ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 3-16.

УДК 517.95

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М.А. ГАЦУНАЕВ, А.А. КЛЯЧИН

Аннотация. В работе рассматриваются кусочно-линейные решения уравнения минимальной поверхности над заданной триангуляцией многогранной области. Показывается, что при определенных условиях градиенты таких функций остаются по модулю ограниченными при стремлении к нулю максимального диаметра треугольников триангуляции. Подчеркивается, что это свойство выполняется, если кусочно-линейные функции приближают значение площади графика гладкой функции с необходимой точностью. Следствием полученных свойств является равномерная сходимость кусочно-линейных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности.

Ключевые слова: кусочно-линейные функции, уравнение минимальной поверхности, аппроксимация функционала площади.

Mathematics Subject Classification: 35J25, 35J93, 65N30

1. Введение

Некоторые задачи, возникающие при проектировании архитектурных сооружений, сводятся к построению поверхностей минимальной площади. Это достаточно подробно отражено в книге [1], а также в работе [2], где изучается проблема разработки тентовых тканевых конструкций. Подробный анализ приведенных там результатов приводит к задаче разработки эффективных методов приближенного решения уравнения минимальной поверхности и математическому обоснованию найденных методов в плане устойчивости и сходимости приближенных решений. Основная трудность при исследовании данных вопросов заключается в том, что уравнение минимальной поверхности является нелинейным, и поэтому традиционные методы, используемые для линейных уравнений, не пригодны.

Наш подход заключается в том, что мы определяем понятие кусочно-линейного решения уравнения минимальной поверхности над заданной триангуляцией расчетной области и устанавливаем необходимые свойства этих решений. Именно, показываем, что порядок точности аппроксимации функционала площади относительно диаметров треугольников равен двум, устанавливаем, что частные производные ограничены постоянной, независящей от мелкости разбиения при достаточной степени аппроксимации функционала площади и т. д. Доказанные утверждения позволяют, в частности, установить равномерную сходимость кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности при стремлении к нулю диаметров треугольников триангуляции.

M.A. Gatsunaev, A.A. Klyachin, On uniform convergence of piecewise-linear solutions to minimal surface equation.

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-97034 р_поволжье_а).

Поступила 11 марта 2014 г.

2. Кусочно-линейные решения уравнения минимальной поверхности.

Пусть задана многогранная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим некоторое разбиение этого многогранника на невырожденные тетраэдры T_1, T_2, ..., T_N. Пусть M_1, M_2, ..., M_m – все вершины этих тетраэдров. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной грани и ни одного ребра тетраэдров.

Для произвольного набора значений $u_1, u_2, \ldots, u_m$ определим кусочно-линейную функцию $u : \Omega \to \mathbf{R}$ так, что $u(M_i) = u_i, i = 1, \ldots, m$ и функция $u(x) = p_1^k x_1 + \cdots + p_n^k x_n + b^k$ на каждом тетраэдре $T_k, k = 1, \ldots, N$. Данная функция будет непрерывной в Ω, и в каждом тетраэдре T_k определен градиент $\nabla u \equiv p^k = (p_1^k, \ldots, p_n^k)$. Поэтому площадь графика функции u вычисляется суммой

$$S(p) = S(p^1, \ldots, p^N) = \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + |p^k|^2}\ v(T_k),$$

где $v(T_k)$ – n-мерный объем тетраэдра T_k.

Так как векторы $p^1, \ldots, p^N$ однозначно определяются значениями $u_1, \ldots, u_m$, то можем записать значение площади $S(p)$ через переменные $u = (u_1, \ldots, u_m)$: $S(u) = S(u_1, \ldots, u_m)$. Действительно, значения переменных $p^1, \ldots, p^N$ выражаются линейно через переменные $u_1, \ldots, u_m$. Тогда найдутся такие числа a_{li}^k, что

$$p_l^k = \sum_{i=1}^{m} a_{li}^k u_i,\ k = 1, \ldots, N,\ l = 1, \ldots, n.$$

Коэффициенты a_{li}^k однозначно определяются разбиением области Ω на тетраэдры $T_1, \ldots, T_N$. Поэтому

$$S(u) = S(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \sum_{l=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{li}^k u_i)^2}\ \cdot v(T_k).$$

Пусть теперь в вершинах $M_1, \ldots, M_m$ заданы некоторым образом значения $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Соответствующую кусочно-линейную функцию, построенную по этим значениям, обозначим через φ. Поставим задачу нахождения такой кусочно-линейной функции u, на которой достигается минимум площади $S(u)$ и удовлетворяющей граничному условию, т. е. задачу

$$S(u_1, \ldots, u_m) \to \min, \quad u(M_i) = \varphi_i, \quad \forall\ M_i \in \partial\Omega. \tag{1}$$

Замечание. Пусть $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ – решение задачи (1). Через u^* будем также обозначать соответствующую кусочно-линейную функцию. Предположим, что $h(x)$ произвольная кусочно-линейная функция, удовлетворяющая условию $h(M_i) = 0$ для любой точки $M_i \in \partial\Omega$. Тогда функция $\sigma(t) = S(u^* + th)$ в точке $t = 0$ достигает своего минимального значения. Таким образом, $\sigma'(0) = 0$, что равносильно равенству

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \frac{\langle \nabla u^*, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u^*|^2}} dx = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Отметим, что функция $S(u_1, \ldots, u_m)$ является выпуклой вниз по совокупности переменных $u_1, \ldots, u_m$. При этом, так как в граничных точках значения функции u фиксированы,

$$\lim_{|u| \to +\infty} S(u) = +\infty,$$

где $|u| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |u_i|$. Поэтому функция $S(u)$ достигает своего минимума в некоторой точке u^*. Покажем единственность. Предположим противное, т. е. найдется еще одно решение v^* задачи (1). Тогда для кусочно-линейной функции v^* также выполнено условие (2). Полагая в качестве $h = v^* - u^*$, приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \left(\frac{\langle \nabla v^*, \nabla(v^* - u^*)\rangle}{\sqrt{1+|\nabla v^*|^2}} - \frac{\langle \nabla u^*, \nabla(v^* - u^*)\rangle}{\sqrt{1+|\nabla u^*|^2}} \right) dx = 0. \tag{3}$$

Ниже нам понадобится неравенство

$$\langle \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}}, \xi - \eta \rangle \geq \frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)}, \tag{4}$$

которое выполняется для любых векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. Отметим, что похожие неравенства получены в работах [3], [4], [5] и также используются для исследования вопросов единственности решений уравнения минимальной поверхности. Неравенство (4), из которого мы получим единственность, нам понадобится ниже и для оценки градиента кусочно-линейного решения u^*. А применить для этой оценки неравенства из вышеприведенных работ не удается. Потому-то мы и используем неравенство (4). Оно выводится следующим образом. Для начала заметим, что

$$\sqrt{1+|\xi|^2} \geq \sqrt{1+|\eta|^2} + \frac{\langle \eta, \xi-\eta\rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\eta}{\sqrt{1+|\eta|^2}}, \xi - \eta \rangle &= -\frac{\langle \xi, \eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{\langle \eta, \xi-\eta\rangle}{\sqrt{1+|\eta|^2}} \geq \\ \geq \sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta-\xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} &= \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} - \langle \xi,\eta\rangle - 1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \geq \\ &\geq \frac{|\xi-\eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)}.\end{aligned} \tag{5}$$

Полагая $\xi = \nabla u^*$ и $\eta = \nabla v^*$, в неравенстве (4) из (3) получаем, что $\nabla u^* \equiv \nabla v^*$. Используя, что на границе $\partial\Omega$ функции u^* и v^* совпадают, получаем нужное равенство $u^* \equiv v^*$.

3. Оценка модуля градиента

Пусть f – решение уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \tag{6}$$

в области Ω, непрерывное в $\overline{\Omega}$, причем $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$, где $\varphi(x)$ – непрерывная функция, заданная на границе области Ω. Стоит заметить, что соответствующая задача Дирихле для произвольной области (даже с гладкой границей) не всегда имеет решение. Для плоских областей необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Дирихле для произвольной непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ является условие выпуклости этой области. В пространстве размерности больше двух таким условием является неотрицательность средней кривизны относительно внешней нормали границы области. С точными формулировками и доказательствами данных результатов можно ознакомиться по работам [6]–[13]. В нашей статье мы не накладываем никаких условий на область Ω, однако предполагаем, что для данной граничной функции $\varphi(x)$ решение задачи Дирихле существует. Понятно, что такие функции $\varphi(x)$ существуют для произвольной области Ω.

Далее через u^* мы обозначаем единственное решение задачи (1) с граничными данными $\varphi_i = \varphi(M_i)$, $M_i \in \partial\Omega$.

Введем величину для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$

$$\delta(\xi,\eta) = \sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}}.$$

Из неравенства (5) следует, что $\delta(\xi,\eta) > 0$ при всех $\xi \neq \eta$. Полагая $\xi = \nabla f$, $\eta = \nabla u^*$ и используя уравнение (6), получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \delta(\nabla f, \nabla u^*)\, dx = S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS,$$

где ν – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точках, где он существует. Пользуясь неравенством (см. доказательство теоремы 1)

$$\sqrt{1+|\eta|^2} - \sqrt{1+|\xi|^2} - \frac{\langle \xi, \eta - \xi\rangle}{\sqrt{1+|\xi|^2}} \geq$$

$$\geq \frac{|\xi - \eta|^2}{\sqrt{1+|\xi|^2}(\sqrt{1+|\xi|^2}\sqrt{1+|\eta|^2} + |\xi||\eta| + 1)},$$

заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{T_k} \frac{|\nabla f - \nabla u^*|^2\, dx}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}(\sqrt{1+|\nabla f|^2}\sqrt{1+|\nabla u^*|^2} + |\nabla f||\nabla u^*| + 1)} \leqslant$$

$$\leqslant S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS.$$

Зафиксируем произвольное $k = 1, \ldots, N$. Тогда

$$\int\limits_{T^k} \frac{|\nabla f - \nabla u^*|^2\, dx}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}(\sqrt{1+|\nabla f|^2}\sqrt{1+|\nabla u^*|^2} + |\nabla f||\nabla u^*| + 1)} \leqslant$$

$$\leqslant S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^* - f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS \equiv B. \tag{7}$$

Далее мы предполагаем, что $|\nabla f| \leqslant P_0$ в области Ω. Тогда из неравенства (7) получаем

$$\int\limits_{T^k} \frac{|\nabla f - \nabla u^*|^2}{\sqrt{1+|\nabla u^*|^2}} dx \leqslant 3(1+P_0^2)B. \tag{8}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\int\limits_{T^k} \frac{|\nabla u^*|^2}{\sqrt{1+|\nabla u^*|^2}} dx \leqslant 3(1+P_0^2)B + 2P_0 v(T^k)$$

или

$$\int\limits_{T^k} \sqrt{1+|\nabla u^*|^2} dx \leqslant 3(1+P_0^2)B + (2P_0+1) v(T^k).$$

Тогда из (8), применяя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\int\limits_{T^k} |\nabla f - \nabla u^*| dx \leqslant 3(1+P_0^2)\left(\left(B + v(T^k)\right) B\right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{T^k} |\nabla u^*| dx \leqslant P_0 v(T^k) + 3(1+P_0^2)\left(\left(B+v(T^k)\right)B\right)^{1/2}.$$

В силу того, что градиент ∇u^* постоянен в T_k, получаем неравенство

$$v(T_k)|\nabla u^*(x)| \leqslant P_0 v(T_k) + 3(1+P_0^2)\left(\left(B+v(T_k)\right)B\right)^{1/2}, \quad x \in T_k.$$

Разделив на $v(T_k)$, приходим к оценке градиента

$$|\nabla u^*(x)| \leqslant P_0 + 3(1+P_0^2)\sqrt{(\alpha_k+1)\,\alpha_k}\,, \tag{9}$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{v(T_k)}\left(S(u^*) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^*-f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS\right).$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – решение уравнения (6) такое, что $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$ и $P_0 = \sup\limits_{\Omega} |\nabla f| < +\infty$. Предположим, что u^* является решением задачи (1) с условием $u^*(M_i) = \varphi(M_i)$, $M_i \in \partial\Omega$. Тогда справедливо неравенство (9) для любой точки $x \in \Omega$.*

Замечание. Обозначим через f^L кусочно-линейную функцию, построенную по значениям функции f в точках $M_i, i = 1\ldots, m$. Если величина

$$A(f) = \frac{1}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N} v(T_k)}\left(S(f^L) - S(f) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu\rangle (u^*-f)}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\, dS\right)$$

остается ограниченной при определенном стремлении мелкости разбиения $\mu = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N} \operatorname{diam} T_k$ области Ω к нулю для достаточно гладких функций f, то из теоремы 2 и неравенства $S(u^*) \leqslant S(f^L)$ мы заключаем, что приближенное решение u^* имеет градиент, ограниченный постоянной, независящей от мелкости разбиения.

4. Аппроксимация функционала площади

Исследуем величину $S(f^L) - S(f)$ для функций $f \in C^3(\Omega)$ при $n = 2$, где Ω замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Рассмотрим поверхность, заданную в виде графика функции $z = f(x, y)$ над множеством Ω.

Пусть $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ и $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. Тогда Ω разбивается на прямоугольники $\Omega_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$. Далее разделим каждый такой прямоугольник правой или левой диагональю. Все дальнейшие рассуждения будем проводить с прямоугольником $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ так как оценка погрешности вычисления площади для остальных прямоугольников аналогична.

Если разделение происходит правой диагональю, то площадь графика кусочно-линейной функции над диагональю равна

$$S_U^r = \frac{1}{2}(x_1-x_0)(y_1-y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)}{y_1-y_0}\right)^2},$$

а для треугольника, лежащего ниже нее

$$S_D^l = \frac{1}{2}(x_1-x_0)(y_1-y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0)}{x_1-x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_0,y_1)-f(x_1,y_1)}{y_1-y_0}\right)^2}.$$

Если прямоугольник делился левой диагональю, то площадь графика кусочно-линейной функции над диагональю равна

$$S_U^l = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_0, y_1) - f(x_1, y_1)}{x_1 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_1, y_0) - f(x_1, y_1)}{y_1 - y_0}\right)^2},$$

а для треугольника, лежащего ниже нее

$$S_D^l = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1)}{x_1 - x_0}\right)^2 + \left(\frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{y_1 - y_0}\right)^2}.$$

Обозначим через S площадь полученной кусочно-линейной поверхности. Тогда справедлива

Теорема 3. *Пусть $f(x, y) \in C^3(\Omega)$ и*

$$M_2 = \sup_{\Omega} \max\{|f''_{xx}|, |f''_{xy}|, |f''_{yy}|\}, \ M_3 = \sup_{\Omega} \max\{|f'''_{xxx}|, |f'''_{xxy}|, |f'''_{xyy}|, |f'''_{yyy}|\},$$

$$h_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1}), h_2 = \max_{1 \leqslant j \leqslant m}(y_j - y_{j-1}), h = \max(h_1, h_2).$$

Тогда

$$\left| \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}\, dxdy - S \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\Omega| \left(2M_3 + 12\left(3 + \frac{h}{\min\{h_1, h_2\}}\right) M_2^2 + \frac{5}{2} M_3^2 h^2 \right) h^2.$$

Доказательство. Для краткости изложения предположим, что прямоугольники разбиения множества Ω делились правой диагональю. Результаты, полученные в рассматриваемом и общем случае, будут совпадать.

Рассмотрим прямоугольник $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$. С помощью интерполяционной формулы Ньютона (см. [14], гл. 3, §12), получаем линейное приближение l_U и l_D функции $f(x, y)$ над верхним и нижним треугольниками разбиения этого прямоугольника, сответственно

$$\begin{gathered} f(x, y) = l_U(x, y) + R_U(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1, y_0) + \\ +(y - y_0) f(x_0, y_0; y_1) + (y - y_0)(y - y_1) f(x, y_0; y_1; y) + \\ +(x - x_0)(y - y_1) f(x_0; x, y_0; y_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x, y_0), \\ f(x, y) = l_D(x, y) + R_D(x, y) = f(x_1, y_1) + (x - x_1) f(x_1; x_0, y_1) + \\ +(y - y_1) f(x_1, y_1; y_0) + (y - y_1)(y - y_0) f(x, y; y_1; y_0) + \\ +(x - x_1)(y - y_0) f(x_0; x, y_1; y_0) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x, y_1), \end{gathered}$$

где $f(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \cdots; \alpha_n, \beta_1; \beta_2; \beta_3; \cdots; \beta_m)$ — разделенные разности функции $f(x, y)$ (см. [14], гл. 2, §5). В частности,

$$f(x_0; x_1, y_0) = \frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0}, \qquad f(x_0, y_0; y_1) = \frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{y_1 - y_0},$$

$$f(x_0; x_1, y_1) = \frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)}{x_1 - x_0}, \qquad f(x_1; y_0, y_1) = \frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)}{y_1 - y_0}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0} + \frac{\partial R_U}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)}{y_1 - y_0} + \frac{\partial R_U}{\partial y}(x, y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}+\frac{\partial R_D}{\partial x}(x,y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{f(x_1,y_1)-f(x_1,y_0)}{y_1-y_0}+\frac{\partial R_D}{\partial y}(x,y).$$

Рассмотрим разность площадей графика заданной функции и графика полученной интерполяцией линейной функции над верхним треугольником разбиения

$$\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy - S_U^r = \iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy-$$
$$-\iint\limits_U \sqrt{1+\left(\frac{f(x_1,y_1)-f(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right)^2+\left(\frac{f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0)}{y_1-y_0}\right)^2}\,dxdy=$$
$$=\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy-$$
$$-\iint\limits_U \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y)\right)^2}=$$
$$=\iint\limits_U C_U(x,y)\left(2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y)+2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y)-\left(\frac{\partial R_U}{\partial x}(x,y)\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial R_U}{\partial y}(x,y)\right)^2\right)dxdy,$$

где

$$C_U(x,y)=\left(\sqrt{1+|\nabla f|^2}+\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial R_U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial R_U}{\partial y}\right)^2}\right)^{-1}.$$

Пусть $y=\Gamma_1(x)$ задает гипотенузу треугольника разбиения и $x=\Gamma_2(y)$ – обратная к ней функция. Применим интегрирование по частям к интегралу, полученному в правой части равенства

$$\iint\limits_U \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy - S_U^r = 2\int\limits_{y_0}^{y_1}\left(R_U(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)C_U(x,y)\Big|_{x=x_0}^{x=\Gamma_2(y)}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{x_0}^{\Gamma_2(y)} R_U(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial C_U}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)C_U(x,y)\right]dx\right)dy+$$
$$+2\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(R_U(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)C_U(x,y)\Big|_{y=\Gamma_1(x)}^{y=y_1}-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\Gamma_1(x)}^{y_1} R_U(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial C_U}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)C_U(x,y)\right]dy\right)dx-$$
$$-\iint\limits_U |\nabla R_U(x,y)|^2 dxdy.$$

Обозначим через $C_D(x,y)$ функцию на D, аналогичную функции $C_U(x,y)$. Тем же образом на D выводится равенство

$$\iint\limits_D \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy - S_D^r = 2\int\limits_{y_0}^{y_1}\Bigg(R_D(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)C_D(x,y)|_{x=\Gamma_2(y)}^{x=x_1} -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_2(y)}^{x_1} R_D(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial}{\partial C_D x}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)C_D(x,y)\right]\,dx\Bigg)\,dy+$$

$$+2\int\limits_{x_0}^{x_1}\Bigg(R_D(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)C_D(x,y)|_{y=y_0}^{y=\Gamma_1(x)} -$$

$$-\int\limits_{y=y_0}^{\Gamma_1(x)} R_D(x,y)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial C_D}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)C_D(x,y)\right]\,dy\Bigg)\,dx-$$

$$-\iint\limits_D |\nabla R_D(x,y)|^2 dxdy.$$

Просуммируем полученные равенства, учитывая, что на Γ значения непрерывных функций совпадают

$$\iint\limits_{U\cup D} \sqrt{1+|\nabla f|^2}\,dxdy - \Big(S_U^r + S_D^r\Big) =$$

$$= 2\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big(R_U(x,y_1)f'_y(x,y_1)C_U(x,y_1) - R_D(x,y_0)f'_y(x,y_0)C_D(x,y_0)\Big)dx+$$

$$+2\int\limits_{y_0}^{y_1}\Big(R_D(x_1,y)f'_x(x_1,y)C_D(x_1,y) - R_U(x_0,y)f'_x(x_0,y)C_U(x_0,y)\Big)dy+$$

$$+2\int\limits_{x_0}^{x_1} R_U(\Gamma_1(x))f'_y(\Gamma_1(x))\Big(C_U(\Gamma_1(x)) - C_D(\Gamma_1(x))\Big)dx-$$

$$-2\int\limits_{y_0}^{y_1} R_U(\Gamma_2(y))f'_x(\Gamma_2(y))\Big(C_D(\Gamma_2(y)) - C_U(\Gamma_2(y))\Big)dy-$$

$$-2\iint\limits_U\Big(R_U\,\mathrm{div}(C_U(x,y)\nabla f(x,y)) + \frac{1}{2}|\nabla R_U(x,y)|^2\Big)\,dxdy-$$

$$-\,2\iint\limits_D\Big(R_D\,\mathrm{div}(C_D(x,y)\nabla f(x,y)) + \frac{1}{2}|\nabla R_D(x,y)|^2\Big)\,dxdy. \tag{10}$$

Нетрудно установить, что

$$|C_U(x,y) - C_D(x,y)| \leqslant 2C_U(x,y)C_D(x,y)M_2h,$$

$$|C_U(x_1,y) - C_D(x_0,y)| \leqslant 4C_U(x,y)C_D(x,y)M_2h_1,$$

$$|C_U(x,y_1) - C_D(x,y_0)| \leqslant 4C_U(x,y)C_D(x,y)M_2h_2. \tag{11}$$

Тогда, используя то, что разделенные разности равны значениям соответствующих производных в некоторой точке области определения, получим

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(R_U(x,y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)C_U(x,y_1)-R_D(x,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)C_D(x,y_0)\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_1)C_U(x,y_1)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\xi_1,\eta_1)(y_1-y_0)+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi_2,\eta_2)C_U(x,y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_3,y_0)(y_1-y_0)+$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_3,y_0)f_y(x,y_0)\Big(C_U(x,y_1)-C_D(x,y_0)\Big)\right]dx\right|\leqslant\frac{1}{4}h_1h_2\Big(M_3+5M_2^2\Big)h_1^2. \tag{12}$$

Аналогично,

$$\left|\int\limits_{y_0}^{y_1}\left(R_D(x_1,y)f_x(x_1,y)C_U(x_1,y)-R_U(x_0,y)f_x(x_0,y)C_U(x_0,y)\right)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4}h_1h_2\Big(M_3+5M_2^2\Big)h_2^2. \tag{13}$$

Оценим модули погрешностей интерполяции над каждым из треугольников:

$$|R_U(x,y)|\leqslant M_2(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2),\quad |R_D(x,y)|\leqslant M_2(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2). \tag{14}$$

Эти неравенства можно использовать в качестве оценок погрешностей $R_U(\Gamma)$ и $R_D(\Gamma)$ на диагонали Γ

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

рассматриваемого прямоугольника. Тогда из соотношений (11) следует

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x_1}R_U(\Gamma_1(x))f'_y(\Gamma_1(x))\Big(C_U(\Gamma_1(x))-C_D(\Gamma_1(x))\Big)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2M_2^2\left(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2\right)h_1h, \tag{15}$$

$$\left|\int\limits_{y_0}^{y_1}R_U(\Gamma_2(y))f'_x(\Gamma_2(y))\Big(C_D(\Gamma_2(y))-C_U(\Gamma_2(y))\Big)dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2M_2^2\left(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2\right)h_2h. \tag{16}$$

Оценим квадраты модулей градиентов погрешностей

$$\frac{\partial R_U}{\partial x}=(y-y_0)(y-y_1)f(x;x,y_0;y_1;y)+(y-y_1)f(x_0;x,y_0;y_1)+$$

$$+(x-x_0)(y-y_1)f(x_0;x;x,y_0;y_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x;x,y_0)+$$

$$+2\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)f(x_0;x_1;x,y_0),$$

$$\frac{\partial R_U}{\partial y}=(y-y_0)(y-y_1)f(x,y_0;y_1;y;y)+2\left(y-\frac{y_0+y_1}{2}\right)f(x,y_0;y_1;y)+$$

$$+(x-x_0)f(x_0;x,y_0;y_1),$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial x}=(y-y_1)(y-y_0)f(x;x,y_1;y_0;y)+(y-y_1)f(x_0;x,y_1;y_0)+$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x;x,y_1)+2\left(x-\frac{x_0+x_1}{2}\right)f(x_0;x_1;x;x,y_1)+$$

$$+(x-x_1)(y-y_1)f(x_0;x;x,y_1;y_0),$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial y}=(y-y_1)(y-y_0)f(x,y;y;y_1;y_0)+2\left(y-\frac{y_0+y_1}{2}\right)f(x,y;y_1;y_0)+$$

$$+(x-x_1)f(x_0;x,y_1;y_0).$$

Отсюда, с помощью неравенства Коши–Буняковского, можно получить

$$\left|\frac{\partial R_U}{\partial x}\right|^2\leqslant\frac{1}{16}M_3^2h_2^4+M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^4+M_2^2h_1^2,$$

$$\left|\frac{\partial R_U}{\partial y}\right|^2\leqslant\frac{1}{16}M_3^2h_2^4+M_2^2h_2^2+M_2^2h_1^2,$$

$$\left|\nabla R_U\right|^2\leqslant\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+2M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^2+2M_2^2h_1^2. \tag{17}$$

Аналогично,

$$\left|\nabla R_D\right|^2\leqslant\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+2M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^2+2M_2^2h_1^2. \tag{18}$$

Далее, заметим, что для U выполнено

$$\operatorname{div}(C_U\nabla f)=C_U\Delta f+\langle\nabla C_U,\nabla f\rangle,$$

$$\frac{\partial C_U}{\partial x}=-(C_U)^2\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+|\nabla f|^2}=-(C_U)^2\frac{f'_xf''_{xx}+f'_yf''_{xy}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}},$$

$$\frac{\partial C_U}{\partial y}=-(C_U)^2\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{1+|\nabla f|^2}=-(C_U)^2\frac{f'_xf''_{xy}+f'_yf''_{yy}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

Поэтому,

$$\left|\langle\nabla f,\nabla C_U\rangle\right|=\left|\frac{C_U^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\left((f'_x)^2f''_{xx}+2f'_xf'_yf''_{xy}+(f'_y)^2f''_{yy}\right)\right|\leqslant 4M_2.$$

А так как

$$|C_U\Delta f|\leqslant 2M_2,$$

то

$$|\operatorname{div}(C_U\nabla f)|\leqslant 6M_2. \tag{19}$$

Аналогично для D

$$|\operatorname{div}(C_D\nabla f)|\leqslant 6M_2. \tag{20}$$

Оценим теперь по модулю сумму в правой части равенства (10). Пользуясь неравенствами (14), (17)–(20), получим

$$\left|\iint\limits_U\left(R_U\operatorname{div}(C_U(x,y)\nabla f(x,y))+\frac{1}{2}|\nabla R_U(x,y)|^2\right)dxdy+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_D\left(R_D\operatorname{div}(C_D(x,y)\nabla f(x,y))+\frac{1}{2}|\nabla R_D(x,y)|^2\right)dxdy\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left(3M_2^2(h_2^2+4h_1h_2+h_1^2)+\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+2M_2^2h_2^2+M_3^2h_1^2h_2^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^2+2M_2^2h_1^2\right)|P| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+5M_2^2h_2^2+3M_2^2h_1h_2+M_3^2h_1^2h_2^2+5M_2^2h_1^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^4\right)|P|, \tag{21}$$

где $|P|$ – площадь прямоугольника $P=[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$. Теперь, в силу (10), (12), (13), (15), (16) , (21) и того, что площадь прямоугольника P не превосходит h_1h_2, мы имеем

$$\Big|\iint\limits_P \sqrt{1+|\nabla f|^2}dxdy-\left(S_U^r+S_D^r\right)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}h_1h_2\Big(M_3+5M_2^2\Big)(h_1^2+h_2^2)+4M_2^2\left(\frac{1}{4}h_2^2+h_1h_2+\frac{1}{4}h_1^2\right)h(h_1+h_2)+$$

$$+\left(\frac{1}{8}M_3^2h_2^4+5M_2^2h_2^2+3M_2^2h_1h_2+M_3^2h_1^2h_2^2+5M_2^2h_1^2+\frac{1}{16}M_3^2h_1^4\right)h_1h_2 \leqslant$$

$$h_1h_2\left(2M_3h^2+\left(36+12\frac{h}{\min\{h_1,h_2\}}\right)M_2^2h^2+\frac{5}{2}M_3^2h^4\right).$$

Суммируя неравенство по всем прямоугольникам разбиения множества Ω, окончательно получим

$$\Big|\iint\limits_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2}dxdy-S\Big| \leqslant |\Omega|\left(2M_3+12\left(3+\frac{h}{\min\{h_1,h_2\}}\right)M_2^2+\frac{5}{2}M_3^2h^2\right)h^2.$$

5. Равномерная сходимость приближенных решений

Теперь получим равномерную оценку для кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности. Итак, пусть f – решение уравнения (6) в области Ω. Мы будем предполагать, что

$$\sup_\Omega|\nabla f|=P_0<+\infty.$$

Далее будем рассуждать так же, как и в работах [15], [16]. Обозначим через f^L кусочно-линейную функцию такую, что $f^L(M_i)=f(M_i)$. Положим $f^t(x)=u^*(x)+t(f^L(x)-u^*(x))$ и $P_1=\sup\limits_\Omega|\nabla u^*|$, $P=\max\{1,P_0,P_1\}$. Понятно, что $u^*|_{\partial\Omega}=f^L|_{\partial\Omega}$. Для любого $t\in\mathbf{R}$ функция $f^t(x)$ является кусочно-линейной и можно вычислить площадь ее графика

$$\sigma(t)=\int\limits_\Omega\sqrt{1+|\nabla f^t|^2}dx.$$

Так как при $t=0$ функция $\sigma(t)$ принимает минимальное значение, то $\sigma'(0)=0$. Используя это равенство, получаем

$$S(f^L)-S(u^*)=\int\limits_0^1 ds\int\limits_0^s\sigma''(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^1 ds\int\limits_0^s dt\int\limits_\Omega\frac{(1+|\nabla f^t|^2)|\nabla f^L-\nabla u^*|^2-\langle\nabla f^t,\nabla f^L-\nabla u^*\rangle^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}}dx\geq$$

$$\geq \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s dt \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f^L - \nabla u^*|^2}{(1+|\nabla f^t|^2)^{3/2}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \int\limits_\Omega |\nabla f^L - \nabla u^*|^2 dx. \quad (22)$$

Воспользуемся неравенством Пуанкаре (см., например, [17], п. 7.8) для функции $h(x) = f^L(x) - u^*(x)$, $h|_{\partial\Omega} = 0$. Из (22) получаем

$$S(f^L) - S(u^*) \geq \frac{\lambda(\Omega)}{\sqrt{(1+P^2)^3}} \int\limits_\Omega |h(x)|^2 dx,$$

где постоянная $\lambda(\Omega) = (\omega_n/|\Omega|)^{2/n}$ и ω_n, $|\Omega|$ – n-мерные объемы единичного шара и области Ω, соответственно. Далее, положим $M = \sup\limits_\Omega |h|$ и, не ограничивая общности, можем считать, что найдется точка $x_0 \in \Omega$, в которой $h(x_0) = M$. Покажем, что шар $B_{M/4P}(x_0) \subset \Omega$. Действительно, пусть $x' \in \partial\Omega$ такая, что $|x_0 - x'| = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Тогда

$$2P|x_0 - x'| \geq h(x_0) - h(x') = M - h(x') \geq M - M' \geq M/2.$$

Таким образом, расстояние от точки x_0 до границы $\partial\Omega$ больше чем $M/4P$. Следовательно, $B_{M/4P}(x_0) \subset \Omega$. Предположим теперь, что $x \in B_{M/4P}(x_0)$. Тогда

$$h(x) \geq h(x_0) - 2P|x - x_0| > M - 2P\frac{M}{4P} = M/2.$$

Таким образом, шар $B_{M/4P}(x_0) \subset D_M$, где

$$D_M = \{x \in \Omega : |h| > M/2\} \subset\subset \Omega.$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega |h(x)|^2 dx \geq \int\limits_{D_M} |h|^2 dx \geq$$

$$\geq \int\limits_{B_{M/4P}(x_0)} \left(\frac{M}{2}\right)^2 dx = \frac{M^2}{4}\left(\frac{M}{4P}\right)^n \omega_n = \frac{M^{n+2}}{4^{n+1}P^n}\omega_n.$$

Таким образом,

$$\max_\Omega |f^L - u^*| \leqslant 4P^{4/3}\left(\frac{S(f^L) - S(u^*)}{\lambda(\Omega)\omega_n}\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

Теорема 4. *Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ – решение уравнения минимальной поверхности (6) и u^* кусочно-линейная функция, являющаяся решением задачи (1) с $\varphi_i = f(M_i)$, для всех $M_i \in \partial\Omega$. Предположим, что $P_0 = \sup\limits_\Omega |\nabla f| < +\infty$ и $P_1 = \sup\limits_\Omega |\nabla u^*|$. Тогда*

$$\max_\Omega |f^L - u^*| \leqslant 4P^{4/3}\left(\frac{S(f^L) - S(u^*)}{\lambda(\Omega)\omega_n}\right)^{\frac{1}{n+2}},$$

где $P = \max\{1, P_0, P_1\}$.

Пусть теперь Ω – прямоугольник $[a,b] \times [c,d]$. Зафиксируем натуральное число m и рассмотрим разбиение прямоугольника, заданное точками $x_i = a + \frac{i}{m}(b-a)$, $y_j = c + \frac{j}{m}(d-c)$, $i,j = 0,1,\ldots,m$. Каждый из получившихся прямоугольников $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i,j = 0,1,\ldots,m-1$, разобъем диагональю, соединяющей вершины (x_i, y_j) и (x_{i+1}, y_{j+1}), на два треугольника. Предположим, что в прямоугольнике Ω задано решение f уравнения минимальной поверхности, $f \in C^3(\overline{\Omega})$. Положим u_m^* решение задачи (1), соответствующее данному разбиению и удовлетворяющее граничным условиям

$$u_m^*(x_i, c) = f(x_i, c),\ u_m^*(x_i, d) = f(x_i, d), \quad i = 0, \ldots, m,$$

$$u_m^*(a, y_j) = f(a, y_j),\ u_m^*(b, y_j) = f(b, y_j),\quad j = 0, \ldots, m.$$

Следствие. *Последовательность u_m^* равномерно в Ω сходится к решению f, при этом*

$$\sup_\Omega |f(x,y) - u_m^*(x,y)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

при $m \to \infty$.

Доказательство. Обозначим через f^L кусочно-линейную функцию такую, что $f^L(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$, $i, j = 0, \ldots, m$. Покажем в начале, что градиенты функций u_m^* ограничены постоянной, независящей от m. Для этого воспользуемся неравенством (9). Из теоремы 3 следует, что для некоторой постоянной C_1, независящей от m, выполнено

$$|S(f) - S(f^L)| \leqslant \frac{C_1}{m^2},$$

а применяя формулу трапеций численного интегрирования (см. [14], гл. 3), получим

$$\left| \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\langle \nabla f, \nu \rangle (u_m^* - f)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dS \right| \leqslant \frac{C_2}{m^2}.$$

Таким образом,

$$|A(f)| \leqslant \frac{2}{(b-a)(d-c)}(C_1 + C_2) \equiv C_3.$$

Тогда, если $P_0 = \sup\limits_\Omega |\nabla f|$, то из неравенства (9) следует

$$|\nabla u_m^*| \leqslant P_0 + 3(1 + P_0^2)\sqrt{C_3(1 + C_3)} \equiv P_1.$$

Оценим теперь величину $S(f^L) - S(u_m^*)$. Построим произвольным образом функцию $\tilde{u}_m$ такую, что $\tilde{u}_m = u_m^*$ в прямоугольнике $\Omega_m = [x_1, x_{m-1}] \times [y_1, y_{m-1}]$, $\tilde{u}_m = f$ на $\partial\Omega$ и $|\nabla \tilde{u}_m - \nabla u_m^*| \leqslant C_4/m$, где постоянная C_4 не зависит от m. Тогда

$$\begin{gathered} 0 \leqslant S(f^L) - S(u_m^*) = S(f^L) - S(f) + S(f) - S(\tilde{u}_m) + S(\tilde{u}_m) - S(u_m^*) \leqslant \\ \leqslant S(f^L) - S(f) + S(\tilde{u}_m) - S(u_m^*) \leqslant \frac{C_1}{m^2} + \\ + \iint\limits_{\Omega \setminus \Omega_m} (\sqrt{1 + |\nabla \tilde{u}_m|^2} - \sqrt{1 + |\nabla u_m^*|^2}) dxdy \leqslant \\ \leqslant \frac{C_1}{m^2} + \frac{C_4}{m}(b-a)(d-c)(1 - (1 - 2/m)^2) = \\ = \frac{C_1}{m^2} + \frac{C_5}{m}(1 - (1 - 2/m)^2), \end{gathered}$$

где $C_5 = C_4(b-a)(d-c)$. Следовательно, из теоремы 4 получаем

$$|f - u_m^*| \leqslant |f - f^L| + |f^L - u_m^*| \leqslant |f - f^L| + 4P^{4/3}\left(\frac{S(f^L) - S(u_m^*)}{\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac{1}{4}},$$

где $P = \max\{1, P_0, P_1\}$. Применяя предыдущее неравенство, получаем

$$\begin{gathered} \sup_\Omega |f(x,y) - u_m^*(x,y)| \leqslant \\ \leqslant P_0\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}\frac{1}{m} + 4P^{4/3}\left(\frac{\frac{C_1}{m^2} + \frac{C_5}{m}(1 - (1 - 2/m)^2)}{\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{m}P_0\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2} + 4P^{4/3}\left(\frac{C_1 + 4C_5)}{m^2\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \to 0 \end{gathered}$$

при $m \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. *Конструирование форм современных архитектурных сооружений.* Киев:Будiвельник. 1978. 138 с.
2. Абдюшев А.А., Мифтахутдинов И.Х., Осипов П.П. *Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности* // Известия КазГАСУ. Строительные конструкции, здания и сооружения. 2009. № 2 (12).
3. Миклюков В.М. *Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности* // Матем. сб. 1979. № 108 (150). С. 268–289.
4. Hwang, Jenn-Fang *A uniqueness theorem for the minimal surface equation* // Pacific Journal of Mathematics. 1996. № 176(2). P. 357–364.
5. Hwang, Jenn-Fang *How many theorems can be derived from a vector function - on uniqueness theorems for the minimal surface equation* // Taiwanese J. Math. 2003. № 7(4). P. 513–539.
6. R. Finn *Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature* // J. d'Analyse Math. 1965. № 14. P. 139–160.
7. T. Rado *The problem of the least area and the problem of Plateau* // J. d'Analyse Math. Z. 1930. № 32. P. 763–796.
8. Бернштейн С.Н. *Об уравнениях вариационного исчисления* // УМН. 1941. № 8. С. 8–31.
9. Бернштейн С.Н., Петровский И.Г. *О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям* // УМН. 1941. № 8. С. 32–74.
10. J. Serrin *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables* // Phil. Trans. Royal Soc. London. 1964. A264. P. 313–496.
11. G. Stampacchia *On some multiple integral problems in the calculus of variations* // Comm. Pure Appl. Math. 1963. № 16. P. 382–422.
12. H. Jenkins, J. Serrin *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension* // J. ReineAngew. Math. 1968. № 229. P. 170–187.
13. R.C. Bassanezi, U. Massari *The Dirichlet problem for the minimal surface equation in non-regular domains* // Ann. Univ. Ferrara. 1978. № 24. P. 181–189.
14. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* Том 1, М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1962.
15. Клячин А.А. *О скорости сходимости последовательности, минимизирующей функционал площади*// Записки семинара "Сверхмедленные процессы вып. 2. -Волгоград: Изд-во ВолГУ. 2007. С. 136–142.
16. Клячин А.А. *О скорости сходимости последовательности, доставляющей минимум в вариационной задаче* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2012. № 1 (16). С. 12–20.
17. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука, 1989, 464 с.

Михаил Андреевич Гацунаев,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: mihpost@mail.ru

Алексей Александрович Клячин,
Волгоградский государственный университет,
проспект Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: klyachin-aa@yandex.ru