕНКО

Аннотация. Пусть X — компактное многообразие без края и X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности один. В работе вводятся классы интегральных операторов на X с ядрами $K_A(x,y)$, являющимися гладкими функциями при $x \notin X^0$ и $y \notin X^0$ и допускающими асимптотическое разложение определенного вида, если x или y приближается к X^0. Для операторов из этих классов доказаны теоремы о действии в пространствах конормальных функций и теоремы о композиции. Показано, что функционал следа можно продолжить до функционала регуляризованного следа r-Tr, определенного на некоторой алгебре $\mathcal{K}(X,X^0)$ сингулярных интегральных операторов, описанных выше. Доказана формула для регуляризованного следа коммутатора операторов из данного класса в терминах ассоциированных операторов на X^0. Доказательства основаны на теоремах о поднятии и опускании конормальных функций при отображениях многообразий с отмеченными подмногообразиями коразмерности один.

Ключевые слова: многообразия, сингулярные интегральные операторы, конормальные функции, регуляризованный след, поднятие, опускание.

Mathematics Subject Classification: 47G10, 58J40, 47C05

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению и исследованию некоторых классов сингулярных интегральных операторов на замкнутом гладком многообразии X с отмеченным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Характерное свойство операторов из этих классов заключается в том, что их ядра $K_A(x,y)$ являются гладкими функциями при $x \notin X^0$ и $y \notin X^0$, допускающими асимптотическое разложение определенного вида, если x или y приближается к X^0.

Прежде всего, мы доказываем теоремы о действии в пространствах конормальных функций и теоремы о композиции для операторов из этих классов. Затем мы строим алгебру $\mathcal{K}(X,X^0)$ сингулярных интегральных операторов данного вида и функционал регуляризованного следа r-Tr на ней, который совпадает с функционалом следа на операторах с гладких ядром. Несмотря на то, что построенный функционал не обладает следовым свойством, мы доказываем формулу для регуляризованного следа r-Tr$[A,B]$ коммутатора операторов A и B, принадлежащих $\mathcal{K}(X,X^0)$, в терминах некоторых интегральных операторов с гладким ядром на X^0, ассоциированных с A и B.

Yu.A. Kordyukov, V.A. Pavlenko, Singular integral operators on a manifold with a distinguished submanifold.

Работа поддержана РФФИ (гранты 12-01-00519-а).

Поступила 13 марта 2014.

Одной из важнейших мотивировок для наших конструкций является желание обобщить формулу Лефшеца для потока на компактном многообразии, сохраняющем слоение коразмерности один. В случае, когда поток не имеет неподвижных точек, и его орбиты трансверсальны слоям слоения, такая формула была доказана в работе [1]. Существенную роль в работе [1] играет следующий аналитический результат.

Пусть M — замкнутое многообразие и $\mathcal{F}$ — гладкое слоение на M коразмерности один. Предположим, что $X_t : M \to M$, $t \in \mathbb{R}$ — поток на M, который отображает каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в какой-либо (возможно, другой) слой. Пусть K — послойно сглаживающий оператор на M, то есть оператор в пространстве $C^\infty(M)$, задающийся семейством интегральных операторов с гладким ядром, действующих вдоль слоев слоения.

Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим оператор A_f в пространстве $C^\infty(M)$ по формуле

$$A_f = \int_{\mathbb{R}} X_t^* \cdot f(t)\, dt \circ K \ ,$$

где X_t^* — оператор в $C^\infty(M)$, индуцированный действием потока X_t, $X_t^* f(x) = f(X_t(x))$. В [1] доказано, что, если орбиты потока X_t трансверсальны к слоям, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор A_f является ядерным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(M)$. Более того, функционал $f \mapsto \operatorname{tr} A_f$ определяет обобщенную функцию на $\mathbb{R}$. Использование обобщенных функций такого вида позволяет определить число Лефшеца потока X_t как обобщенную функцию на $\mathbb{R}$.

В случае, когда поток X_t имеет конечное число невырожденных неподвижных точек, принадлежащих компактным слоям $\{L_i\}$, и орбиты потока X_t трансверсальны ко всем слоям, кроме $\{L_i\}$, оператор A_f, вообще говоря, не является ядерным оператором. Можно показать, что в данном случае оператор A_f принадлежит алгебре $\mathcal{K}(M, M^0)$, где $M^0 = \cup L_i$, и, тем самым, определен его регуляризованный след $\text{r-Tr}(A_f)$. Этот факт позволяет определить число Лефшеца потока X_t в данном случае. Эти результаты являются частью нашего совместного проекта с Х. Альваресом Лопесом и Э. Лейчтнамом и будут обсуждаться в последующих работах.

Алгебры операторов, ассоциированные с компактным многообразием с отмеченным подмногообразием, строились ранее в работах Б.Ю. Стернина, В.Е. Шаталова и А.Ю. Савина в связи с исследованием краевых задач для эллиптических уравнений на компактном многообразии, для которых граничные условия задаются как на крае многообразия, так и на гладких подмногообразиях (коразмерности ≥ 1), не являющихся краем. Задачи подобного типа впервые рассматривал Соболев [2]. Общая постановка таких задач и их исследование были даны в [3] и, следуя этой работе, они часто называются задачами Соболева. Алгебра операторов, соответствующая задачам Соболева, была построена в работе [4]. Она получается как расширение алгебры псевдодифференциальных операторов с помощью специального класса операторов, ассоциированных с подмногообразием — операторов Грина. В работе [5] было показано, что теория задач Соболева может быть представлена как относительная теория, т.е. она ассоциирована с гладким вложением $i : X \hookrightarrow M$ замкнутых многообразий. Относительные теории являются более простыми и элегантными, чем теории, не обладающие этим свойством. Например, вычисление индекса в относительной теории сводится к вычислению индекса на гладких замкнутых многообразиях M и X; напротив, в теории классических краевых задач, которая не является относительной (т.к. ассоциирована с многообразием с краем), вычисление индекса весьма громоздко. В работах [6, 7, 8] Б.Ю. Стернин распространил относительную эллиптическую теорию и на случай, когда подмногообразие является стратифицированным подмногообразием, представимым в виде объединения трансверсально пересекающихся гладких подмногообразий (см. также [9, 10]).

Построенная в данной работе теория также является относительной теорией в смысле Б.Ю. Стернина [5]. Для ее построения мы используем методы работ Мельроуза [11, 12, 13], в частности, предложенный в них геометрический подход к построению и исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов. Введенные нами классы операторов и понятие регуляризованного следа являются аналогами соответствующих объектов, введенных ранее Мельроузом для многообразий с углами.

План статьи следующий. Во втором разделе мы даем определение конормальных функций и конормальных плотностей на многообразии Z с отмеченным подмногообразием Z^0 и описываем их основные свойства. Подмногообразие Z^0 необязательно является гладким, а представляется в виде объединения гладких связных подмногообразий коразмерности 1, пересекающихся трансверсально. Мы будем называть такие подмногообразия стратифицированными. Одним из основных примеров для нас является следующий: $Z = X \times X$, $Z^0 = (X^0 \times X) \cup (X \times X^0)$, где X — гладкое многообразие и X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности один. Введенное нами понятие конормальной функции является обобщением классического понятия конормальной функции на гладком подмногообразии, введенным Хермандером. Аналогичное понятие было введено Мельроузом для многообразий с углами. В третьем разделе мы строим различные классы сингулярных интегральных операторов и формулируем теоремы о действии в пространствах конормальных функций и о композиции для операторов из этих классов. Доказательства этих теорем приведены в четвёртом разделе. Они используют теоремы о поднятии и опускании для конормальных функций при отображениях многообразий с отмеченными подмногообразиями и конструкции некоторых вспомогательных многообразий. В пятом разделе мы определяем функционал регуляризованного следа и доказываем его основные свойства, в частности, теорему о регуляризованном следе коммутатора. В приложениях A и B мы приводим доказательства теорем о поднятии и опускании.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

2. Конормальные плотности и их свойства

В данном разделе мы введем класс конормальных функций на произвольном многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 коразмерности один.

2.1. Стратифицированные подмногообразия. Пусть X — гладкое многообразие размерности n. Подмножество $X^0 \subset X$ будем называть стратифицированным подмногообразием многообразия X (коразмерности один), если X^0 представляется в виде объединения конечного числа гладких подмногообразий $X_1, X_2, \dots, X_r$ размерности $n-1$, которые пересекаются трансверсально. Мы будем предполагать, что подмногообразия $X_1, X_2, \dots, X_r$ связны, и будем называть их компонентами стратифицированного подмногообразия X^0.

Здесь трансверсальное пересечение понимается в следующем смысле. Пусть $p \in X^0$. Предположим, что p принадлежит ровно ℓ компонентам подмногообразия X^0, $\ell \geq 1$. Тогда существует локальная система координат $\varkappa : U \subset X \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, определенная в окрестности точки p, такая, что пересечения компонент подмногообразия X^0, содержащих точку p, с U задаются уравнениями $x_d = 0$ для любого $d \in \{1, \dots, \ell\}$. Любая такая система координат будет называться адаптированной в точке p. Без потери общности, мы можем предполагать, что $\varkappa(U) = D_1 \times D_2$, где $D_1 \subset \mathbb{R}^\ell$ и $D_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$ — некоторые открытые подмножества. Часто для определённости мы будем полагать, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$, и адаптированная в точке p система координат выбрана таким образом, что для любого $d \in \{1, \dots, \ell\}$ пересечение $X_d \cap U$ задается уравнением $x_d = 0$. Мы будем всегда рассматривать регулярные локальные системы координат, то есть такие системы координат $\varkappa : U \subset X \to \mathbb{R}^n$, для которых существует система координат $\bar{\varkappa} : V \subset X \to \mathbb{R}^n$, определенная в таком открытом множестве V, что $\overline{U} \subset V$.

2.2. Индексные множества и семейства. Обозначим через $\mathbb{Q}_1$ множество рациональных чисел, представимых в виде $z = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ взаимно просты и q нечетно, и через $\mathbb{Z}_+$ множество целых неотрицательных чисел.

Определение 1. *Индексным множеством называется множество $E \subset \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. *E ограничено снизу, т.е. существует такое $N_1 \in \mathbb{Q}_1$, что для любого $(z, p) \in E$ справедливо неравенство: $z \geq N_1$;*
2. *$(z, p) \in E$, $p \geq q \Rightarrow (z, q) \in E$;*
3. *для любого $N_2 \in \mathbb{Q}_1$ множество $E \bigcap \{(z, p) : z \leqslant N_2\}$ конечно;*
4. *$(z, p) \in E, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (z + j, p) \in E$.*

Определение 2. *Скажем, что на стратифицированном подмногообразии $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ задано индексное семейство $\mathcal{E}$, если любой его компоненте X_j поставлено в соответствие индексное множество $\mathcal{E}(X_j) = E_j$, $j = 1, \ldots, r$.*

2.3. Конормальные функции и их свойства. Пусть X — гладкое многообразие и $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ — его стратифицированное подмногообразие. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на X^0. Определение конормальной функции в точке $p_0 \in X^0$ будет дано индукцией по числу ℓ компонент подмногообразия X^0, содержащих точку p_0.

База индукции: $\ell = 1$. Предположим, что точка p_0 принадлежит в точности одной компоненте, для определенности, $p_0 \in X_1$, $p_0 \notin X_2 \cup \ldots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p_0 систему координат $\varkappa : U \subset X \to \varkappa(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение 3. *Функция u называется конормальной в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если существует такая окрестность $V \subset U$ точки p_0, $\varkappa(V) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, что функция u определена и является гладкой на $V \setminus X^0$, и*

$$u \sim \sum_{(z,q) \in E_1} a_{z,q}(x^0) x^z \ln^q |x|,$$

где $a_{z,q} \in C^\infty(V_2)$. Здесь знак $\sim$ означает, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ и $N \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$, что:

$$\left| (x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(u(x, x^0) - \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leqslant N}} a_{z,q}(x^0) x^z \ln^q |x| \right) \right| < C|x|^{N+1}, \quad (x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_2, x \neq 0.$$

Шаг индукции. Пусть $\ell \geq 2$. Предположим, что определение конормальной функции в точке дано для любого гладкого многообразия Y с отмеченным стратифицированным подмногообразием Y^0, на котором задано индексное семейство $\mathcal{E}^0$, и для любой точки $p_1 \in Y^0$ при условии, что p_1 принадлежит в точности k компонентам подмногообразия Y^0 при $k < \ell$.

Предположим теперь, что X — гладкое многообразие с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 и точка $p_0 \in X^0$, причём p_0 принадлежит ровно ℓ компонентам подмногообразия X^0. Для определённости будем считать, что $p_0 \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p_0 \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p_0 систему координат $\varkappa : U \subset X \to \varkappa(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ такую, что X_j задается уравнением $x_j = 0$.

Рассмотрим многообразие $Z = \mathbb{R}^{\ell-1} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ с координатами $(x_2, \ldots, x_\ell, x^0)$, где $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 2, \ldots, \ell$, $x^0 \in \mathbb{R}^{n-\ell}$, наделенное стратифицированным подмногообразием $Z^0 = \{x_2 = 0\} \cup \ldots \cup \{x_\ell = 0\}$. Зададим индексное семейство $\mathcal{E}'$ на Z^0 по формуле $\mathcal{E}'(\{x_j = 0\}) = E_j$, где $j = 2, \ldots, \ell$. Z^0 состоит в точности из $(\ell-1)$-й компоненты, поэтому понятие конормальности функции в произвольной точке подмногообразия Z^0 определено по предположению индукции.

Определение 4. *Функция u называется конормальной в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если существует такая окрестность V точки p_0, $\varkappa(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^\ell \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$, что функция u определена и является гладкой на $V \setminus X^0$, и*

$$u \sim \sum_{(z,q)\in E_1} a_{z,q}(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|, \tag{1}$$

где функции $a_{z,q}$ являются конормальными функциями на $(-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell-1} \times V_2 \subset Z$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}'$.

Знак $\sim$ означает, что найдутся такие $M_2, \ldots, M_\ell \in \mathbb{R}$, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-\ell}$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$, что:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(u(x_1, x_2, \ldots, x_\ell, x^0) - \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z \leqslant N_1}} a_{z,q}(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|\right)\right|$$
$$< C|x_2|^{M_2} \cdot \ldots \cdot |x_\ell|^{M_\ell} |x_1|^{N+1}, \quad (x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^\ell \times V_2, x_j \neq 0.$$

Можно показать, что определение конормальной функции в точке не зависит от выбора локальной системы координат. В частности, разложение типа (1) имеет место для любой из переменных $x_2, \ldots, x_\ell$.

Определение 5. *Функция u называется конормальной функцией на многообразии X со стратифицированным подмногообразием X^0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если она является гладкой на $X \setminus X^0$ и конормальной в каждой точке $p_0 \in X^0$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.*

Класс конормальных функций на многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ будем обозначать $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0)$.

Замечание 1. *(1) Если $\mathcal{E}$ — тривиальное индексное семейство, т.е. $\mathcal{E}(X_j) = \{(\ell, 0) : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ для любого $j = 1, \ldots, r$, то $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0) = C^\infty(X)$.*

(2) Для любой функции $u \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1}_{phg}(X, X^0)$ и любой функции $v \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_2}_{phg}(X, X^0)$ имеют место включения $u + v \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2}_{phg}(X, X^0)$, а также $uv \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}_{phg}(X, X^0)$.

Пример 1. *В простейшем примере, когда $X = \mathbb{R}^2$ и $X^0 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$, функция $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ на X не является конормальной в точке $(0, 0)$.*

Понятие конормальности легко обобщается на сечения векторного расслоения.

Определение 6. *Пусть X — гладкое многообразие, X^0 — стратифицированное подмногообразие, G — гладкое векторное расслоение на X. Скажем, что сечение μ является конормальным сечением, $\mu \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, G)$, если в любой тривиализации $G|_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ расслоения G над координатной окрестностью $U \subset X$ сечение μ имеет вид $\mu(x) = (x, (u_1(x), \ldots, u_r(x))), x \in U$, где $u_j \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0)$, $j = 1, \ldots, r$.*

2.4. Конормальные плотности. Мы будем рассматривать операторы, действующие на полуплотностях. Напомним, что гладкая s-плотность μ на гладком многообразии M размерности n записывается в произвольной локальной системе координат в виде $\mu = u(x_1, \ldots, x_n)|dx_1 \ldots dx_n|^s$, где u — гладкая функция. Гладкие s-плотности являются гладкими сечениями некоторого линейного расслоения Ω^s_M на M. Будем обозначать через $C^\infty(M, \Omega^s_M)$ пространство гладких s-плотностей на M.

Определение 7. *Пусть X — гладкое многообразие и $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ — его стратифицированное подмногообразие. s-плотность μ на X называется конормальной относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если в любой адаптированной локальной системе координат с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ она имеет вид*

$$\mu = \frac{u(x, x^0)}{|x|^s}|dxdx^0|^s = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^s,$$

где u — конормальная функция относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Пространство конормальных s-плотностей на X относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ естественно изоморфно пространству $\mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, \Omega^s_{X,X_0})$ конормальных сечений некоторого линейного расслоения Ω^s_{X,X_0} на X. Конструкция расслоения Ω^s_{X,X_0} аналогична конструкции расслоения b-плотностей на многообразии с углами, предложенной Мельроузом, и мы ее опустим.

3. Сингулярные интегральные операторы

В этом разделе мы введем классы сингулярных интегральных операторов на многообразии с отмеченным подмногообразием.

3.1. Классы $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$. Пусть X и Y — гладкие компактные многообразия такие, что $\dim X = n$, $\dim Y = m$, X^0, Y^0 — гладкие подмногообразия коразмерности 1 многообразий X и Y соответственно.

Полуплотность $k_A \in C^\infty\left((X \times Y) \setminus (\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}), \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y}\right)$ определяет оператор

$$A : C^\infty_0(Y \setminus Y^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_Y) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_X),$$

действие которого на полуплотность $\mu \in C^\infty_0(Y \setminus Y^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_Y)$ задаётся формулой:

$$A\mu = \int_Y k_A\mu. \tag{2}$$

Полуплотность k_A называется ядром оператора A.

Поясним смысл выражения, стоящего в правой части формулы (2). Ядро k_A и плотность μ можно записать в виде:

$$k_A = K_A(p_1, p_2)|dv_X(p_1)dv_Y(p_2)|^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = u(p_2)|dv_Y(p_2)|^{\frac{1}{2}},$$

где $K_A \in C^\infty((X \times Y) \setminus (\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}))$, $u \in C^\infty_0(Y \setminus Y^0)$, $|dv_X|$ — некоторая фиксированная положительная гладкая плотность на X и $|dv_Y|$ — некоторая положительная гладкая плотность на Y. Тогда их произведение

$$k_A\mu = K_A(p_1, p_2)u(p_2)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}|dv_Y(p_2)|$$

является плотностью на Y. Ее можно проинтегрировать по Y, и в результате получится полуплотность на X:

$$\int\limits_Y k_A\mu = \left(\int\limits_Y K_A(p_1, p_2)u(p_2)|dv_Y(p_2)|\right)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что формула (2) согласуется со стандартным выражением для интегрального оператора с ядром K_A:

$$A\mu = Au(p_1)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}, \quad Au(p_1) = \int\limits_Y K_A(p_1, p_2)u(p_2)dv_Y(p_2).$$

Если $p_1 \notin X^0$, то интеграл, стоящий в правой части, сходится.

Рассмотрим стратифицированное подмногообразие $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$ многообразия $X \times Y$. Любое индексное семейство $\mathcal{E}$ на $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$ записывается в виде $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, где $\mathcal{E}_1$ — индексное семейство на $X^0 \times Y$ и $\mathcal{E}_2$ — индексное семейство на $X \times Y^0$. В дальнейшем мы будем также рассматривать индексное семейство $\mathcal{E}_1$ как индексное семейство на X^0 и $\mathcal{E}_2$ как индексное семейство на Y^0.

Определение 8. *Пусть $\mathcal{E}_1$ — индексное семейство на X^0, $\mathcal{E}_2$ — индексное семейство на Y^0 и $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ — соответствующее индексное семейство на $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$. Будем говорить, что интегральный оператор A, задаваемый формулой* (2), *принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$, если*

$$k_A \in \mathcal{A}^{(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)}_{phg}\left(X \times Y, \{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y,\{X^0\times Y\}\cup\{X\times Y^0\}}\right).$$

Очевидно, что $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$ является линейным пространством.

Пример 2. *В простейшем примере, когда $X = Y = \mathbb{R}$ и $X^0 = Y^0 = \{0\}$, интегральный оператор A с ядром*

$$k_A = Cx^\alpha y^\beta \ln^p|x|\ln^q|y|\left|\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}\right|^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$ с $\mathcal{E}_1(X^0) = \{(\alpha + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \ldots, p\}$, $\mathcal{E}_2(Y^0) = \{(\beta + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \ldots, q\}$.

Для индексного множества E положим $\inf E := \inf\{z : (z, p) \in E\}$. Если $\mathcal{E}$ — индексное семейство на стратифицированном подмногообразии $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ многообразия X, то положим $\inf \mathcal{E} = \inf\limits_{j=1,\ldots,r} \inf \mathcal{E}(X_j)$.

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$. Тогда для любого индексного семейства $\mathcal{F}$ на Y^0, удовлетворяющего условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$, оператор A продолжается до оператора*

$$A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{phg}(Y, Y^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}_1}_{phg}(X, X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}).$$

Теорема 2. *Если $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3}(Y, Y^0; Z, Z^0)$, то при условии $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}_2) > 0$ их композиция $C = A \circ B$ корректно определена и принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{F}_3}(X, X^0; Z, Z^0)$.*

3.2. Нормальные координаты около подмногообразия. Пусть M — компактное многообразие, M^0 — его гладкое подмногообразие. Выберем риманову метрику g_M на M. Рассмотрим нормальное расслоение $N(M^0) := TM/TM^0 \cong (TM^0)^\perp$. Напомним, что экспоненциальное отображение $\exp : N(M^0) \to M$ римановой метрики g_M для подмногообразия M^0 определяется следующим образом. Пусть $v \in N_x(M^0)$, $x \in M$. Существует единственная геодезическая $\gamma : (-\infty, +\infty) \to M$, проходящая через точку x с вектором скорости v, то есть, такая, что $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = v$. Тогда $\exp(v) := \gamma(1)$.

Можно отождествить M^0 с нулевым сечением расслоения $N(M^0)$, что позволяет рассматривать M^0 как подмногообразие в M, и как подмногообразие в $N(M^0)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Существует окрестность $U \supset M^0$ в $N(M^0)$, такая что ограничение $\exp|_U$ на U является диффеоморфизмом U на некоторую окрестность $\exp(U)$ подмногообразия M^0.*

Множество $\exp(U)$ называется трубчатой окрестностью подмногообразия M^0 в M. Без потери общности мы можем предполагать, что $\exp(U)$ является ε-окрестностью подмногообразия M^0 при некотором $\varepsilon > 0$.

Предположим, что подмногообразие M^0 имеет коразмерность один, и нормальное расслоение $N(M^0)$ является тривиальным. Пусть $U \supset M^0$ как в предложении 1. Возьмём точку $p \in \exp U$. Этой точке взаимнооднозначно соответствует пара $(x, x^0) \in N(M^0)$, где $x^0 \in M^0$, $x \in N_{x^0}(M^0)$, $\exp(x) = p$. Поскольку риманова метрика задаёт изоморфизм $N_{x^0}(M^0) \cong \mathbb{R}$, можно считать, что $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, любая точка p, принадлежащая трубчатой окрестности $\exp(U)$, однозначно задаётся набором (x, x^0), где $x \in \mathbb{R}$, $x^0 \in M^0$. Отображение $\exp(U) \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ будем называть нормальной системой координат около M^0.

3.3. Классы $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}$. Пусть X — гладкое компактное многообразие размерности n, g_X — риманова метрика на X, $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ — его гладкое подмногообразие коразмерности 1. Тем самым, подмногообразия $X_1, \ldots, X_r$ попарно не пересекаются. Предположим, что нормальные расслоения подмногообразий $X_1, \ldots, X_r$ тривиальны.

Рассмотрим оператор $A : C_0^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac12}) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac12})$ с ядром

$$k_A \in C^\infty\left((X \times X) \setminus (\{X^0 \times X\} \cup \{X \times X^0\}), \Omega^{\frac12}_{X \times X}\right).$$

Всюду в дальнейшем $|dx^0|$ — фиксированная гладкая положительная плотность на X^0.

Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности $\exp(U) = V$ подмногообразия X^0. Пусть (x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) — соответствующие координаты на $V \times V$. Положим $\Pi_\varepsilon = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < \varepsilon, \left|\frac{x}{s}\right| < \varepsilon\}$. На множестве $(V \setminus X^0) \times (V \setminus X^0)$ введём систему координат $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ по формулам

$$x = x_1, \quad s = \frac{x_1}{x_2}. \tag{3}$$

Тогда полуплотность

$$k_A = K_A(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) \left| \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} dx_1^0 dx_2^0 \right|^{\frac12}$$

в локальной системе координат (x, s, x_1^0, x_2^0) записывается в виде:

$$k_A = K_A(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0) \left| \frac{dx}{x} \frac{ds}{s} dx_1^0 dx_2^0 \right|^{\frac12}.$$

Определим функцию $\widetilde{K}_A$ на $\Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ по формуле:

$$\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0). \tag{4}$$

Пусть $\mu \in C_0^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$, $\operatorname{supp}\mu \subset V$. Запишем $\mu = u(x, x^0) \left|\frac{dx}{x} dx^0\right|^{\frac{1}{2}}$, где $u \in C_0^\infty(V) \cong C_0^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0)$. Тогда

$$A\mu\Big|_V = \left(\int_{X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) u\left(\frac{x}{s}, x_2^0\right) \frac{ds}{s} dx_2^0 \right) \left|\frac{dx}{x} dx_1^0\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 9. *Пусть $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — индексные семейства на X^0, $\mathcal{E}_O = \{\mathcal{E}_{O,ij} : i, j = 1, \dots, r\}$, где $\mathcal{E}_{O,ij}$ — индексное множество для любого $i, j = 1, \dots, r$. Скажем, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, если:*

(1) Ядро k_A является конормальной полуплотностью на $(X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)$ с отмеченным подмногообразием $\{X^0 \times (X \setminus X^0)\} \cup \{(X \setminus X^0) \times X^0\}$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_1 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

$$\widehat{E}_1(X_i \times (X \setminus X^0)) = \mathcal{E}_1(X_i), \quad \widehat{E}_1((X \setminus X^0) \times X_j) = \mathcal{E}_2(X_j).$$

(2) Функция $\widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0)$ на $\Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ является конормальной на подмногообразии $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_2$:

$$\widehat{E}_2(\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}.$$

(3) Функция $\widehat{K}_A$ на $\{(x, \tau) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon, |x\tau| < \varepsilon\} \times X^0 \times X^0$, определяемая формулой

$$\widehat{K}_A(x, \tau, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, x\tau, x_1^0, x_2^0),$$

является конормальной на подмногообразии $(\{0\} \times \mathbb{R} \times X^0 \times X^0) \cup ((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times X^0 \times X^0)$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_3 = (\mathcal{E}_O, \mathcal{E}_2)$

$$\widehat{E}_3(\{0\} \times \mathbb{R} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}, \quad \widehat{E}_3((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_2(X_j).$$

(4) Функция $\widehat{\widehat{K}}_A$ на $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |tx| < \varepsilon, |x| < \varepsilon\} \times X^0 \times X^0$, определяемая формулой

$$\widehat{\widehat{K}}_A(t, x, x_1^0, x_2^0) = K_A\left(tx, x, x_1^0, x_2^0\right), \quad (t, x, x_1^0, x_2^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R} \times X^0 \times X^0,$$

является конормальной на подмногообразии $(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0 \times X^0) \cup (\mathbb{R} \times \{0\} \times X^0 \times X^0)$ относительно индексного семейства $\widehat{E}_4 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_O)$

$$\widehat{E}_4(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_1(X_i), \quad \widehat{E}_4(\mathbb{R} \times \{0\} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}.$$

Очевидно, что класс $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ является линейным пространством.

Замечание 2. *Можно показать, что $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0) \subset \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, где $\mathcal{E}_{O,ij} = \mathcal{E}_1(X_i) + \mathcal{E}_2(X_j)$.*

Пример 3. *В простейшем примере, когда $X = \mathbb{R}$ и $X^0 = \{0\}$, интегральный оператор A с ядром*

$$k_A = x^\alpha y^\beta (x^2 + y^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln^p |x| \ln^q |y| \ln^r (x^2 + y^2) \left| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \right|^{1/2},$$

принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, где $\mathcal{E}_1(X^0) = \{(\alpha + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p\}$, $\mathcal{E}_2(X^0) = \{(\beta + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, q\}$ и $\mathcal{E}_O = \{(\alpha + \beta + \gamma + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p + q + r\}$.

Пусть E_1, E_2 — произвольные индексные множества. Положим

$$E_1 \overline{\cup} E_2 = E_1 \cup E_2 \cup \{(z, p_1 + p_2 + 1) : (z, p_1) \in E_1, (z, p_2) \in E_2\}.$$

Теорема 3. *Пусть $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$. Тогда для любого индексного семейства $\mathcal{F}$, удовлетворяющего условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$, оператор A продолжается до оператора*

$$A : \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{phg}(X, X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}) \to \mathcal{A}^{\mathcal{G}}_{phg}(X, X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}),$$

где

$$\mathcal{G}(X_i) = \mathcal{E}_1(X_i) \overline{\bigcup} \left(\overline{\bigcup}_j (\mathcal{F}(X_j) + \mathcal{E}_{O,ij}) \right), \quad i = 1, \dots, r.$$

Теорема 4. *Пусть $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}^A_1, \mathcal{E}^A_2, \mathcal{E}^A_O}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}^B_1, \mathcal{E}^B_2, \mathcal{E}^B_O}(X, X^0)$, причем $\inf(\mathcal{E}^A_2 + \mathcal{E}^B_1) > 0$. Тогда определена композиция $C = A \circ B$, которая принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}^C_1, \mathcal{E}^C_2, \mathcal{E}^C_O}(X, X^0)$, где*

$$\mathcal{E}^C_1(X_i) = \mathcal{E}^A_1(X_i) \overline{\bigcup} \left(\bigcup_k \left(\mathcal{E}^A_{O,ik} + \mathcal{E}^B_1(X_k) \right) \right),$$

$$\mathcal{E}^C_2(X_j) = \mathcal{E}^B_2(X_j) \overline{\bigcup} \left(\bigcup_k \left(\mathcal{E}^A_2(X_k) + \mathcal{E}^B_{O,kj} \right) \right),$$

$$\mathcal{E}^C_{O,ij} = \left(\bigcup_k \left(\mathcal{E}^A_{O,ik} + \mathcal{E}^B_{O,kj} \right) \right) \overline{\bigcup} \left(\mathcal{E}^A_1(X_i) + \mathcal{E}^B_2(X_j) \right).$$

Замечание 3. *По-видимому, полученные результаты можно распространить на случай, когда нормальное расслоение подмногообразия X^0 нетривиально. Для этого необходимо перейти на соответствующее двулистное накрытие и работать с $\mathbb{Z}_2$-инвариантными операторами. Соответствующая техника была разработана для многообразий с углами в работе* [14].

4. Доказательства основных теорем

В данном разделе мы приводим доказательства теорем 1, 2, 3 и 4. Как это уже было сказано во введении, наш подход к построению и исследованию классов сингулярных интегральных операторов является обобщением геометрического подхода, предложенного Мельроузом ([11, 12, 13], см. также [15]). Специфика подхода Мельроуза заключается в том, что классы операторов определяются при помощи некоторых условий на ядро k_A оператора A из данного класса. Эти условия являются условиями конормальности либо для самого ядра k_A, либо для некоторой полуплотности $\hat{k}_A$, являющейся поднятием ядра k_A на некоторое вспомогательное многообразие, ассоциированное с $X \times X$. Для того чтобы связать оператор A с ядром $\hat{k}_A$, действие интегрального оператора A на полуплотностях выражается в терминах операторов поднятия и опускания. Тем самым, исследование данного класса интегральных операторов сводится к использованию операторов поднятия и опускания и их свойств. Поэтому, мы начнем с обсуждения операторов поднятия и опускания.

4.1. Поднятия.

Напомним определения оператора поднятия, ассоциированного с отображением гладких многообразий.

Пусть X и Y — гладкие многообразия, $f : X \to Y$ — гладкое отображение. Для любого векторного расслоения $p : G \to Y$ на Y определим векторное расслоение $p_1 : f^*G \to X$ следующим образом:

$$f^*G := \{(x, v) | x \in X; v \in G_{f(x)}\}, \quad p_1(x, v) := x.$$

Определение 10. *Оператором поднятия называется линейный оператор*

$$f^*: C^\infty(Y,G) \to C^\infty(X, f^*G),$$

задаваемый для любого $s \in C^\infty(Y,G)$ формулой

$$f^*s(x) = (x, s(f(x))), \quad x \in X.$$

Пусть X, Y — гладкие многообразия размерности n и m соответственно, $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ и $Y^0 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{r^0}$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и Y соответственно.

Определение 11. *Гладкое отображение $f: X \to Y$ называется относительным, если для любой точки $p \in X^0$ выполнено следующее условие. Предположим для определенности, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$, $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$, и $f(p) \in Y_1 \cap \ldots \cap Y_{\ell_0}$, $f(p) \in Y_{\ell_0+1} \cup \ldots \cup Y_{r_0}$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, определенную в окрестности U_p, и адаптированную в точке $f(p)$ систему координат с координатами $(y, y^0) \in \mathbb{R}^{\ell_0} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}$. В этих координатах отображение f записывается в виде*

$$y_i = f_i(x, x^0), \quad i = 1, \ldots, \ell_0; \quad y_i^0 = f_i(x, x^0), \quad i = \ell_0 + 1, \ldots, m.$$

Тогда найдутся гладкие функции a_i, $i = 1, \ldots, \ell_0$, такие, что $a_i(x, x^0) \neq 0$, и в некоторой окрестности точки p справедливо представление:

$$f_i(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = a_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}},$$

где γ_{ij} — целые неотрицательные числа, $i = 1, \ldots, \ell_0$, $j = 1, \ldots, \ell$.

Числа γ_{ij} зависят только от компонент X_j и Y_i и будут обозначаться через $e_f(X_j, Y_i)$. Отметим, что из определения относительного отображения вытекает, что $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$.

Теорема 5. *Пусть G — линейное расслоение над Y, $\mathcal{E}^0$ — индексное семейство на подмногообразии Y^0. Тогда для любого относительного отображения $f: (X, X^0) \to (Y, Y^0)$ оператор f^* продолжается до оператора*

$$f^*: \mathcal{A}^{\mathcal{E}^0}_{phg}(Y, Y^0, G) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, f^*G),$$

где индексное семейство $\mathcal{E}$ на X^0 имеет вид:

$$\mathcal{E}(X_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_i e_f(X_j, Y_i) z_i, \sum_i q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{E}^0(Y_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по таким $i = 1, \ldots, r_0$, для которых $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$.

Доказательство теоремы 5 будет дано в приложении A.

4.2. Опускания. Напомним определения оператора опускания, ассоциированного с отображением гладких многообразий.

Обозначим

$$\mathcal{D}'(Y, G) = C_0^\infty(Y, G^*)'.$$

Имеет место включение

$$C_0^\infty(Y, G \otimes \Omega_Y) \subset \mathcal{D}'(Y, G).$$

Для любого $u \in C_0^\infty(Y, G \otimes \Omega_Y)$ вида $u = s \otimes \mu$, где $s \in C_0^\infty(Y, G)$, $\mu \in C_0^\infty(Y, \Omega_Y)$, соответствующий функционал на $C_0^\infty(Y, G^*)$ задается формулой

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_Y \langle s(y), \varphi(y) \rangle \mu(y) \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in C_0^\infty(Y, G^*),$$

где $\langle s(y), \varphi(y) \rangle \in \mathbb{C}$ обозначает значение функционала $\varphi(y) \in G_y^*$ на $s(y) \in G_y$.

Определение 12. *Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия, G — векторное расслоение на Y. Пусть задано гладкое отображение $f : X \to Y$. Оператором опускания называется линейный оператор*

$$f_* : \mathcal{D}'(X, f^*G) \to \mathcal{D}'(Y, G),$$

задаваемый для любого $\mu \in \mathcal{D}'(X, f^*G)$ формулой:

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, f^*\varphi\rangle, \quad \varphi \in C^\infty(Y, G^*).$$

Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия размерности n и m соответственно, $X^0 = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ и $Y^0 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_{r^0}$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и Y соответственно.

Определение 13. *Гладкое отображение $f : X \to Y$ называется относительным расслоением, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *f — относительное отображение;*
2. *f сюрьективно;*
3. *Для любой компоненты X_j подмногообразия X^0 найдётся не более одной компоненты Y_i подмногообразия Y^0 такой, что $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$;*
4. *Пусть $p \in X^0$ такая, что $f(p) = p_0 \notin Y^0$. Предположим, для определенности, что $p \in X_1 \bigcap \ldots \bigcap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \bigcup \ldots \bigcup X_r$. Как в определении 11, запишем отображение f в локальных координатах в виде*

   $$y_i^0 = f_i(x, x^0), \quad (x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

   Тогда ранг матрицы Якоби $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1^0,\ldots,x_{n-\ell}^0)}$ равен m.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{E}$ — такое индексное семейство на X^0, что для любого $j = 1, \ldots, r$, такого что $e_f(X_j, Y_i) = 0$ для любого $i = 1, \ldots, r_0$, выполнено неравенство: $\inf \mathcal{E}(X_j) > 0$. Тогда для любого относительного расслоения $f : (X, X^0) \to (Y, Y^0)$ и для любого линейного расслоения G на Y оператор опускания f_* ограничивается до оператора:*

$$f_* : \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, f^*G \otimes \Omega_{X,X^0}) \to \mathcal{A}^{\mathcal{E}^0}_{phg}(Y, Y^0, G \otimes \Omega_{Y,Y^0}),$$

где индексное семейство $\mathcal{E}^0$ на Y^0 имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}^0(Y_i) = \overline{\bigcup}_{j: e_f(X_j, Y_i) \neq 0} \left\{ \left(\frac{z}{e_f(X_j, Y_i)}, q \right) : (z, q) \in \mathcal{E}(X_j) \right\}, \quad i = 1, \ldots, r_0.$$

Доказательство теоремы 6 будет дано в приложении B.

4.3. Доказательства теорем 1 и 2. Докажем теорему 1. Непосредственным вычислением легко проверить, что отображение

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}}),$$

определяемое оператором $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$, можно представить в виде

$$A\mu = \pi_{1*}(k_A \pi_2^* \mu), \quad \mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}),$$

где отображения $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ задаются формулами:

$$\pi_1(x, y) = x; \quad \pi_2(x, y) = y. \tag{6}$$

Пусть индексное семейство $\mathcal{F}$ на Y^0 удовлетворяет условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$ и $\mu \in \mathcal{A}^{\mathcal{F}}_{phg}(Y, Y^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0})$. Можно показать, что π_2 — относительное отображение, причем $e_{\pi_2}(X^0 \times Y, Y^0) = 0$, $e_{\pi_2}(X \times Y^0, Y^0) = 1$, поэтому по теореме 5 имеем:

$$\pi_2^*\mu \in \mathcal{A}^{0,\mathcal{F}}_{phg}(X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}, \pi_2^* \Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}).$$

Из свойств конормальных функций. отмеченных в замечании 1, следует, что:

$$k_A\pi_2^*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2+\mathcal{F}}(X\times Y, \{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}, \Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}}\otimes\pi_2^*\Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}).$$

Имеет место изоморфизм векторных расслоений:

$$\Omega^{\frac{1}{2}}_{X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}}\cong\pi_1^*\Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0}\otimes\pi_2^*\Omega^{\frac{1}{2}}_{Y,Y^0}.$$

Следовательно:

$$k_A\pi_2^*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E},\mathcal{E}_2+\mathcal{F}}(X\times Y, \{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}, \pi_1^*\Omega^{-\frac{1}{2}}_{X,X^0}\otimes\Omega_{X\times Y,\{X\times Y^0\}\cup\{X^0\times Y\}}).$$

Так как $\inf(\mathcal{E}_2+\mathcal{F})>0$, и можно показать, что π_1 — относительное расслоение, причем $e_{\pi_1}(X^0\times Y, X^0)=1$, $e_{\pi_1}(X\times Y^0, X^0)=0$, применяя теорему 6 с $G=\Omega^{-\frac{1}{2}}_{X,X^0}$, $f=\pi_1$, получаем, что $A\mu\in\mathcal{A}^{\mathcal{E}_1}_{phg}(X,X^0,\Omega^{\frac{1}{2}}_{X,X^0})$, что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогичным образом. Ядро композиции $C=A\circ B$ представляется в виде:

$$k_C=\pi_{2*}(\pi_3^*k_A\pi_1^*k_B),$$

где отображения $\pi_1: X\times Y\times Z\to Y\times Z$, $\pi_2: X\times Y\times Z\to X\times Z$, $\pi_3: X\times Y\times Z\to X\times Y$ определяются по формулам:

$$\pi_1(x,y,z)=(y,z);\quad \pi_2(x,y,z)=(x,z);\quad \pi_3(x,y,z)=(x,y). \tag{7}$$

Далее остается применить теоремы 5 и 6.

4.4. Доказательство теоремы 3. Пусть X — гладкое компактное многообразие с выделенным подмногообразием X^0 коразмерности 1. Предположим, что на X задана риманова метрика g_X, и нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально.

Мы будем использовать растянутое произведение X_b^2, которое получается из $X\times X$ раздутием подмногообразия $X^0\times X^0\subset X\times X$. Напомним его определение. Прежде всего, введём нормальное расслоение $N(X^0\times X^0)=T(X\times X)/T(X^0\times X^0)$ над подмногообразием $X^0\times X^0$. Заметим, что $\operatorname{rank} N(X^0\times X^0)=2$.

Проективизацией расслоения $N(X^0\times X^0)$ называется расслоение $P(N(X^0\times X^0))$ над $X^0\times X^0$, слой которого в точке $p\in X^0\times X^0$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(X^0\times X^0)$. Зададим множество

$$V(N(X^0\times X^0))=\bigsqcup_{\ell\in P(N(X^0\times X^0))}V(\ell),$$

где $V(\ell)\subset N(X^0\times X^0)$ — одномерное линейное пространство, которое соответствует прямой ℓ. Таким образом, элементами множества $V(N(X^0\times X^0))$ являются наборы (x_1^0,x_2^0,ℓ,v), где $p=(x_1^0,x_2^0)\in X^0\times X^0$, $\ell\subset N_p(X^0\times X^0)$, $v\in V(\ell)$. Можно доказать, что множество $V(N(X^0\times X^0))$ имеет структуру гладкого многообразия. Введём отображение $\beta_N: V(N(X^0\times X^0))\to N(X^0\times X^0)$ по формуле:

$$\beta_N: (x_1^0,x_2^0,\ell,v)\mapsto(x_1^0,x_2^0,v).$$

Пусть $g_{X\times X}$ — такая риманова метрика на $X\times X$, которая совпадает с метрикой g_X на множестве $TX\times\{0\}$ и на множестве $\{0\}\times TX$, которые являются подмножествами $TX\times TX=T(X\times X)$. Более того, множества $TX\times\{0\}$ и $\{0\}\times TX$ — взаимно ортогональны.

Согласно предложению 1, существует такая окрестность U множества $X^0\times X^0$ в $N(X^0\times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфизмом:

$$\exp_{X\times X}\big|_U: U\xrightarrow{\sim}\exp(U).$$

Введём отношение эквивалентности на множестве $[(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)]\sqcup\beta_N^{-1}(U)$, положив, что точки $(p_1,p_2)\in(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)$ и $(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точка $(p_1,p_2)\in\exp(U)$ и выполнено равенство $\exp(\beta_N(x_1^0,x_2^0,\ell,v))=(p_1,p_2)$.

Растянутое произведение X_b^2 определяется как множество классов эквивалентности на множестве $[(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)]\sqcup\beta_N^{-1}(U)$:

$$X_b^2=[(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)]\sqcup\beta_N^{-1}(U)/\sim,$$

Множество X_b^2 естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия.

Определим отображение $\beta : X_b^2 \to X\times X$ следующим образом: если $(p_1,p_2)\in(X\times X)\setminus(X^0\times X^0)$, то

$$\beta(p_1,p_2)=(p_1,p_2);$$

если $(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U)$, то

$$\beta(x_1^0,x_2^0,\ell,v)=\exp(\beta_N(x_1^0,x_2^0,\ell,v)).$$

В X_b^2 имеется подмногообразие:

$$X_{Ob}^2=\{(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U):v\equiv 0\}.$$

Положим

$$X_{1b}^2=X^0\times(X\setminus X^0)\sqcup\{(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U):\ell=\ell_1\},$$

где ℓ_1 — одномерное подпространство в $N(X^0\times X^0)$, состоящее из векторов $(v_1,v_2)\in TX\times TX$, таких что $v_1\in TX^0$. Аналогично определим

$$X_{2b}^2=(X\setminus X^0)\times X^0\sqcup\{(x_1^0,x_2^0,\ell,v)\in\beta_N^{-1}(U):\ell=\ell_2\},$$

где ℓ_2 — одномерное подпространство в $N(X^0\times X^0)$, состоящее из векторов $(v_1,v_2)\in TX\times TX$, таких что $v_2\in TX^0$.

Легко видеть, что X_{1b}^2, X_{2b}^2 и X_{Ob}^2 являются гладкими подмногообразиями в X_b^2. Эти подмногообразия пересекаются трансверсально, и их объединение является стратифицированным подмногообразием $\mathcal{X}_b^2$ многообразия X_b^2.

Фундаментальное свойство многообразия X_b^2 приведено в следующем утверждении.

Лемма 1. *Оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ тогда и только тогда, когда подъем $\tilde{k}_A=\beta^*k_A$ ядра k_A при отображении $\beta : X_b^2\to X\times X$ является конормальной функцией на X_b^2 относительно индексного семейства $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O)$ на $\mathcal{X}_b^2=X_{1b}^2\cup X_{2b}^2\cup X_{Ob}^2$.*

При помощи леммы 1 доказательство теоремы 3 проводится следующим образом. Определим отображения $\beta_1 : X_b^2\to X$, $\beta_2 : X_b^2\to X$ по формулам: $\beta_1=\pi_1\circ\beta$, $\beta_2=\pi_2\circ\beta$, где π_1 и π_2 определены в (6). Прямым вычислением можно показать, что оператор $A\in\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X,X^0)$ представляется в виде

$$A\mu=\beta_{1*}(\tilde{k}_A\beta_2^*\mu),\quad \mu\in C_0^\infty(Y\setminus Y^0,\Omega_Y^{\frac{1}{2}}),\tag{8}$$

где $\tilde{k}_A$ определено в лемме 1. Далее доказательство теоремы 3 завершается аналогично доказательству теоремы 1 с использованием теорем 5 и 6.

4.5. Доказательство теоремы 4. Теорема 4 доказывается следующим образом. Сначала определяется многообразие X_b^3, которое является раздутием стратифицированного подмногообразия $\widehat{X}^0=(X\times X^0\times X^0)\cup(X^0\times X\times X^0)\cup(X^0\times X^0\times X)$ в $X\times X\times X$, затем отображения $\gamma_i : X_b^3\to X_b^2$, $i=1,2,3$, являющиеся аналогами проекций π_i, $i=1,2,3$ (см. (7)). Можно доказать, что ядро композиции k_C представимо в виде:

$$k_C=\gamma_{2*}(\gamma_3^*k_A\gamma_1^*k_B),$$

где $\gamma_3^* k_A$, $\gamma_1^* k_B$ — подъём ядер на X_b^3. Важным фактом является утверждение о том, что существует такое стратифицированное подмногообразие $\mathcal{X}_b^3$ в X_b^3, что отображения $\gamma_i : (X_b^3, \mathcal{X}_b^3) \to (X_b^2, \mathcal{X}_b^2)$ являются относительными расслоениями. После этого доказательство завершается с помощью теорем 5 и 6.

Опишем конструкции многообразия X_b^3, подмногообразия $\mathcal{X}_b^3$ и отображений γ_i. Рассмотрим нормальное расслоение $N(X^0 \times X^0 \times X^0) = T(X \times X \times X)/T(X^0 \times X^0 \times X^0)$ над подмногообразием $X^0 \times X^0 \times X^0$ ранга 3. Проективизацией расслоения $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ называется расслоение $P(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ над $X^0 \times X^0 \times X^0$, слой которого в точке $p \in X^0 \times X^0 \times X^0$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(X^0 \times X^0 \times X^0)$. Зададим множество:

$$V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(X^0 \times X^0 \times X^0))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ — одномерное линейное пространство, которое соответствует подпространству ℓ как элементу $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$. Таким образом, элементами множества $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ являются наборы (p, ℓ, v), где $p \in X^0 \times X^0 \times X^0$, $\ell \subset N_p(X^0 \times X^0 \times X^0)$ и $v \in V(\ell)$. Нетрудно показать, что множество $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ имеет структуру гладкого многообразия.

Определим подмногообразие V_0 в $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ по формуле

$$V_0 = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : v = 0\}.$$

Введём отображение $\gamma_N : V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) \to N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ по формуле

$$\gamma_N : (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, x_3^0, v).$$

Нетрудно показать, что ограничение γ_N на $V \setminus V_0$ определяет диффеоморфизм

$$\gamma_N \Big|_{V \setminus V_0} : V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) \setminus V_0 \xrightarrow{\sim} N(X^0 \times X^0 \times X^0) \setminus (X^0 \times X^0 \times X^0).$$

Аналогично двумерному случаю можно ввести понятие раздутия подмногообразий $\widehat{X}_1 = X \times X^0 \times X^0$, $\widehat{X}_2 = X^0 \times X \times X^0$ и $\widehat{X}_3 = X^0 \times X^0 \times X$ многообразия $X \times X \times X$.

Рассмотрим нормальное расслоение $N(\widehat{X}_1)$ подмногообразия $\widehat{X}_1$, слой которого в точке $p \in \widehat{X}_1$ имеет вид $N_p(\widehat{X}_1) = T_p(X \times X \times X)/T_p(\widehat{X}_1)$ для любого $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$. Определено отображение

$$pr_1 : N(\widehat{X}_1) \to N(X^0 \times X^0), (x_1, x_2^0, x_3^0, v_1) \mapsto (x_2^0, x_3^0, v_1),$$

задающее изоморфизм $N_p(\widehat{X}_1) \cong N_{(x_2^0, x_3^0)}(X^0 \times X^0)$.

Введём расслоение $P(N(\widehat{X}_1))$ над $\widehat{X}_1$, слой которого в точке $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(\widehat{X}_1)$. Зададим множество:

$$V(N(\widehat{X}_1)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(\widehat{X}_1))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(\widehat{X}_1)$ — одномерное линейное подпространство, которое соответствует ℓ как элементу $N(\widehat{X}_1)$. Таким образом, элементами множества $V(N(\widehat{X}_1))$ являются наборы (p, ℓ, v), где $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$, $\ell \subset N_p(\widehat{X}_1)$ и $v \in V(\ell)$.

Введём отображение

$$\gamma_{N_1} : V(N(\widehat{X}_1)) \to N(\widehat{X}_1), (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell_1, v_1) \mapsto (x_1, x_2^0, x_3^0, v_1).$$

Аналогичные объекты можно ввести для подмногообразий $\widehat{X}_2$ и $\widehat{X}_3$. В частности, определены отображения $\gamma_{N_i} : V(N(\widehat{X}_i)) \to N(\widehat{X}_i)$ и $pr_i : N(\widehat{X}_i) \to N(X^0 \times X^0), i = 2, 3$.

Определим подмногообразие V_i в $V(N(\widehat{X}_i))$, $i = 1, 2, 3$, по формуле

$$V_i = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_i)) : v = 0\}.$$

Нетрудно показать, что ограничение γ_{N_i} на $V \backslash V_i$, $i = 1, 2, 3$, определяет диффеоморфизм

$$\gamma_{N_1}\Big|_{V \backslash V_i} : V(N(\widehat{X}_i)) \setminus V_i \xrightarrow{\sim} N(\widehat{X}_i) \setminus \widehat{X}_i.$$

Пусть $g_{X\times X\times X}$ — такая риманова метрика на $X \times X \times X$, которая совпадает с метрикой g_X на подрасслоениях $TX \times \{0\} \times \{0\}$, $\{0\} \times TX \times \{0\}$, $\{0\} \times \{0\} \times TX$ расслоения $TX \times TX \times TX = T(X \times X \times X)$. Согласно предложению 1, существует такая окрестность U множества $X^0 \times X^0 \times X^0$ в $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфизмом:

$$\exp := \exp_{X\times X\times X}\big|_U : U \xrightarrow{\sim} \exp_{X\times X\times X}(U) \subset X \times X \times X,$$

а также существует такая окрестность U_1 множества $X^0 \times X^0$ в $N(X^0 \times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфным:

$$\exp_{X\times X}\big|_{U_1} : U_1 \xrightarrow{\sim} \exp_{X\times X}(U_1) \subset X \times X.$$

Для любого $i = 1, 2, 3$ композиция отображения $\exp_{X\times X}$ с pr_i определяет диффеоморфизм

$$\exp_i : pr_i^{-1}(U_1) \subset N(\widehat{X}_i) \xrightarrow{\sim} \exp_i(pr_i^{-1}(U_1)) \subset X \times X \times X.$$

Введём отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $(X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0) \sqcup \gamma_N^{-1}(U) \sqcup \gamma_{N_1}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_2}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_3}^{-1}(U_1)$, положив, что:

- Точки $(p_1, p_2, p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$ и $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \in \gamma_N^{-1}(U)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $(p_1, p_2, p_3) \in \exp(U)$ и
$$\exp(\gamma_N(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v)) = (p_1, p_2, p_3).$$
- Для любого $i = 1, 2, 3$, точки $(p_1, p_2, p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$ и $(p, \ell_1, v_1) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точки $(p_1, p_2, p_3) \in \exp_i(pr_i^{-1}(U_1))$ и
$$\exp_i(\gamma_{N_i}(p, \ell_1, v_1)) = (p_1, p_2, p_3).$$
- Для любого $i = 1, 2, 3$, точки $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \in \gamma_N^{-1}(U)$ и $(p, \ell_1, v_1) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда
$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = p,$$
и (ℓ, v) отображается в (ℓ_1, v_1) при естественном отображении $N(X) \to N(\widehat{X}_i)$.

Определим множество X_b^3 как множество классов эквивалентности:

$$X_b^3 = (X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0) \sqcup \gamma_N^{-1}(U) \sqcup \gamma_{N_1}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_2}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_3}^{-1}(U_1) \big/ \sim .$$

Легко проверить, что множество X_b^3 является гладким многообразием.

Введем следующие подмножества в X_b^3:

$$X_0^3 = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : v = 0\} \subset \gamma_N^{-1}(U),$$

$$X_{Oi}^3 = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_i)) : v = 0\} \subset \gamma_{N_i}^{-1}(U_1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Определим подмножество X_1^3 в X_b^3, задав его пересечения с компонентами X_b^3:

$$X_1^3 \cap (X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0) = X^0 \times (X \setminus X^0) \times (X \setminus X^0),$$

$$X_1^3 \cap \gamma_N^{-1}(U) = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_1}^{-1}(U_1) = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_1)) : p \in X^0 \times X^0 \times X^0\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_2}^{-1}(U_1) = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_2)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_3}^{-1}(U_1) = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_3)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\}.$$

Аналогично определим подмножества X_2^3 и X_3^3.

Легко видеть, что все введенные выше подмножества являются гладкими подмногообразиями в X_b^3. Эти подмногообразия пересекаются трансверсально, и их объединение является стратифицированным подмногообразием в X_b^3, которое мы обозначим через $\mathcal{X}_b^3$:

$$\mathcal{X}_b^3 = X_0^3 \cup X_1^3 \cup X_2^3 \cup X_3^3 \cup X_{O1}^3 \cup X_{O2}^3 \cup X_{O3}^3.$$

Отображения $\gamma_i : X_b^3 \to X_b^2$, $i = 1, 2, 3$, определяются следующим образом.

Для $(p_1, p_2, p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$:

$$\gamma_i(p_1, p_2, p_3) = \pi_i(p_1, p_2, p_3),$$

где отображения $\pi_i : X \times X \times X \to X \times X$ определены в (7).

Для $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \in \gamma_N^{-1}(U)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_2^0, x_3^0, \ell_1, v_2, v_3),\\
\gamma_2 &: (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_3^0, \ell_2, v_1, v_3),\\
\gamma_3 &: (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, \ell_3, v_1, v_2),
\end{aligned}$$

где ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — образы ℓ при проекциях $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ на $N(X^0 \times X^0)$: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v) \mapsto (x_2^0, x_3^0, v_2, v_3)$, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v) \mapsto (x_1^0, x_3^0, v_1, v_3)$, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, v_1, v_2)$ соответственно.

Для $(p, \ell, v) \in \gamma_{N_1}^{-1}(U_1)$, где $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$, $\ell \subset N_p(\widehat{X}_1)$ и $v \in V(\ell)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_2^0, x_3^0, pr_1(\ell), pr_1(v)),\\
\gamma_2 &: (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1, \exp_X(v_3)),\\
\gamma_3 &: (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1, \exp_X(v_2)).
\end{aligned}$$

Для $(p, \ell, v) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ отображения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются аналогично.

5. Регуляризованный след

Операторы из класса $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, вообще говоря, не является ядерными. Оказывается, что если индексное семейство $\mathcal{E}_O$ удовлетворяет следующему условию:

$$\inf \mathcal{E}_O \geq 0, \text{ причём, если } (0, q) \in \mathcal{E}_O, \text{ то } q = 0, \tag{9}$$

то можно ввести функционал на $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, называемый функционалом регуляризованного следа, который совпадает с функционалом следа на ядерных операторах.

Прежде чем дать определение регуляризованного следа, введем понятие регуляризованного интеграла для конормальных плотностей.

5.1. Регуляризованный интеграл. Пусть μ — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ плотность, заданная на компактном многообразии X с отмеченным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально, и индексное семейство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (9). На многообразии X зададим риманову метрику g_X. Определим непрерывную функцию r на X по формуле $r(p) = \varrho(p, X^0)$, где ϱ — геодезическое расстояние от точки p до подмногообразия X^0.

Определение 14. *Регуляризованный интеграл от плотности μ по X определяется формулой*

$$\int_X^r \mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\int\limits_{\substack{X \\ r(p) > \varepsilon}} \mu + 2 \ln \varepsilon \int_{X^0} \mu\,|_{X^0} \Bigg). \tag{10}$$

Здесь $\mu\,|_{X^0}$ — плотность на X^0, определяемая следующим образом. В нормальной системе координат $\exp(U) \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ около X^0 запишем $\mu = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x} dx^0\right|$, где u — конормальная функция на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ с отмеченным подмногообразием $\{0\} \times X^0$, $|dx^0|$ — фиксированная гладкая плотность на X^0. Поскольку индексное семейство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (9), легко видеть, что u продолжается до непрерывной функции на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$. Положим

$$\mu\,|_{X^0} = u(0, x^0)|dx^0|.$$

Легко проверить, что $\mu\,|_{X^0}$ не зависит от выбора плотности $|dx^0|$.

Можно показать, что предел в правой части равенства (10) существует. Следует отметить, что регуляризованный интеграл зависит от выбора римановой метрики g_X.

5.2. Регуляризованный след. Пусть X — компактное многообразие и $A : C^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}}) \to C^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ — интегральный оператор с гладким ядром $k_A \in C^\infty(X \times X, \Omega_{X\times X}^{\frac{1}{2}})$, действие которого на полуплотность $\mu \in C^\infty(X, \Omega^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой (2). Напомним, что такой оператор A определяет ограниченный оператор в пространстве $L^2(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$. Этот оператор является ядерным, причём

$$\mathrm{Tr}(A) = \int\limits_X k_A\,|_\Delta\,, \tag{11}$$

где $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$.

Здесь гладкая плотность $k_A\,|_\Delta$ на X определяется следующим образом. Пусть dv_X — гладкая положительная плотность на X. Запишем

$$k_A = K_A(p_1, p_2)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}|dv_X(p_2)|^{\frac{1}{2}}, \quad p_1, p_2 \in X,$$

где $K_A \in C^\infty(X \times X)$. Положим

$$k_A\,|_\Delta = K_A(p, p)|dv_X(p)|.$$

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора плотности dv_X.

Пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, g_X — риманова метрика на X. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально. Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$ с ядром $k_A \in C^\infty(X \times X \setminus (X^0 \times X) \cup (X \times X^0), \Omega_{X^2}^{\frac{1}{2}})$. Предположим, что индексное семейство $\mathcal{E}_O$ удовлетворяет условию (9).

Определение 15. *Регуляризованный след оператора A определяется по формуле*

$$\text{r-Tr}(A) = \int\limits_X^r k_A\,|_\Delta\,.$$

Можно показать, что $k_A\,|_\Delta$ является конормальной плотностью на (X, X^0) относительно индексного семейства $\mathcal{E}_O$, и потому регуляризованный интеграл от $k_A\,|_\Delta$ по X корректно определён.

5.3. Регуляризованный след коммутатора. Как и выше, пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, g_X — риманова метрика на X. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально. Функционал регуляризованного следа r-Tr на алгебре $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$ не является следовым функционалом, т.е. регуляризованный след $\text{r-Tr}([A, B])$ коммутатора операторов $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$, вообще говоря, не равен нулю. Основным результатом этого раздела является формула, дающая выражение для регуляризованного следа коммутатора r-Tr$([A,B])$ в терминах некоторых интегральных операторов на подмногообразии X^0, ассоциированных с операторами A и B.

Начнем с определения класса операторов, для которого справедлива упомянутая выше формула.

Определение 16. *Скажем, что $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, если $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_O}(X, X^0)$ для некоторых индексных семейств $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_O$ и выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что, если $\varrho(x, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(y, X^0) < \delta$ или $\varrho(y, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(x, X^0) < \delta$, то $k_A(x, y) = 0$.*
2. *$\mathcal{E}_O$ удовлетворяет условию (9).*
3. *Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности X^0. Существуют такие m, M, $0 < m < M < \infty$, что носитель функции $\widetilde{K}_A$, определённой формулой (4), содержится в множестве всех $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$, таких, что $m < |s| < M$.*

Используя теорему 4, нетрудно показать, что $\mathcal{K}(X, X^0)$ является алгеброй.

Прежде чем сформулировать утверждение о регуляризованном следе коммутатора, введем понятия определяющего оператора и определяющего семейства, ассоциированных с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, которые необходимы нам для формулировки данной теоремы.

Из условия (2) определения 16 следует, что для оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ существует предел:

$$\lim_{x \to 0} \widetilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) =: \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0), \tag{12}$$

где $\widetilde{K}_A$ — функция, определяемая формулой (4).

Определение 17. *Определяющим оператором, ассоциированным с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, называется оператор:*

$$I(A) : C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{R}\setminus\{0\} \times X^0}) \to C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{\mathbb{R}\setminus\{0\} \times X^0}),$$

действие которого на полуплотность $\mu = u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega^{\frac{1}{2}}_{(R\setminus\{0\}) \times X^0})$ задаётся формулой:

$$I(A)\mu = I(A)u(x, x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|^{\frac{1}{2}},$$

где

$$I(A)u(x, x^0) = \int\limits_{X^0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{K}_A(0, s, x^0, x_1^0) u\left(\frac{x}{s}, x_1^0\right) \frac{ds}{s} dx_1^0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^0 \in X^0.$$

Следующее понятие является аналогом известного понятия конормального символа (см., например, [13, 16]) в рассматриваемой ситуации.

Определение 18. *Определяющими семействами оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ называются семейства $\{I^\pm(A, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ интегральных операторов на X^0 с гладкими ядрами, задающимися формулами:*

$$K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_0^{+\infty} s^{-i\lambda} \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{s},$$

$$K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int\limits_{-\infty}^{0} |s|^{-i\lambda} \widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{|s|}.$$

Функция $\lambda \mapsto K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$ (соотв. $\lambda \mapsto K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$) является преобразованием Меллина функции $\widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0)$ (соотв. $\widetilde{K}_A(0, -s, x_1^0, x_2^0)$) по переменной s на полуоси $(0, +\infty)$. Поскольку $\widetilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0)$ является гладкой финитной функцией по $s \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при фиксированных x_1^0, $x_2^0 \in X^0$, по теореме Пэли-Винера функции $K_{I^\pm(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$ корректно определены для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и являются целыми функциями.

Справедливы следующие свойства определяющих операторов:

1. $I(A \circ B) = I(A) \circ I(B)$.
2. $I^+(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)$.
3. $I^-(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda)$.

Теорема 7. *Если $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}(X, X^0)$, то*

$$\text{r-Tr}([A, B]) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr}(\partial_\lambda I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + \partial_\lambda I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)) d\lambda,$$

где знак tr *означает след интегрального оператора на X^0.*

Доказательство. По определению имеем:

$$\text{r-Tr}[(A, B)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg(\int\limits_{\substack{X\\ r(p) > \varepsilon}} (k_{AB} - k_{BA})\,|_\Delta + 2 \ln \varepsilon \int\limits_{X^0} ((k_{AB} - k_{BA})\,|_\Delta) \Bigg|_{X^0} \Bigg).$$

Определим отображение $R : X \times X \to X \times X$ по формуле $R(p_1, p_2) = (p_2, p_1)$. Тогда можно записать

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{AB})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{X\\ r(p_1) > \varepsilon}} \left(\int\limits_X k_A(p_1, p_2) k_B(p_2, p_1) \right) = \int\limits_{\substack{X \times X\\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2),$$

где последний интеграл следует понимать как интеграл от плотности $k_A R^* k_B$ на $X \times X$ по множеству $\{(p_1, p_2) \in X \times X : r(p_1) > \varepsilon\}$. Аналогично,

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{X \times X\\ r(p_1) > \varepsilon}} k_B R^* k_A(p_1, p_2) = \int\limits_{\substack{X \times X\\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности $V = \exp(U)$ подмногообразия X^0. В частности, $V = \{p \in X : r(p) < \varepsilon_1\}$. Получаем, что

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{X \times X\\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int\limits_{\substack{X \times X\\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) =$$

$$= \int\limits_{\substack{V \times V\\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int\limits_{\substack{V \times V\\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) +$$

$$+ \int\limits_{\substack{V \times (X \setminus V)\\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int\limits_{\substack{(X \setminus V) \times V\\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) +$$

$$+\int\limits_{\substack{(X\setminus V)\times X\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) - \int\limits_{\substack{X\times(X\setminus V)\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

Легко видеть, что для любого $0<\varepsilon<\varepsilon_1$:

$$\int\limits_{\substack{(X\setminus V)\times X\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{(X\setminus V)\times X} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

$$\int\limits_{\substack{X\times(X\setminus V)\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{X\times(X\setminus V)} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

По условию (1) определения 16 существует такое $\varepsilon_2>0$, что если $p_1\notin V$ и $r(p_2)<\varepsilon_2$ или $r(p_1)<\varepsilon_2$ и $p_2\notin V$, то $k_A(p_1,p_2)=k_B(p_1,p_2)=0$. Следовательно, для любого $0<\varepsilon<\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$

$$\int\limits_{\substack{(X\setminus V)\times V\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{(X\setminus V)\times V} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

$$\int\limits_{\substack{V\times(X\setminus V)\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) = \int\limits_{V\times(X\setminus V)} k_A R^* k_B(p_1,p_2).$$

Следовательно, получаем:

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA}-k_{BA})\,|_\Delta = \int\limits_{\substack{V\times V\\ r(p_1)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2) - \int\limits_{\substack{V\times V\\ r(p_2)>\varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1,p_2). \tag{13}$$

В окрестности $(V\setminus X^0)\times(V\setminus X^0)$ возьмем локальную систему координат $(x,s,x_1^0,x_2^0)\in\Pi_\varepsilon\times X^0\times X^0$, задаваемую формулами (3). В этих координатах отображение R записывается в виде

$$R(x,s,x_1^0,x_2^0)=\left(\frac{x}{s},\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0\right).$$

Равенство (13) примет вид

$$\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA}-k_{BA})\,|_\Delta \;=\; \int\limits_{X^0\times X^0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon|s|}\widetilde{K}_A(x,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B\left(\frac{x}{s},\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0\right)\frac{dx}{|x|}\right)\frac{ds}{|s|}dx_1^0dx_2^0,$$

где функции $\widetilde{K}_A$ и $\widetilde{K}_B$ определяются формулой (4).

Используя условия (2) и (3) определения 16, отсюда нетрудно вывести, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{X\\ r(p_1)>\varepsilon}}(k_{BA}-k_{BA})\,|_\Delta =$$

$$=\int\limits_{X^0\times X^0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon|s|}\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B\left(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0\right)\frac{dx}{|x|}\right)\frac{ds}{|s|}dx_1^0dx_2^0 =$$

$$=2\int\limits_{X^0\times X^0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)\frac{ds}{|s|}dx_1^0dx_2^0.$$

В частности, отсюда следует, что

$$\int\limits_{X^0}\left((k_{AB}-k_{BA})\Big|_\Delta\right)\Big|_{X^0}=0.$$

Используя связь преобразования Меллина с преобразованием Фурье и равенство Парсеваля для преобразования Фурье, можно доказать, что, если $f_1,f_2\in L^2((0,+\infty),\frac{ds}{s})$, то преобразования Меллина $M(f_1),M(f_2)$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, и имеет место формула

$$\int\limits_0^{+\infty}f_1(s)\overline{f_2(s)}\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[M(f_1)](\lambda)\overline{[M(f_2)](\lambda)}d\lambda.$$

Применяя эту формулу в случае, когда

$$f_1(s)=\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0),\quad f_2(s)=\overline{\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)},\quad s>0,$$

получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)\frac{ds}{s}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_\lambda K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0,x_2^0)K_{I^+(B,\lambda)}(x_2^0,x_1^0)d\lambda.$$

Аналогично имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\ln|s|\widetilde{K}_A(0,s,x_1^0,x_2^0)\widetilde{K}_B(0,\frac{1}{s},x_2^0,x_1^0)\frac{ds}{|s|}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\partial_\lambda K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0,x_2^0)K_{I^-(B,\lambda)}(x_2^0,x_1^0)d\lambda.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
\text{r-Tr}([A,B]) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\substack{X \\ r(p_1)>\varepsilon}} (k_{BA} - k_{BA})\,|_\Delta = \\
&= -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{X^0\times X^0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\partial_\lambda K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) K_{I^+(B,\lambda)}(x_2^0, x_1^0) \\
&\quad + \partial_\lambda K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0) K_{I^-(B,\lambda)}(x_2^0, x_1^0)) d\lambda dx_1^0 dx_2^0 = \\
&= -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr}(\partial_\lambda I^+(A,\lambda)\circ I^+(B,\lambda) + \partial_\lambda I^-(A,\lambda)\circ I^-(B,\lambda)) d\lambda.
\end{aligned}$$

□

A. Доказательство теоремы 5

Пусть $u \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}^0}_{phg}(Y, Y^0, G)$. Необходимо показать, что $f^*u \in \mathcal{A}^{\mathcal{E}}_{phg}(X, X^0, f^*G)$.

Прежде всего, отметим, что ограничение отображения f на $f^{-1}(Y \setminus Y^0)$ определяет отображение $f : f^{-1}(Y \setminus Y^0) \to Y \setminus Y^0$. Поскольку u является гладким сечением на $Y \setminus Y^0$, f^*u является гладким на $f^{-1}(Y \setminus Y^0)$, в частности, поскольку $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$, на $X \setminus X^0$.

Остается доказать, что сечение f^*u является конормальным в произвольной точке $p \in X^0$. Предположим, для определенности, что точка $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$. Пусть $f(p) = p_0$. Предположим, что $p_0 \in Y_1 \cap \ldots \cap Y_{\ell_0}$ и $p_0 \notin Y_{\ell_0+1} \cup \ldots \cup Y_{r_0}$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) \in D_1 \times D_2$ и адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1, \ldots, y_{\ell_0}, y^0) \in D_1^0 \times D_2^0$, где $D_1 \subset \mathbb{R}^\ell$; $D_2 \subset \mathbb{R}^{m-\ell}$; $D_1^0 \subset \mathbb{R}^{\ell_0}$; $D_2^0 \subset \mathbb{R}^{n-\ell_0}$. Без потери общности, мы можем предполагать, что ограничение расслоения G на заданную окрестность точки p_0 тривиально, следовательно, мы можем отождествить ограничение сечения u на эту окрестность с функцией. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что u — скалярная функция.

Случай $\ell_0 = \ell = 0$ был уже рассмотрен в начале доказательства. В этом случае $p_0 \in Y \setminus Y^0$ и $p \in X \setminus X^0$.

Рассмотрим случай, когда $\ell_0 = 0$ и $\ell > 0$. В этом случае $p_0 \in Y \setminus Y^0$ и $p \in X^0$. Так как $p_0 \in Y \setminus Y^0$, имеют место равенства

$$e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = 1, \ldots, r_0; \quad \forall j = 1, \ldots, \ell. \tag{14}$$

Так как $f^*u \in C^\infty(f^{-1}(Y \setminus Y^0), f^*G)$, f^*u является гладкой в точке p, поэтому f^*u — конормальная в точке p относительно тривиального индексного семейства, что в силу (14) согласуется с формулой (5).

Дальнейшее доказательство теоремы проведём индукцией по $\ell_0 \geq 1$. Поскольку $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$, $\ell > 0$.

База индукции: $\ell_0 = 1$. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}
&e_f(X_j, Y_1) = 0; \quad \forall j = \ell+1, \ldots, r; \\
&e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = 2, \ldots, r_0; \quad \forall j = 1, \ldots, r.
\end{aligned} \tag{15}$$

Так как u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}^0$, справедливо разложение:

$$u(y_1, y^0) \sim \sum_{(z,q)\in E_1^0} a_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|,$$

где $a_{z,q} \in C^\infty(D_2^0)$, $E_1^0 = \mathcal{E}^0(Y_1)$.

Так как f — относительное отображение, в локальных координатах отображение f записывается в виде:

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}, \quad f : (x, x^0) \mapsto (y_1, y^0),$$

где

$$y_1 = b_1(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}}, \quad y^0 = g(x, x^0), \tag{16}$$

b_1 — гладкая, нигде не обращающаяся в ноль функция на $D_1 \times D_2$ и $g : D_1 \times D_2 \to D_2^0$ — гладкое отображение.

Пусть N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Обозначим: $u = u_N + r_N$, где

$$u_N(y_1, y^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1^0 \\ z\leqslant N}} a_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Соответственно, получаем, что $f^*u = f^*u_N + f^*r_N$. Имеем:

$$f^*u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1^0 \\ z\leqslant N}} (g^*a_{z,q})(x, x^0) b_1^z(x, x^0) x_1^{\gamma_{11}z} \ldots x_\ell^{\gamma_{1\ell}z} \times$$
$$\times \left(\ln |b_1(x, x^0)| + \gamma_{11} \ln |x_1| + \ldots + \gamma_{1\ell} \ln |x_\ell|\right)^q .$$

Так как $g : D_1 \times D_2 \to D_2^0$ — гладкое отображение и $a_{z,q} \in C^\infty(D_2^0)$, мы имеем $g^*a_{z,q} \in C^\infty(D_1 \times D_2)$. Поэтому f^*u_N можно записать в виде:

$$f^*u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1^0 \\ z\leqslant N}} d_{z,q}(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}z} \ln^q |x_j|,$$

где $d_{z,q} \in C^\infty(D_1 \times D_2)$. Отсюда сразу получается, что f^*u_N конормальна относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, задаваемого формулой (5).

По условию, для любых $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\beta_0 \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$ существует такая постоянная C_1, что:

$$\left|(y_1\partial_{y_1})^{\alpha_0} \partial_{y^0}^{\beta_0} r_N(y_1, y^0)\right| \leqslant C_1 |y_1|^{N+1}.$$

Отсюда, используя представление (16), получаем для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-\ell}$ существует такая постоянная C_3, что:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta f^*r_N\right| \leqslant C_3 |x_1|^{\gamma_{11}(N+1)}. \tag{17}$$

Пусть N_1 — произвольное натуральное число. Поскольку f^*u_N конормальна в точке p относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, справедливо разложение:

$$f^*u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z\leqslant N_1}} h_{z,q}^N(x_2, \ldots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| + \varrho_{N,N_1},$$

где $h_{z,q}^N$ — конормальные функции относительно индексного семейства $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}(X_2), \ldots, \mathcal{E}(X_r))$ и ϱ_{N,N_1} удовлетворяет оценкам

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \varrho_{N,N_1}\right| \leqslant C_6 |x_2|^{M_2} \ldots |x_\ell|^{M_\ell} |x_1|^{N_1+1} \tag{18}$$

При заданном N_1 выберем N таким, чтобы было выполнено неравенство:

$$N_1 + 1 < \gamma_{11}(N + 1). \tag{19}$$

В силу неравенств (17), (18), (19) имеем:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(f^* r_N + \varrho_{N,N_1}\right)\right| \leqslant C_7 |x_2|^{M_2^0} \dots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{N_1+1},$$

где $M_j^0 = \min(0, M_j) \quad \forall j = 2, \dots, \ell$. Окончательно получаем, что:

$$f^* u = \sum_{\substack{(z,q)\in E_1 \\ z\leqslant N_1}} h_{z,q}^N(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| + f^* r_N + \varrho_{N,N_1},$$

откуда следует, что $h_{z,q}^N$ не зависит от N при $N_1 + 1 < \gamma_{11}(N+1)$. Обозначим $h_{z,q}^N(x_2, \dots, x_\ell, x^0) = h_{z,q}(x_2, \dots, x_\ell, x^0)$. Следовательно:

$$f^* u \sim \sum_{(z,q)\in E_1} h_{z,q}(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

и тем самым $f^* u$ является конормальной функцией относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Шаг индукции. Зафиксируем $\ell > 1$. Предположим, что верно следующее утверждение. Пусть Z, W — гладкие многообразия, Z^0 и W^0 — стратифицированные подмногообразия Z и W соответственно. Пусть задано относительное отображение $h : (Z, Z^0) \to (W, W^0)$ и произвольное векторное расслоение H над W. Пусть на подмногообразии W^0 задано индексное семейство $\mathcal{F}^0$. Пусть также точка $p \in Z_1 \cap \dots \cap Z_\ell$ и $p \notin Z_{\ell+1} \cup \dots \cup Z_r$. Пусть $h(p) = p_0$. Пусть $p_0 \in W_1 \cap \dots \cap W_{k_0}$ и $p_0 \notin W_{k_0+1} \cup \dots \cup W_{r_0}$, при этом $k_0 < \ell_0$. Пусть u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{F}^0$, тогда $h^* u$ конормальна в точке p относительно индексного семейства $\mathcal{F}$, где каждое индексное множество $\mathcal{F}(Z_j)$ индексного семейства $\mathcal{F}$ на Z^0 имеет вид:

$$\mathcal{F}(Z_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_i e_h(Z_j, W_i) z_i, \sum_i q_i\right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{F}^0(W_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где суммирование ведется по таким $i = 1, \dots, r_0$, для которых $e_f(Z_j, W_i) \neq 0$.

Пусть функция u, отображение f, точки p и p_0 такие, как в формулировке теоремы. Докажем, что $f^* u$ является конормальной функцией в точке p. По условию, имеем:

$$\begin{aligned} &e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = 1, \dots, \ell_0; \quad \forall j = \ell+1, \dots, r; \\ &e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = \ell_0+1, \dots, r_0; \quad \forall j = 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}^0$, существует такая окрестность V точки p_0, $\varkappa_0(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0} \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{m-\ell_0}$, что функция u определена и является гладкой на множестве $V \setminus X^0$, и для любого $(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0 - 1} \times V_2$ имеет место асимптотическое разложение при $y_1 \to 0$:

$$u(y, y^0) \sim \sum_{(z,q)\in E_1^0} a_{z,q}(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0) y_1^z \ln^q |y_1|,$$

где $E_1^0 = \mathcal{E}^0(Y_1)$, функции $a_{z,q}$ конормальные на $(-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0 - 1} \times V_2 \subset Z$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}_0'$.

Здесь мы рассматриваем многообразие $Z = \mathbb{R}^{\ell_0 - 1} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}$ с координатами $(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0)$, где $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 2, \dots, \ell_0$, $y^0 \in \mathbb{R}^{m-\ell_0}$, наделенное стратифицированным подмногообразием $Z^0 = \{y_2 = 0\} \cup \dots \cup \{y_{\ell_0} = 0\}$. Индексное семейство $\mathcal{E}_0'$ на Z^0 задается формулой $\mathcal{E}_0'(\{y_j = 0\}) = E_j^0$, где $j = 2, \dots, \ell_0$.

Так как f — относительное отображение, в локальных координатах отображение f записывается в виде:

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to \mathbb{R}^{\ell_0} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}, \quad (x, x^0) \mapsto (y_1, \dots, y_{\ell_0}, y^0),$$

где

$$y_i = b_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, \ell_0, \quad y^0 = F(x, x^0),$$

b_i — гладкие, нигде не обращающиеся в ноль на X функции.

Введём отображение

$$g : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \to \mathbb{R}^{\ell_0 - 1} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}, \quad (x, x^0) \mapsto (y_2, \ldots, y_{\ell_0}, y^0),$$

где

$$y_i = b_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}}, \quad i = 2, \ldots, \ell_0, \quad y^0 = F(x, x^0).$$

Заметим, что g является относительным отображением, причём

$$e_g(X_j, Y_i) = e_f(X_j, Y_i); \quad \forall j = 1, \ldots, \ell; \quad \forall i = 2, \ldots, \ell_0. \tag{21}$$

Пусть N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Обозначим: $u = u_N + r_N$, где

$$u_N(y, y^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leqslant N}} a_{z,q}(y_2, \ldots, y_{\ell_0}, y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Соответственно, получаем, что $f^* u = f^* u_N + f^* r_N$. Имеем:

$$f^* u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leqslant N}} (g^* a_{z,q})(x, x^0) b_1^z(x, x^0) x_1^{\gamma_{11} z} \ldots x_\ell^{\gamma_{1\ell} z} \times$$
$$\times \left(\ln |b_1(x, x^0)| + \gamma_{11} \ln |x_1| + \ldots + \gamma_{1\ell} \ln |x_\ell| \right)^q.$$

Существует такая окрестность U точки p, $\varkappa(U) = (-\delta, \delta)^\ell \times U_2$, где окрестность $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$, что $g(U) \subset V$. Так как g — относительное отображение, $a_{z,q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}'}((-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0 - 1} \times V_2)$, в силу (21) и предположения индукции, получаем, что: $g^* a_{z,q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\tilde{\mathcal{E}}}((-\delta, \delta)^\ell \times U_2)$, где индексное множество $\tilde{\mathcal{E}}(X_j)$ индексного семейства $\tilde{\mathcal{E}}$ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{E}}(X_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_{i=2}^{r_0} e_f(X_j, Y_i) z_i, \sum_{i=2}^{r_0} q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{E}^0(Y_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где суммирование ведется по таким $i = 2, \ldots, r_0$, для которых $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$.

Следовательно, $f^* u_N$ можно записать в виде:

$$f^* u_N(x_1, \ldots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leqslant N}} d_{z,q}(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j} z} \ln^q |x_j|,$$

где $d_{z,q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\tilde{\mathcal{E}}}((-\delta, \delta)^\ell \times U_2)$. Отсюда следует, что $f^* u_N$ — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

По условию, найдутся вещественные числа $M_2, \ldots, M_{\ell_0}$, такие что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{\ell_0}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{m-\ell_0}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$ такая, что:

$$\left| (y\partial_y)^\alpha \partial_{y^0}^\beta r_N(y, y^0) \right| \leqslant C |y_2|^{M_2} \cdot \ldots \cdot |y_{\ell_0}|^{M_{\ell_0}} |y_1|^{N+1}.$$

Отсюда следует, что при $|x_j| < 1$:

$$\left| f^* r_N(x, x^0) \right| \leqslant C_1 |x_2|^{M_2^0 + \gamma_{12}(N+1)} \ldots |x_\ell|^{M_\ell^0 + \gamma_{1\ell}(N+1)} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1) + M_1^0}$$
$$\leqslant C_4 |x_2|^{M_2^0} \ldots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1) + M_1^0}.$$

где

$$M_j^0 = \sum_{i=2}^{\ell_0} \gamma_{ij} M_i, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Аналогичные оценки справедливы для производных:

$$\left|(x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta f^* r_N\right| \leqslant C_5 |x_2|^{M_2^0} \dots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1)+M_1^0}. \tag{22}$$

Аналогично случаю $\ell = 1$, отсюда выводится, что $f^* u$ является конормальной функцией относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

B. Доказательство теоремы 6

Пусть $\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}}(X, X^0, f^* G \otimes \Omega_X)$. Покажем, что $f_*\mu$ корректно определена и $f_*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(Y, Y^0, G \otimes \Omega_Y)$.

Пусть $p_0 \notin Y^0$. Покажем, что $f_*\mu$ — гладкая плотность в точке p_0. В окрестности точки p_0 возьмём локальную систему координат с координатами $y^0 \in D_2^0 \subset \mathbb{R}^m$. Возьмём произвольную точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. Так как f — относительное расслоение, в локальных координатах отображение f имеет вид $y^0 = f(x, x^0)$, где $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x^0}\right) = m$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p систему координат, что f имеет вид проекции:

$$y^0 = f(x, x^0) = (x_1^0, \dots, x_m^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2. \tag{23}$$

В силу компактности X, существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s}, $s = 1, \dots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \bigcup \bigcup_{s=1}^{d} V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X), s = 0, \dots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\operatorname{supp}\psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0)$, $\operatorname{supp}\psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \dots, d$, $\psi_s \geq 0, \sum_{s=0}^{d} \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0, что $\sum_{s=1}^{d} \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и в доказательстве теоремы 5, без потери общности, можно предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X. В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left|\frac{dx}{x} dx^0\right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{p_0}$. Тогда $f^*\varphi \in C^\infty(X)$, причем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, f^*\varphi\rangle = \int\limits_{f^{-1}(U_{p_0})} \mu(m)\varphi(f(m)).$$

Используя разбиение единицы и локальные координаты, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{D_1 \times D_2} \psi_s(x, x^0)\mu(x, x^0)\varphi(f(x, x^0)) \frac{dx}{x} dx^0. \tag{24}$$

Принимая во внимание формулу (23), формула переписывается в виде

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \int\limits_{U_{p_0}} F(y^0)\varphi(y^0) dy^0, \tag{25}$$

где F задается формулой

$$F(y^0)=\sum_{s=1}^{d}\int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell-m}}\psi_s(x,y^0,x^0_{m+1},\dots,x^0_{n-\ell})\times$$
$$\times\,\mu(x,y^0,x^0_{m+1},\dots,x^0_{n-\ell})\frac{dx}{x}dx^0_{m+1}\dots dx^0_{n-\ell}. \quad (26)$$

Так как $p\in X_1\cap\ldots\cap X_\ell$ и $p\notin X_{\ell+1}\cup\ldots\cup X_r$ и $f(p)\notin Y^0$, имеем $e_f(X_j,Y_i)=0$, если $j=1,\dots,\ell$, $i=1,\dots,r_0$. Отсюда получаем, что $\inf\mathcal{E}(X_j)>0$ для любого $j=1,\dots,\ell$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\mu(x,y^0,x^0_{m+1},\dots,x^0_{n-\ell})|<C|x_1|^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot|x_\ell|^{\varepsilon_\ell},$$

где $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell$ — некоторые положительные числа. Отсюда следует, что интеграл, стоящий в правой части (26), сходится равномерно, и, тем самым, функция F является гладкой в окрестности точки p_0. Согласно (25), ограничение плотности $f_*\mu$ на U_{p_0} корректно определено и совпадает с гладкой плотностью $F(y^0)|dy^0|$. Поэтому $f_*\mu$ корректно определена как гладкая плотность на $Y\setminus Y^0$.

Пусть $p_0\in Y^0$. Предположим, что $p_0\in Y_1\bigcup\ldots\bigcup Y_{\ell_0}$ и $p_0\notin Y_{\ell_0+1}\bigcup\ldots\bigcup Y_{r_0}$, $\ell_0\neq 0$. Докажем, что $f_*\mu$ — конормальная в точке p_0.

Случай $\ell_0=1$. Возьмём адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1,y^0)\in D^0_1\times D^0_2\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m-1}$. Возьмём точку $p\in X$ такую, что $f(p)=p_0$. Предположим, что $p\in X_1\cap\ldots\cap X_\ell$ и $p\notin X_{\ell+1}\cup\ldots\cup X_r$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x,x^0)\in D_1\times D_2\subset\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}$. В данных системах координат отображение f записывается в виде: $(y_1,y^0)=f(x,x^0)$, где: $y_1=b_1(x,x^0)x_1^{\gamma_{11}}\dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}}$, функция b_1 — гладкая и нигде не обращается в ноль; $y^0=g(x,x^0)$. Так как $f(p)=p_0$, хотя бы одно из чисел $\gamma_{11},\gamma_{12},\dots,\gamma_{1\ell}$ больше нуля. Пусть для определённости $\gamma_{11}>0$. Тогда, без потери общности, можно считать, что $b_1(x,x^0)\equiv 1$, так как в окрестности нуля можно сделать замену переменных:

$$\widetilde{x}_1=b_1(x,x^0)^{\frac{1}{\gamma_{11}}}x_1;\quad \widetilde{x}_j=x_j,\quad \forall j=2,\dots,\ell;\quad \widetilde{x}^0=x^0.$$

Якобиан данной замены обозначим через $w(x,x^0)$. Легко видеть, что $w(0,x^0)\neq 0$ для любого $x^0\in D_2$.

По условию (4) определения 13 имеем $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial x^0}\right)=m-1$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p систему координат, что g имеет вид проекции:

$$y^0=g(x,x^0)=(x^0_1,\dots,x^0_{m-1}),\quad x\in D_1,\quad x^0\in D_2.$$

В силу компактности X, существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s}, $s=1,\dots,d$, что $X=(X\setminus f^{-1}(p_0))\bigcup\bigcup\limits_{s=1}^{d}V_{p_s}$. Пусть $\psi_s\in C^\infty(X), s=0,\dots,d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\operatorname{supp}\psi_0\subset X\setminus f^{-1}(p_0)$, $\operatorname{supp}\psi_s\subset V_{p_s}$ для $s=1,\dots,d$, $\psi_s\geq 0, \sum\limits_{s=0}^{d}\psi_s=1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0, что $\sum\limits_{s=1}^{d}\psi_s(m)=1$ для любого $m\in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и выше, будем предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X. В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu=\mu(x,x^0)\left|\frac{dx}{x}dx^0\right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\operatorname{supp}\varphi \subset U_{p_0}$. Тогда $f^*\varphi \in C^\infty(X)$, причем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \langle \mu, f^*\varphi\rangle = \int\limits_{f^{-1}(U_{p_0})} \mu(m)\varphi(f(m)).$$

Используя разбиение единицы и локальные координаты, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}} \psi_s(x,x^0)\mu(x,x^0)\varphi(x_1^{\gamma_{11}}\dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}}, x_1^0,\dots,x_{m-1}^0)\frac{dx}{x}dx^0. \tag{27}$$

Так как $\ell_0 = 1$, по определению 11 хотя бы одно из чисел $\gamma_{11},\gamma_{12},\dots,\gamma_{1\ell}$ больше нуля. Пусть для определённости числа $\gamma_{11},\gamma_{12},\dots,\gamma_{1k_1} > 0$, $\gamma_{1,k_1+1} = \ldots = \gamma_{1\ell} = 0$, где $k_1 \leqslant \ell$. Обозначим: $\mu_s(x,x^0) = \frac{1}{\gamma_{11}}\psi_s(x,x^0)\mu(x,x^0)$. Равенство (27) записывается в виде

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \gamma_{11}\sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(x,x^0)\varphi(x_1^{\gamma_{11}}x_2^{\gamma_{12}}\dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, x_1^0,\dots,x_{m-1}^0)\frac{dx}{x}dx^0.$$

Сделав замену переменных

$$y_1 = x_1^{\gamma_{11}}\dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, \quad t_j = x_j \quad \forall j = 2,\dots \ell; \quad y^0 = (x_1^0,\dots,x_{m-1}^0)$$

в интеграле, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}\dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2,\dots,t_\ell, y^0, x_m^0,\dots,x_{n-\ell}^0)\times$$

$$\times\, \varphi(y_1,y^0)\frac{dy_1}{y_1}\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell}dy^0 dx_m^0\dots dx_{n-\ell}^0.$$

Следовательно, для любого (y_1,y^0) из некоторой окрестности точки p_0 плотность $f_*\mu$ задается формулой

$$f_*\mu = \sum_{s=1}^{d} \nu_s(y_1,y^0)\left|\frac{dy_1}{y_1}dy^0\right|,$$

где функции $\nu_s(y_1,y^0)$ имеют вид:

$$\nu_s(y_1,y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-1}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}\dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2,\dots,t_\ell, y^0, x_m^0,\dots,x_{n-\ell}^0)$$

$$\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell}dx_m^0\dots dx_{n-\ell}^0,$$

Так как при $j = k_1+1,\dots,\ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, интеграл в последней формуле сходится, следовательно, ν_s — гладкая функция при $y_1 \neq 0$.

Зафиксируем s. Докажем конормальность функции ν_s при $y_1 = 0$ относительно индексного множества E_1^0. Запишем

$$\nu_s(y_1,y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-k_1}} \mu_s^1(y_1, t_{k_1+1},\dots,t_\ell, y^0)\frac{dt_{k_1+1}}{t_{k_1+1}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell}, \tag{28}$$

где

$$\mu_s^1(y_1,t_{k_1+1},\dots,t_\ell,y^0)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{k_1-1}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}}\mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}\dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}},t_2,\dots,t_\ell,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-\ell}^0)\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}}dx_m^0\dots dx_{n-\ell}^0. \tag{29}$$

Доказательство теоремы 6 при $\ell_0=1$ завершается при помощи следующего утверждения.

Предложение 2. *Если функция $\mu_s(x_1,\dots,x_\ell,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-\ell}^0)$ финитна и конормальна по переменным $(x_1,\dots,x_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1,\dots,E_\ell)$ и $\gamma_{11},\gamma_{12},\dots,\gamma_{1k_1}>0$, то функция μ_s^1, задаваемая формулой* (29), *конормальна по переменным $(y_1,t_{k_1+1},\dots,t_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0,E_{k_1+1},\dots,E_\ell)$, где*

$$E_1^0=\overline{\bigcup}_{j=1,\dots,k_1}\left\{\left(\frac{z}{\gamma_{1j}},q\right):(z,q)\in E_j\right\}.$$

Если предложение 2 доказано, то, применяя утверждение теоремы 6 к функции μ_s^1 в случае $\ell_0=0$ и принимая во внимание, что при $j=k_1+1,\dots,\ell$ выполнено условие $\inf E_j>0$, из формулы (28) получаем, что функция ν_s является конормальной при $y_1=0$, что завершает доказательство теоремы 6 при $\ell_0=1$.

Доказательство предложения 2. Так как при $y_1\neq 0$ подынтегральное выражение — гладкая, финитная функция, интеграл абсолютно сходится, и μ_s^1 является гладкой функцией.

Докажем конормальность функции μ_s^1 при $y_1=0$.

Случай $k_1=\ell=1$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}},y^0,x_m^0,\dots,x_{n-1}^0)dx_m^0\dots dx_{n-1}^0. \tag{30}$$

Так как μ_s — конормальная функция при $x_1=0$ относительно индексного множества E_1, мы имеем:

$$\mu_s(x_1,x^0)\sim\sum_{(z,q)\in E_1}a_{z,q}(x^0)x_1^z\ln^q|x_1|,$$

где $a_{z,q}$ — гладкие функции. Обозначим $\mu_s=\mu_N+r_N$, где

$$\mu_N(x_1,x^0)=\sum_{\substack{(z,q)\in E_1\\ z\leqslant N}}a_{z,q}(x^0)x_1^z\ln^q|x_1|,$$

N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Согласно формуле (30), функция μ_s^1 представляется в виде $\mu_s^1=\nu_N+\tilde r_N$, где

$$\nu_N(y_1,y^0)=\frac{1}{\gamma_{11}^q}\sum_{\substack{(z,q)\in E_1\\ z\leqslant N}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}a_{z,q}(y^0,x_m^0,\dots,x_{n-1}^0)y_1^{\frac{z}{\gamma_{11}}}\ln^q|y_1|dx_m^0\dots dx_{n-1}^0$$

и

$$\tilde r_N(y_1,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}r_N(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}},y^0,x_m^0,\dots,x_{n-1}^0)dx_m^0\dots dx_{n-1}^0.$$

Имеем

$$\nu_N(y_1,y^0)=\sum_{\substack{(z,q)\in E_1\\ z\leqslant N}}h_{z,q}(y^0)y_1^{\frac{z}{\gamma_{11}}}\ln^q|y_1|,$$

где

$$h_{z,q}(y^0) = \frac{1}{\gamma_{11}^q} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} a_{z,q}(y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0.$$

Поскольку $a_{z,q}$ являются гладкими финитными функциями, функция ν_N конормальна при $y_1 = 0$ относительно индексного множества $E_1^0 = \{(\frac{z}{\gamma_{11}}, q) : (z,q) \in E_1\}$.

По определению, для любого $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мульти-индекса β_0 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left| \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_0} \partial_{x^0}^{\beta_0} r_N(x_1, x^0) \right| < C_1 |x_1|^{N+1}.$$

Поэтому, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мульти-индекса β найдётся постоянная C_2, такая что

$$\left| \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{\alpha} \partial_{y^0}^{\beta_0} \tilde{r}_N(y_1, y^0) \right| < C_2 |y_1|^{\frac{N+1}{\gamma_{11}}}.$$

Отсюда немедленно получаем, что

$$\mu_s^1(y_1, y^0) \sim \sum_{(z,q) \in E_1^0} h_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Рассмотрим случай $k_1 = \ell = 2$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m-1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \frac{dt}{t} dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0. \tag{31}$$

Так как функция $\mu_s(x_1, x_2, x^0)$ конормальна в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1, E_2), мы имеем:

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) \sim \sum_{(z_1, q_1) \in E_1} a_{z_1,q_1}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1|,$$

где $a_{z_1,q_1}(x_2, x^0)$ — конормальные функции при $x_2 = 0$ относительно индексного множества E_2. По определению, для любого натурального N_1 имеет место представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) = \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leqslant N_1}} a_{z_1,q_1}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1| + r_{N_1}(x_1, x_2, x^0).$$

Функция $a_{z_1,q_1}(x_2, x^0)$ допускает асимптотическое разложение

$$a_{z_1,q_1} \sim \sum_{(z_2, q_2) \in E_2} b_{z_1,q_1,z_2,q_2}(x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|,$$

b_{z_1,q_1,z_2,q_2} — гладкие функции. Поэтому для любого натурального N_2 имеет место представление

$$a_{z_1,q_1}(x_2, x^0) = a_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0) + r_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0),$$

где

$$a_{z_1 q_1 N_2} = \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leqslant N_2}} b_{z_1,q_1,z_2,q_2}(x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|.$$

Таким образом, получаем представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) = \mu_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) + r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0),$$

где

$$\mu_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) = \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leqslant N_1}} \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leqslant N_2}} b_{z_1,q_1,z_2,q_2}(x^0) x_2^{z_2} x_1^{z_1} \ln^{q_2} |x_2| \ln^{q_1} |x_1|,$$

$$r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0)=r_{N_1}(x_1,x_2,x^0)+\sum_{\substack{(z_1,q_1)\in E_1\\ z_1\leqslant N_1}} r_{z_1q_1N_2}(x_2,x^0)x_1^{z_1}\ln^{q_1}|x_1|,$$

N_1, N_2 — натуральные числа, которые будут выбраны позже.

По условию существует M_1 такое, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1 такая, что:

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_{N_1}(x_1,x_2,x^0)\right|<C_1|x_1|^{M_1}|x_2|^{N_2+1}.$$

Более того, для любого $\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_2, такая что

$$\left|(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_{z_1q_1N_2}(x_2,x^0)\right|<C_2|x_2|^{N_2+1}.$$

Отсюда следует, что существует $\tilde{M}_1$ такое, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0)\right|<C_1|x_1|^{\tilde{M}_1}|x_2|^{N_2+1}. \tag{32}$$

Учитывая тот факт, что $\mu_s(x_1,x_2,x^0)=0$ при $|x_1|>\varepsilon$ или $|x_2|>\varepsilon$, согласно (31), получаем представление

$$\mu_s^1(y_1,y^0)=\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)+\tilde{r}_{N_1N_2}(y_1,y^0),$$

где

$$\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)=\sum_{\substack{(z_1,q_1)\in E_1\\ z_1\leqslant N_1}}\sum_{\substack{(z_2,q_2)\in E_2\\ z_2\leqslant N_2}}\int_{\mathbb{R}^{n-m-1}}\Bigg(\int_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}}\varepsilon^{-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}}^{\varepsilon} b_{z_1,q_1,z_2,q_2}(y^0,x_m^0,\dots,x_{n-2}^0)$$
$$t^{z_2-\frac{z_1\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}y_1^{\frac{z_1}{\gamma_{11}}}\ln^{q_2}|t|\left(\gamma_{11}\ln|y_1|-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}\ln|t|\right)^{q_1}\frac{dt}{t}\Bigg)dx_m^0\dots dx_{n-2}^0.$$

$$\tilde{r}_{N_1N_2}(y_1,y^0)\quad=\quad\int_{\mathbb{R}^{n-m-1}}\Bigg(\int_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}}\varepsilon^{-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}}^{\varepsilon} r_{N_1N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}},t,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-2}^0)\frac{dt}{t}\Bigg)dx_m^0\dots dx_{n-2}^0.$$

Вычисляя явно интеграл по t, можно показать, что функция $\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)$ записывается в виде:

$$\nu_{N_1N_2}(y_1,y^0)=\sum_{\substack{(z_1,q_1)\in E_1\\ z_1\leqslant N_1}}d^1_{z_1,q_1}(y^0)y_1^{\frac{z_1}{\gamma_{11}}}\ln^{q_1}|y_1|+\sum_{\substack{(z_2,q_2)\in E_2\\ z_2\leqslant N_2}}d^2_{z_2,q_2}(y^0)y_1^{\frac{z_2}{\gamma_{12}}}\ln^{q_2}|y_1|+$$
$$+\sum d^3_{z_1,q_1,z_2,q_2}(y^0)y_1^{\frac{z_2}{\gamma_{12}}}\ln^{q_1+q_2+1}|y_1|,$$

где третья сумма берется по всем наборам $(z_1,q_1)\in E_1, z_1\leqslant N_1$, $(z_2,q_2)\in E_2, z_2\leqslant N_2$ таким, что $\frac{z_1}{\gamma_{11}}=\frac{z_2}{\gamma_{12}}$.

Оценим $\tilde{r}_{N_1N_2}$. Разбив интеграл по t в сумму двух интегралов, получаем

$$\tilde{r}_{N_1N_2}(y_1,y^0)=\tilde{r}^1_{N_1N_2}(y_1,y^0)+\tilde{r}^2_{N_1N_2}(y_1,y^0),$$

где

$$\tilde r^1_{N_1N_2}(y_1,y^0) \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \left(\int\limits_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}}\varepsilon^{-\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}}^{y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}}} r_{N_1N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x^0_m, \dots, x^0_{n-2}) \frac{dt}{t} \right) dx^0_m \dots dx^0_{n-2}.$$

$$\tilde r^2_{N_1N_2}(y_1,y^0) \quad = \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \left(\int\limits_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}}}^{\varepsilon} r_{N_1N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x^0_m, \dots, x^0_{n-2}) \frac{dt}{t} \right) dx^0_m \dots dx^0_{n-2}.$$

Используя (32), получаем оценку

$$|\tilde r^1_{N_1N_2}(y_1,y^0)| < C \left(|y_1|^{\frac{\tilde M_1+N_2+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_2+1}{\gamma_{12}}} \right).$$

Чтобы оценить $\tilde r^2_{N_1N_2}$, воспользуемся аналогичным представлением

$$r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0) = \tilde r_{N_2}(x_1,x_2,x^0) + \sum_{\substack{(z_2,q_2)\in E_2\\ z_2\leqslant N_2}} \tilde r_{z_2q_2N_1}(x_1,x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2}|x_2|,$$

откуда следует, что существует $\tilde M_2$ такое, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left| (x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1} (x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2} \partial^{\beta_2}_{x^0} r_{N_1N_2}(x_1,x_2,x^0) \right| \leqslant C_1 |x_1|^{N_1+1} |x_2|^{\tilde M_2}. \tag{33}$$

Используя (33), получаем оценку

$$|\tilde r^2_{N_1N_2}(y_1,y^0)| < C \left(|y_1|^{\frac{\tilde M_2+N_1+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_1+1}{\gamma_{12}}} \right).$$

Таким образом, имеем

$$|\tilde r_{N_1N_2}(y_1,y^0)| < C \left(|y_1|^{\frac{\tilde M_1+N_2+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_2+1}{\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{\tilde M_2+N_1+1}{\gamma_{11}+\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_1+1}{\gamma_{12}}} \right).$$

Отсюда легко следует конормальность функции $\mu^1_s(y_1,y^0)$ при $y_1=0$ относительно индексного множества

$$E^0_1 = \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{11}}, q \right) : (z,q)\in E_1 \right\} \bigcup \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{12}}, q \right) : (z,q)\in E_2 \right\}.$$

Рассмотрим случай $k_1 = 2, \ell > k$. Сначала предположим, что $k_1 = 2, \ell = 3$. В этом случае функция μ^1_s имеет вид:

$$\mu^1_s(y_1,t_3,y^0) \qquad = \qquad \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-m-2}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t_2, t_3, y^0, x^0_m, \dots, x^0_{n-3}) \frac{dt_2}{t_2} dx^0_m \dots dx^0_{n-3}. \tag{34}$$

Так как функция $\mu_s(x_1,x_2,x_3,x^0)$ конормальна в точке $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ относительно индексного семейства (E_1,E_2,E_3), мы имеем:

$$\mu_s(x_1,x_2,x_3,x^0) \sim \sum_{(z_3,q_3)\in E_3} a_{z_3,q_3}(x_1,x_2,x^0) x_3^{z_3} \ln^{q_3}|x_3|,$$

где $a_{z_3,q_3}(x_1,x_2,x^0)$ — конормальные функции в точке $(x_1,x_2)=(0,0)$ относительно индексного семейства (E_1,E_2). По определению, для любого натурального N имеет место представление

$$\mu_s(x_1,x_2,x_3,x^0)=\sum_{\substack{(z_3,q_3)\in E_3\\ z_3\leqslant N}} a_{z_3,q_3}(x_1,x_2,x^0)x_3^{z_3}\ln^{q_3}|x_3|+r_N(x_1,x_2,x_3,x^0).$$

Согласно формуле (34), функция μ_s^1 представляется в виде $\mu_s^1=\nu_N+\tilde r_N$, где

$$\nu_N(y_1,t_3,y^0)=\sum_{\substack{(z_3,q_3)\in E_3\\ z_3\leqslant N}} b_{z_3,q_3}(y_1,y^0)t_3^{z_3}\ln^{q_3}|t_3|,$$

где

$$b_{z_3,q_3}(y_1,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-m-2}} a_{z_3,q_3}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}},t_2,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-3}^0)\frac{dt_2}{t_2}dx_m^0\dots dx_{n-3}^0.$$

и

$$\tilde r_N(y_1,t_3,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-m-2}} r_N(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}},t_2,t_3,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-3}^0)\frac{dt_2}{t_2}dx_m^0\dots dx_{n-3}^0.$$

Согласно предложению 2 в случае $k_1=\ell=2$, функции $b_{z_3,q_3}(y_1,y^0)$ являются конормальными в точке $y_1=0$ относительно индексного множества E_1^0. Поэтому, функция $\nu_N(y_1,t_3,y^0)$ является конормальной в точке $(y_1,t_3)=(0,0)$ относительно индексного множества (E_1^0,E_3).

По определению существуют такие M_1 и M_2, что для любых $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(x_1\partial_{x_1})^{\alpha_1}(x_2\partial_{x_2})^{\alpha_2}(x_3\partial_{x_3})^{\alpha_3}\partial_{x^0}^{\beta_2}r_N(x_1,x_2,x_3,x^0)\right|<C_1|x_1|^{M_1}|x_2|^{M_2}|x_3|^{N+1}.$$

Используя эти оценки, можно показать, что существует такая постоянная M, что для любых $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β найдётся постоянная C_1, такая что

$$\left|(y_1\partial_{y_1})^{\alpha_1}(t_3\partial_{t_3})^{\alpha_2}\partial_{y^0}^{\beta}\tilde r_N(y_1,t_3,y^0)\right|<C_1|y_1|^{M}|t_3|^{N+1}.$$

Это завершает доказательство предложения 2 в случае $k_1=2,\ell=3$.

Случай $k_1=2$ **и произвольного** $\ell>k$ доказывается аналогичным образом индукцией по ℓ.

Доказательство предложения 2 **при произвольных** k_1 **и** $\ell\ge k_1$ завершается при помощи индукции по k_1.

Предположим, что утверждение предложения 2 верно при любом $k_1<k$, при любом $\ell\ge k_1$ и для любой функции μ_s. Докажем утверждения предложения 2 при $k_1=k$, при любом $\ell\ge k_1$ и для любой функции μ_s.

Начнем с рассмотрения случая $k_1=\ell=k$. В этом случае представим функцию μ_s^1, задаваемую формулой (29), в следующем виде

$$\mu_s^1(y_1,y^0)=\int\limits_{\mathbb{R}}\widetilde\mu(y_1t_k^{-\gamma_{1k}},t_k,y^0)\frac{dt_k}{t_k},$$

где

$$\widetilde\mu(z_1,t_k,y^0)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{k-2}\times\mathbb{R}^{n-m-k+1}}\mu_s(z_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}\dots t_{k-1}^{-\frac{\gamma_{1,k-1}}{\gamma_{11}}},t_2,\dots,t_k,y^0,x_m^0,\dots,x_{n-k}^0)\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}}dx_m^0\dots dx_{n-k}^0.$$

Из утверждения предложения 2 в случае, когда $k_1 = k-1, \ell = k$ следует, что функция $\widetilde{\mu}(z_1, t_k)$ конормальна по (z_1, t_k) относительно индексного семейства $(\widetilde{E}_1^0, E_k)$, где

$$\widetilde{E}_1^0 = \overline{\bigcup}_{j=1,\ldots,k-1} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1j}}, q \right) : (z,q) \in E_j \right\}.$$

Применяя утверждение предложения 2 в случае, когда $k_1 = \ell = 2$, получаем, что функция $\nu_s(y_1, y^0)$ конормальна по переменной y_1 относительно индексного семейства

$$\widetilde{E}_1^0 \overline{\bigcup} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1k}}, q \right) : (z,q) \in E_k \right\} = E_1^0.$$

Случай $k_1 = k$ и произвольного $\ell > k_1$ доказывается аналогично как выше индукцией по ℓ. Доказательство предложения 2 закончено. $\square$

Докажем теорему 6 в случае $\ell_0 = 2$. Возьмём адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1, y_2, y^0) \in D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2}$. Возьмём точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \ldots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \ldots \cup X_r$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. По условию без потери общности можно предполагать, что в данных системах координат отображение f записывается в виде: $(y_1, y_2, y^0) = f(x, x^0)$, где $y_1 = b_1(x, x^0) x_1^{\gamma_{11}} \ldots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}$, $y_2 = b_2(x, x^0) x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \ldots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}$; функции b_1 и b_2 — гладкие, нигде не обращаются в ноль; числа $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1k_1}, \gamma_{2,k_1+1}, \ldots, \gamma_{2,k_2} > 0$, $k_1 < k_2 \leqslant \ell$; $y^0 = g(x, x^0)$. Как и в случае $\ell_0 = 1$, не ограничивая общность, можно положить, что $b_1(x, x^0) \equiv b_2(x, x^0) \equiv 1$.

По условию (4) определения 13 имеем $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial g}{\partial x^0}\right) = m-2$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p_0 систему координат, что g имеет вид проекции:

$$g(x, x^0) = (x_1^0, \ldots, x_{m-2}^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2.$$

В силу компактности X существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s}, $s = 1, \ldots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \bigcup \bigcup\limits_{s=1}^{d} V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X)$, $s = 0, \ldots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\operatorname{supp} \psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0)$, $\operatorname{supp} \psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \ldots, d$, $\psi_s \geq 0$, $\sum\limits_{s=0}^{d} \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0, что $\sum\limits_{s=1}^{d} \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и выше, будем предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X. В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\operatorname{supp} \varphi \subset U_{p_0}$. Обозначая

$$\mu_s(x, x^0) = \frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{2,k_1+1}} \psi_s(x, x^0) \mu(x, x^0),$$

получаем:

$$\langle f_* \mu, \varphi \rangle = \gamma_{11}\gamma_{2,k_1+1} \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(x, x^0) \times$$
$$\times \varphi(x_1^{\gamma_{11}} \ldots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \ldots x_\ell^{\gamma_{2,k_2}}, x_1^0, \ldots, x_{m-2}^0) \frac{dx}{x} dx^0.$$

Сделав замену переменных

$$y_1 = x_1^{\gamma_{11}} \ldots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}; \quad y_2 = x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \ldots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}; \quad y^0 = (x_1^0, \ldots, x_{m-2}^0);$$

$$t_j = x_j \quad \forall j = 2, \dots, k_1, k_1+2, \dots, \ell;$$

в интеграле, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi\rangle = \sum_{s=1}^{d} \int\limits_{\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1},$$
$$y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{-\frac{\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_{k_2}^{-\frac{\gamma_{2k_2}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)\varphi(y_1, y_2, y^0)$$
$$\frac{dy_1}{y_1}\frac{dy_2}{y_2}\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell} dy^0 dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Следовательно, для любого (y_1, y_2, y^0) плотность $f_*\mu$ задаётся формулой

$$f_*\mu = \sum_{s=1}^{d} \nu_s(y_1, y_2, y^0)\left|\frac{dy_1}{y_1}\frac{dy_2}{y_2}dy^0\right|,$$

где функции $\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ имеют вид:

$$\nu_s(y_1, y_2, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-2}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1},$$
$$y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{-\frac{\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_{k_2}^{-\frac{\gamma_{2k_2}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)$$
$$\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}}\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Так как при $j = k_2+1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, интеграл в последней формуле сходится, следовательно, $\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ — гладкая функция при $y_1y_2 \neq 0$.

Докажем конормальность функции $\nu_s(y_1, y_2, y_0)$ в точке $(0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1^0, E_2^0). Запишем функцию $\nu_s(y_1, y_2, y_0)$ в виде:

$$\nu_s(y_1, y_2, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{\ell-k_2}} \chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0)\frac{dt_{k_2+1}}{t_{k_2+1}}\dots\frac{dt_\ell}{t_\ell},$$

где

$$\chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{k_2-k_1-1}} \chi\left(y_1, y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{-\frac{\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_\ell^{-\frac{\gamma_{2\ell}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0\right)\frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}}\dots\frac{dt_{k_2}}{t_{k_2}},$$

и

$$\chi(y_1, \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell, y^0) = \int\limits_{\mathbb{R}^{k_1-1}\times\mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1},$$
$$\tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)\frac{dt_2}{t_2}\dots\frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0.$$

Из предложения 2 следует, что функция $\chi(y_1, \tau_{k_1+1}, \tau_{k_1+2}, \dots, \tau_\ell, y^0)$ является конормальной по переменным $(y_1, \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_{k_1+1}, \dots, E_\ell)$ и функция $\chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0)$ является конормальной по переменным $(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_2^0, E_{k_2+1}, \dots, E_\ell)$. Конормальность функции

$\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ в точке $(y_1, y_2) = (0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1^0, E_2^0) следует из утверждения теоремы 6 в случае $\ell_0 = 0$, принимая во внимание условие $\inf E_j > 0$, $\forall j = k_2 + 1, \ldots, \ell$. Тем самым, случай $\ell_0 = 2$ доказан.

Доказательство теоремы 6 в случае произвольного $\ell_0 > 2$ проводится аналогичным образом индукцией по ℓ_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.Álvarez López, Yu.A. Kordyukov *Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one.* In: Foliations: Geometry and Dynamics. (Warsaw, 2000). P. 159–183. World Sci. Publishing. River Edge, NJ, 2002.
2. Соболев С.Л. *Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений* // Матем. сб., 2(44):3. 1937. С. 465–499.
3. Стернин Б.Ю. *Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности* // Тр. ММО, 15, УРСС. М. 1966. С. 38–108.
4. Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. *Относительная эллиптическая теория и задача Соболева* // Матем. сб. 187:11. 1996. С. 115–144.
5. Стернин Б.Ю. *Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева* // Доклады АН СССР. 230:2. 1976. С. 287–290.
6. Стернин Б.Ю. *Проблемы типа С.Л. Соболева в случае подмногообразий с многомерными особенностями* // Доклады АН СССР. 189. 1969. С. 732–735.
7. Стернин Б.Ю. *Эллиптические морфизмы (оснащения эллиптических операторов) для подмногообразий с особенностями* // Доклады АН СССР. 200. 1971. С. 45–48.
8. Стернин Б.Ю. *Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями.* МИЭМ, М. 1974. 108 с.
9. Стернин Б.Ю., Савин А.Ю. *Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями* // Дифференциальные уравнения. 49:4. 2013. С. 513–527.
10. Стернин Б.Ю., Савин А.Ю. *Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями* // Дифференциальные уравнения. 50:2. 2014. С. 229–241.
11. R.B. Melrose *Pseudodifferential operators, corners and singular limits* // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990) P. 217–234, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
12. R.B. Melrose *Calculus of conormal distributions on manifolds with corners* // Internat. Math. Res. Notices 1992. no. 3. P. 51–61.
13. R.B. Melrose *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem. Research Notes in Mathematics, 4.* A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.
14. Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. *Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов* // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. 29. РУДН. М. 2008. С. 131–164.
15. D. Grieser *Basics of the b-calculus* // Approaches to singular analysis (Berlin, 1999). P. 30–84. Oper. Theory Adv. Appl. 125. Birkhauser. Basel. 2001.
16. V.E. Nazaikinskii, A.Yu. Savin, B.W. Schulze, B.Yu.Sternin *Elliptic theory on singular manifolds.* Chapman Hall//CRC, Boca Raton, FL. 2006.

Юрий Аркадьевич Кордюков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Виктор Александрович Павленко,
ФГБОУ ВПО Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50-летия Октября, 4,
450080, г. Уфа, Россия
E-mail: PVA100186@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 72-87.

УДК 519.626

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО СОСТОЯНИЮ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

А.Р. МАНАПОВА*, Ф.В. ЛУБЫШЕВ

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения.

Mathematics Subject Classification: 49J20, 35A35, 35J61, 65N06

1. Введение

Математические модели оптимизации для систем с распределенными параметрами (описываемых уравнениями математической физики (УМФ)) — это наиболее сложный класс задач в оптимизации, особенно для нелинейных задач оптимального управления. Под «нелинейными задачами оптимизации» для УМФ мы понимаем такие, в которых отображение $g \to u(g)$ из множества допустимых управлений U в пространство состояний W является нелинейным. Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от многих факторов: куда входят управления (в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений); линейными или нелинейными УМФ описываются состояния систем; какова структура множеств допустимых управлений и функционалов цели; какова гладкость состояния, обеспечиваемая заданной априорной гладкостью входных данных и гладкостью управлений и т.д. В настоящее время наиболее полно исследованы линейные системы управления с достаточно гладкими входными данными и функциями состояния процессов управления. Особый интерес с теоретической и практической точек зрения представляет физико-математическая постановка задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке сами решения УМФ допускают разрывы.

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev, Accuracy estimate with respect to state of finite-dimensional approximations for optimization problems for semi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions.

* Работа выполнена при поддержке гранта Республики Башкортостан по итогам конкурса научных работ молодых ученых и молодежных научных коллективов 2014 года.

Поступила 14 января 2014 г.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы — «конечномерными задачами». Правильно построенная аппроксимация позволяет получить содержательные результаты качественного и численного характера об изучаемом процессе. Центральными в проблеме аппроксимации являются вопросы «конструирования» аппроксимаций, сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций [1]–[5]. Для систем с распределенными параметрами построения и исследования аппроксимаций проводились в основном также для линейных задач оптимального управления, причем с достаточно гладкими коэффициентами УМФ и состояниями. Актуальными являются вопросы «конструирования» конечномерных аппроксимаций и исследования их сходимости для задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями). Заметим, что разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, но непрерывными потоком и решением (с условиями сопряжения типа идеального контакта) построены и исследованы в [6], [7] для УМФ с классическими решениями некоторой степени гладкости. Исследованию сходимости разностных схем для параболических уравнений с разрывными коэффициентами и решением в классической постановке задач с достаточно гладкими решениями посвящены работы [8], [9]. Отметим также, что оптимизационные аспекты в этих работах не рассматривались.

В настоящей работе, по тематике, примыкающей к [1]–[5], [10]–[13], рассмотрены математические модели нелинейных задач оптимального управления, описываемых полулинейными уравнениями эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта [6], [14]. В качестве управления выступает коэффициент в граничном условии сопряжения. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию.

В теплофизических терминах поставленную задачу можно трактовать как задачу оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения теплопроводящих сред. При этом этот коэффициент характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред [6], [14].

2. Постановка задач

Пусть $\Omega = \big\{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1,2\big\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \big\{r_1 = \xi,\ 0 \leqslant r_2 \leqslant l_2\big\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \big\{0 < r_1 < \xi, \quad 0 < r_2 < l_2\big\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \big\{\xi < r_1 < l_1, \quad 0 < r_2 < l_2\big\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты u_k, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, удовлетворяют в Ω_k, $k = 1, 2$, уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k,\ k = 1, 2, \tag{1a}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1, 2; \tag{1b}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{1c}$$

Если ввести функции вида $u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$ $q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases}$$

то задачу (1) = (1a) + (1b) + (1c) можно переписать в более компактном виде.

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x) q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

и условиям $\quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2,$

$$\left[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] = 0, \quad G(x) = \left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S.$$

Здесь $\left[u\right] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x)$, $f(x)$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$; $\theta(x) \equiv g(x)$, $x \in S$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$; $0 < \nu \leqslant k_\alpha(x) \leqslant \overline{\nu}$, $\alpha = 1, 2$, $0 \leqslant d_0 \leqslant d(x) \leqslant \overline{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\nu, \overline{\nu}, d_0, \overline{d}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 < q_0 \leqslant \left(q_\alpha(\xi_\alpha) - q_\alpha(\overline{\xi}_\alpha)\right)/\left(\xi_\alpha - \overline{\xi}_\alpha\right) \leqslant L < \infty$, для всех $\xi_\alpha, \overline{\xi}_\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\alpha \neq \overline{\xi}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \left\{g(x) = \theta(x) \in L_2(S) = H :\ 0 < g_0 \leqslant g(x) \leqslant \overline{g}_0 \text{ п.в. на } S\right\}, \tag{2}$$

где $L_2(S) = H$ – пространство управлений, $U \subset H$, g_0, $\overline{g}_0$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J :\ U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \left|u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)\right|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{3}$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r;g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g = \theta \in U$, требуется минимизировать функционал (3).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$: $V(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\big\}$, где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ соответственно и нормами [15]–[19]:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1,2.$$

Снабженное скалярным произведением и нормой $(u,\vartheta)_V = \sum\limits_{k=1}^{2} (u_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega_k)}$, $\|u\|_V^2 = \sum\limits_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}$, $V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS,$$

где $\big[u\big] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S. Здесь $u_2(x) = u^+(x)$, $x \in S$ и $u_1(x) = u^-(x)$, $x \in S$ – следы функции $u(x)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с Липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(x)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [15]–[19] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$. С другой стороны, если элемент $u \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(x)$ на области Ω_k, $k = 1,2$: $u|_{\Omega_k}$,$k = 1,2$, принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(x)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(x) = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$, $x \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $\vartheta(x) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$ является условие склейки: $\vartheta_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$; $\vartheta_1(x)|_S = \vartheta_2(x)|_S$ (см., например, [19]).

Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1,2$, то [20] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2, зависящие только от данных областей Ω_k, $k = 1,2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \leqslant C_k^2 \Bigg[\int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k\Bigg], \ k = 1,2. \tag{4}$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k = 1,2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(x)$, что для любых функций $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [16], [17]:

$$\|u_k\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \leqslant C^2_{k+2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)},\ k = 1,2,$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку; $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$. Заметим, что для элементов $u_k(x) \in W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ справедливо неравенство [16]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(x)d\Omega_k \leqslant C_{k+4}(\Omega_k,\overset{\circ}{\Gamma}_k)\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\Big)^2 d\Omega_k, \quad k = 1,2,$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k,\overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x) = (u_1(x),u_2(x))$: $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(x) = (u_1(x),u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\right\}$ с нормой:

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2\, dS.$$

Под решением прямой задачи (1) при фиксированном управлении $g(x) = \theta(x) \in U$ понимается функция $u(x) \equiv u(x;g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$\begin{gathered} Q(u,\vartheta) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right]d\Omega_0 + \\ + \int\limits_S \theta(x)[u][\vartheta]dS = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta). \end{gathered} \tag{5}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При любом $g \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(x) = u(x;g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи* (1)*, определяемое из интегрального тождества* (5)*, причем*

$$\|u(x,g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \leqslant C_{11}\sum_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)} = C_{12}, \quad \forall g \in U, \tag{6}$$

где $C_{11} = Const > 0$ (см. ниже).

Доказательство теоремы опирается на теорию монотонных операторов [17], [18], [21], при этом существенно используются введенные выше гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы и также неравенства (см. выше).

Обратимся к тождеству (5). Нетрудно убедиться, что справедлива цепочка неравенств

$$|Q(u,\vartheta)| \leqslant \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \left[\overline{\nu}\sum_{\alpha=1}^{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\right| + \overline{d}_0 L_q\,|u|\,|\vartheta|\right]d\Omega_0 + \overline{\theta}_0\int\limits_S \big|[u]\big|\,\big|[\vartheta]\big|dS \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\overline{\nu},\overline{d}_0L_q,\overline{g}_0\}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} u^2 d\Omega_0 + \int\limits_S \big[u\big]^2 dS\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \vartheta^2 d\Omega_0 + \int\limits_S \big[\vartheta\big]^2 dS\right]^{1/2}. \qquad (7)$$

Используя неравенство (4), нетрудно установить оценку

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} u^2 d\Omega_0 + \int\limits_S \big[u\big]^2 dS = \sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} + \int\limits_S \big[u\big]^2 dS \leqslant$$
$$\leqslant C_7^2\left[\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int\limits_S \big[u\big]^2 dS\right] = C_7^2\|u\|_*^2, \qquad (8)$$

где $C_7^2 = \max\{1,\, \max(C_1^2, C_2^2\}$. Принимая во внимание (8) и учитывая, что $u_k(x) = 0$ на Γ_k, $k = 1,2$, из (7) получаем оценку

$$|Q(u,\vartheta)| \leqslant \max\{\overline{\nu},\overline{d}_0L_q,\overline{g}_0\}C_7^2\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}\|\vartheta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}, \qquad \forall u,\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}.$$

Итак, для каждого фиксированного $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ форма $Q(u,\vartheta)$ определяет в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ линейный ограниченный относительно $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ функционал (определяемый функцией $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$), который обозначим $\Phi = Au \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$. Этот функционал задается с помощью соотношения

$$< \Phi,\vartheta > = < Au,\vartheta > = (Au,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u,\vartheta), \qquad \forall\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \qquad (9)$$

(где оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ ставит в соответствие каждому элементу $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ линейный непрерывный функционал $\Phi = Au$ в пространстве $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ таким образом, что значение функционала $\Phi = Au$ на элементе $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется соотношением (9)). Рассмотрим теперь правую часть тождества (5). Положим $< F,\vartheta > = l(\vartheta)$. Нетрудно установить, что справедлива оценка

$$|< F,\vartheta >| = |l(\vartheta)| \leqslant \sum_{k=1}^{2}\|f_k\|_{L_2(\Omega_k)}\cdot\|\vartheta_k\|_{L_2(\Omega_k)} \leqslant C_8\sum_{k=1}^{2}\|f_k\|_{L_2(\Omega_k)}\cdot\|\vartheta_k\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}, \qquad (10)$$

где $C_8 = \sqrt{2}\max\{C_1, C_2\}$. Таким образом, функционал F, определенный с помощью формулы $< F,\vartheta > = l(\vartheta)$, ограничен на $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, и, кроме того, этот функционал линеен, а следовательно, $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$. Итак, тождество (5) запишется в виде $< Au,\vartheta > = < F,\vartheta >$, $\forall\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, из которого, в силу произвола $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, получаем уравнение $Au = F$.

Покажем теперь, что существует единственное решение $u\ \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, удовлетворяющее тождеству (5). В силу теоремы Браудера [21] достаточно доказать непрерывность и сильную монотонность оператора A. Нетрудно убедиться, что справедлива оценка $< Au - A\vartheta, u - \vartheta > \geq \min\{\nu, g_0\} \|u - \vartheta\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$, $\forall u, \vartheta\ \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$. Это означает, что оператор $A\ :\ \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ сильно монотонен. Докажем теперь непрерывность, точнее, даже Липшиц-непрерывность оператора A. Нетрудно убедиться, что справедлива оценка $\big|< Au - A\vartheta, \eta >\big| \leqslant C_9 \|u - \vartheta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \|\eta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$, $\forall u, \vartheta, \eta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, $C_9 = \max\{\overline{\nu}, \overline{d}_0 L_q, \overline{g}_0\}\, C_7^2$. Поэтому

$$\big\|< Au - A\vartheta, \eta >\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \sup_{\eta\neq 0} \frac{\big|< Au - A\vartheta, \eta >\big|}{\|\eta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}} \leqslant C_9 \|u - \vartheta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}, \quad \forall u, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2},$$

т.е. оператор A непрерывен по Липшицу. Следовательно, условия теоремы Браудера выполнены, а значит, уравнение $Au = F$ однозначно разрешимо.

Далее, используя коэрцитивность ($\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ – эллиптичность) формы $Q(u, \vartheta)$ на $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$: $Q(u, u)\ \geq\ C_{10} \|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$, $\forall u\ \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, $C_{10}\ =\ \min\{\nu, g_0\}$ и оценку (10), получим $C_{10} \|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \leqslant Q(u, u) = l(u) \leqslant C_8 \sum\limits_{k=1}^{2} \|f_k\|_{L_2(\Omega_k)} \cdot \|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$. Откуда следует оценка (6) с константой $C_{11} = C_8 \cdot C_{10}^{-1}$. Теорема доказана.

В дальнейшем при изучении сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию сделаем относительно гладкости решения прямой задачи следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в работе [22], стр. 16, при исследовании там разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи (1) принадлежит $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству $\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)}) \cap \big\{u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\big\}$, и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2} \|u_k(x, g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leqslant M \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \qquad \forall g \in U, \qquad \text{где } M = Const > 0.$$

Замечание 1. Здесь и далее, через C, C_k, $k = \overline{1,7}$, M обозначены различные положительные постоянные, независящие от решения $u(r) \equiv u(r; g)$ и управления $g \in U$ (сеточного решения $y(x) \equiv y(x; \Phi_h)$, сеточного управления $\Phi_h \in U_h$).

3. Разностная аппроксимация задач оптимизации. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (1)–(3) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [5], [6]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций по состоянию при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задачи (1)–(3) нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, и в $\overline{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2: $\widehat{\omega}_\alpha = \big\{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in [0, l_\alpha]\ :\ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}\big\}$, $\alpha = 1, 2$, также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$: $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}_1 \times \widehat{\omega}_2$.

Очевидно, всегда можно построить сетку $\widehat{\omega}_1$ на $[0, l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом.

При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1 = \xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Положим $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$.

Введем сетки узлов: $\overline{\omega}_1^{(1)} = \left\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : \ i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, \ N_{1\xi} h_1 = \xi\right\}$, $\overline{\omega}_1^{(2)} = \left\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : \ i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1}, \ N_{1\xi} h_1 = l_1\right\}$, $\omega_1^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\overline{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : \ i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \overline{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2$; $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\overline{\omega} \equiv \overline{\omega}^{(1,2)} = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)} = \left(\overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}\right) \times \overline{\omega}_2 = \left\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, \ i_1 = \overline{0, N_1}, \ N_{1\xi} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\right\} \times \overline{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2$; $\gamma_S = \left\{x_1 = \xi, \, x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2 - 1) h_2\right\} = \left\{x_1 = \xi, \, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \ i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\right\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \overline{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \overline{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$. При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1 \equiv \overline{\Omega}^-$, обозначим через $H_h^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2 \equiv \overline{\Omega}^+$, обозначим через $H_h^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$. Множество $H_h^{(k)}(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\overline{\omega}^{(k)}} y_k(x)\, \nu_k(x)\, \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$

обозначим через $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x_1)$ – средний шаг сеток $\overline{\omega}_1^{(1)}$ и $\overline{\omega}_1^{(2)}$, а $\hbar_2 = \hbar_2(x_2)$ – средний шаг сетки $\overline{\omega}_2$, [6]. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}^{(1)}$ и $\overline{\omega}^{(2)}$ соответственно, со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y_{k\overline{x}_1} \nu_{k\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\overline{x}_2} \nu_{k\overline{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$
$$\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad k = 1, 2,$$

где $\|\nabla y_k\|^2 = \sum\limits_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y^2_{k\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum\limits_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y^2_{k\overline{x}_2} \hbar_1 h_2, \quad k = 1, 2.$

Введем в рассмотрение пространство $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением $V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})\right\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y, \nu)_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})},$$

$V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(k)}$, на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$ по формулам

$(y_k,\nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})}=\sum\limits_{x\in\partial\omega^{(k)}} y_k(x)\nu_k(x)\tau_k(x)$, $k=1,2$, и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями $\|y_k\|^2_{L_2(\partial\omega^{(k)})}=(y_k,y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})}=\sum\limits_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x)\tau_k(x)$, $k=1,2$,

$$\tau_1(x)=\begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2;\\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=0,\xi;\\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\overset{\square}{\gamma}{}^{(1)}, \end{cases}$$

$$\tau_2(x)=\begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2;\\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=\xi,l_1;\\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\overset{\square}{\gamma}{}^{(2)}, \end{cases}$$

а $\overset{\square}{\gamma}{}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника Ω_k, $k=1,2$. В подробной записи, например, сеточный аналог нормы $L_2(\partial\omega^{(1)})$ будет определяться с помощью выражения

$$\|y_1\|^2_{L_2(\partial\omega^{(1)})}=\sum_{x_2\in\overline{\omega}_2}\big[y_1^2(0,x_2)+y_1^2(\xi,x_2)\big]\hbar_2(x_2)+\sum_{x_1\in\overline{\omega}_1}\big[y_1^2(x_1,0)+y_1^2(x_1,l_2)\big]\hbar_1(x_1).$$

Пусть теперь $\overset{\circ}{\gamma}{}^{(k)}=\partial\omega^{(k)}\cap\overset{\circ}{\Gamma}_k\equiv\gamma^{(k)}=\partial\omega^{(k)}\setminus\gamma_s$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетке $\overline{\omega}^{(k)}\subset\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$. Через $L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначим нормированное подпространство пространства сеточных функций $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$ с нормами

$$\begin{aligned}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}&=\sum_{x\in\omega^{(k)}}y_k^2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{x\in\gamma_S}y_k^2(x)h_1h_2=\\ &=\sum_{x\in\omega^{(k)}}y_k^2(x)h_1h_2+\frac12\sum_{x_2\in\omega_2}y_k^2(\xi,x_2)h_1h_2,\quad k=1,2,\end{aligned}$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k,v_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}=\sum_{x\in\omega^{(k)}}y_k(x)v_k(x)h_1h_2+\frac12\sum_{x\in\gamma_S}y_k(x)v_k(x)h_1h_2,\quad k=1,2.$$

Нетрудно видеть, что

$$(y_1,v_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})}=(y_1,v_1)_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)},\quad (y_2,v_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})}=(y_2,v_2)_{L_2(\omega_2^{(2)-}\times\omega_2)}.$$

Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$.

Введем в рассмотрение пространства $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x)=(y_1(x),y_2(x))$:

$$\begin{aligned}&\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})=\left\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})\times L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\right\},\\ &\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})=\left\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})\times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\right\},\end{aligned}$$

с нормами $\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}}=\sum\limits_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}$, $\|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}}=\|\nabla y_k\|^2+\|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}$.

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0,\xi]$: $e_1^{(1)}(x_1)=\{r_1: x_1-0.5h_1\leqslant r_1\leqslant x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(1)}\subset[0,\xi]$, $e_1^{(1)}(0)=\{r_1:0\leqslant r_1\leqslant 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi)=\{r_1:\xi-0.5h_1\leqslant r_1\leqslant\xi\}$; а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi,l_1]$: $e_1^{(2)}(x_1)=\{r_1: x_1-0.5h_1\leqslant r_1\leqslant x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(2)}\subset[\xi,l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi)=$

$= \{r_1 : \xi \leqslant r_1 \leqslant \xi + 0.5h_1\}$, $e_1^{(2)}(l_1) = \{r_1 : l_1 - 0.5h_1 \leqslant r_1 \leqslant l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0, l_2]$: $e_2(x_2) = \{r_2 : x_2 - 0.5h_2 \leqslant r_2 \leqslant x_2 + 0.5h_2\}$, $x_2 \in \omega_2 \subset [0, l_2]$, $e_2(0) = \{r_2 : 0 \leqslant r_2 \leqslant 0.5h_2\}$, $e_2(l_2) = \{r_2 : l_2 - 0.5h_2 \leqslant r_2 \leqslant l_2\}$.

Далее, через $e^{(1)}(x) \equiv e^{(1)}(x_1, x_2) = e_1^{(1)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1$, будем обозначать элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x) \equiv e^{(2)}(x_1, x_2) = e_1^{(2)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2$ элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_2$. Пусть $v(x) = v_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$. Определим для функций $v_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову S^{x_α} по переменным x_α, $\alpha = 1, 2$:

$$S^{x_1} v_1(x) = \frac{1}{\hbar_1} \int\limits_{e_1^{(1)}(x_1)} v_1(r_1, x_2)\, dr_1,\ x_1 \in \overline{\omega}_1^{(1)},\ \hbar_1 = \hbar_1(x_1) = \begin{cases} h_1, x_1 \in \omega_1^{(1)}, \\ 0.5h_1, x_1 = 0, \xi, \end{cases}$$

$$S^{x_2} v_1(x) = \frac{1}{\hbar_2} \int\limits_{e_2(x_2)} v_1(x_1, r_2)\, dr_2,\ x_2 \in \overline{\omega}_2, \quad \hbar_2 = \hbar_2(x_2) = \begin{cases} h_2, x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, x_2 = 0, l_2. \end{cases}$$

С помощью одномерных операторов S^{x_α}, действующих по направлению x_α, $\alpha = 1, 2$, определим усредняющий оператор $S^x = S^{x_1} S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $v(x) = v_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)$ будем обозначать пространство сеточных функций $v_{1h}(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S$, заданных на сетке $\omega^{(1)} \cup \gamma_S$, со скалярным произведением и нормой:

$$(v_{1h}, \tilde{v}_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} v_{1h}(x) \tilde{v}_{1h}(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} v_{1h}(x) \tilde{v}_{1h}(x) h_1 h_2,$$
$$\|v_{1h}(x)\|^2_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} = (v_{1h}, v_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)}.$$

Аналогично вводится пространство сеточных функций $H_h^{(2)}(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)$.

Задачам оптимального управления (1)–(3) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \overline{\omega}^{(1)}} \left| y(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x) \right|^2 \hbar_1 \hbar_2 = \|y(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}, \tag{11}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}$ $(\overline{\omega}^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемы) для задачи (1), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x, \Phi_h), v_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}$ $(\overline{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered} Q_h(y, v) = \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1} v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2} v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\ + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1} v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2} v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \right.\right. \end{gathered} \tag{12}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Bigg\} + \sum_{\omega_2}\Phi_h(x)\big[y(\xi,x_2)\big]\big[v(\xi,x_2)\big]h_2+$$
$$+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_1(y_1(x))v_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_2(y_2(x))v_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} =$$
$$=\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} = l_h(v),$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$, $x\in\gamma_S$ таковы, что

$$\Phi_h(x)\in U_h = \big\{\Phi_h\in L_2(\gamma_S)=H_h : 0<g_0\leqslant\Phi_h(x)\leqslant\overline{g}_0, x\in\gamma_S\big\}, \qquad (13)$$

где $L_2(\gamma_S)=H_h$ – пространство сеточных управлений Φ_h, заданных на сетке $\gamma_S\subset S$ со скалярным произведением и нормой

$$\big(\Phi_h,\tilde{\Phi}_h\big)_{L_2(\gamma_S)} = \sum_{x\in\gamma_S} h_2\Phi_h(x)\tilde{\Phi}_h(x), \quad \|\Phi_h(x)\|^2_{L_2(\gamma_S)} = \big(\Phi_h,\Phi_h\big)_{L_2(\gamma_S)}.$$

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $f_{1h}(x)$, $f_{2h}(x)$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(r)$, $k_\alpha^{(2)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $f_1(r)$, $f_2(r)$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$a_{1h}^{(\alpha)}(x_1,x_2) = \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2, \quad x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2, \alpha=1,2;$$
$$a_{2h}^{(\alpha)}(x_1,x_2) = \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \quad x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+, \alpha=1,2;$$
$$a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \quad x_2\in\omega_2^+;$$
$$a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2^{(2)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \quad x_2\in\omega_2^+;$$
$$d_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^\alpha(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\omega^{(\alpha)}, \alpha=1,2;$$

$$
\begin{aligned}
&d_{1h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2;\\
&d_{2h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2;\\
&f_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} f_\alpha(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x \in \omega^{(\alpha)},\ \alpha = 1, 2;\\
&f_{1h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int\limits_{e_2(x_2)} f_1(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2;\\
&f_{2h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int\limits_{e_2(x_2)} f_2(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2;\\
&u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{\hbar_1 \hbar_2} \iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1, r_2)\, dr_1 dr_2, \quad x \in \overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2.
\end{aligned}
$$

Теорема 2. *Задача о нахождении решения разностной схемы* (12) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h \in U_h$ *эквивалентна решению операторного уравнения* $A_h y = F_h$, *где* A_h *– разностный оператор, действующий из* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *в* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, *а сеточная функция* $F_h \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *определяются равенствами*

$$
\big(A_h y, v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = Q_h(y, v), \quad \big(F_h, v\big)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = l_h(v), \forall y, v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}. \tag{14}
$$

Задача (разностная схема) (12) *однозначно разрешима для любого сеточного управления* $\Phi_h \in U_h$, *причем справедлива априорная оценка*

$$
\|y(x; \Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant M \sum_{k=1}^{2} \|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)}, \quad \forall \Phi_h \in U_h. \tag{15}
$$

Доказательство. Используя ограничения на входные данные краевой задачи (1), неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, разностные аналоги теорем вложения, можно убедиться, что форма $Q_h(y, v)$ и $l_h(v)$ для любого фиксированного $y \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и для $\forall \Phi_h \in U_h$ определяют линейные ограниченные функционалы в пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и, следовательно, однозначно представимы в виде (14). Отсюда и из (12), в силу произвольности v, получим, что сумматорное тождество (12) определяет операторное уравнение $A_h y = F_h$ – разностную схему. Кроме того, можно убедиться, что оператор A_h разностной схемы (12) сохраняет основные свойства дифференциального оператора исходной задачи (1) – сильную монотонность и липшиц-непрерывность. Следовательно, условия теоремы Браудера [21] выполнены, а значит, уравнение $A_h y = F_h$ однозначно разрешимо. Оценка (15) следует из коэрцитивности оператора A_h. Теорема доказана.

Задача (12) является сеточным аналогом исходной задачи для состояния (1) с разрывными коэффициентами и решением (состоянием).

Установим связь между $u(r;g)$ – решением прямой задачи (1) с разрывными коэффициентами и решением $y(x,\Phi_h) = (y_1(x;\Phi_h), y_2(x;\Phi_h))$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (12) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (1)-(3) и (11)-(13) соответственно. Пусть $u(r;g) = (u_1(r;g), u_2(r;g)) \in \widehat{\overset{\circ}{V}}_{\Gamma_1\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ – решение прямой задачи (1), отвечающее допустимому управлению $g \in U$, а $y(x,\Phi_h) = (y_1(x;\Phi_h), y_2(x;\Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ – решение задачи (12), отвечающее сеточному допустимому управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) \equiv z(x;g,\Phi_h) = (z_1(x;g,\Phi_h), z_2(x;g,\Phi_h)) = (y_1(x;\Phi_h) - u_1(r;g), y_2(x;\Phi_h) - u_2(r;g))$ – погрешность метода по состоянию.

Для определения погрешности $z(x)$ разностной задачи (12) получаем, очевидно, уравнение $A_h y - A_h u = \psi_h$, где сеточная функция ψ_h – погрешность аппроксимации разностной схемы (12) определяется соотношением

$$(\psi_h, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = (F_h - A_h u, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = l_h(v) - Q_h(u,v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)}).$$

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

Теорема 3. *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r;g)$ и $y(x,\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (1)–(3) *и* (11)–(13). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (1)–(3):

$$\begin{gathered}\|y(x;\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant C\Bigg\{|h|\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{2}\bigg(\|k_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \\ + \|k_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\ + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg] + \|S^{x_2}\theta(x_2) - \Phi_h(x_2)\|_{L_\infty(\omega_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg\}.\end{gathered}$$

Доказательство. Пользуясь разностными формулами суммирования по частям, Грина, используя идеи работ [1]–[5], [10]–[13], приведем погрешность аппроксимации $\psi_h(x)$, после довольно громоздких преобразований, к специальному виду:

$$(\psi_h, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = -\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\eta_1^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_1}h_1h_2 - \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_2}h_1h_2 -$$

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(1)}(\xi,x_2)v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(2)}(\xi,x_2)v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 + \\ + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_3^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(1)}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(2)}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\eta_4(x_2)[v(\xi,x_2)]\cdot h_2,\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered}
\eta_1^{(\alpha)}(x) = a_{1h}^{(\alpha)}(x)u_{\alpha\overline{x}_1}(x) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1-0.5h_1,r_2)\times\\
\times\frac{\partial u_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)}{\partial r_1}dr_2,\ x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2, \alpha=1,2;\\
\eta_2^{(\alpha)}(x) = a_{2h}^{(\alpha)}(x)u_{\alpha\overline{x}_2}(x) - \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1,x_2-0.5h_2)\times\\
\times\frac{\partial u_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)}{\partial r_2}dr_1,\ x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+, \alpha=1,2;\\
\eta_2^{(1)}(\xi,x_2) = a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)u_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1,x_2-0.5h_2)\times\\
\times\frac{\partial u_1(r_1,x_2-0.5h_2)}{\partial r_2}dr_1,\ x_2\in\omega_2^+;
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\eta_2^{(2)}(\xi,x_2) = a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)u_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2^{(2)}(r_1,x_2-0.5h_2)\times$$

$$\times\frac{\partial u_1(r_1,x_2-0.5h_2)}{\partial r_2}dr_1,\ x_2\in\omega_2^+;$$

$$\eta_3^{(\alpha)}(x) = d_{\alpha h}(x)q_\alpha(u_\alpha(x)) - \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r)q_\alpha(u_\alpha(r))dr, \quad x\in\omega^{(\alpha)}, \alpha=1,2;$$

$$\eta_3^{(1)}(\xi,x_2) = d_{1h}(\xi,x_2)q_1(u_1(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r)q_1(u_1(r))dr,\ x_2\in\omega_2;$$

$$\eta_3^{(2)}(\xi,x_2) = d_{2h}(\xi,x_2)q_2(u_2(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r)q_2(u_2(r))dr,\ x_2\in\omega_2;$$

$$\eta_4(x_2) = \Phi_h(x_2)\big[u(\xi,x_2)\big] - \frac{2}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\big[u(\xi,x_2)\big]\,dr_2,\ x_2\in\omega_2.$$

Принимая во внимание уравнения для погрешности $A_hy - A_hu = \psi_h$, представление (16), а также разностные аналоги теорем вложения Соболева, эквивалентные нормировки пространства $V_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}$ (см. выше), неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, получим оценку

$$\begin{gathered}
\|z(x;g,\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}} = \|y(x;\Phi_h)-u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}} \leqslant\\
\leqslant M\Bigg\{\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}(\eta_1^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}(\eta_2^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} +\\
+\Bigg(\sum_{\omega_2^+}(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\eta_3^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} +\\
+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_3^{(\alpha)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}\Bigg] + \Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_4(x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}\Bigg\}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Для оценки левой части неравенства (18) через параметр h и, тем самым, получения оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию, достаточно установить оценки величин (17):

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\big(\eta_1^{(\alpha)}(x)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_1^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\ \sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\big(\eta_2^{(\alpha)}(x)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\ \sum_{\omega_2^+}\big(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\ \sum_{\omega^{(\alpha)}}\big(\eta_3^{(\alpha)}(x)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2L^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\ \sum_{\omega_2}\big(\eta_3^{(\alpha)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2L^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\end{gathered} \qquad (19)$$

$$\sum_{\omega_2}\eta_4^2(x_2)h_2 \leqslant M^2\left[h_2^2\|\theta\|^2_{L_\infty(0,l_2)}+\|S^{x_2}\theta-\Phi_h\|^2_{L_\infty(\omega_2)}\right]\sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},$$

доказательства которых содержат громоздкие выкладки. Поэтому мы ограничимся доказательством, например, первой из оценок в (19) при $\alpha=1$. Нетрудно убедиться, что справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}\left|\eta_1^{(1)}(x)\right| = \left|\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(1)}(x_1-0.5h_1,r_2)\Bigg[\int\limits_{x_1-0.5h_1}^{r_1}\frac{\partial^2u_1(m,r_2)}{\partial m^2}dm-\right.\\ \left.-\int\limits_{x_2}^{r_2}\frac{\partial^2u_1(r_1,s)}{\partial r_1\partial s}ds\Bigg]dr_1dr_2\right| \leqslant (h_1h_2)^{-1/2}\|k_1^{(1)}\|_{L_\infty(\Omega_1)}\times\Bigg[h_1\Bigg(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\\ \int\limits_{e_2(x_2)}\left|\frac{\partial^2u_1(m,r_2)}{\partial m^2}\right|^2 dmdr_2\Bigg)^{1/2}+h_2\Bigg(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\left|\frac{\partial^2u_1(r_1,s)}{\partial r_1\partial s}\right|^2dr_1ds\Bigg)^{1/2}\Bigg]\leqslant\\ \leqslant 2^{1/2}\|k_1^{(1)}\|_{L_\infty(\Omega_1)}|h|(h_1h_2)^{-1/2}\|u_1\|_{W_2^2((x_1-h_1,x_2)\times e_2(x_2))},\quad x\in\omega_1^{(1)+}\times\omega_2.\end{gathered}$$

Теорема доказана.

Замечание 2. На основе установленных в настоящей работе оценок точности аппроксимаций по состоянию будут исследованы в дальнейшем проблемы сходимости аппроксимаций по функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс. 2002.
2. Ишмухаметов А. З. *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления.* М.: ВЦ РАН. 1999.
3. Ишмухаметов А. З. *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.* М.: ВЦ РАН. 2001.
4. Потапов М. М. *Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболиче- ские уравнения.* М.: Изд-во МГУ. 1985.
5. Лубышев Ф. В. *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.* Уфа: БГУ. 1999.
6. Самарский А. А., Андреев В. Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений.* М.: Наука. 1976.

7. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
8. Цурко В. А. *О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением* // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 7. С. 986–992.
9. Цурко В. А. *Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями* // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 2. С. 274–280.
10. Лубышев Ф. В. *Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах* // Докл. РАН. Т. 349. № 5. 1996. С. 598–602.
11. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. *Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 41. № 8. 2001. С. 1148–1164.
12. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р. *О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 47. № 3. 2007. С. 376–396.
13. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р. *Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 53. № 1. 2013. С. 20–46.
14. Карташов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* М.: Высшая школа. 1985.
15. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Новосибирск: СО АН СССР. 1962.
16. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука. 1973.
17. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1978.
18. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука. 1988.
19. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука. 1989.
20. Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике.* М.: Мир. 1985.
21. Браудер Ф. Е. *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными.* Новосибирск. 1963.
22. Дренска Н. Т. *Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах* // Вестник Московск.университета. Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернетика. № 4. 1981. С. 15–21.

Айгуль Рашитовна Манапова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: aygulrm@mail.ru

Федор Владимирович Лубышев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: aygulrm@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 88-97.

УДК 517.956

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАУССА-БИБЕРБАХА-РАДЕМАХЕРА НА ПЛОСКОСТИ

А.В. НЕКЛЮДОВ

Аннотация. В работе изучена асимптотика решений уравнения Гаусса-Бибербаха-Радемахера $\Delta u = e^u$ в области, внешней по отношению к кругу на плоскости. Установлено, что главный член асимптотики является логарифмической функцией, убывающей к $-\infty$. Найдены также вторые члены асимптотики при различных значениях коэффициента в главной части.

Ключевые слова: полулинейное эллиптическое уравнение, уравнение Гаусса-Бибербаха-Радемахера, асимптотическое поведение решений.

Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J61, 35J91

1. Введение

Уравнение

$$\Delta u = e^u, \tag{1}$$

возникает как модельное в задачах дифференциальной геометрии в связи с вопросом существования поверхностей отрицательной гауссовой кривизны [1], теории автоморфных функций [2], при изучении равновесия заряженного газа [3]. Вопросы существования решений уравнений вида (1) в неограниченных областях, в частности глобальных решений, рассматривались в работах [1], [4]–[8]. В частности хорошо известно [1], что глобальных решений уравнения (1) не существует при любом числе независимых переменных n, а при $n \geq 3$ не существует решений, определенных во внешности ограниченной области [8]. Поведение на бесконечности решений полулинейных эллиптических уравнений с экспоненциальной нелинейностью рассматривалось ранее в основном в цилиндрических областях [9]–[13]. В настоящей работе рассматривается асимптотическое поведение решений двумерного уравнения (1), определенных во внешности круга. Используется метод энергетических оценок типа принципа Сен-Венана [14]–[17], а также метод усреднения.

Рассмотрим уравнение (1) в двумерной области $Q = \{x : |x| > R_0\} \subset \mathbb{R}^2_x$, где $x = (x_1, x_2)$, Δ — двумерный оператор Лапласа. Будем считать, что $u \in C^2(\overline{Q})$.

Введем следующие обозначения. Среднее значение функции $u(x)$ на окружности $S_R = \{x : |x| = R\}$:

$$\overline{u}(R) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} u \, ds,$$

"поток тепла"функции $u(x)$ через S_R:

$$P(R, u) = \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds = 2\pi R \overline{u}'(R), \tag{2}$$

A.V. Neklyudov, Behavior of solutions to Gauss-Bieberbach-Rademacher equation on plane.

Поступила 28 марта 2014 г.

где ν — единичная внешняя нормаль к S_R. Пусть $Q(a,b)=\{x: a<|x|<b\}$, $0<R_0\le a<b$. Очевидно, что для решения $u(x)$ уравнения (1) в Q имеем

$$P(b,u)=P(a,u)+\int_{Q(a,b)} e^u\,dx. \tag{3}$$

Будем также использовать обозначение $\nabla u\equiv \operatorname{grad} u$. Для условия $f/g\to 1$ при некотором стремлении аргумента функций f и g будем использовать стандатное обозначение: $f\sim g$ при данном стремлении.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ - решение уравнения (1) в Q. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$\int_Q e^u\,dx<\infty;$$

$$P(R,u)\to 2\pi C,\qquad \overline{u}(R)\sim C\ln R,\quad R\to\infty,\qquad C=\mathrm{const}\le -2.$$

Доказательство. Из (2) и (3) получим

$$P(R,u)=2\pi R\overline{u}'(R)=P(R_0,u)+\int_{Q(R_0,R)} e^u\,dx. \tag{4}$$

Покажем, что правая часть равенства (4) отрицательна для всех $R>R_0$. Предположим, что это не так, тогда при $R>R_1=\mathrm{const}>R_0$ получаем

$$R\overline{u}'(R)>c_1>0,$$

здесь и далее через c_j будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от рассматриваемого решения (1) и не завиящие от R,a,b,t и т.п. Отсюда при $R>R_2=\mathrm{const}>R_1$

$$\overline{u}(R)>c_2\ln R.$$

Используя интегральное неравенство Иенсена, отсюда получаем

$$\int_{S_R} e^u\,ds\ge 2\pi R e^{\overline{u}(R)}>2\pi R^{c_2+1},$$

$$\int_{Q(R_0,R)} e^u\,dx>c_3R^{c_2+2},$$

$R>R_3=\mathrm{const}>R_2$. Снова используя (4) и интегрируя, получаем

$$R\overline{u}'(R)>c_4R^{c_2+2},\qquad \overline{u}(R)>c_5R^{c_2+2},\quad R>R_4=\mathrm{const}>R_3.$$

Наконец, еще раз используя (4) и неравенство Иенсена, имеем при $R>R_5=\mathrm{const}$

$$\overline{u}'(R)\ge c_6+\frac{1}{2\pi R}\int_{Q(R_0,R)} e^u\,dx\ge c_6+\frac{1}{R}\int_{R_0}^R re^{\overline{u}(r)}\,dr>\left(\int_{R_0}^R e^{\overline{u}(r)}\,dr\right)^{1/2}.$$

Пусть $\int_{R_0}^R e^{\overline{u}(r)}\,dr=z(R)$, тогда $\overline{u}(R)=\ln z'(R)$, последнее неравенство можно записать в виде

$$\frac{z''}{z'}>z^{1/2},$$

откуда при $R>R_6$

$$z'>c_7z^{3/2}.$$

Отсюда легко следует, что $z(R)\to\infty,\quad R\to R_7-0$ для некоторого $R_7>R_6$, что невозможно для решения, определенного при $|x|>R_0$. Таким образом, полученное противоречие означает, что правая часть (4) отрицательна при всех $R>R_0$, отсюда немедленно вытекает первое утверждение теоремы.

Из (4) тогда следует, что

$$P(R,u) \to 2\pi C, \quad \overline{u}(R) \sim C \ln R, \quad R \to \infty, \quad C = \text{const} \le 0.$$

Из неравенства Иенсена также получаем, что

$$\int_{R_0}^{\infty} r e^{\overline{u}(r)}\, dr \le \frac{1}{2\pi} \int_Q e^u\, dx < \infty,$$

откуда вытекает, что $C \le -2$. Теорема полностью доказана.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^1(\overline{Q}) \cap L_1(Q)$,

$$\int_{R_0}^{\infty} r \left(\int_{S_r} |f|\, dx \right)^2 dr < \infty.$$

Тогда в Q *существует решение* $V(x)$ *уравнения*

$$\Delta V = f,$$

удовлетворяющее при $R > R_1 = \text{const} > R_0$ *оценкам*

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla V|^2\, dx \le c_0 \ln R, \quad |\overline{V}(R)| \le c_1 \ln R. \tag{5}$$

При этом если $f > 0$ *в* Q*, то* $V \le 0$ *в* Q.

Если также выполнены условия

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \int_{Q(r,\infty)} |f|\, dx < \infty, \quad \int_Q |x|^2 f^2\, dx < \infty, \tag{6}$$

то

$$\int_Q |\nabla V|^2\, dx < \infty, \quad V(x) \to C = \text{const}, \quad |x| \to \infty.$$

Доказательство. Для любого натурального $N > R_0$ рассмотрим в области $Q(R_0, N)$ решение V_N краевой задачи

$$\Delta V_N = f, \qquad V_N\big|_{S_{R_0}} = 0, \quad \frac{\partial V_N}{\partial \nu}\bigg|_{S_N} = C_N,$$

где

$$C_N = -\frac{1}{2\pi N} \int_{Q(N,\infty)} f\, dx.$$

Очевидно, что при $N \ge R > R_0$

$$P(R, V_N) = P(N, V_N) - \int_{Q(R,N)} f\, dx = -\int_{Q(R,\infty)} f\, dx. \tag{7}$$

С учетом того, что $2\pi R \overline{V}'_N(R) = P(R, V_N)$, получаем тогда при $N \ge R >> R_0$

$$\left|\overline{V_N}(R)\right| \le c_2 \ln R. \tag{8}$$

Оценим интеграл Дирихле решения V_N. Очевидно, что

$$\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2\, dx = C_N \int_{S_N} V_N\, ds - \int_{Q(R_0,N)} f V_N\, dx. \tag{9}$$

Оценим интегралы в правой части (9). С учетом (8) имеем

$$\left| C_N \int_{S_N} V_N\, ds \right| = 2\pi N \left| C_N \overline{V_N}(N) \right| \le c_3 \ln N. \tag{10}$$

Так как в силу теоремы вложения для функций одной переменной и неравенства Пуанкаре $\sup_{S_r}|V_N-\overline{V_N}(r)|\le c_4r^{1/2}\big(\int_{S_r}|\nabla V_N|^2\,ds\big)^{1/2}$, то

$$\begin{aligned}\left|\int_{S_r} f(V_N-\overline{V_N}(r))\,ds\right| &\le c_4r^{1/2}\left(\int_{S_r}|\nabla V_N|^2\,ds\right)^{1/2}\int_{S_r}|f|\,ds\le\\ &\le\frac12\int_{S_r}|\nabla V_N|^2\,ds+c_5r\left(\int_{S_r}|f|\,ds\right)^2.\end{aligned}\tag{11}$$

В силу (8) имеем

$$\left|\overline{V_N}(r)\int_{S_r} f\,ds\right|\le c_6\ln r\int_{S_r}|f|\,ds.\tag{12}$$

Из (9)–(12) получаем

$$\begin{aligned}\int_{Q(R_0,N)}|\nabla V_N|^2\,dx &\le c_3\ln N+\frac12\int_{Q(R_0,N)}|\nabla V_N|^2\,dx+\\ &+c_5\int_{R_1}^N r\left(\int_{S_r}|f|\,ds\right)^2dr+c_6\ln N\int_{Q(R_1,N)}|f|\,dx.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\int_{Q(R_0,N)}|\nabla V_N|^2\,dx\le c_7\ln N.\tag{13}$$

Оценим теперь интеграл Дирихле функции V_N по области $Q(R_0,R)$ для произвольного $R\in(R_0,N)$:

$$I(R)\equiv\int_{Q(R_0,R)}|\nabla V_N|^2\,dx=\int_{S_R}\frac{\partial V_N}{\partial\nu}V_N\,ds-\int_{Q(R_0,R)}fV_N\,dx.$$

Оценивая второе слагаемое согласно (11)-(12), получим при $R\ge R_1>R_0$

$$\int_{Q(R_0,R)}|\nabla V_N|^2\,dx\le c_8\ln R+\frac12\int_{Q(R_0,R)}|\nabla V_N|^2\,dx+\int_{S_R}\frac{\partial V_N}{\partial\nu}V_N\,ds.$$

Используя неравенство Пуанкаре и (7), (8), отсюда получим

$$\begin{aligned}I(R)\equiv\int_{Q(R_0,R)}|\nabla V_N|^2\,dx &\le 2\int_{S_R}\frac{\partial V_N}{\partial\nu}V_N\,ds+2c_8\ln R=\\ &=2P(R,V_N)\overline{V_N}(R)+2\int_{S_R}\frac{\partial V_N}{\partial\nu}\big(V_N-\overline{V_N}(R)\big)\,ds+2c_8\ln R\le\\ &\le c_9\left(R\int_{S_R}|\nabla V_N|^2\,ds+\ln R\right)=c_9(RI'(R)+\ln R).\end{aligned}$$

Интегрируя полученное неравенство от R до $N\ge R^2$, получаем с учетом (13)

$$I(R)\le I(N)\left(\frac RN\right)^\delta+c_{10}R^\delta\int_R^N\frac{\ln r}{r^{\delta+1}}\,dr\le c_{11}\ln R,\qquad\delta>0.$$

Таким образом, для любого фиксированного $R>R_0$ последовательность V_N равномерно ограничена в пространстве С.Л. Соболева $W_2^1(Q(R_0,R))$. Применяя стандартный диагональный процесс, получим последовательность V_{N_k}, для любого $R>R_0$ слабо сходящуюся в $W_2^1(Q(R_0,R))$ и сильно сходящуюся в $L_2(Q(R_0,R))$ к некоторой функции V. Так как $V_{N_k}-V_{N_l}$ — гармонические функции, то сходимость функций V_{N_k} и их производных является равномерной в $Q(R_0,R)$. Таким образом, функция V удовлетворяет уравнению (1) и, с учетом (8), для нее выполняются оценки (5).

Если $f > 0$ в Q, то из принципа максимума очевидно, что $V_N < 0$ в $Q(R_0, N)$ и $V \le 0$ в Q.

Пусть для функции f также выполнены условия (6). Тогда из (6) и (7) получаем, что

$$\int_{R_0}^{\infty} |\overline{V}'(r)|\, dr = \frac{1}{2\pi}\int_{R_0}^{\infty} \frac{|P(r,V)|}{r}\, dr < \infty,$$

$$\overline{V}(R) \to C_0 = \text{const}, \quad R \to \infty.$$

Аналогично из (7) также следует равномерная ограниченность $|\overline{V}_N(R)|$. С учетом этого, проводя оценки вида (9)–(12), получим

$$\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2\, dx \le c_{12},$$

откуда получаем конечность интеграла Дирихле по Q для V.

Покажем, что в этом случае $V(x) \to C_0$, $|x| \to \infty$. При $R > 2R_0$ согласно оценке типа Де Джорджи [18], с.186, и неравенству Пуанкаре имеем для $x \in S_R$

$$\begin{aligned}
&|V(x) - \overline{V}(R)|^2 \le \\
&\le c_{13}\left(R^{-2}\int_{Q(R/2,3R/2)} \big(V(z) - \overline{V}(R)\big)^2\, dz + R^2\int_{Q(R/2,3R/2)} f^2(z)\, dz\right) \le \\
&\le c_{14}\left(\int_{Q(R/2,3R/2)} |\nabla V(z)|^2\, dz + \int_{Q(R/2,3R/2)} |z|^2 f^2(z)\, dz\right) \to 0, \quad R \to \infty.
\end{aligned}$$

С учетом того, что $\overline{V}(R) \to C_0$, $R \to \infty$, получаем, что $V(x) \to C_0$, $|x| \to \infty$. Лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть $g(r) > 0$ — невозрастающая на $[r_0, \infty)$ измеримая функция, причем*

$$\int_{r_0}^{\infty} r g(r)\, dr < \infty.$$

Тогда

$$\int_{r_0}^{\infty} r^3 g^2(r) dr < \infty.$$

Доказательство. Из монотонности $g(r)$ легко следует, что $g(r) \le r^{-2}$ при $r > r_1 = \text{const} > 0$. Тогда $r^3 g^2(r) \le r g(r)$, $r > r_1$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q. Тогда*

$$r^{-1}\int_{S_r} e^u\, ds \le c_0,$$

$$\int_{R_0}^{\infty} r\left(\int_{S_r} e^u\, ds\right)^2 dr < \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 2 достаточно доказать, что $g'(r) < 0$ при всех $r > R_0$, где

$$g(r) = r^{-1}\int_{S_r} e^u\, ds.$$

Имеем

$$g'(r) = r^{-1}\int_{S_r} e^u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds.$$

Предположим, что $g'(r_1) \ge 0$ для некоторого $r_1 > R_0$. Возьмем произвольное $r > r_1$. Пусть $\theta = \theta(|x|) \ge 0$ — срезающая функция класса C^2, такая что $\theta(|x|) = 1$ при $|x| \le r$, $\theta(|x|) = 0$

при $|x| \geq r+1$, $(\theta'(|x|))^2 \leq c_1\theta(|x|)$ при $r \leq |x| \leq r+1$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$. Умножая обе части уравнения (1) на $e^u\theta$ и интегрируя по области $Q(r_1, r+1)$, получим

$$\int_{Q(r_1,r+1)} \bigl(e^{2u} + |\nabla u|^2 e^u\bigr)\theta\, dx = -r_1 g'(r_1) - \int_{Q(r,r+1)} e^u \frac{\partial u}{\partial |x|}\theta'\, dx \leq$$
$$\leq \int_{Q(r,r+1)} e^u\bigl(|\nabla u|^2\theta + c_2\bigr)\, dx.$$

Тогда

$$\int_{Q(r_1,r)} e^{2u}\, dx \leq c_2 \int_{Q(r,r+1)} e^u\, dx \to 0, \qquad r \to \infty,$$

что невозможно. Противоречие показывает, что $g'(r) < 0$ для всех $r > R_0$, что и доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1) в Q, для которого $\overline{u}(R) \sim C\ln R$, $C = \mathrm{const} < -2$, $R \to \infty$. Тогда*

$$u(x) = C\ln|x| + C_1 + o(1), \qquad |x| \to \infty, \quad C_1 = \mathrm{const}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ при $|x| > R_1 = R_1(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$u(x) \leq (C+\varepsilon)\ln|x|.$$

Заметим, что в силу теоремы 1 и леммы 3 функция $f(x) = e^{u(x)}$ удовлетворяет условию леммы 1, кроме, быть может, условий (6). Рассмотрим гармоническую функцию $U = u - V$, где V — решение уравнения $\Delta V = e^u$, существование которого установлено в лемме 1. Оценим коэффициенты Фурье по φ функции U на окружности S_r. Так как с учетом леммы 3 и теоремы 1

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} u^+(r,\varphi)\, d\varphi - 2\pi\overline{u}(r,\varphi)) \leq 2\int_0^{2\pi} e^{u(r,\varphi)}\, d\varphi + c_1\ln r \leq c_2\ln r$$

(здесь $u^+ = \max\{u, 0\}$), то, используя оценки $|\overline{V}(r)| \leq c_3\ln r$, $V \leq 0$ и лемму 3, получим

$$\int_0^{2\pi} |U(r,\varphi)|\, d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \bigl(|u(r,\varphi)| + |V(r,\varphi)|\bigr)\, d\varphi \leq c_4\ln r, \quad r \geq r_1 = \mathrm{const} > R_0.$$

Отсюда разложение U в ряд Фурье по φ имеет вид

$$U = a_0\ln r + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi).$$

Тогда с учетом оценки интеграла Дирихле для V из леммы 1 получаем

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_4\ln R. \tag{14}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, такое, что $C + \varepsilon < -2$. При $R > R_2 = R_2(\varepsilon)$

$$\overline{u}(R) \leq (C + \varepsilon/2)\ln R.$$

В силу (14) для всех $R > 2R_2$ найдется $r_1 \in (R/2, R)$, для которого

$$\int_{S_{r_1}} |\nabla u|^2\, ds \leq 2c_4\frac{\ln R}{R}.$$

Тогда, используя теорему вложения и неравенство Пуанкаре, получим при $x \in S_{r_1}$ оценку

$$u(x) - (C+\varepsilon/2)\ln R < (u(x) - \overline{u}(r_1)) + (\overline{u}(r_1) - (C+\varepsilon/2)\ln r_1) <$$
$$< c_5 r_1^{1/2}\biggl(\int_{S_{r_1}} |\nabla u|^2\, ds\biggr)^{1/2} \leq c_6\ln^{1/2} R,$$

$$u(x) \le (C+\varepsilon)\ln R, \quad R > R_3(\varepsilon).$$

Аналогично это же неравенство выполнено при $x \in S_{r_2}$ для некотогого $r_2 \in (R, 3R/2)$, если R достаточно велико. Согласно принципу максимума это неравенство выполнено в $Q(r_1, r_2)$ и, в частности, при $|x| = R$. Отсюда при $|x| > R_4(\varepsilon)$ имеем

$$u(x) \le (C+\varepsilon)\ln |x|.$$

Отсюда получаем, что $e^{u(x)} \le c_7|x|^{-2-\delta}$ в Q, $\delta > 0$. Таким образом, функция $f(x) = e^{u(x)}$ удовлетворяет условиям (6). Отсюда получаем, что функция $V \to C_0$, $|x| \to \infty$. Таким образом,

$$u(x) = U + V = C\ln|x| + C_1 + o(1), \quad C < -2 \;\;, |x| \to \infty.$$

Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $C = -2$, т.е. $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$. Очевидно, прямой аналог теоремы 2 не имеет места, так как в силу теоремы 1 $\int_Q e^u\, dx < \infty$. и, следовательно, решение не может быть представлено в виде $u(x) = -2\ln|x| + C_1 + o(1)$.

Лемма 4. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1) в Q. Тогда для функции $w(x) = u(x) - \overline{u}(|x|)$ конечен интеграл Дирихле по Q:*

$$\int_Q |\nabla w|^2\, dx < \infty.$$

Доказательство. В силу [19] того, что $\Delta(\overline{u}(|x|)) = \overline{\Delta u}(|x|)$, функция w удовлетворяет уравнению

$$\Delta w = h(x) \equiv e^u - \overline{e^u}.$$

Имеем

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\, dx = -\int_{Q(R_0,R)} hw\, dx + \int_{S_R} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\, ds - \int_{S_{R_0}} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\, ds. \tag{15}$$

Для $h(x)$ справедлива оценка вида (11):

$$\left|\int_{Q(R_0,R)} hw\, dx\right| \le \frac{1}{2}\int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\, dx + c_1\int_{R_0}^{R} r\left(\int_{S_r} |h|\, ds\right)^2 dr. \tag{16}$$

В силу леммы 3

$$\int_{R_0}^{\infty} r\left(\int_{S_r} |h|\, ds\right)^2 dr < \infty. \tag{17}$$

Из (15)–(17) получаем, что

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\, dx \le 2\int_{S_R} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\, ds + c_2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая, что $\overline{w}(R) = 0$, неравенство Пуанкаре, получим

$$J(R) \equiv \int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\, dx \le 2\left(\int_{S_R} w^2\, ds\right)^{1/2}\left(\int_{S_R} |\nabla w|^2\, ds\right)^{1/2} + c_2 \le$$
$$\le c_3 R\int_{S_R} |\nabla w|^2\, ds + c_2 \equiv c_3 R J'(R) + c_2.$$

Отсюда получаем, что либо функция $J(R)$ ограничена, либо растет быстрее, чем $\ln R$. Последнее невозможно в силу (14). Таким образом, лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ - решение (1) в Q, причем $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$, $R \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $R \ge R_1(\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$\overline{u}(R) \le -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 + \varepsilon.$$

Доказательство. Покажем сначала, что неравенство

$$\overline{u}(R) > -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 + \varepsilon \tag{18}$$

не может выполняться при всех $R \geq R_1 = \mathrm{const} \geq \mathrm{R}_0$. Предположим противное. Пусть (18) верно для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших R. Тогда

$$\int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx \geq 2\pi\int_R^\infty re^{\overline{u}(r)}\,dr \geq 2\pi M_0\int_R^\infty \frac{dr}{r\ln^2 r} = \frac{2\pi M_0}{\ln R}, \qquad M_0 = \mathrm{const} > 2.$$

Отсюда, учитывая, что $P(R,u) \to -4\pi$, $R \to \infty$, получим, учитывая (3), при всех $R > R_1$

$$\overline{u}'(R) = \frac{1}{2\pi R}P(R,u) = \frac{1}{2\pi R}\bigg(-4\pi - \int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx\bigg) \leq -\frac{2}{R} - \frac{M_0}{R\ln R},$$

что противоречит неравенству (18). Итак, (18) не может выполняться одновременно для всех R, начиная с некоторого R_1. Это означает, что нижний предел при $R \to \infty$ функции $z(R) = \overline{u}(R) + 2\ln R + 2\ln\ln R - \ln 2$ неположителен. Для того чтобы доказать утверждение леммы, достаточно показать, что $z(R)$ не имеет положительных локальных максимумов. Если существует такая точка максимума R, то

$$0 = z'(R) = \overline{u}'(R) + \frac{2}{R} + \frac{2}{R\ln R} = \frac{P(R,u)}{2\pi R} + \frac{2}{R} + \frac{2}{R\ln R}.$$

Тогда в этой точке

$$z''(R) = \overline{u}''(R) - \frac{2}{R^2} - \frac{2(1+\ln R)}{R^2\ln^2 R} = \frac{1}{2\pi}\bigg(-\frac{P(R,u)}{R^2} + \frac{P'(R,u)}{R}\bigg) - \frac{2}{R^2} -$$
$$-\frac{2(1+\ln R)}{R^2\ln^2 R} = \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^2\ln R} + \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} e^u\,ds - \frac{2}{R^2} - \frac{2(1+\ln R)}{R^2\ln^2 R} >$$
$$> e^{\overline{u}(R)} - \frac{2}{R^2\ln^2 R} > 0.$$

Таким образом, $z''(R) > 0$, что невозможно в точке максимума. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $u(x)$ — решение (1) в Q, $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$, $R \to \infty$. Тогда*

$$u(x) = \overline{u}(|x|) + o(1), \qquad |x| \to \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $R > 2R_0$. В силу леммы 4 для некоторого $r_1 \in (R/2, R)$ выполнена оценка

$$\int_{S_{r_1}} |\nabla w|^2\,ds \leq \frac{c_1}{R},$$

где $w(x) = u(x) - \overline{u}(|x|)$. Тогда

$$\sup_{S_{r_1}} |w| \leq c_2 r_1^{1/2}\bigg(\int_{S_{r_1}} |\nabla w|^2\,ds\bigg)^{1/2} \leq c_3.$$

Таким образом, используя лемму 5, получим для всех $x \in S_{r_1}$

$$u(x) \leq \overline{u}(|x|) + c_3 \leq -2\ln R - 2\ln\ln R + c_4.$$

Аналогично для некоторого $r_2 \in (R, 3R/2)$ имеем при $x \in S_{r_2}$

$$u(x) \leq \overline{u}(|x|) + c_5 \leq -2\ln R - 2\ln\ln R + c_6.$$

Согласно принципу максимума для всех $x \in S_R$ получим

$$u(x) \leq -2\ln|x| - 2\ln\ln|x| + c_7,$$

откуда

$$e^{u(x)} \leq \frac{c_8}{|x|^2\ln^2|x|}, \quad |\Delta w| \leq \frac{c_9}{|x|^2\ln^2|x|}.$$

Согласно оценке Де Джорджи и неравенству Пуанкаре получаем

$$\sup_{S_R}|w|^2 \le c_{10}\biggl(R^{-2}\int_{Q(R/2,3R/2)} w^2\,dx + R^2\int_{Q(R/2,3R/2)}(\Delta w)^2\,dx\biggr) \le$$
$$\le c_{11}\biggl(\int_{Q(R/2,3R/2)}|\nabla w|^2\,dx + \ln^{-4}R\biggr) \to 0, \quad R\to\infty.$$

Лемма, таким образом, доказана.

Лемма 7. *Пусть* $u(x)$ *— решение уравнения* (1) *в* Q*, для которого* $\overline{u}(R)\sim -2\ln R$*. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *и для всех* $R\ge R_1(\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$\overline{u}(R) \ge -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 - \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве леммы 5. При этом интеграл $\int_{S_R} e^u\,ds$ нужно оценивать не снизу, а сверху, соответственно вместо интегрального неравенства Иенсена нужно использовать малое отклонение $u(x)$ от его среднего по окружности S_R, установленное в лемме 6.

Предположим, что для всех $R\ge R_1$ выполнено неравенство

$$\overline{u}(R) < -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 - \varepsilon. \tag{19}$$

Тогда для всех $R\ge R_2$ имеем $u(x) < -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 - \varepsilon/2$,

$$\int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx \le 2\pi M_1\int_R^\infty \frac{dr}{r\ln^2 r} = \frac{2\pi M_1}{\ln R}, \qquad M_1=\mathrm{const}<2.$$

Отсюда

$$\overline{u}'(R) = \frac{1}{2\pi R}P(R,u) = \frac{1}{2\pi R}\biggl(-4\pi - \int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx\biggr) \ge -\frac{2}{R} - \frac{M_1}{R\ln R},$$

что противоречит (19). Таким образом, (19) не может выполняться для всех $R\ge R_1$. Аналогично доказательству леммы 5 покажем, что функция $z(R)=\overline{u}(R)+2\ln R+2\ln\ln R-\ln 2$ не может иметь отрицательных минимумов, равномерно отделенных сверху от нуля. Действительно, в точке такого отрицательного минимума получим при достаточно большом R

$$z''(R) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} e^u\,ds - \frac{2}{R^2\ln^2 R} < 0,$$

что невозможно в точке минимума. Лемма доказана.

Таким образом, из теоремы 2 и лемм 5–7 немедленно вытекает следующий основной результат работы.

Теорема 3. *Любое решение уравнения* (1) *в* Q *ведет себя одним из двух способов при* $|x|\to\infty$*:*

1) $u(x) = C\ln|x| + C_1 + o(1)$, $C=\mathrm{const}<-2$; $C_1=\mathrm{const}$;

2) $u(x) = -2\ln|x| - 2\ln\ln|x| + \ln 2 + o(1)$.

Примерами решений уравнения (1), ведущих себя во внешности круга соответственно первым и вторым из указанных способов, являются решения $u=-\ln|x|-2\ln\bigl(|x|-1\bigr)+\ln 2$ и $u=-2\ln|x|-2\ln\ln|x|+\ln 2$ соответственно.

В заключение отметим, что поскольку [8] уравнение (1) в многомерном ($n\ge 3$) случае не имеет решений во внешних по отношению к шару областях, то задача поиска асимптотики решения (1) во внешних областях исчерпывается двумерным случаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса* // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1961. **64**. С. 5–8.
2. L. Bieberbach $\Delta u = e^u$ *und die automorphen Funktionen* // Math. Ann. Vol. 77. 1916. P. 173–212.
3. H. Rademacher *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Braunschweig, Vieweg, 1935.
4. Олейник О.А. *Об уравнении* $\Delta u + k(x)e^u = 0$ // УМН. 1978. **33**. №2. С. 204–205.
5. J.N. Flavin, R.J. Knops, L.E Payne *Asymptotic behavior of solutions to semi-linear elliptic equations on the half-cylinder* // Z. Angew. Math. Phys. 1992. **43**. №3. P. 405–421.
6. H. Usami *Note on the inequality* $\Delta u \geq k(x)e^u$ *in* $\mathbb{R}^n$ // Hiroshima Math. J. 1988 **18**. 1988. P. 661–668.
7. Kuo-Shung Cheng, Chang-Shou Lin *On the Conformal Gaussian Curvature Equation in* $\mathbb{R}^2$ // Journal of differential equations. 1998. **146**. P. 226–250.
8. Неклюдов А. В. *Об отсутствии глобальных решений уравнения Гаусса и решений во внешних областях* // Изв. вузов. Матем. 2014. № 1. С. 55–60.
9. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *Об асимптотике решений нелинейных эллиптических уравнений* // УМН. 1993. **48**. № 4. С. 184–185.
10. O.A. Oleinik *Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations*. Lezioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
11. Насруллаев А.И. *Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения* $\Delta u - e^u = 0$ *в полубесконечном цилиндре* // УМН. 1995. **50**. № 3. С. 161–162.
12. Неклюдов А.В. *Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида* $Lu = e^u$ *в бесконечном цилиндре* // Матем. заметки. 2009. **85**. № 3. С. 408–420.
13. Неклюдов А.В. *Поведение решений нелинейного бигармонического уравнения в неограниченной области* // Матем. заметки. 2014. **95**. № 2. С. 248–256.
14. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей* // Матем. сб. 1980. **112**. № 4. С. 588–610.
15. O.A. Oleinik, G.A. Yosifian *On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity* // Arch. Ration. Mech. Anal. 1982. **78**. № 1. P. 29–53.
16. Неклюдов А.В. *О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1991. **16**. С. 191–217.
17. Неклюдов А.В. *О решениях третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в полубесконечном цилиндре* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2013. № 2. С. 48–58.
18. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука. 1989. 464 с.
19. Каметака И., Олейник О.А. *Об асимптотических свойствах и необходимых условиях существования решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка* // Матем. сб.1978.**107**. № 4. С. 572–600.

Алексей Владимирович Неклюдов,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Рубцовская наб., д. 2/18,
г.Москва, 105005, Россия,
E-mail: `nekl5@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 98-111.

УДК 514.17 : 517.547.2

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И СДВИГИ МНОЖЕСТВ. I

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Мотивировка рассматриваемых геометрических вопросов — исследование условий, при которых экспоненциальная система функций с показателями, являющимися нулями некоторой суммы (конечного или бесконечного) семейства целых функций экспоненциального типа, неполна в пространствах функций, голоморфных внутри компакта C и одновременно непрерывных на компакте. Когда C — выпуклый компакт, эта задача оказалась тесно связанной с Теоремой Хелли о пересечении выпуклых множеств в следующей трактовке. Пусть C и S — два множества в конечномерном евклидовом пространстве, заданные соответственно как пересечения и как объединения некоторых подмножеств. Даются критерии, при которых некоторый параллельный перенос (сдвиг) множества C полностью покрывает (соответственно содержит, соответственно пересекает) множество S. Эти критерии и подобные им формулируются в терминах геометрических, алгебраических и теоретико-множественных разностей подмножеств, порождающих C и S.

Ключевые слова: теорема Хелли, неполнота систем экспонент, выпуклость, сдвиг, геометрическая, алгебраическая и теоретико-множественная разности.

Mathematics Subject Classification: 52A35, 52A20

1. Введение

1.1. Источником наших исследований послужила следующая задача, которую пока в целях простоты изложения обсуждаем в этом пункте только в одномерном комплексном упрощенном варианте. Подробное изложение, включая многомерную ситуацию, дано в заключительном разделе второй части работы.

Рассмотрим не более чем счетную последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без точек сгущения в ней, среди которых могут быть и повторяющиеся. Последовательности Λ сопоставляется система (кратных) экспонент

$$\operatorname{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\lambda_k z} \colon z \in \mathbb{C}, 0 \leqslant p \leqslant n_\Lambda(\lambda_k) - 1\},$$

где $n_\Lambda(\lambda)$ — число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ. Ненулевой целой функции экспоненциального типа L соответствует *последовательность нулей* Zero_L, перенумерованная с учетом кратности. При этом $\Lambda \leqslant \operatorname{Zero}_L$ означает $n_\Lambda(\lambda) \leqslant n_{\operatorname{Zero}_L}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Индикатор роста

$$h(\theta, L) := \limsup_{t>0, t\to+\infty} \frac{\log |L(te^{i\theta})|}{t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

— непрерывная 2π-периодическая тригонометрически выпуклая функция [1]–[3], которая является опорной функцией некоторого выпуклого компакта (индикаторной диаграммы), или опорной функцией $h_S(\theta) \equiv h(-\theta, L)$ сопряженной диаграммы S функции L. Пусть

B.N. Khabibullin, Helly's Theorem and shifts of sets. I.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00030-а).

Поступила 25 февраля 2014 г.

теперь C — компакт в $\mathbb{C}$, задана последовательность ненулевых целых функций $\{L_k\}$ экспоненциального типа соответственно с сопряженными диаграммами S_k, $k = 1, 2, \dots$, сумма которых $\sum_k L_k$ равна целой функции L экспоненциального типа. Если существует сдвиг компакта C, покрывающий все множества семейства $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$, и функция L — ненулевая функция, то для любой последовательности $\Lambda \leqslant \mathrm{Zero}_L$ система Exp^Λ неполна в пространстве $\mathrm{Hol}(\Omega)$ голоморфных в области Ω функций для любой области $\Omega \supset C$ в естественной топологии равномерной сходимости на компактах. Возникает вопрос: *при каких условиях сдвиг компакта C покрывает объединение сопряженных диаграмм $\bigcup_k S_k$*? Оказалось, что задача поддается различным вариантам решения с помощью Теоремы Хелли, если компакт C — выпуклый. С переспективой дальнейших применений мы рассматриваем случаи, и когда сам компакт C задан как пересечение выпуклых компактов. Ответы даются в терминах геометрических разностей множеств или же в терминах опорных функций. В целях предстоящих приложений, в частности, к теории целых функций вполне регулярного роста, которые мы в настоящей работе пока не затрагиваем, и для полноты изложения рассмотрены также и ситуации, когда вместо геометрических разностей используются алгебраические или теоретико-множественные разности множеств.

Работа разбита на две части, что представляется естественным, поскольку первая часть носит чисто геометрический характер, а вторая часть — более алгебраический и, прежде всего, теоретико-функциональный характер. Результаты работы были частями анонсированы на конференциях [4]–[7].

1.2. Всюду $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел и для $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^n$ — n-мерное (векторное или точечное аффинное) евклидово пространство с обычным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а его элементы — векторы или точки. Символ 0 обозначает и число нуль, и нулевой вектор, и начало отсчета.

Далее, зачастую не указывая на конкретный источник, пользуемся близкой к общепринятой терминологией, обозначениями и широко известными фактами из [8]–[13]. Так, $\mathrm{A} \times \mathrm{B} := \{(\alpha, \beta) \colon \alpha \in \mathrm{A}, \beta \in \mathrm{B}\}$ — декартово произведение множеств A, B. Для множества S произвольной природы $\operatorname{card} S$ — *мощность* S, т. е. для конечного множества S —*число элементов* в нем. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ через $\operatorname{int} S$ и $\operatorname{co} S$ обозначаем *внутренность* и *выпуклую оболочку* множества S. Для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x, r) := \bigl\{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\bigr\}$ — *открытый шар с центром x радиуса $r \geq 0$.*

Соглашение. *Когда речь идет о выборе набора элементов из множества или наборе множеств из семейства множеств, удобно допускать, что в этом наборе могут быть повторяющиеся соответственно элементы или множества.*

В первой части работы предприняты исследования, продиктованные классической Теоремой Хелли о выпуклых множествах начала XX века, которую в одной из самых простых начальных форм можно напомнить в виде [8, Введение]: *пусть некоторое семейство $\mathcal{S}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ конечно или каждое множество из него замкнуто и ограничено; тогда, если пересечение любых $n+1$ множеств из $\mathcal{S}$ непусто, то непусто и пересечение всех множеств из $\mathcal{S}$* (подробнее Теорема Хелли о выпуклых множествах сформулирована ниже в начале раздела 2). Некоторое представление (очень далекое от полного) о необъятном объеме публикаций по Теореме Хелли можно почерпнуть из ссылок и списка литературы статьи. Если обсуждение результата или чьей-либо работы имеются в каких-нибудь обзорах или монографиях, то именно на последние дается ссылка. Здесь мы развиваем в различных направлениях одно из ключевых следствий Теоремы Хелли. Сформулируем его в виде теоремы.

Результат параллельного переноса множества $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *сдвигом* множества S. Следующее важное следствие теоремы Хелли доказано независимо и в различной степени общности П. Винченцини (1939 г.) и В. Кли (1953 г.), а родственные вопросы рассматривал М. Эдельштейн (1958 г.).

Теорема VKE (Винченцини–Кли–Эдельштейна [8, **2.1**]). *Пусть семейство $\mathcal{S}$ выпуклых множеств конечно или состоит только из компактов, а $C \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое, но, дополнительно, ограниченное и замкнутое, если $\mathcal{S}$ бесконечно. Тогда существование сдвига множества C, который «покрывает всё» (аналогично «пересекает всё», аналогично «содержится во всех») множества из $\mathcal{S}$, полностью обеспечивается существованием такого рода сдвига для каждого набора $n+1$ множеств семейства $\mathcal{S}$.*

2. Теоремы Хелли о выпуклых множествах

Нам потребуется ряд модификаций классической Теоремы Хелли [8]–[13].

Определение 1. Ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называем *направлением звёздности*[1] для множества $C \subset \mathbb{R}^n$ (относительно бесконечности), или *направлением рецессии,* если для любой точки $c \in C$ луч
$$r_y(c) := \{c + ty \colon t \geq 0\} \tag{2}$$
содержится в C. Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением линейности*, если как y, так и противоположный ему вектор $-y$ — направления звёздности для множества C, т.е. для каждой точки $c \in C$ прямая
$$l_y(c) := \{c + ty \colon t \in \mathbb{R}\} = r_y(c) \cup \bigl(r_{-y}(c)\bigr) = l_{-y}(c)$$
содержится в C. Множество C *полиэдрально,* если C — пересечение конечного числа замкнутых полупространств, определяемых конечной системой линейных неравенств вида
$$\langle a, x\rangle - b \leqslant 0 \text{ при некоторых } a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Очевидно, для пустого подмножества в $\mathbb{R}^n$ и для самого $\mathbb{R}^n$ любой ненулевой вектор — направление звёздности и линейности. Кроме того, $\varnothing \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ еще и полиэдральны, поскольку $\varnothing$ может рассматриваться как множество решений любой несовместной конечной системы линейных неравенств вида (3), а $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle 0, x\rangle \leqslant 0\}$.

Теорема Хелли (о выпуклых множествах). *Пусть для семейства*
$$\mathcal{C} := \{C_\alpha \colon \alpha \in \mathrm{A}\}, \quad \mathrm{A} \text{ — множество индексов,} \tag{4}$$
выпуклых множеств C_α в $\mathbb{R}^n$ выполнено одно из двух условий:

(f) *множество индексов* A *конечно* (условие конечности [8, Введение])*;*

(d) *все множества C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, замкнуты* (условие замкнутости) *и для некоторого конечного подмножества $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$ все множества C_α полиэдральны при $\alpha \in \mathrm{A}_0$, а всякое направление звёздности, общее для всех множеств C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, есть направление линейности для множеств C_α при всех $\alpha \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{A}_0$* (условие на направления звёздности [9, Теорема 21.5], [14]).

Если пересечение любого набора $n+1$ множеств (см. Соглашение из Введения) *из этого семейства $\mathcal{C}$ непусто, то и пересечение всех множеств из него непусто.*

Замечание 1. Теорема Хелли о выпуклых множествах имеет место и при следующем более простом, но при этом и более жестком по сравнению с условием (d) ограничении

(b) *все множества C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, замкнуты* (условие замкнутости) *и для некоторого подмножества $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ пересечение $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}'} C_\alpha$ непусто и ограничено* (условие ограниченности [15, Теорема 5], [16, 1.1]).

---

[1]Можно еще сказать, что любая точка в C «из бесконечности видна в направлении $-y$» (ср. с понятием множества, звёздного относительно точки из этого множества [10, Определение 7.1]). Иначе говорят, что C удаляется в ∞ по направлению y [9, гл. II, § 8].

Это условие — частный случай условия (d), поскольку при выполнении (b) можно выбрать $\mathrm{A}_0 = \varnothing$, а общих направлений звёздности для всех множеств C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$, попросту не существует по условию ограниченности. По этой причине версия Теоремы Хелли о выпуклых множествах с ограничением (b) не вошла в основную формулировку Теоремы Хелли.

3. Разности множеств и вспомогательные результаты о геометрической разности

Определение 2. Пусть S, C — произвольные множества в $\mathbb{R}^n$.

Теоретико-множественную разность, или *разность,* этих множеств обозначаем в наиболее распространенной форме $C \setminus S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \in C, x \notin S\}$.

Для $\lambda \in \mathbb{R}$ полагаем $\lambda S := \{\lambda s \colon s \in S\}$ — *произведение S на число λ*. При этом полагаем $-S := (-1)S$.

Геометрическая сумма, или *сумма Минковского,* множеств S и C совпадает с их *алгебраической*, или *векторной, суммой* и задается как[1]

$$S + C := \{s + c \colon s \in S, c \in C\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

В частности, для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $S + x := S + \{x\} =: x + S$ — *сдвиг*, или параллельный перенос, множества S на вектор x.

Геометрическая разность, или, довольно часто, *разность Минковского* [10, Определение 8.5], этих множеств определяется как

$$C \overset{*}{-} S := \{x \in \mathbb{R}^n \colon S + x \subset C\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где мы используем широко применяемое обозначение[2] Л. С. Понтрягина [17], [18, **§ 2, C.** Геометрическая разность], [13], [19]. В частности, для $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем $C - x := C \overset{*}{-} \{x\} = C + (-x)$ — сдвиг C на $-x$. Тогда $C \overset{*}{-} S = \bigcap_{s \in S}(C - s)$.

Алгебраическая, или *векторная, разность* этих множеств, также зачастую называемая, в разногласии с (6), разностью Минковского[3], определяется как

$$C - S := C + (-1)S = \{c - s \colon c \in C, s \in S\} = C + (-S). \tag{7}$$

Отметим, что при $C \neq \varnothing$ и $\operatorname{card} S > 1$, вообще говоря, $C \overset{*}{-} S \subset C - S \neq C \overset{*}{-} S$ (см. [10, гл. I, § 8, Определение 8.5, Предостережение], [13, Предложение 1.1.1, Замечание 1.1.1]).

Для доказательства основной Теоремы 1 будет частично использована следующая элементарная, но представляющая самостоятельный интерес

Лемма 3.1 (о наследовании геометрической разностью свойств «уменьшаемого»)**.** *Для пары произвольных множеств $S, C \subset \mathbb{R}^n$ если*

[cl] *множество C замкнуто, то и геометрическая разность $C \overset{*}{-} S$ замкнута;*
[bd] *C ограничено и $S \neq \varnothing$, то и геометрическая разность $C \overset{*}{-} S$ ограничена;*
[co] *множество C выпукло, то и геометрическая разность $C \overset{*}{-} S$ выпукла;*
[ds] *y — направление звёздности для C, то y — направление звёздности и для $C \overset{*}{-} S$;*
[dl] *y — направление линейности для C, то y — направление линейности и для $C \overset{*}{-} S$;*
[ph] *C полиэдрально, то и геометрическая разность $C \overset{*}{-} S$ полиэдральна.*

Часть результатов (но не все) этой Леммы при специальном ограничении выпуклости множества C могла бы быть доказана из простого равенства для геометрических разностей $C \overset{*}{-} S = C \overset{*}{-} \operatorname{co} S$, но мы предпочли прямые доказательства для всех случаев.

[1] У некоторых авторов для операции суммы Минковского используется символ $\oplus$.

[2] Распространены и другие обозначения для операции геометрической разности множеств. Так, в [10, Определение 8.5] используется обычный знак минус $-$, символы $\div$ в [20, § 1], [21], [22] или $\overset{*}{-}$ в [23, Определение 1] и т. п.

[3] Иногда с использованием для обозначения операции алгебраической разности знака $\ominus$.

Доказательство. [**cl**] Доказано в [19, Теорема 12.3], но мы даём чуть иное доказательство подробнее. Если $C=\varnothing$, то $C \overset{*}{-} S=\varnothing$, когда $S\neq\varnothing$, и $C \overset{*}{-} S=\mathbb{R}^n$, когда и $S=\varnothing$, т. е. $C \overset{*}{-} S$ замкнуто в любом случае. Если же $C\neq\varnothing$, а $x_k\in C \overset{*}{-} S$, $x_k\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$, и существует предел $\lim_{k\to\infty}x_k=x$, то для любого $s\in S$ имеем $s+x_k\in C$ и $s+x=\lim_{k\to\infty}(s+x_k)\in C$ в силу замкнутости множества C. Отсюда $S+x\subset C$, т. е. $x=\lim_{k\to\infty}x_k\in C \overset{*}{-} S$.

[**bd**] Если $C=\varnothing$, то для $S\neq\varnothing$ имеем $C \overset{*}{-} S=\varnothing$ — ограниченное множество. Пусть теперь $C\neq\varnothing$. Тогда $C\subset B(0,r)$ для некоторого $r>0$. Зафиксируем какой-либо элемент $s\in S$. Если $x\in C \overset{*}{-} S$, то $s+x\in B(0,r)$ и $x\in B\bigl(0,r+|s|\bigr)$. Отсюда $C \overset{*}{-} S\subset B\bigl(0,r+|s|\bigr)$ и ограничено ввиду фиксированности r и s.

[**co**] Доказано в [19, Теорема 12.4], но мы доказываем несколько больше (см. ниже (9)). Если $x_1,x_2\in C \overset{*}{-} S$, то $S+x_1\subset C$ и $S+x_2\subset C$, а для любых чисел $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ имеем $\lambda_1S+\lambda_1x_1\subset\lambda_1C$ и $\lambda_2S+\lambda_2x_2\subset\lambda_2C$. Отсюда ввиду включения $(\lambda_1+\lambda_2)S\subset\lambda_1S+\lambda_2S$ и равенства $\lambda_1C+\lambda_2C=(\lambda_1+\lambda_2)C$ при $\lambda_1\cdot\lambda_2\geq 0$ для *выпуклого* C [10, Теорема 8.2] получаем

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)S+(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\subset\lambda_1S+\lambda_2S+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=(\lambda_1S+\lambda_1x_1)+(\lambda_2S+\lambda_2x_2)\\ \subset\lambda_1C+\lambda_2C=(\lambda_1+\lambda_2)C,\quad\text{при условии }\lambda_1\cdot\lambda_2\geq 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Таким образом, доказано утверждение: *для $S\subset\mathbb{R}^n$ и выпуклого множества $C\subset\mathbb{R}^n$ для любых $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ при $\lambda_1\cdot\lambda_2\geq 0$ справедливы соотношения*

$$\lambda_1(C \overset{*}{-} S)+\lambda_2(C \overset{*}{-} S)\subset(\lambda_1+\lambda_2)C \overset{*}{-} (\lambda_1+\lambda_2)S=(\lambda_1+\lambda_2)(C \overset{*}{-} S),\tag{9}$$

где последнее равенство приведено в [13, Предложение 1.1.1, второе равенство после (1.1.3)]. При этом [**co**] — частный случай этого утверждения при значениях $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$ и $\lambda_1+\lambda_2=1$.

Возможно и иное доказательство [**co**]. Если $S+x\subset C$, то $\operatorname{co}(S+x)\subset\operatorname{co}C$, откуда $\operatorname{co}S+x\subset\operatorname{co}C$ и $x\in\operatorname{co}C \overset{*}{-} \operatorname{co}S$. Отсюда $C \overset{*}{-} S\subset\operatorname{co}C \overset{*}{-} \operatorname{co}S$. Очевидно, $C \overset{*}{-} S\supset C \overset{*}{-} \operatorname{co}S$, поскольку $S\subset\operatorname{co}S$. Таким образом,

$$C \overset{*}{-} \operatorname{co}S\subset C \overset{*}{-} S\subset\operatorname{co}C \overset{*}{-} \operatorname{co}S\ \textit{для любых}\ C,S\subset\mathbb{R}^n$$

и

$$C \overset{*}{-} S=C \overset{*}{-} \operatorname{co}S,\ \textit{если}\ C\ \textit{— выпуклое множество.}\tag{10}$$

Но геометрическая разность двух выпуклых множеств — выпуклое множество [10, Теорема 8.8], откуда ввиду (10) вновь следует [**co**].

[**ds**]. Из комментариев после Определений 1 и 2 утверждение верно для $C=\varnothing$ или $S=\varnothing$. Пусть теперь y — направление звёздности для C. По Определениям 1 и 2 это означает, что $C+ty\subset C$ для любого числа $t\geq 0$. Тогда для $x\in C \overset{*}{-} S$, т. е. $S+x\subset C$, получаем $S+(x+ty)\subset C+ty\subset C$ при всех $t\geq 0$. Следовательно, $x+ty\in C \overset{*}{-} S$ при каждом $t\geq 0$. По Определению 1 вектор y — направление звёздности для $C \overset{*}{-} S$.

[**dl**]. По Определению 1 это утверждение — очевидное следствие предыдущего.

[**ph**]. Из комментариев после Определения 2 если $C=\varnothing$, то $C \overset{*}{-} S=\varnothing$, когда $S\neq\varnothing$, и $C \overset{*}{-} S=\mathbb{R}^n$, когда $S=\varnothing$. Таким образом, из комментариев после Определения 1 при $C=\varnothing$ разность $\varnothing \overset{*}{-} S$ полиэдральна. Аналогично при $S=\varnothing$ разность $C \overset{*}{-} S=C \overset{*}{-} \varnothing=\mathbb{R}^n$ — полиэдральное множество.

Пусть теперь $C\neq\varnothing$ и $S\neq\varnothing$. По Определению 1 полиэдральное множество C задается конечной системой линейных неравенств вида (3), т. е. для некоторого конечного набора векторов $a_k\in\mathbb{R}^n$ и чисел $b_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,m\in\mathbb{N}$,

$$C=\bigl\{x\in\mathbb{R}^n\colon\langle a_k,x\rangle-b_k\leqslant 0,k=1,\dots m\bigr\}.\tag{11}$$

Точка x принадлежит $C \stackrel{*}{-} S$, т. е. $S + x \subset C$, если и только если $x + s \in C$ для любого $s \in S$. Отсюда по описанию (11) $x \in C \stackrel{*}{-} S$, если и только если

$$\langle a_k, x\rangle + \langle a_k, s\rangle - b_k \leqslant 0 \text{ для всех } s \in S,\ k = 1, \dots, m. \tag{12}$$

Если хотя бы для одного номера k здесь $\sup_{s\in S}\langle a_k, s\rangle = +\infty$, то $C \stackrel{*}{-} S = \varnothing$ полиэдрально. В противном случае (12) эквивалентно конечной системе линейных неравенств

$$\langle a_k, x\rangle - b'_k \leqslant 0,\ k = 1, \dots, m,\ \text{где } b'_k := b_k - \sup_{s\in S}\langle a_k, s\rangle \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

поскольку $S \neq \varnothing$. Последняя система полностью определяет $C \stackrel{*}{-} S$. $\square$

Далее также потребуется обратная к пп. [**ds**] и [**dl**] Леммы 3.1

Лемма 3.2. *Пусть C — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \varnothing$, и $y \in \mathbb{R}^n$ — направление звёздности (соответственно направление линейности) для $C \stackrel{*}{-} S \neq \varnothing$. Тогда y — направление звёздности (соответственно направление линейности) для C.*

Доказательство. По Определению 1 достаточно доказать Лемму 3.2 для направлений звёздности y. Условия Леммы 3.2 означают, что для любой точки $x \in C \stackrel{*}{-} S \neq \varnothing$ луч $r_y(x)$ из (2) содержится в $C \stackrel{*}{-} S$. Другими словами, $S + x \subset C$ влечет за собой $S + r_y(x) \subset C$. Рассмотрим произвольный элемент $s \in S \neq \varnothing$. Тогда $s+x \in C$ и $s+x+ty \in C$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, для некоторой точки $s + x \in$ луч $l_y(s + x)$ содержится в C.

Предложение 1 ([9, Теорема 8.3]). *Если $C \subset \mathbb{R}^n$ — замкнуто и выпукло и для некоторой точки $c \in C$ луч $r_y(c)$ $\big($соответственно прямая $l_y(c)\big)$ содержится в C, то C звёздно (соответственно линейно) в направлении y.*

По этому Предложению y — направление звёздности для C. $\square$

4. Покрытие сдвигами и геометрическая разность

Как будет пояснено в конце этого раздела, развитием существенной части Теоремы VKE [8, 1, **2.1**] и одним из обобщений Теоремы Хелли может считаться

Теорема 1 (о покрытиях сдвигами). *Пусть $\mathcal{C}$ — семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ из (4), а также задано семейство произвольных множеств*

$$\mathcal{S} := \{S_\beta \subset \mathbb{R}^n \colon \beta \in \mathrm{B}\}, \quad \mathrm{B} \text{ — множество индексов.} \tag{14}$$

Допустим, что выполнено условие конечности

(F) $\operatorname{card} \mathrm{A} < \infty$ *и* $\operatorname{card}\{\beta \in \mathrm{B} \colon S_\beta \neq \varnothing\} < \infty$

или для $\mathcal{C}$ выполнено условие (d) *из Теоремы Хелли, но с дополнительными ограничениями $\mathrm{A}_0 = \varnothing$ или $\operatorname{card} \mathrm{B} < \infty$. Положим*

$$C := \bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha, \quad S := \bigcup_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta. \tag{15}$$

Следующие четыре утверждения попарно эквивалентны (с учётом Соглашения из Введения)*:*

(T) *некоторый сдвиг множества S содержится в множестве C;*
(C) *для любого набора $n+1$ множеств из $\mathcal{C}$ некоторый сдвиг множества S содержится в пересечении этого набора $n + 1$ множеств;*
(S) *для любого набора $n + 1$ множеств из $\mathcal{S}$ некоторый сдвиг множества C покрывает (включает в себя) все $n + 1$ множеств из этого набора;*

(CS) *для любых наборов $n+1$ индексов*

$$\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in \mathrm{A} \quad \text{и} \quad \beta_1,\dots,\beta_{n+1}\in \mathrm{B} \tag{16}$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1}\bigl(C_{\alpha_k} \overset{*}{-} S_{\beta_k}\bigr) \tag{17}$$

геометрических разностей $C_{\alpha_k} \overset{*}{-} S_{\beta_k}$ непусто.

Условие (17) в (CS) по Определению 2 геометрической разности можно заменить на любое из следующих двух эквивалентных ему условий:

(CSC) *для любых наборов индексов* (16) *существует вектор $x\in\mathbb{R}^n$, для которого сдвиги $S_{\beta_k}+x$ содержатся в C_{α_k} при всех $k=1,\dots,n+1$;*

(CSS) *для любых наборов индексов* (16) *существует вектор $x\in\mathbb{R}^n$, для которого сдвиг $C_{\alpha_k}-x$ покрывает S_{β_k} при всех $k=1,\dots,n+1$.*

Теперь мы можем дать

Доказательство Теоремы 1. Если $S=\varnothing$, то из (15) все $S_\beta=\varnothing$ и каждое из четырех утверждений-высказываний Теоремы 1 о сдвигах истинно. Если хотя бы одно из множеств C_α пусто, то $C=\varnothing$ и каждое из четырех утверждений Теоремы о сдвигах с учетом Соглашения из Введения влечет за собой пустоту всех S_β и S. Значит и в этом случае все эти четыре утверждения истинны. Поэтому далее в доказательстве можно считать, что $S\neq\varnothing$ и все $C_\alpha\neq\varnothing$. Истинность пар двойных «вертикальных и горизонтальных» импликаций сторон «прямоугольника»

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{T}) & \Rightarrow & (\mathrm{C})\\
\Downarrow & \nwarrow & \Downarrow\\
(\mathrm{S}) & \Rightarrow & (\mathrm{CS})
\end{array}$$

даже без каких бы то ни было условий на семейства $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ здесь достаточно очевидна. Отметим лишь, что импликации (C)⇒(CS) и (S)⇒(CS) еще более прозрачны, если рассматривать (CS) соответственно в форме (CSC) и (CSS). Таким образом, в доказательстве нуждается только справедливость «диагональной» импликации (CS)→(T). При этом пустые множества S_β из семейства $\mathcal{S}$ не влияют на пересечение (17), поскольку $C_\alpha \overset{*}{-}\varnothing=\mathbb{R}^n$ для любого $C_\alpha\subset\mathbb{R}^n$. Поэтому, переходя от множества индексов B к подмножеству индексов $\{\beta\in\mathrm{B}\colon S_\beta\neq\varnothing\}$ и сохраняя для него прежнее обозначение B, можем считать далее, что все множества S_β непусты.

Рассмотрим теперь семейство множеств

$$\mathcal{C}\overset{*}{-}\mathcal{S}:=\{C_{\alpha,\beta}:=C_\alpha\overset{*}{-}S_\beta\colon (\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}\}. \tag{18}$$

Лемма 4.1. *Если в обозначениях* (18) *и* (15) *пересечение*

$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}} C_{\alpha,\beta} \tag{19}$$

непусто, то некоторый сдвиг множества S содержится в C, т. е. выполнено высказывание (T).

Действительно, пусть $x\in\mathbb{R}^n$ принадлежит пересечению (19). Это означает, что

$$S_\beta+x\subset C_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha\in\mathrm{A} \ \text{и}\ \beta\in\mathrm{B}.$$

Отсюда

$$S_\beta+x\subset\bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}}C_\alpha \quad \text{для любого} \quad \beta\in\mathrm{B}.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta + x = \bigcap_{\beta\in\mathrm{B}} (S_\beta + x) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha,$$

т. е. $S + x \subset C$, что и требовалось. В свете Леммы 4.1 для доказательства импликации (CS)⇒(T) достаточно обосновать применимость Теоремы Хелли о выпуклых множествах к семейству (18).

При выполнении (CS) и по предшествующим соглашениям в семействе $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$

(!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ непусты, и, более того, непусто любое пересечение $\bigcap_{k=1}^{n+1} C_{\alpha_k,\beta_k}$ из (17) для произвольных наборов индексов (16);

(!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ выпуклы — п. [**co**] Леммы 3.1;

(!) все множества $C_{\alpha,\beta}$ замкнуты, если все C_α замкнуты, — п. [**cl**] Леммы 3.1;

(!) имеется лишь конечное число множеств $C_{\alpha,\beta}$ при условии конечности (F), т. е. $\operatorname{card}(\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}) < \infty$.

Условие (F)**.** В силу последнего если выполнено условие конечности (F), то при условии (CS) при наших соглашениях условие конечности (f) выполнено для семейства $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$. Значит, Теорема Хелли о выпуклых множествах применима к семейству $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$, и справедливость импликации (CS)⇒(T) в этом случае доказана.

Условие (d)**.** При условии $\mathrm{A}_0 = \varnothing$ пусть y — общее направление звёздности для $C_{\alpha,\beta} = C_\alpha \overset{*}{-} S_\beta$ при всех $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$. Тогда по Лемме 3.2 вектор y — общее направление звёздности для всех C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$. Отсюда по условию (d) вектор y — направление линейности для C_α при всех $\alpha \in \mathrm{A}$, а из п. [**dl**] Леммы 3.1 вектор y — направление линейности для всех $C_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$. Таким образом, для семейства $\mathrm{C} \overset{*}{-} \mathrm{S}$ выпуклых замкнутых множеств из (18) выполнено условие вида (d) (без конечного подмножества индексов A_0). Следовательно, к семейству $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$ применима Теорема Хелли, и по Лемме 4.1 получаем требуемое утверждение (T).

Пусть теперь при условии (d) множество индексов B конечно. Рассмотрим разбиение множества индексов $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ на два непересекающихся подмножества индексов

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B} = (\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}) \bigcup \bigl((\mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_0)\times\mathrm{B}\bigr).$$

Тогда *конечное* подсемейство

$$\bigl\{C_{\alpha,\beta}\colon (\alpha,\beta) \in \mathrm{A}_0\times\mathrm{B}\bigr\}$$

семейства $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$ состоит по п. [**ph**] Леммы 3.1 из *полиэдральных множеств.* Пусть теперь y — направление звёздности для всех множеств семейства $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$. Вновь по Лемме 3.2 вектор y — общее направление звёздности для всех C_α, $\alpha \in \mathrm{A}$. Отсюда по условию (d) вектор y — направление линейности для C_α при всех $\alpha \in \mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_0$, а из п. [**dl**] Леммы 3.1 вектор y — направление линейности для всех $C_{\alpha,\beta}$ при $(\alpha,\beta) \in (\mathrm{A}\setminus\mathrm{A}_0)\times\mathrm{B}$. Таким образом, для семейства $\mathrm{C} \overset{*}{-} \mathrm{S}$ выпуклых замкнутых множеств из (18) выполнено условие вида (d) (в роли A_0 выступает $\mathrm{A}_0\times\mathrm{B}$). Следовательно, к семейству $\mathcal{C} \overset{*}{-} \mathcal{S}$ применима Теорема Хелли, и по Лемме 4.1 получаем требуемое утверждение (T). □

Замечание 2. Теорема 1 о сдвигах имеет место и при условии (b) из Замечания 1, поскольку оно — частный случая условия (d) при $\mathrm{A}_0 = \varnothing$.

Комментарий 1 (*к Теореме* 1)**.** Убедимся, что теорема Хелли и бóльшая часть Теоремы VKE (в части, касающейся терминов *«покрывает всё», «содержится во всех»*) — это частные проявления Теоремы 1.

1. Для произвольного одноточечного непустого множества S, например $S = \{0\}$, и одноэлементного семейства $\mathcal{S} = \{S\}$ импликация (C)⇒(T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами дает в точности приведенную выше в начале раздела 2 общую Теорему Хелли о выпуклых множествах.

2. Если семейство $\mathcal{C}$ одноэлементное, т. е. состоит из одного выпуклого множества C, то импликация (S)⇒(T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами дает как частный случай Теорему VKE из Введения в части *«сдвиг множества C «покрывает всё»*.
3. Если семейство $\mathcal{S}$ одноэлементное и состоит из одного выпуклого множества S, то импликация (C)⇒(T) Теоремы 1 о покрытиях сдвигами переходит в частный случай Теоремы VKE из Введения в части *«содержит в себе»*, но только необходимо взаимно поменять местами обозначения-символы: S вместо C, $\mathcal{C}$ вместо $\mathcal{S}$ и наложить требования либо конечности $\mathcal{C}$, либо компактности S.
4. Вывод части *«пересекает всё»* Теоремы VKE и ее обобщения перенесен в раздел 4 после Теоремы 2 о пересечениях сдвигов, поскольку несколько неожиданно (во всяком случае, для нас) он оказался связан не с геометрической разностью, а с алгебраической разностью множеств.

Комментарий 2 (*предшествующие специальные версии Теоремы* 1)**.** Справедливость импликации (C)⇒(T) Теоремы 1 была установлена или отмечена ранее в [8] в следующих трех весьма частных случаях:

% семейство $\mathcal{C}$ выпуклых множеств *конечно,* а S — *выпуклое* множество [8, **2.1**] (Теорема VKE);

% семейство $\mathcal{C}$ состоит из *выпуклых компактов*, и S также *выпуклый компакт* [8, **2.1**] (Теорема VKE);

% семейство $\mathcal{C}$ состоит из *замкнутых полупространств,* имеющих *ограниченное* пересечение, а S — *выпуклое тело,* т. е. выпуклый компакт с непустой внутренностью $\operatorname{int} S \neq \varnothing$ [8, **6.18**].

В специальном случае, когда $\mathcal{S}$ из (14) — это семейство всех одноточечных множеств $\{s\}$, $s \in S$, т. е. $\mathrm{B} := S$ — еще и множество индексов и $S_s := \{s\}$, $s \in S$, справедливость импликации (S)⇒(T) легко выводится из [8, **2.1**] (необходимо рассматривать $\mathcal{K} = \mathcal{S}$) в следующих двух также очень особых ситуациях:

% S *конечно,* а семейство $\mathcal{C}$ состоит из *одного* выпуклого множества C [8, **2.1**] (Теорема VKE);

% семейство $\mathcal{C}$ состоит из *одного выпуклого компакта C* (для выпуклого тела C см. [8, **6.2**], а при $\operatorname{int} C = \varnothing$ доказательство легко следует из [8, **2.1**] (Теорема VKE)).

5. Пересечение сдвигов и алгебраическая разность

Дадим «алгебраическое» развитие той же Теоремы VKE из Введения.

Теорема 2 (о пересечении сдвигов)**.** *Пусть теперь семейство*

$$\mathcal{C} := \{C_\alpha \subset \mathbb{R}^n \colon \alpha \in \mathrm{A}\}, \quad \mathrm{A} \text{ — \textit{множество индексов},} \tag{20}$$

состоит из произвольных (ср. с (4)) *непустых множеств C_α, и семейство множеств* (ср. с (14))

$$\mathcal{S} := \{S_\beta \subset \mathbb{R}^n \colon \beta \in \mathrm{B}\}, \quad \mathrm{B} \text{ — \textit{множество индексов},} \tag{21}$$

также состоит из произвольных непустых множеств S_β. Предполагаем, что каждая алгебраическая, т. е. векторная, разность (Определение 2, (7))

$$C_\alpha - S_\beta =: C_\alpha + (-S_\beta) \quad \text{\textit{выпукла при всех} } \alpha \in \mathrm{A}, \beta \in \mathrm{B}. \tag{22}$$

Допустим, что выполнено одно из двух условий:

(F) *условие конечности из Теоремы* 1*, т. е.* $\operatorname{card} \mathrm{A} + \operatorname{card} \mathrm{B} < \infty$*;*

(id) *каждая алгебраическая разность в* (22) *замкнута, для некоторых конечных подмножеств* $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$*,* $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ *алгебраические разности в* (22) *полиэдральны при всех*

$(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$, *а также всякое направление звёздности, общее для всех алгебраических разностей* (22) *при всех* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, *оказывается направлением линейности для алгебраических разностей* (22) *при всех* $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0)$.

Следующие утверждения эквивалентны (см. Соглашение из Введения)*:*

(I) *существует единый вектор* $x \in \mathbb{R}^n$, *для которого при любом индексе* $\beta \in \mathrm{B}$ *каждый сдвиг* $S_\beta + x$ *пересекается со всеми* C_α *из* $\mathcal{C}$*;*

(CSI) *для любых наборов* $n+1$ *индексов*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad \beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathrm{B}$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \bigl(C_{\alpha_k} - S_{\beta_k}\bigr) \tag{23}$$

алгебраических разностей из (22) *непусто.*

Доказательство. Импликация (I)$\Rightarrow$(CSI) очевидна по определениям и справедлива для любых систем непустых множеств. Обратную же импликацию (CSI)$\Rightarrow$(I) доказываем одновременно при условиях и (F), и (id). Поскольку множества (22) выпуклы, к ним применима Теорема Хелли о выпуклых множествах. Здесь условию (F) соответствует условие конечности (f), а условию (id) — условие (d). Если в Теореме Хелли вместо наборов индексов A, A_0 расматривать соответственно наборы индексов $\mathrm{A} \times \mathrm{B}, \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$, а вместо системы множеств C_α — систему множеств из всевозможных алгебраических разностей (22), то по Теореме Хелли пересечение

$$\bigcap_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}} \bigl(C_\alpha - S_\beta\bigr) \neq \varnothing.$$

Пусть x — некоторая точка из последнего пересечения. Т. е. всегда найдутся $c_\alpha \in C_\alpha$ и $s_\beta \in S_\beta$, для которых $x = c_\alpha - s_\beta$, или

$$S_\beta + x \ni s_\beta + x = c_\alpha \in C_\alpha \ \underline{\text{для любых пар}}\ (\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}.$$

А это и есть искомый единый вектор сдвига x из (I). □

Напомним, что в начале раздела 4 после формулировки Теоремы 1 и условий (CSC)–(CSS) последний из 4-х пунктов (1)–(4) остался нераскрытым (вывод части *«пересекает всё»*). Теперь мы сможем вернуться к последнему пункту из пп. (1)–(4), для того чтобы восполнить наш пробел о выводе части *«пересекает всё»* Теоремы VKE из Введения и обобщить её.

Следствие 1. *Пусть* $C \subset \mathbb{R}^n$ *непусто и задано семейство множеств* (21)*, алгебраические разности* $C - S_\beta$ *выпуклы при всех* $\beta \in \mathrm{B}$*, где* B *конечно или, в противном случае, все эти алгебраические разности замкнуты и хотя бы одна из них ограничена. Если для каждого набора* $n+1$ *множеств*

$$\bigl\{S_{\beta_1}, \ldots S_{\beta_{n+1}}\bigr\} \tag{24}$$

из семейства (21) *некоторый сдвиг множества* C *пересекает одновременно все* $n+1$ *множеств из* (24)*, то найдется сдвиг множества* C*, пересекающий все множества семейства* $\mathcal{S}$.

Доказательство. Ввиду одноточечности семейства $\mathcal{C} = \{C\}$ пересечение принимает достаточно простой вид, а условие непустоты пересечения (23) и означает последнюю фразу в формулировке доказываемого Следствия. При бесконечности множества B замкнутость алгебраических разностей и, прежде всего, ограниченность хотя бы одной из этих алгебраических разностей (см. и ср. раздел 2, Замечание 1, п. (b), сразу после формулировки

Теоремы Хелли) поставляет нам условие (id). Таким образом, выполнены все условия Теоремы 2 о пересечении сдвигов, и Следствие 1 доказано. □

Комментарий 3. Следующие комментарии и замечания дополняют Теорему 2 о пересечении сдвигов:

* если $\operatorname{card} \mathrm{B} = 1$ и $S_\beta = \{0\}$, то Теорема 2 — в точности Теорема Хелли о выпуклых множествах, сформулированная выше;
* при условиях $\operatorname{card} \mathrm{A} = 1$, т. е. $\mathcal{C}$ состоит из *одного выпуклого* множества C, все S_β, $\beta \in \mathrm{B}$, выпуклы и множество индексов B конечно или же C и все множества $S_\beta \in \mathcal{S}$ компактны, Теорема 2 доказана в [8, **2.1**];
* выпуклость всех алгебраических разностей в (22) можно заменить на более жесткое условие выпуклости всех $C_\alpha \in \mathcal{C}$ и всех $S_\beta \in \mathcal{S}$, поскольку алгебраическая разность двух выпуклых множеств выпукла;
* часть условия (id) *«каждая алгебраическая разность в* (22) *замкнута, ...»* можно заменить на более жесткое условие *«для каждой пары C_α, S_β одно из множеств замкнуто, а другое компактно, ...»,* так как алгебраическая разность замкнутого множества и компакта — замкнутое множество;
* часть условия (id) *«для некоторых конечных подмножеств $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ алгебраические разности в* (22) *полиэдральны для всех пар $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$, ...»* можно заменить на более жесткое условие *«для некоторых конечных подмножеств индексов $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$, $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ каждое из множеств C_α при $\alpha \in \mathrm{A}_0$ и S_β при $\beta \in \mathrm{B}_0$ выпукло и полиэдрально, ...»,* так как алгебраическая сумма полиэдральных выпуклых множеств полиэдральна [9, Следствие 19.3.2];
* если для некоторых подмножеств $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$ пересечение
$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}'\times \mathrm{B}'} (C_\alpha - S_\beta)$$
ограничено, то направлений звёздности, общих для всех алгебраических разностей, (22) не существует, и заключительная часть условия (id) об общих направлениях звёздности выполнена автоматически;
* если в паре C_α, S_β одно из множеств, C_α или S_β замкнуто, выпукло и неограничено, а другое ограничено, то направление звёздности для алгебраической разности из (22) будет и направлением звёздности (соответственно линейности) для неограниченного множества соответственно C_α или S_β (см. Предложения 1). Это может облегчить поиск общих направлений звёздности при проверке условия (id) Теоремы 2.

6. Теоретико-множественные разности

Для полноты изложения приведем в определенном смысле аналог Теорем 1 и 2 для теоретико-множественной разности множеств, которую в этом разделе называем для краткости просто разностью.

Теорема 3 (о разностях множеств)**.** *Пусть, по-прежнему, семейства множеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ определены соответственно как в* (4) *и* (14) *и как в* (15)
$$C = \bigcap_{\alpha\in \mathrm{A}} C_\alpha, \quad S = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} S_\beta. \tag{25}$$
Предполагаем, что все разности[1]
$$C_\alpha \setminus S_\beta \text{ выпуклы при всех } \alpha \in \mathrm{A} \text{ и } \beta \in \mathrm{B}. \tag{26}$$
Допустим, что выполнено одно из двух условий

[1]Такое часто возможно, даже если сами множества и невыпуклы.

(F) *условие конечности из Теорем* 1 *и* 2*, т. е.* $\operatorname{card}\mathrm{A} + \operatorname{card}\mathrm{B} < \infty$*;*

(dd) *каждая разность в* (26) *замкнута, для некоторых конечных подмножеств* $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$*,* $\mathrm{B}_0 \subset \mathrm{B}$ *разности в* (26) *полиэдральны для всех пар* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$*, а также всякое направление звёздности, общее для всех разностей* (26) *при всех* $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$*, оказывается направлением линейности для разностей* (26) *при всех* $(\alpha, \beta) \in (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \setminus (\mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0)$.

Следующие утверждения эквивалентны (с учётом Соглашения из Введения):

(D) *разность* $C \setminus S$ *— непустое множество;*

(CSD) *для любых наборов* $n+1$ *индексов*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathrm{A} \;\; \text{и} \;\; \beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathrm{B} \tag{27}$$

пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (C_{\alpha_k} \setminus S_{\beta_k}) \tag{28}$$

разностей из (26) *непусто.*

Доказательство. Для любых наборов индексов A', B' и множеств произвольной природы C_α, $\alpha \in \mathrm{A}'$ и S_β, $\beta \in \mathrm{B}'$ справедливо элементарное общее теоретико-множественное равенство для разностей

$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}'\times\mathrm{B}'} \Bigl(C_\alpha \setminus S_\beta\Bigr) = \Bigl(\bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}'} C_\alpha\Bigr) \setminus \Bigl(\bigcup_{\beta\in\mathrm{B}'} S_\beta\Bigr).$$

К примеру, при $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ и $\mathrm{B} = \mathrm{B}'$ в обозначениях (25) имеем

$$C \setminus S = \Bigl(\bigcap_{\alpha\in\mathrm{A}} C_\alpha\Bigr) \setminus \Bigl(\bigcup_{\beta\in\mathrm{B}} S_\beta\Bigr). \tag{29}$$

Следовательно, если множество $C \setminus S$ не пусто, то такова же и правая часть в (29). Таким образом, утверждение (D) Теоремы влечет за собой непустоту множеств вида (28) при любом наборе индексов (27), т. е. доказано (CSD).

Импликацию (CSD)$\Rightarrow$(D) доказываем одновременно при условиях и (F), и (dd). Так как множества (26) выпуклы, к ним применима Теорема Хелли о выпуклых множествах. Здесь условию (F) соответствует условие (f), а условию (CSD) — условие (d), если в Теореме Хелли вместо наборов индексов A, A_0 рассматривать соответственно наборы индексов $\mathrm{A} \times \mathrm{B}, \mathrm{A}_0 \times \mathrm{B}_0$, а вместо системы множеств C_α — систему множеств из всевозможных разностей (26). □

Комментарий 4 (*к Теореме* 3)**.**

Если $\operatorname{card}\mathrm{B} = 1$ и $S_\beta = \varnothing$ — пустое множество, то Теорема 3 — в точности Теорема Хелли о выпуклых множествах из раздела 2.

Часть условия (dd) *«каждая разность в* (26) *замкнута, ...»* можно заменить на более жесткое *«все* $C_\alpha \in \mathcal{C}$ *замкнуты, а все* $S_\beta \in \mathcal{S}$ *открыты, ...»*, поскольку в этом случае каждая разность (26) замкнута.

Если для некоторых подмножеств $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$ пересечение

$$\bigcap_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}'\times\mathrm{B}'} (C_\alpha \setminus S_\beta)$$

ограничено, то направлений звёздности, общих для всех разностей (26), не существует, и заключительная часть условия (dd) об общих направлениях звёздности выполнена автоматически, так как их просто нет.

Если все множества $C_\alpha \in \mathcal{C}$ замкнуты, выпуклы и неограничены, а все множества $S_\beta \in \mathcal{S}$ ограничены, то направление звёздности (линейности) для разности из (26) будет и направлением звёздности (соответственно линейности) для неограниченного множества C_α, что легко следует из Предложения 1. Это может облегчить поиск общих направлений звёздности при проверке условия (dd) Теоремы 2.

Замечание 3. Дальнейшие богатые результатами вариации на тему Теоремы Хелли о выпуклых множествах, в некоторой мере пересекающихся с нашими результатами (особенно из раздела 5 в части аналогов или обобщений трансверсалей для семейств множеств) наряду с уже приведенными выше источниками можно найти у Дольникова В. Л., Богатого С. А., Бобылева Н. А., Карасева Р. Н. [24]—[27] и многих других.

Автор глубоко признателен рецензенту за крайне полезные замечания и важную дополнительную информацию по тематике статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Физматгиз. 1956.
2. B. Ya. Levin *Lectures on entire functions.* Transl. Math. Monographs. Providence RI. Amer. Math. Soc. V. 150. 1996.
3. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности (издание четвертое, дополненное).* Уфа: РИЦ БашГУ. 2012.
4. Хабибуллин Б. Н. *Трансляты выпуклых множеств* // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математическай школы «Понтрягинские чтения–XXIV». Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ. 2013. С. 207–208.
5. Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли, трансляты множеств и опорная функция* // Нелинейные уравнения и комплексный анализ. Сборник тезисов. Уфа. Институт математики УНЦ РАН. 2013. С. 51–53.
6. Хабибуллин Б. Н. *Теорема Хелли и покрытие транслятами* // Материалы XI Казанская летняя школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань. Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского. 2013. С. 196–199.
7. B. N. Khabibullin *Helly's Theorem and translation of convex sets* // Asymptotic geometric analysis. Saint-Petersburg. EIMI. 2013. P. 9–10.
8. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В *Теорема Хелли.* М.: Мир. 1968.
9. Рокафеллар Р. Т. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973.
10. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.
11. Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Математический ин-т им.В.А. Стеклова РАН. Москва. 1987. Т. 14. С. 5–101.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ и его приложения.* М.: Эдиториал УРСС. 2000.
13. Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* М.: Физматлит. 2004.
14. R. T. Rockafellar *Helly's theorem and minima of convex functions* // Duke Math. J. 1965. V. 32. P. 381–398.
15. L. Sandgren *On convex cones* // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 19–28.
16. V. Klee *Infinite-dimensional intersection theorems* // Convexity: Proceedings of the Seventh Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society Eds. V. Klee. 1963. P. 349–360.
17. Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // ДАН СССР. 1967. № 175. С. 764–766.
18. Понтрягин Л. С. *Линейные дифференциальные игры преследования* // Матем. сборник. 1980. Т. 112(154), № 3(7). С. 307–330.
19. Петров Н. Н. *Введение в выпуклый анализ.* Ижевск. Удмуртский государственный университет. 2009.

20. Толстоногов А. А. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве.* М.: Наука. 1986.
21. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* М.: Наука, 1995.
22. Печерский С. Л. *Значение Шепли ТП игр, разности с-ядер выпуклых игр и точка Штейнера выпуклых компактов* // Математическая теория игр и её приложения. 2012. Т. 4, вып. 3. С. 58–85.
23. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. *Опорные функции некоторых специальных множеств, конструктивные процедуры сглаживания, геометрическая разность* // В сб. «Проблемы динамического управления». М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 24–110 (электронная версия http://oc.cs.msu.su/download/76/kiselev05.pdf).
24. Дольников В. Л. *Теоремы типа Хелли для трансверсалей семейств множеств и их приложения.* Диссертация и автореферат на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Ярославль. 2000.
25. Богатый С. А. *Топологическая теорема Хелли* // Фундамент. и прикл. матем. 2002. Т. 8. № 2. С. 365–405.
26. Бобылев Н. А. *Теорема Хелли для звёздных множеств* // Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.). Том 7. Геометрия и топология. Итоги науки и техн. Сер. «Соврем. мат. и ее прил.» Темат. обзоры, 68. М.: ВИНИТИ, 1999. С. 16–26.
27. Карасев Р. Н. *Топологические методы в комбинаторной геометрии* // УМН. 2008. Т. 63, 6(384). С. 39–90.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Khabib-Bulat@mail.ru`

ABSTRACTS

M.A. Gatsunaev, A.A. Klyachin

On uniform convergence of piecewise-linear solutions to minimal surface equation

Abstract. In the paper we consider piecewise-linear solutions of the minimal surface equation over a given triangulation of a polyhedral domain. It is shown that under certain conditions, the gradients of these functions are bounded as the maximum diameter of the triangles of the triangulation tends to zero. It is stressed that this property holds if the piecewise-linear function approximate the area of the graph of a smooth function with the required accuracy. An implication of the obtained properties is the uniform convergence of piecewise linear solutions to the exact solution of the minimal surface equation.

Keywords: : piecewise-linear functions, minimal surface equation, the approximation of the area functional

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov

On A.F. Leont'ev's interpolating function

Abstract. We introduce and study an abstract version of an interpolating functional. It is defined by means of Pommiez operator acting in an countable inductive limit of weighted Fréchet spaces of entire functions and of an entire function of two complex variables. The properties of the corresponding Pommiez operator are studied. The A.F.Leont'ev's interpolating function used widely in the theory of exponentional series and convolution operators and as well as the interpolating functional applied earlier for solving the problem on the existence of a continuous linear right inverse to the operator of representation of analytic functions on a bounded convex domain in C by quasipolynomial series are partial cases of the introduced interpolating functional.

Keywords: A.F.Leont'ev's interpolating function, interpolating functional, Pommiez operator

A.V. Karpikova

Asymptotics for eigenvalues of Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions

Abstract. We employ the similar operators method for studying the spectral properties of the Sturm—Liouville operator generated by the differential expression $l(y) = -y'' - vy$ with a complex potential v and periodic boundary conditions $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$. We obtain the results on the asymptotics for the spectrum of the operator.

Keywords: similar operators method, Sturm—Liouville operator, the spectrum of operator, asymptotics for the spectrum.

Yu.A. Kordyukov, V.A. Pavlenko

Singular integral operators on a manifold with a distinguished submanifold

Abstract. Let X be a compact manifold without boundary and X^0 be its smooth submanifold of codimension one. In the work we introduce classes of integral operators on X with kernels $K_A(x, y)$ being smooth functions for $x \notin X^0$ and $y \notin X^0$ and having an asymptotic expansion of certain type if x or y approaches X^0. For the operators in these classes we prove theorems on action in the spaces of conormal functions and composition theorems. We show that the trace functional can be extended to a regularized trace functional r-Tr defined on some algebra $\mathcal{K}(X, X^0)$ of singular integral operators described above. We prove a formula for the regularized trace of the commutator of operators from this class in terms of associated operators on X^0. The proofs are based on theorems on pull-back and push-forward of conormal functions under maps of manifolds with distinguished codimension one submanifolds.

Keywords: manifolds, singular integral operators, conormal functions, regularized trace, pull-back, push-forwar

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev

Accuracy estimate with respect to state of finite-dimensional approximations for optimization problems for semi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions

Abstract. In the work we consider nonlinear optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions with control in the conjugation boundary conditions. We construct difference approximations for extremum problems and obtain the estimates for approximation accuracy with respect to the state.

Keywords: optimal control problem, semi-linear elliptic equations, difference method of solving

A.V. Neklyudov

Behavior of solutions to Gauss-Bieberbach-Rademacher equation on plane

Abstract. We study the asymptotic behavior at infinity of solutions to Gauss-Bierbach-Rademacher equation $\Delta u = e^u$ in the domain exterior to the circle on the plane. We establish that the leading term of the asymptotics is a logarithmic function tending to $-\infty$. We also find the next-to-leading term for various values of the coefficient in the leading term.

Keywords: Semilinear elliptic equations, Gauss-Bieberbach-Rademacher equation, asymptotic behavior of solutions.

B.N. Khabibullin

Helly's Theorem and shifts of sets. I

Abstract. The motivation for the considered geometric problems is the study of conditions under which an exponential system is incomplete in spaces of the functions holomorphic in a compact set C and continuous on this compact set. The exponents of this exponential system are zeroes for a sum (finite or infinite) of families of entire functions of exponential type. As C is a convex compact set, this problem happens to be closely connected the Helly's theorem on the intersection of convex sets in the following treatment. Let C and S be two sets in the finite-dimensional Euclidean space being respectively intersections and unions of some subsets. We give criteria for some parallel translation (shift) of set C to cover completely (respectively, to contain or to intersect) set S. These and similar criteria are formulated in terms of geometric, algebraic, and set-theoretic differences of subsets generating C and S.

Keywords: Helly's theorem, incompleteness of exponential systems, convexity, shift, geometric, algebraic, and set-theoretic differences

CONTENTS