ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 17-27.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕРПОЛИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ А.Ф. ЛЕОНТЬЕВА

О.А. ИВАНОВА, С.Н. МЕЛИХОВ

Аннотация. В работе определяется и исследуется абстрактный вариант интерполирующего функционала. Он вводится с помощью оператора Поммье, действующего в счетном индуктивном пределе весовых пространств Фреше целых функций и некоторой целой функции двух комплексных переменных. Изучены свойства соответствующего оператора Поммье. Частными случаями введенного интерполирующего функционала являются интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева, широко применяющаяся в теории рядов экспонент и операторов свертки, а также интерполирующий функционал, использованный ранее при решении проблемы о существовании линейного непрерывного правого обратного к оператору представления рядами из квазиполиномов функций, аналитических в ограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}$.

Ключевые слова: интерполирующая функция А.Ф. Леонтьева, интерполирующий функционал, оператор Поммье.

Mathematics Subject Classification: 30B50, 46A13, 47B38

Введение

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $A(\bar{G})$ — пространство ростков всех функций, аналитических на замыкании $\bar{G}$ области G с естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств. А. Ф. Леонтьев (см. [1, гл. IV, §2, с.237]) ввел интерполирующую функцию $\omega_L(\mu, f)$, задаваемую некоторой специальной целой функцией L экспоненциального типа, и применил ее к вычислению коэффициентов разложений функций из $A(\bar{G})$ в ряды экспонент с показателями — нулями L. Интерполирующая функция вводилась и в отличных от упомянутой выше ситуациях и была использована для вычисления коэффициентов рядов экспонент или обобщенных экспонент для функций из различных пространств; она применялась также и в других вопросах теории рядов экспонент, в теории полиномов из экспонент, операторов свертки, в интерполяционных задачах.

Для решения проблемы существования линейного непрерывного правого обратного (коротко: ЛНПО) к оператору представления рядами из квазиполиномов функций, аналитических в G, в [2, §3] введен интерполирующий функционал $\Omega_Q(\mu, z, f)$ — аналог интерполирующей функции $\omega_L(\mu, f)$, задаваемый некоторой целой функцией $Q(\mu, z)$ двух комплексных переменных μ, z. Функционал Ω_Q и его аналоги были использованы затем при решении проблемы наличия ЛНПО к оператору представления рядами из квазимономов функций, аналитических в ограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}$ [3]; к оператору представления рядами экспонент функций, аналитических на ограниченном выпуклом локально замкнутом множестве в $\mathbb{C}$ [4]; к оператору представления рядами из функций Миттаг-Леффлера функций, аналитических в ρ-выпуклой области ($\rho > 0$) [5]. Кроме того, вариант функционала Ω_Q был применен при решении задачи о наличии ЛНПО к оператору представления рядами из обобщенных экспонент ультрараспределений типа Бьерлинга на многомерном вещественном кубе [6].

O.A. Ivanova, S.N. Melikhov, On A.F. Leont'ev's interpolating function.

Поступила 22 апреля 2014 г.

В настоящей работе вводится абстрактная версия интерполирующего функционала, в частности, интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева. Она определяется с помощью оператора Поммье, действующего в весовом (LF)-пространстве целых в $\mathbb{C}$ функций. В связи с этим в §1 изучаются свойства оператора Поммье. Интерполирующий функционал вводится и изучается в §2. В §3 приводятся реализации интерполирующего функционала для конкретных пространств. В данной работе мы ограничились примерами, явившимися побудительным мотивом настоящего исследования. Интерполирующий функционал может быть полезен и во многих других ситуациях, в которых сопряженное к основному пространству реализуется как весовое пространство целых функций. Анализу таких ситуаций, применениям интерполирующего функционала к теории рядов экспонент, операторов свертки предполагается посвятить отдельную статью.

1. Операторы Поммье, их свойства

В этом параграфе мы изучим оператор Поммье, действующий в некотором весовом (LF)-пространстве (т.е. в счетном индуктивном пределе пространств Фреше) E целых функций. Для непрерывной функции $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, для функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ положим

$$p_v(f) := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp v(z)}.$$

Пусть непрерывные функции $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ таковы, что

$$v_{n,k+1} \leq v_{n,k} \leq v_{n+1,k}, \ n, k \in \mathbb{N}.$$

Как обычно, $A(\mathbb{C})$ обозначает пространство всех целых (в $\mathbb{C}$) функций. Определим банаховы пространства

$$E_{nk} := \{f \in A(\mathbb{C}) : p_{v_{n,k}}(f) < +\infty\}, \ n, k \in \mathbb{N},$$

весовые пространства Фреше

$$E_n := \{f \in A(\mathbb{C}) : p_{v_{n,k}}(f) < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N}\}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что E_n непрерывно вложено в E_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$. Весовое (LF)-пространство E определим следующим образом:

$$E := \operatorname*{ind}_{n \to} E_n.$$

Введем следующие условия для функций $v_{n,k}$:

$$\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s \ \exists C \geq 0 : \sup_{|t-z| \leq 1} v_{n,s}(t) \leq \inf_{|t-z| \leq 1} v_{m,k}(t) + C, \ z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

и

$$\forall n \ \exists m \ \forall k \ \exists s : \lim_{z \to \infty} (v_{m,k}(z) - v_{n,s}(z)) = +\infty. \tag{2}$$

Для $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{C}$ положим $\tau_h(f)(z) := f(z + h)$, $z \in \mathbb{C}$.

Замечание 1. 1) Пусть выполняется условие (1). Тогда

(a) Пространство E инвариантно относительно дифференцирования, т.е. для любой функции $f \in E$ также $f' \in E$.

(b) Пространство E инвариантно относительно сдвига, т.е. $\tau_h(f) \in E$ для любых $f \in E$ и $h \in \mathbb{C}$.

2) Пусть выполняется условие (2). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что всякое ограниченное в E_n множество относительно компактно в E_m.

□ Утверждения 1) очевидны.

2) Пусть множество B ограничено в E_n. Выберем $m \in \mathbb{N}$ по n по условию (2). Возьмем последовательность $f_j \in B$, $j \in \mathbb{N}$. Так как она ограничена на каждом компакте в $\mathbb{C}$, то по теореме Монтеля существует подпоследовательность $(f_{j_r})_{r \in \mathbb{N}}$, равномерно сходящаяся

на любом компакте в $\mathbb{C}$ к некоторой функции $f \in A(\mathbb{C})$. Очевидно, что $f \in E_n \subseteq E_m$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим $s \in \mathbb{N}$ по (2). Так как $\sup\limits_{r\in\mathbb{N}} p_{v_{n,s}}(f_{j_r}) < +\infty$, то

$$p_{v_{m,k}}(f_{j_r} - f) \to 0 \text{ при } r \to \infty.$$

Следовательно, множество B относительно компактно в E_m. ■

Лемма 2. Пусть выполняются условия (1) и (2). Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что в E_m

$$\lim_{\mu\to z} \frac{\tau_\mu(f) - \tau_z(f)}{\mu - z} = \tau_z(f').$$

□ Очевидно, что

$$\lim_{\mu\to z} \frac{\tau_\mu(f)(t) - \tau_z(f)(t)}{\mu - z} = f'(t+z) = \tau_z(f')(t)$$

для любого $t \in \mathbb{C}$. Из принципа максимума модуля и условия (1) вытекает, что множество $\{\frac{\tau_\mu(f)-\tau_z(f)}{\mu-z} : 0 < |\mu - z| \le 1\}$ ограничено в некотором пространстве E_n, а значит, относительно компактно в некотором пространстве E_m. Следовательно, в E_m существует $\lim\limits_{\mu\to z} \frac{\tau_\mu(f)-\tau_z(f)}{\mu-z}$, равный $\tau_z(f')$. ■

Будем предполагать, что пространство E содержит функцию, отличную от тождественного нуля. Тогда существует функция $g_0 \in E$ такая, что $g_0(0) = 1$.

Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$. Оператор $D_z : E \to A(\mathbb{C})$ вводится следующим образом: для $f \in E$

$$D_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t-z)f(z)}{t-z}, & t \neq z, \\ f'(z) - g_0'(0)f(z), & t = z. \end{cases}$$

Замечание 3. Ранее оператор D_z исследовался и применялся в случае $g_0 \equiv 1$ в пространствах аналитических функций без ограничений на их рост (см., например, работы [7]–[12] и библиографию в них). В этом случае он называется оператором Поммье. Мы будем использовать это название и для оператора D_z, введенного выше.

Докажем далее некоторые свойства оператора D_z.

Лемма 4. Для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$D_\mu(f) - D_z(f) = (\mu - z)D_\mu(D_z(f)) + f(z)D_\mu(\tau_{-z}(g_0)), \ f \in E. \tag{3}$$

□ Возьмем $\mu, z \in \mathbb{C}$, $\mu\neq z$. Если $t\neq z$, $t\neq\mu$, то

$$D_\mu(f)(t) - D_z(f)(t) = \frac{f(t) - g_0(t-\mu)f(\mu)}{t-\mu} - \frac{f(t) - g_0(t-z)f(z)}{t-z} =$$
$$= \frac{f(t)(\mu - z) + g_0(t-z)f(z)(t-\mu) - g_0(t-\mu)f(\mu)(t-z)}{(t-\mu)(t-z)}$$

и

$$D_\mu(D_z(f))(t) = \frac{\frac{f(t)-g_0(t-z)f(z)}{t-z} - g_0(t-\mu)\frac{f(\mu)-g_0(\mu-z)f(z)}{\mu-z}}{t-\mu} =$$
$$= \Big(f(t)(\mu - z) - g_0(t-z)f(z)(\mu - z) - g_0(t-\mu)f(\mu)(t-z)+$$
$$+g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)f(z)(t-z)\Big)/\Big((\mu-z)(t-z)(t-\mu)\Big).$$

Поэтому

$$(\mu - z)D_\mu(D_z(f))(t) =$$
$$= \Big(f(t)(\mu - z) + g_0(t-z)f(z)(t-\mu) - g_0(t-\mu)f(\mu)(t-z)-$$

$$-g_0(t-z)f(z)(t-\mu)-g_0(t-z)f(z)(\mu-z)-$$
$$+g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)f(z)(t-z)\Big)/\Big((t-z)(t-\mu)\Big)=$$
$$=D_\mu(f)(t)-D_z(f)(t)+$$
$$+\frac{-g_0(t-z)f(z)(t-z)+g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)f(z)(t-z)}{(t-z)(t-\mu)}=$$
$$=D_\mu(f)(t)-D_z(f)(t)+f(z)\frac{g_0(t-\mu)g_0(\mu-z)-g_0(t-z)}{t-\mu}=$$
$$=D_\mu(f)(t)-D_z(f)(t)-f(z)D_\mu(\tau_{-z}(g_0))(t).$$

Ясно, что равенство
$$(\mu-z)D_\mu(D_z(f))(t)=D_\mu(f)(t)-D_z(f)(t)-f(z)D_\mu(\tau_{-z}(g_0))(t)$$
выполняется при $t=\mu$ и $t=z$ (ведь функции, стоящие в обеих частях этого равенства, целые по t). Поскольку $D_\mu(\tau_{-z}(g_0))(t)=0$, $t\in\mathbb{C}$, при $\mu=z$, то последнее равенство справедливо и при $\mu=z$. ■

Замечание 5. Если $g_0\equiv 1$, то равенство (3) имеет вид:
$$D_\mu-D_z=(\mu-z)D_\mu\circ D_z.$$

Лемма 6. Предположим, что выполняется условие (1). Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) Для любых $n\in\mathbb{N}$, ограниченного в $\mathbb{C}$ множества M, существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $z\in M$ оператор D_z линейно и непрерывно отображает E_n в E_m.

(ii) Для любых $n\in\mathbb{N}$, ограниченного в E_n множества B, ограниченного в $\mathbb{C}$ множества M, существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что множество
$$\{D_z(f):\ z\in M, f\in B\}$$
ограничено в E_m.

□ (i): Вследствие (1) найдется $n_1\in\mathbb{N}$, для которого множество
$$\{\tau_{-z}(g_0): z\in M\}$$
ограничено в E_{n_1}. Выберем $m\in\mathbb{N}$ по $n_2:=\max\{n,n_1\}$ по (1) и для $k\in\mathbb{N}$ определим $s\in\mathbb{N}$ (тоже по (1)).

Возьмем $f\in E_n$. Зафиксируем $z\in M$. Пусть $|t-z|>1$. Тогда
$$\frac{|D_z(f)(t)|}{\exp v_{m,k}(t)}\le\frac{|f(t)-g_0(t-z)f(z)|}{\exp v_{m,k}(t)}\le\frac{|f(t)|}{\exp v_{m,k}(t)}+|f(z)|\frac{|g_0(t-z)|}{\exp v_{m,k}(t)}. \tag{4}$$

Если $|t-z|\le 1$, то
$$\frac{|D_z(f)(t)|}{\exp v_{m,k}(t)}\le\frac{\sup\limits_{|w-z|=1}|f(w)-g_0(w-z)f(z)|}{\exp v_{m,k}(t)}\le \tag{5}$$
$$\le\frac{\sup\limits_{|w-z|=1}|f(w)|}{\exp v_{m,k}(t)}+|f(z)|\frac{\sup\limits_{|w-z|=1}|g_0(w-z)|}{\exp v_{m,k}(t)}\le$$
$$\le\Big(p_{v_{n_2,s}}(f)+|f(z)|p_{v_{n_2,s}}(\tau_{-z}(g_0))\Big)\exp\Big(\sup_{|w-z|\le1}v_{n_2,s}(w)-\inf_{|w-z|\le1}v_{m,k}(w)\Big).$$

Таким образом, для любого $k\in\mathbb{N}$
$$p_{v_{m,k}}(D_z(f))<+\infty,$$

т.е. $D_z(f) \in E_m$. Значит, для каждого $z \in M$ оператор D_z (линейно) отображает E_n в E_m. Поскольку график оператора $D_z : E_n \to E_m$ замкнут, то по теореме о замкнутом графике [13, с.615, теорема 6.7.1] операторы $D_z : E_n \to E_m$, $z \in M$, непрерывны.

(ii): Пусть множество B ограничено в E_n, т.е. $\sup\limits_{f\in B} p_{v_{n,l}}(f) < +\infty$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Из условия (1) следует, что множество $\{\tau_{-z}(g_0) : z \in M\}$ ограничено в некотором пространстве E_{n_1}. Положим $n_2 := \max\{n; n_1\}$. Выберем m по n_2 согласно (1) и, зафиксировав k, определим s по (1). Так как B ограничено в E_n, то $\sup\limits_{z\in M, f\in B} |f(z)| < +\infty$. Вследствие неравенств (4)-(5), учитывая, что множества B и $\{\tau_{-z}(g_0) : z \in M\}$ ограничены в E_m, получим:

$$\sup_{z\in M, f\in B} p_{m,k}(D_z(f)) < +\infty.$$

Значит, множество $\{D_z(f) : z \in M, f \in B\}$ ограничено в E_m. ■

Лемма 7. Пусть выполняются условия (1) и (2). Тогда справедливы следующие утверждения:

(iii) Для любого $n \in \mathbb{N}$, любого ограниченного в E_n множества B существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\lim\limits_{\mu\to z} D_\mu(f) = D_z(f)$ в E_m равномерно (по f) на B.

(iv) Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что в E_r существует $\lim\limits_{\mu\to z} \frac{D_\mu(\tau_{-z}(f))}{\mu - z}$, равный $D_z(\tau_{-z}(f'))$.

(v) Для любых $f \in E$, $z \in \mathbb{C}$ найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что в E_r

$$\lim_{\mu\to z} \frac{D_\mu(f) - D_z(f)}{\mu - z} = D_z^2(f) + f(z) D_z(\tau_{-z}(g_0')).$$

□ (iii): Пусть $n \in \mathbb{N}$ и множество B ограничено в E_n. По замечанию 1, 2) существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что B относительно компактно в E_{m_1}.

Ясно, что $D_\mu(f) \to D_z(f)$ при $\mu \to z$ поточечно для любой функции $f \in E$. По свойству (ii) леммы 6 существует m_2, для которого множество

$$\{D_\mu(f) :\ |\mu - z| \le 1, f \in B\}$$

ограничено в E_{m_2}, а значит, по замечанию 1, 2) и относительно компактно в некотором пространстве E_{m_3}, где $m_3 \ge m_1$. Отсюда следует, что для любого $f \in B$ в E_{m_3} существует $\lim\limits_{\mu\to z} D_\mu(f)$, равный $D_z(f)$. По свойству (i) леммы 6 найдется $m \ge m_3$ такое, что операторы D_μ, $|\mu - z| \le 1$, линейно и непрерывно отображают E_{m_1} в E_m. По теореме Банаха-Штейнгауза [13, следствие 7.1.4] $\lim\limits_{\mu\to z} D_\mu(f) = D_z(f)$ в E_m равномерно (по f) на B, т.е.

$$\lim_{\mu\to z} \sup_{f\in B} p_{v_{m,k}}(D_\mu(f) - D_z(f)) = 0$$

для любого $k \in \mathbb{N}$.

(iv): Зафиксируем $f \in E$ и $z \in \mathbb{C}$. При $\mu \ne z$, вследствие $D_\mu(\tau_{-\mu}(f)) = 0$,

$$\frac{D_\mu(\tau_{-z}(f))}{\mu - z} = D_\mu\Big(\frac{\tau_{-z}(f) - \tau_{-\mu}(f)}{\mu - z}\Big). \tag{6}$$

По лемме 2 найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что в E_m существует $\lim\limits_{\mu\to z} \frac{\tau_{-z}(f) - \tau_{-\mu}(f)}{\mu - z}$, равный $\tau_{-z}(f')$, а множество $B = \left\{\frac{\tau_{-z}(f) - \tau_{-\mu}(f)}{\mu - z} \ :\ 0 < |\mu - z| \le 1\right\}$ относительно компактно в E_m (см. доказательство леммы 2). По (iii) и свойству (i) леммы 6 найдется $r \in \mathbb{N}$, для которого $\lim\limits_{\mu\to z} D_\mu(g) = D_z(g)$ в E_r равномерно (по g) на B, и оператор D_z линейно и непрерывно отображает E_m в E_r. Используя это и равенство (6), легко показать, что в E_r существует $\lim\limits_{\mu\to z} \frac{D_\mu(\tau_{-z}(f))}{\mu - z}$, равный $D_z(\tau_{-z}(f'))$.

(v): Вследствие равенства (3) при $\mu \neq z$

$$\frac{D_\mu(f) - D_z(f)}{\mu - z} = D_\mu(D_z(f)) + f(z)\frac{D_\mu(\tau_{-z}(g_0))}{\mu - z}.$$

Поэтому утверждение (v) следует из (iii) и (iv). ■

Докажем еще один результат об оценке роста $D_\mu(f)(t)$ по t и μ для $f \in E$.

Лемма 8. Пусть выполняется условие (1) и $g_0 \equiv 1$. Тогда $\forall f \in E\ \exists m\ \forall k, l\ \exists A \geq 0$:

$$|D_\mu(f)(t)| \leq A \exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)),\ t, \mu \in \mathbb{C}.$$

□ Заметим, что функция $g_0 \equiv 1$ принадлежит E тогда и только тогда, когда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n \geq n_0$ и $s \in \mathbb{N}$

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} v_{n,s}(z) > -\infty. \tag{7}$$

(Без ограничения общности можно считать, что $n_0 = 1$.) Пусть $f \in E_r$. По условию (1) существует $m \geq r$ такое, что для любого $l \in \mathbb{N}$ найдутся $s \in \mathbb{N}$ и $C \geq 0$, для которых

$$\sup_{|w-t| \leq 2} v_{r,s}(w) \leq v_{m,l}(t) + C,\ t \in \mathbb{C}.$$

Для $k, l \in \mathbb{N}$ (используя принцип максимума, если $|t-\mu| \leq 1$) получим: для любых $t, \mu \in \mathbb{C}$

$$|D_\mu(f)(t)| \leq \sup_{|w-t| \leq 2} |f(w)| + |f(\mu)| \leq$$

$$\leq p_{v_{r,s}}(f) \exp(v_{m,l}(t) + C) + p_{v_{m,k}}(f) \exp v_{m,k}(\mu) =$$

$$= \Big(p_{v_{r,s}}(f) \exp(C - v_{m,k}(\mu)) + p_{v_{m,k}}(f) \exp(-v_{m,l}(t))\Big) \exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)).$$

Остается отметить, что, вследствие (7),

$$\sup_{t, \mu \in \mathbb{C}} (p_{v_{r,s}}(f) \exp(C - v_{m,k}(\mu)) + p_{v_{m,k}}(f) \exp(-v_{m,l}(t))) < +\infty.$$

■

2. Q-интерполирующий функционал, его свойства

Далее E — пространство целых функций такое, как в §1, причем задающее его семейство функций $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Предположим, что F — некоторое комплексное локально выпуклое пространство (коротко: ЛВП), обладающее следующими свойствами:

(F1) (F, E) — дуальная пара относительно билинейной формы $\langle x, f \rangle$, $x \in F$, $f \in E$.
(F2) Топологии F и E мажорируют слабые топологии $\sigma(F, E)$ и $\sigma(E, F)$ соответственно.
(F3) Существуют элементы $e_\lambda \in F$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такие, что

$$\langle e_\lambda, g \rangle = g(\lambda),\ g \in E, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Замечание 9. Естественным примером пространства F, удовлетворяющего условиям (F1)-(F3), является топологическое сопряженное E' к E с топологией, мажорирующей слабую топологию $\sigma(E', E)$. В этом случае e_λ — дельта-функции:

$$\langle e_\lambda, f \rangle = e_\lambda(f) = f(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},\ f \in E.$$

(По поводу используемых здесь понятий из теории двойственности см., например, [14, гл.2].)

Определение 10. Пусть Q — целая в $\mathbb{C}^2$ функция такая, что $Q(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Q-интерполирующим функционалом назовем отображение $\Omega_Q : \mathbb{C}^2 \times F \to \mathbb{C}$, задаваемое равенством

$$\Omega_Q(\mu, z, x) := \langle x, D_\mu(Q(\cdot, z)) \rangle,\ \mu, z \in \mathbb{C},\ x \in F.$$

Докажем некоторые свойства функционала Ω_Q. Положим $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для ЛВП H символ H' обозначает топологическое сопряженное к H.

Теорема 11. (i) Для любых $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$

$$(\lambda - \mu)\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = Q(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)Q(\mu, z).$$

(ii) $\Omega_Q(\mu, z, \cdot) \in F'$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.

(iii) Предположим, что отображение $z \mapsto Q(\cdot, z)$ обладает следующим свойством: для любого компакта M в $\mathbb{C}$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z \in M} p_{v_{n,s}}(Q(\cdot, z)) < +\infty.$$

Тогда $\Omega_Q(\cdot, \cdot, x) \in A(\mathbb{C}^2)$ для любого $x \in F$.

(iv) Если $g_0 \equiv 1$, то $\Omega_Q(\cdot, z, x) \in E$ для любых $z \in \mathbb{C}$ и $x \in F$.

□ (i): Для $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \neq \lambda$, учитывая свойство (F3), получим:

$$(\lambda - \mu)\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = (\lambda - \mu)\langle e_\lambda, D_\mu(Q(\cdot, z))\rangle = (\lambda - \mu)D_\mu(Q(\cdot, z))(\lambda) =$$

$$= (\lambda - \mu)\frac{Q(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)Q(\mu, z)}{\lambda - \mu} = Q(\lambda, z) - g_0(\lambda - \mu)Q(\mu, z).$$

Если $\mu = \lambda$, равенство (i) очевидно.

Утверждение (ii) следует из свойства (F2).

(iii): Зафиксируем $x \in F$ и $z \in \mathbb{C}$. Возьмем $\mu \in \mathbb{C}$. По свойству (v) леммы 7 найдется $r \in \mathbb{N}$ такое, что в E_r существует $\lim\limits_{\triangle\mu \to 0} \frac{D_{\mu+\triangle\mu} - D_\mu}{\triangle\mu}(Q(\cdot, z))$, равный $D^2_\mu(Q(\cdot, z)) + Q(\mu, z)D_\mu(\tau_{-\mu}(g_0')) =: h$. Поэтому, вследствие (F2), существует $\lim\limits_{\triangle\mu \to 0} \frac{\Omega_Q(\mu+\triangle\mu, z, x) - \Omega_Q(\mu, z, x)}{\triangle\mu}$, равный $\langle x, h\rangle$. Таким образом, функция $\Omega_Q(\mu, z, x)$ является целой по μ.

Зафиксируем $x \in F$ и $\mu \in \mathbb{C}$. Раскладывая (при фиксированном $t \in \mathbb{C}$) целую (по z) функцию $Q(t, z)$ в степенной ряд, получим:

$$Q(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) z^j, \ t, z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

где $a_j \in A(\mathbb{C})$. Возьмем $z \in \mathbb{C}$. В силу неравенств Коши

$$|a_j(t)| \le \frac{\sup\limits_{|\xi| \le |z|+1} |Q(t, \xi)|}{(|z| + 1)^j}, \ j \in \mathbb{N}_0, \ t \in \mathbb{C}.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$C_s := \sup_{|\xi| \le |z|+1} p_{v_{n,s}}(Q(\cdot, \xi)) < +\infty.$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{C}$. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}_0$

$$|a_j(t)| \le \frac{C_s \exp v_{n,s}(t)}{(|z| + 1)^j}.$$

Следовательно, ряд (8) сходится абсолютно в некотором пространстве E_n (n зависит от z) по переменной t к $Q(t, z)$. По лемме 6 (i) существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что D_μ линейно и непрерывно отображает E_n в E_m. По свойству (F2) линейный функционал

$$g \mapsto \langle x, g\rangle, \ g \in E, \tag{9}$$

непрерывен на E, а значит, непрерывно его сужение на любое пространство E_l, $l \in \mathbb{N}$, в частности, на E_m [14, гл.5, предложение 5]. Поэтому

$$\Omega_Q(\mu, z, x) = \langle x, (D_\mu)_t(Q(t,z))\rangle = \Big\langle x, (D_\mu)_t\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)z^j\Big)\Big\rangle =$$

$$= \Big\langle x, \sum_{j=0}^{\infty} D_\mu(a_j)z^j\Big\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\langle x, D_\mu(a_j)\rangle z^j,$$

причем последний числовой ряд абсолютно сходится. Таким образом, функция $\Omega_Q(\mu, z, x)$ является целой по z. По теореме Хартогса [15, гл 1, §2, п.6] $\Omega_Q(z, \mu, x)$ — целая в $\mathbb{C}^2$ функция (по (μ, z)) для любого $x \in F$.

(iv): Зафиксируем $z \in \mathbb{C}$ и $x \in F$. По (iii) $\Omega_Q(\mu, z, x)$ — целая (по μ) функция. Так как линейный функционал (9) непрерывен на $E = \operatorname*{ind}_{n\to} \operatorname*{proj}_{\leftarrow s} E_{ns}$, то $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists s \in \mathbb{N}\ \exists \tilde{B} \geq 0$:

$$|\Omega_Q(\mu, z, x)| \leq \tilde{B} p_{v_{n,s}}(D_\mu(Q(\cdot, z))). \tag{10}$$

По лемме 8 $\exists m\ \forall k, l\ \exists A \geq 0$:

$$|D_\mu(Q(\cdot, z))(t)| \leq A \exp(v_{m,k}(\mu) + v_{m,l}(t)),\ \ \mu, t \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) (в них $n = m$, $l = s$) следует: для любого $k \in \mathbb{N}$

$$|\Omega_Q(\mu, z, x)| \leq A\tilde{B} \exp v_{m,k}(\mu),\ \ \mu \in \mathbb{C}.$$

Значит, $\Omega_Q(\cdot, z, x) \in E$. ■

3. Примеры

1) Интерполирующая функция $\omega_L(\mu, x)$, введенная А. Ф. Леонтьевым (см. [1, гл. IV, §2, с.237]) — частный случай функционала Ω_Q.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\bar{G}$ — замыкание G в $\mathbb{C}$; $0 \in G$; $A(\bar{G})$ — пространство всех функций, аналитических на $\bar{G}$, с естественной топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств. Пусть H_G — опорная функция $\bar{G}$, т.е.

$$H_G(z) := \sup_{t \in \bar{G}} \operatorname{Re}(zt),\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Положим $F := A(\bar{G})$. В качестве E рассмотрим весовое пространство Фреше:

$$E := \Big\{f \in A(\mathbb{C})\ \Big|\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|f\|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_G(z) + |z|/n)} < +\infty\Big\},$$

т.е. в данном случае

$$v_{n,k}(z) = H_G(z) + |z|/k,\ \ n, k \in \mathbb{N},\ \ z \in \mathbb{C},$$

и все ЛВП E_n совпадают между собой. Семейство функций $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Через $\mathcal{F}$ обозначим преобразование Лапласа:

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi_t(\exp(tz)),\ \ z \in \mathbb{C},\ \ \varphi \in A(\bar{G})'.$$

Как известно [16, теорема 4.5.3], $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $A(\bar{G})'_b$ к $A(\bar{G})$ на E. Билинейная форма

$$\langle x, f\rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(x),\ \ x \in F,\ \ f \in E, \tag{12}$$

задает двойственность между F и E, т.е. условие (F1) выполняется. Вследствие (12) условие (F2) тоже имеет место. Если $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$, то

$$\langle e_\lambda, f\rangle = f(\lambda),\ \ \lambda \in \mathbb{C},\ \ f \in E,$$

а значит, выполнено условие (F3). Пусть L — целая функция экспоненциального типа с сопряженной диаграммой $\bar{G}$. Согласно [1, гл. IV, §2, с.237]

$$\omega_L(\mu, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma(t) \Big(\int\limits_0^t x(t-\xi) e^{\mu\xi} d\xi \Big) dt,$$

где γ – функция, ассоциированная по Борелю с L, C — контур, охватывающий $\bar{G}$ и лежащий в области аналитичности x и γ.

Положим $Q(\mu, z) := L(\mu)$, $\mu, z \in \mathbb{C}$. Поскольку $0 \in G$, то в качестве g_0 можно взять $g_0 \equiv 1$. Покажем, что

$$\Omega_Q(\mu, z, x) = \omega_L(\mu, x), \ \mu, z \in \mathbb{C}, \ x \in F.$$

Поскольку для $\mu, z \in \mathbb{C}$ линейные функционалы $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ и $\omega_L(\mu, \cdot)$ непрерывны на F (теорема 11 (ii) и [1, свойство 5, с.243] соответственно), то, в силу полноты семейства $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в F, достаточно показать, что

$$\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \omega_L(\mu, e_\lambda)$$

для $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $\Omega(\mu, z) = L(\mu)$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$, то

$$\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \frac{Q(\lambda, z) - Q(\mu, z)}{\lambda - \mu} = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

По [1, свойство 3, с.242] также

$$\omega_L(\mu, e_\lambda) = \frac{L(\lambda) - L(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

2) Интерполирующий функционал, введенный в [2, §3] на основе интерполирующей функции А.Ф. Леонтьева, — тоже частный случай изученного в данной работе.

Пусть G, H_G — такие, как выше в 1); $F := A(G)$ — пространство всех функций, аналитических в G, с топологией равномерной сходимости на компактах G. В качестве E рассмотрим счетный индуктивный предел весовых банаховых пространств:

$$E := \Big\{ f \in A(\mathbb{C}) \ \Big| \ \exists n \in \mathbb{N} \ |f|_n := \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_G(z) - |z|/n)} < +\infty \Big\},$$

т.е. в данном случае

$$v_{n,k}(z) = H_G(z) - |z|/n, \ n, k \in \mathbb{N}, \ z \in \mathbb{C},$$

и все ЛВП E_n являются банаховыми пространствами. Семейство функций $(v_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Пусть $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$.

Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \ z \in \mathbb{C}, \ \varphi \in A(G)',$$

является [16, теорема 4.5.3] топологическим изоморфизмом сильного сопряженного $A(G)'_b$ к $A(G)$ на E. Билинейная форма

$$\langle x, f \rangle := \mathcal{F}^{-1}(f)(x), \ x \in F, \ f \in E,$$

устанавливает двойственность между F и E. Как и в 1), условия (F1)-(F3) выполняются.

Пусть Q — целая в $\mathbb{C}^2$ функция, такая, что $Q(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Согласно [2, §3, определение 3.1], Q-интерполирующий функционал определяется так (чтобы все же отличать его от исследованного здесь, обозначим его несколько иначе, чем в [2]):

$$\tilde{\Omega}_Q(\mu, z, x) := \mathcal{F}^{-1}(Q(\cdot, z))_t \Big(\int\limits_0^t x(t-\xi) \exp(\mu\xi) d\xi \Big), \ \mu, z \in \mathbb{C}, \ x \in A(G).$$

В данном случае тоже можно взять $g_0 \equiv 1$. Из непрерывности функционалов $\tilde{\Omega}_Q(\mu, z, \cdot)$ и $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ на $A(G) = F$ ([2, §3, лемма 3.2 (б)] и теорема 11 (ii) соответственно), полноты системы $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в $A(G)$ и равенства $\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \tilde{\Omega}_Q(\mu, z, e_\lambda)$ для любых $\mu, z, \lambda \in \mathbb{C}$, следует, что $\Omega_Q = \tilde{\Omega}_Q$ на $\mathbb{C}^2 \times F$. (Заметим, что равенство $\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \frac{Q(\lambda,z)-Q(\mu,z)}{\lambda-\mu}$ установлено в [2, лемма 3.2 (б)] при $\mu = z$; очевидно, оно имеет место для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.)

3) Пусть теперь G — ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{C}$, содержащее 0. Предположим, что G локально замкнуто, т.е. имеет счетную фундаментальную систему компактных подмножеств $G_n \subseteq G$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что все компакты G_n выпуклые и $G_n \subseteq G_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (см., например, [4], [17], [18]). Пусть $F := A(G) := \operatorname{proj}_{\leftarrow n} A(G_n)$ — пространство ростков всех функций, аналитических на G, с топологией проективного предела (LB)-пространств $A(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Введем весовое (LF)-пространство $E := \operatorname{ind}_{n\to} \operatorname{proj}_{\leftarrow k} A_{nk}$, где банахово пространство A_{nk} определено следующим образом:

$$A_{nk} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \|f\|_{nk} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_{G_n}(z) + |z|/k)} < +\infty \right\}$$

(H_{G_n} — опорная функция G_n). В данном случае

$$v_{n,k}(z) := H_{G_n}(z) + |z|/k, \ z \in \mathbb{C}, \ n, k \in \mathbb{N};$$

семейство $(v_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1) и (2).

Как и ранее, $e_\lambda(z) := \exp(\lambda z)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$. Преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e_z), \ z \in \mathbb{C}, \ \varphi \in A(G)',$$

устанавливает топологический изоморфизм сильного сопряженного $A(G)'_b$ к $A(G)$ на E [17, lemma 1.10]. Билинейная форма

$$< x, f >:= \mathcal{F}^{-1}(f)(x), \ x \in F, \ f \in E,$$

устанавливает естественную двойственность между F и E; свойства (F1)-(F3) выполняются.

Пусть $\tilde{L}$ — целая (в $\mathbb{C}^2$) функция такая, что $\tilde{L}(\cdot, z) \in E$ для любого $z \in \mathbb{C}$. $\tilde{L}$-интерполирующий функционал $\Omega_{\tilde{L}}$ в [4, §3] определяется так:

$$\Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, x) := \mathcal{F}^{-1}(\tilde{L}(\cdot, z))_t \Big(\int_0^t x(t-\xi)\exp(\mu\xi)d\xi \Big), \ \mu, z \in \mathbb{C}, \ x \in F.$$

И в этом случае можно взять $g_0 \equiv 1$. Положим $Q := \tilde{L}$. Как и в 1) и 2), вследствие непрерывности функционалов $\Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, \cdot)$ и $\Omega_Q(\mu, z, \cdot)$ на F ([4, lemma 3.3] и теорема 11 (ii) соответственно), полноты системы $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в F и равенства $\Omega_Q(\mu, z, e_\lambda) = \Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, e_\lambda)$ для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$, равенство $\Omega_{\tilde{L}} = \Omega_Q$ выполняется на $\mathbb{C}^2 \times F$. (Заметим, что равенство $\Omega_{\tilde{L}}(\mu, z, e_\lambda) = \frac{\tilde{L}(\lambda,z)-\tilde{L}(\mu,z)}{\lambda-\mu}$ установлено в [4, lemma 3.3] при $\mu = z$; очевидно, оно имеет место для любых $\mu, z \in \mathbb{C}$.)

Авторы выражают благодарность А.В. Абанину за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976. 536 с.
2. Мелихов С.Н. *Продолжение целых функций вполне регулярного роста и правый обратный для оператора представления аналитических функций рядами квазиполиномов* // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 105–128.
3. Иванова О.А., Мелихов С.Н. *О представлении аналитических функций рядами из квазимономов* // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. Владикавказ, изд-во ВНЦ РАН и РСО-А. 2008. С. 30–37.
4. S.N. Melikhov, S. Momm *On the expansions of analytic functions on convex locally closed sets in exponential series* // Владикавк. матем. журн. 2011. Т. 13, № 1. С. 44–58.

5. Иванова О.А., Мелихов С.Н. *О формулах для коэффициентов рядов по функциям Миттаг-Леффлера для аналитических функций* // Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2014. С. 251–260. (Матем. форум. Т.8. Ч.1. Итоги науки. Юг России).
6. S.N. Melikhov *Generalized Fourier expansions for distributions and ultradistributions* // Rev. Mat. Compl. 1999. V. 12, № 2. P. 349–379.
7. M. Pommies *Sur les restes successifs des séries de Taylor* // Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse. 1960. V. 24, № 4. P. 77–165.
8. Коробейник Ю.Ф. *К вопросу о разложении аналитических функций в ряды по рациональным функциям* // Матем. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 723–737.
9. Линчук С.С., Нагнибида Н.И. *Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций* // Сибирский матем. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 507—513.
10. I.N. Dimovski, V.Z. Hristov *Commutants of the Pommiez operator* // Int. J. Math. and Math. Sc. 2005. Issue 8. P. 1239–1251.
11. Шерстюков В.Б. *Нетривиальные разложения нуля и представление аналитических функций рядами простых дробей* // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 458—473.
12. Yu.S. Linchuk *Description of the generalized eigenvalues and eigenvectors of some classical operators.* (Ukrainian. English summary). // Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky. 2013. № 2. P. 25–29.
13. Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения* . М.: Мир, 1969. 1072 с.
14. Робертсон А.П., Робертсон В.Д. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967. 257 с.
15. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ. Часть 2.* М.: Наука, 1985. 464 с.
16. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир, 1968. 279 с.
17. S.N. Melikhov, S. Momm *Analytic solutions of convolution equations on convex sets with obstacle in the boundary* // Math. Scand. 2000. V. 86. P. 293–319.
18. Мелихов С.Н., Момм З. *О свойстве внутрь-продолжаемости представляющих систем экспонент на выпуклых локально замкнутых множествах* // Владикавк. матем. журн. 2008. Т. 10, № 2. С. 36—45.

Ольга Александровна Иванова,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Ворровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: *neo_ivolga@mail.ru*

Сергей Николаевич Мелихов,
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Ворровича
ул. Мильчакова, 8а,
344090, г. Ростов-на-Дону, Россия,
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса, 22,
362027, г. Владикавказ, Россия
E-mail: *melih@math.rsu.ru*