ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 67-77.

УДК 517.956.25

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. КОЖЕВНИКОВА, А.А. ХАДЖИ

Аннотация. В работе рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка, представителем которого является модельное уравнение вида

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha})_{x_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\Phi_\alpha(\mathbf{x})\right)_{x_\alpha}, \quad p_n\geq\ldots\geq p_1>1.$$

Установлена ограниченность решений однородной задачи Дирихле в неограниченных областях, расположенных вдоль одной из осей координат. Кроме того, получена оценка решений рассматриваемых уравнений с финитной правой частью, гарантирующая их степенное убывание при удалении аргумента на бесконечность.

Ключевые слова: задача Дирихле, анизотропное эллиптическое уравнение, неограниченная область, ограниченность решения, убывание решения.

Mathematics Subject Classification: 35J62

1. Введение

Пусть Ω — произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}_n,\ \ n\geq 2$. Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x},\nabla u))_{x_\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\Phi_\alpha(\mathbf{x})\right)_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x}\in\Omega; \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(\mathbf{x},\xi)$, $\alpha=\overline{1,n}$, измеримы по $\mathbf{x}\in\Omega$ для $\xi\in\mathbb{R}_n$ и непрерывны по $\xi\in\mathbb{R}_n$ для почти всех $\mathbf{x}\in\Omega$. Пусть $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)$, будем считать, что $1<p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_n$ и существуют положительные числа $\overline{a}$, $\widehat{a}$ такие, что для любых $\xi,\eta\in\mathbb{R}_n$ при почти всех $\mathbf{x}\in\Omega$ выполняются условия:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha(\mathbf{x},\xi)-a_\alpha(\mathbf{x},\eta)\right)\left(\xi_\alpha-\eta_\alpha\right)\geq\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}|\xi_\alpha-\eta_\alpha|^{p_\alpha}; \tag{3}$$

$$|a_\alpha(\mathbf{x},\xi)-a_\alpha(\mathbf{x},\eta)|\leqslant\widehat{a}|\xi_\alpha-\eta_\alpha|\left(|\xi_\alpha|+|\eta_\alpha|\right)^{p_\alpha-2}, \quad \alpha=1,2,\ldots,n; \tag{4}$$

$$a_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{0})=0, \quad \alpha=1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

L.M. Kozhevnikova, A.A. Khadzhi, Boundedness of solutions to anisotropic second order elliptic equations in unbounded domains.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00081-а).

Поступила 5 ноября 2013 г.

И.М. Колодий [1] установил ограниченность решений некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений в ограниченных областях. При этом требование ограниченности области является существенным условием в его доказательстве. Основной результат этой статьи — доказательство ограниченности обобщенных решений задачи (1), (2) в неограниченных областях Ω.

В статье предполагается, что функции $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(\Omega)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Обобщенное решение задачи (1), (2) понимается в "узком" смысле, т.е. из соответствующего анизотропного пространства Соболева $\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, которое определяется как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \|v_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega)}$ (определение приведено в п.2).

В работе рассматриваются области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s = \overline{1, n}$ (область Ω лежит в полупространстве $x_s > 0$ и сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто при любом $r > 0$).

Введем обозначение: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$, значения $a = 0$, $b = \infty$ могут быть опущены. Положим $P = n\left(-1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right)^{-1}$, $M = p_s(P - p_s)^{-1}$, $K = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\Big(-1 + \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\Big)^{-1}$.

Теорема 1. *Пусть $u(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи (1), (2) с*

$$\operatorname{supp} \Phi_\alpha \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \tag{6}$$

и выполнены условия (3)—(5), а также

$$1 < \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} < 1 + \frac{n}{p_s}. \tag{7}$$

Тогда при любом $R \geq 2R_0/\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$, справедливо неравенство

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega_{\varepsilon R}^R} |u(\mathbf{x})| \leqslant \frac{\widetilde{C}}{R^M}, \tag{8}$$

где $\widetilde{C}$ — положительная константа, зависящая от p_α, n, $\overline{a}, \widehat{a}$, $\|\Phi_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}$.

Пример 1. *Пусть $p_\alpha = p$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$. В шаре B_1 радиуса 1 с центром в начале координат рассмотрим функцию $u(\mathbf{x}) = \ln r$, $r = |\mathbf{x}|$. Она является неограниченным решением уравнения (1) с функциями $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = |u_{x_\alpha}|^{p-2}u_{x_\alpha} \in L_{p/(p-1)}$, $p < n$. Таким образом, даже в изотропном случае для ограниченности решения не достаточно принадлежности функций $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p/(p-1)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$.*

В следующей теореме доказана ограниченность решения задачи (1), (2) (Ω неограниченная) в Ω^{R_1} для произвольного $R_1 > 0$ в предположении повышенной локальной суммируемости функций $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ (в частности могут быть ограниченными).

Теорема 2. *Пусть $u(\mathbf{x})$ — обобщенное решение задачи (1), (2) с функциями $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ такими, что для любого $r > 0$*

$$\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{k_\alpha}(\Omega^r), \quad k_\alpha = \frac{p_\alpha l}{(p_\alpha - 1)(l - 1)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \tag{9}$$

$$1 \leqslant l < \min\left(K, \frac{P}{p_s}\right), \tag{10}$$

и выполнены условия (3)—(5) *с показателями* p_α *такими, что*

$$1 < \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{p_\alpha} < 1 + \min\left\{\frac{n}{lp_s}, \frac{1}{l-1}\right\}. \tag{11}$$

Тогда при любом $R_1 > 0$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{vrai}\max_{\Omega^{R_1}} |u(\mathbf{x})| \leqslant \overline{C}, \tag{12}$$

где $\overline{C}$ *— положительная константа, зависящая от* $p_\alpha, n, l, \overline{a}, \widehat{a}, R_1, \operatorname{mes}\Omega^{2R_1}, \|\Phi_\alpha\|_{k_\alpha,\Omega^{2R_1}}$.

Пример 2. *Пусть* $p_1 < p_n < p_1 \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha$. *В шаре* B_1 *рассмотрим функцию* $u(\mathbf{x}) = r^{-A}$, $r = |\mathbf{x}|$, $A = \frac{n}{p_1 \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha} - 1 > 0$. *Она является неограниченным решением уравнения* (1) *с функциями* $\Phi_s(\mathbf{x}) = |u_{x_s}|^{p_s-2}u_{x_s}$, $s = 1, 2, \ldots, n$. *Нетрудно определить, что функции* $\Phi_s(\mathbf{x})$ *суммируемы в шаре* B_1 *со степенью* r_s, *которая меньше* $\frac{n}{(A+1)(p_s-1)}$, *а показатели суммируемости* k_s *в теореме 2 больше* $\frac{p_s}{p_s-1}\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha$. *Поскольку* $r_s < \frac{p_1 \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha}{(p_s-1)} \leqslant k_s$, $s = 1, 2, \ldots, n$, *то можно утверждать, что нижняя граница показателей суммируемости* k_s *функций* Φ_s *близка к предельно возможной.*

Ранее авторами в [2] для анизотропных эллиптических уравнений были получены оценки убывания решения на бесконечности в зависимости от геометрии неограниченной области Ω расположенной вдоль выделенной оси в предположении ограниченности решения, однако ограниченность оставалась недоказанной. Основной целью настоящей работы является установление глобальной ограниченности обобщенного решения задачи (1), (2). Несомненно, что для изотропных уравнений можно снять ограничение на класс рассматриваемых областей, но в случае анизотропных уравнений это приведет к существенным техническим трудностям в доказательстве оценки (8). Оценка вида (12) может быть получена для произвольных неограниченных областей с некомпактными границами. Однако здесь приведено ее доказательство для областей расположенных вдоль выделенной оси для удобства согласования с оценкой (8). Следствием теорем 1, 2 является

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3)—(5), (11). *Тогда для обобщенного решения задачи* (1), (2) $u(\mathbf{x})$ *с функциями* $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = \overline{1,n}$, *удовлетворяющими требованиям* (6), (9), *справедлива оценка*

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant C,$$

C *— константа, зависящая от* p_α, n, $\overline{a}$, $\widehat{a}$, $\|\Phi_\alpha\|_{k_\alpha}$, R_0, $\operatorname{mes}\Omega^{4R_0}$, l.

2. Вспомогательные сведения

Положим: $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L_p(\Omega)$. Приведем теорему вложения анизотропного пространства Соболева, из которой следует, что $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}$ является нормой.

Лемма 1. *Пусть* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ *и*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha > 1, \tag{13}$$

тогда $u(\mathbf{x}) \in L_P(\Omega)$, *где* $P = n\left(-1+\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right)^{-1}$, *причем*

$$\|u\|_P \leqslant A_1 \sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}, \tag{14}$$

здесь A_1 — *константа, зависящая от* p_α, n *(см.* [3], [4]*).*

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *с* $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(\Omega)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *назовем функцию* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} L(u,v)d\mathbf{x} \equiv \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) - \Phi_\alpha\right) v_{x_\alpha} d\mathbf{x} = 0 \tag{15}$$

для любой функции $v(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (3) – (5), *тогда существует единственное обобщенное решение* $u(\mathbf{x})$ *задачи* (1), (2) *с функциями* $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(\Omega)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, *и справедлива оценка*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leqslant A_2 \sum_{\alpha=1}^{n} \|\Phi_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}, \tag{16}$$

где A_2— *константа, зависящая от* $\overline{a}$, $\widehat{a}$, p_α.

Доказательство существования проводится методом галеркинских приближений.

Лемма 2. *Для функции* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, *при* $0 \leqslant a < b$ *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{b}\|u\|_{p_s,\Omega_a^b} \leqslant \frac{p_s}{p_s-1}\|u_{x_s}\|_{p_s} \tag{17}$$

(см. [5, неравенство (73)]*).*

Лемма 3. *Пусть* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(D)$ *и*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{D} |u|^{q_\alpha} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} < \infty, \quad q_\alpha \geq 0, \quad p_\alpha \geq 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Если выполняется условие (13), *то* $u(\mathbf{x}) \in L_Q(D)$ *при* $Q = \sum\limits_{\alpha=1}^{n}\Big(1+q_\alpha/p_\alpha\Big)\Big(-1+\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\Big)^{-1}$ *и имеет место оценка*

$$\|u\|_{Q,D} \leqslant A_3 \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{D} |u|^{q_\alpha}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x}\right)^{K/Q}, \tag{18}$$

где $K = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\Big(-1+\sum\limits_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\Big)^{-1}$, A_3 — *константа, зависящая от* n, q_α, p_α *(см.* [3], [6], [7]*).*

Замечание. *В статье* [8] *В.С. Климовым показано, что неравенство* (18) *справедливо также для функций, "обращающихся в нуль на достаточно массивном подмножестве* $\overline{\Omega}$*". В частности, оно имеет место при* $D = \Omega^r$, $r > 0$, *для функций* $u(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$.

3. Доказательство теорем 1, 2

Доказательства теорем 1 и 2 проводятся итеративным методом, который был предложен Ю. Мозером [9] и широко использовался в работах С.Н. Кружкова [10], [4], Д. Серрина [11], И.М. Колодия [1].

Полагаем $\overline{u}(\mathbf{x}) = |u(\mathbf{x})| + \chi$, $\chi \geq 0$, при этом $|u_{x_\alpha}| = |\overline{u}_{x_\alpha}|$. Для фиксированных чисел $q \geq 1$ и $\mu > \chi$ определим функции:

$$F(\overline{u}) = \begin{cases} \overline{u}^q, & \text{если} \quad \chi \leqslant \overline{u} \leqslant \mu, \\ q\mu^{q-1}\overline{u} - (q-1)\mu^q, & \text{если} \quad \mu < \overline{u}, \end{cases}$$

$$G(u) = \{F(\overline{u})F'(\overline{u})^{p_s-1} - \chi^{qp_s-p_s+1}q^{p_s-1}\}\mathrm{sign} u, \quad -\infty < u < \infty.$$

Почти всюду на множестве $\{\mathbf{x} : \overline{u} \neq \mu\}$ имеем

$$0 \leqslant G'(u) = \begin{cases} \frac{p_sq-p_s+1}{q}F'(\overline{u})^{p_s}, & \text{если} \quad \overline{u} \leqslant \mu, \\ F'(\overline{u})^{p_s}, & \text{если} \quad \mu < \overline{u}. \end{cases}$$

При этом справедливы неравенства

$$p_sF'(\overline{u})^{p_s} \geq G'(u) \geq F'(\overline{u})^{p_s}, \quad |G(u)| \leqslant F(\overline{u})F'(\overline{u})^{p_s-1}, \tag{19}$$

$$F(\overline{u}) \leqslant \overline{u}^q, \quad F'(\overline{u}) \leqslant q\overline{u}^{q-1}. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\eta(x_s)$ — неотрицательная Липшицева функция с носителем в $[\overline{\rho} - \overline{\sigma}, \widehat{\rho} + \widehat{\sigma}] \subset [\varepsilon R/2, 2R]$, $\varepsilon \in (0,1)$ такая, что

$$\eta(x_s) = \begin{cases} 1, & x_s \in [\overline{\rho}, \widehat{\rho}], \\ 0, & x_s \notin (\overline{\rho} - \overline{\sigma}, \widehat{\rho} + \widehat{\sigma}), \\ \text{линейная}, & x_s \in [\overline{\rho} - \overline{\sigma}, \overline{\rho}) \cup (\widehat{\rho}, \widehat{\rho} + \widehat{\sigma}]. \end{cases}$$

Полагаем $v(\mathbf{x}) = \eta^{p_s}G(u) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, $\chi = 0$. Почти всюду на множестве $\{\mathbf{x} : |u| \neq \mu\}$ имеем

$$v_{x_\alpha} = \eta^{p_s}G'(u)u_{x_\alpha} + p_s\eta^{p_s-1}G(u)\eta_{x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Используя (19), (6), находим

$$L(u,v) = \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) - \Phi_\alpha)(p_s\eta^{p_s-1}G(u)\eta_{x_\alpha} + \eta^{p_s}G'(u)u_{x_\alpha}) \geq$$

$$\geq \eta^{p_s}F'(|u|)^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u)u_{x_\alpha} - p_s\eta^{p_s-1}|\eta_{x_s}|F(|u|)F'(|u|)^{p_s-1}|a_s(\mathbf{x}, \nabla u)|.$$

Пользуясь условиями (3)—(5), выводим

$$\begin{gathered} L(u,v) \geq \overline{a}\eta^{p_s}F'(|u|)^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} - \\ -\widehat{a}p_s\eta^{p_s-1}F(|u|)F'(|u|)^{p_s-1}|\eta_{x_s}||u_{x_s}|^{p_s-1}. \end{gathered} \tag{21}$$

Проинтегрировав (21) по $\mathbf{x} \in \Omega$ и учитывая определение (15), получаем

$$\int_\Omega \eta^{p_s}F'(|u|)^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} \leqslant C_1\int_\Omega F(|u|)F'(|u|)^{p_s-1}\eta^{p_s-1}|\eta_{x_s}||u_{x_s}|^{p_s-1}d\mathbf{x}.$$

Применяя неравенство Юнга, выводим

$$\int_\Omega \eta^{p_s}F'(|u|)^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \eta^{p_s}F'(|u|)^{p_s}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x} + C_2\int_\Omega F(|u|)^{p_s}|\eta_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}.$$

Учитывая (20), получаем

$$q^{p_s} \int\limits_{\{x\in\Omega:|u|\leqslant\mu\}} \eta^{p_s}|u|^{(q-1)p_s} \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} \eta^{p_s} F'(|u|)^{p_s} \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leqslant \leqslant C_3 \int\limits_{\Omega} |u|^{qp_s}|\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x}. \tag{22}$$

Предположим, что правая часть (22) конечна. Устремим μ к ∞ в левой части (22) и применим лемму Фату:

$$\int\limits_{\Omega} \eta^{p_s}|u|^{p_s(q-1)} \sum_{\alpha=1}^{n} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leqslant \frac{C_3}{q^{p_s}} \int\limits_{\Omega} |u|^{qp_s}|\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x}. \tag{23}$$

Далее, получаем цепочку неравенств:

$$\sum_{\alpha\neq s} \int\limits_{\Omega} \left(|u|\eta^{p_s/p_1}\right)^{p_s(q-1)} |(u\eta^{p_s/p_1})_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega} \left(|u|\eta^{p_s/p_1}\right)^{p_s(q-1)} |(u\eta^{p_s/p_1})_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x} =$$

$$= \sum_{\alpha\neq s} \int\limits_{\Omega} |u|^{p_s(q-1)}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} \eta^{p_s/p_1[p_s(q-1)+p_\alpha]} d\mathbf{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega} \eta^{p_s^2(q-1)/p_1}|u|^{p_s(q-1)}|u_{x_s}\eta^{p_s/p_1} + \frac{p_s}{p_1} u\eta^{p_s/p_1-1}\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\alpha\neq s} \int\limits_{\Omega} |u|^{p_s(q-1)}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} \eta^{p_s/p_1[p_s(q-1)+p_\alpha]} d\mathbf{x}+$$

$$+C_4 \int\limits_{\Omega} \eta^{p_s^2 q/p_1}|u|^{p_s(q-1)}|u_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x} + C_4 \int\limits_{\Omega} \eta^{p_s[qp_s/p_1-1]}|\eta_{x_s}|^{p_s}|u|^{p_s q} d\mathbf{x} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{p_s(q-1)}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} \eta^{p_s[p_s(q-1)+p_\alpha]/p_1} d\mathbf{x}+$$

$$+C_4 \int\limits_{\Omega} |u|^{p_s q}\eta^{p_s[qp_s-p_1]/p_1}|\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x}.$$

Воспользовавшись тем, что $0 \leqslant \eta(x_s) \leqslant 1$, применяя (23), выводим

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u\eta^{p_s/p_1}|^{p_s(q-1)}|(u\eta^{p_s/p_1})_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leqslant \leqslant C_5 \sum_{\alpha=1}^{n} \int\limits_{\Omega} |u|^{p_s(q-1)}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}\eta^{p_s} d\mathbf{x} + C_4 \int\limits_{\Omega} |u|^{p_s q}|\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x} \leqslant \leqslant C_6 \int\limits_{\Omega} |u|^{qp_s}|\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x}. \tag{24}$$

Из леммы 3 для $q_\alpha = p_s(q-1)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$Q = \left(n + p_s(q-1)\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{n} 1/p_\alpha - 1\right)^{-1} = P + p_s(q-1)K,$$

тогда, применяя (18), из (24) выводим

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\eta^{p_s/p_1} u|^{P+p_s(q-1)K} d\mathbf{x}\right)^{1/K} \leqslant C_7 \int\limits_{\Omega} |u|^{qp_s} |\eta_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x}. \tag{25}$$

Пусть $h = p_s(q-1)+\theta$, $\tau = P - K\theta = p_s - \theta$, где $\theta = (P-p_s)/(K-1)$. Тогда $\tau + Kh = P + Kp_s(q-1)$, $\tau + h = p_s q$. Ввиду (13), $K>1$, из условия (7) следует, что $\theta > 0$.

Положим $\widehat{\rho} + \widehat{\sigma} = \widehat{\rho}_\nu = (1+2^{-\nu})R$, $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}_{\nu+1} = (1+2^{-\nu-1})R$, $\overline{\rho} - \overline{\sigma} = \overline{\rho}_\nu = (1-2^{-\nu-1})\varepsilon R$, $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{\nu+1} = (1-2^{-\nu-2})\varepsilon R$, $\widehat{\sigma} = R2^{-\nu-1}$, $\overline{\sigma} = \varepsilon R 2^{-\nu-2}$.

Из (25) выводим

$$\left(\int\limits_{\Omega_{\overline{\rho}}^{\widehat{\rho}}} |u|^{\tau+Kh} d\mathbf{x}\right)^{1/(Kh)} \leqslant \frac{C_7^{1/h}}{(\min(\overline{\sigma},\widehat{\sigma}))^{p_s/h}} \left(\int\limits_{\Omega_{\overline{\rho}-\overline{\sigma}}^{\widehat{\rho}+\widehat{\sigma}}} |u|^{\tau+h} d\mathbf{x}\right)^{1/h}.$$

Положим $h = \theta K^\nu$, $\nu = 0,1,2,...$, тогда

$$\left(\int\limits_{\Omega_{\overline{\rho}_{\nu+1}}^{\widehat{\rho}_{\nu+1}}} |u|^{\tau+\theta K^{\nu+1}} d\mathbf{x}\right)^{1/(\theta K^{\nu+1})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_8^{1/(\theta K^\nu)} 2^{p_s(\nu+1)/(K^\nu \theta)}}{(\varepsilon R)^{p_s/(K^\nu\theta)}} \left(\int\limits_{\Omega_{\overline{\rho}_\nu}^{\widehat{\rho}_\nu}} |u|^{\tau+\theta K^\nu} d\mathbf{x}\right)^{1/(\theta K^\nu)}.$$

Введя обозначение

$$\Theta_\nu = \left(\int\limits_{\Omega_{\overline{\rho}_\nu}^{\widehat{\rho}_\nu}} |u|^{\tau+\theta K^\nu} d\mathbf{x}\right)^{1/(\theta K^\nu)},$$

получаем неравенство

$$\Theta_{\nu+1} \leqslant \frac{C_8^{1/(K^\nu\theta)} 2^{p_s(\nu+1)/(K^\nu\theta)}}{(\varepsilon R)^{p_s/(K^\nu\theta)}} \Theta_\nu, \quad \nu = 0,1,2,....$$

Для $\nu = 0$ имеем $h=\theta$, $q=1$ и

$$\Theta_1 \leqslant \frac{C_8^{1/\theta} 2^{p_s/\theta}}{(\varepsilon R)^{p_s/\theta}} \Theta_0,$$

далее,

$$\Theta_{\nu+1} \leqslant \frac{C_8^{1/\theta \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 1/K^\nu} 2^{p_s/\theta \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)/K^\nu}}{(\varepsilon R)^{p_s/\theta \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 1/K^\nu}} \Theta_0.$$

Переходя к пределу при $\nu \to \infty$, получим

$$\sup_{\Omega_{\varepsilon R}^{R}} |u(\mathbf{x})| \leqslant \frac{C_9}{(\varepsilon R)^{p_s K/(\theta(K-1))}} \left(\int\limits_{\Omega_{\varepsilon R/2}^{2R}} |u(\mathbf{x})|^{p_s} d\mathbf{x}\right)^{1/\theta}. \tag{26}$$

Согласно следствию 1, применяя (16), имеем

$$\left(\int\limits_{\Omega^{2R}_{\varepsilon R/2}} |u|^{p_s} d\mathbf{x}\right)^{1/\theta} \leqslant C_{10} R^{p_s/\theta} \left(\int\limits_{\Omega} |u_{x_s}|^{p_s} d\mathbf{x}\right)^{1/\theta} \leqslant C_{11} R^{p_s/\theta}. \tag{27}$$

Соединяя (26), (27), в итоге, получим

$$\sup_{\Omega^R_{\varepsilon R}} |u| \leqslant C_{12} \frac{R^{p_s/\theta}}{(\varepsilon R)^{p_s K/(\theta(K-1))}} = \frac{C_{12}}{R^{p_s/(\theta(K-1))} \varepsilon^{p_s K/(\theta(K-1))}} = \frac{C_{12}}{(R\varepsilon^K)^M}, \tag{28}$$

откуда следует оценка (8).

Следствие 1. *Для обобщенного решения $u(\mathbf{x})$ задачи (1), (2) с функциями Φ_α, $\alpha = 0, 1, 2, ..., n$, удовлетворяющими требованию (6), в условиях теоремы 1 справедлива оценка*

$$\sup_{\Omega_{2R_0}} |u| \leqslant \widehat{C}, \tag{29}$$

где $\widehat{C}$ — константа, зависящая от p_α, n, $\overline{a}, \widehat{a}$, $\|\Phi_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}$, R_0.

Доказательство. В (28) положим $\varepsilon = 1/2$, $R = r_k = 2^{k+1} R_0$, $k = 1, 2, ..$, получим неравенства

$$\sup_{\Omega^{r_k}_{r_k/2}} |u| \leqslant C_{13} 2^{(K-k)M} \leqslant \widehat{C}, \quad k = 1, 2, ..,$$

из которых следует (29).

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, однако имеются отличия в построении срезающей функции и оценках, связанных с Φ_α, $\alpha = \overline{1, n}$, поэтому приводится полностью.

Пусть $\eta(x_s)$ — неотрицательная Липшицева функция с носителем в $(-\infty, \rho + \sigma)$, $\rho + \sigma \leqslant 2R_1$, такая, что

$$\eta(x_s) = \begin{cases} 1, & x_s \in (-\infty, \rho], \\ 0, & x_s \in [\rho + \sigma, +\infty), \\ \text{линейная}, & x_s \in (\rho, \rho + \sigma). \end{cases}$$

Положим $v(\mathbf{x}) = \eta^{p_s} G(u) \in \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, $\chi = 1$. Используя (19), находим

$$L(u, v) = \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) + \Phi_\alpha)(p_s \eta^{p_s - 1} G(u) \eta_{x_\alpha} + \eta^{p_s} G'(u) u_{x_\alpha}) \geq$$

$$\geq \eta^{p_s} F'(\overline{u})^{p_s} \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) u_{x_\alpha} - p_s \eta^{p_s} F'(\overline{u})^{p_s} \sum_{\alpha=1}^{n} |\Phi_\alpha| |\overline{u}_{x_\alpha}| -$$

$$-p_s \eta^{p_s - 1} |\eta_{x_s}| F(\overline{u}) F'(\overline{u})^{p_s - 1} |a_s(\mathbf{x}, \nabla u)| - p_s \eta^{p_s - 1} |\eta_{x_s}| F(\overline{u}) F'(\overline{u})^{p_s - 1} |\Phi_s|.$$

Пользуясь условиями (3)—(5), выводим

$$\begin{gathered} L(u, v) \geq \overline{a} \eta^{p_s} F'(\overline{u})^{p_s} \sum_{\alpha=1}^{n} |\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha} - \\ -\widehat{a} p_s \eta^{p_s - 1} F(\overline{u}) F'(\overline{u})^{p_s - 1} |\eta_{x_s}| |\overline{u}_{x_s}|^{p_s - 1} - \\ -p_s \eta^{p_s} F'(\overline{u})^{p_s} \sum_{\alpha=1}^{n} |\Phi_\alpha| |\overline{u}_{x_\alpha}| - p_s \eta^{p_s - 1} F(\overline{u}) F'(\overline{u})^{p_s - 1} |\eta_{x_s}| |\Phi_s|. \end{gathered} \tag{30}$$

Проинтегрируем (30) по $\mathbf{x}\in\Omega$ и, учитывая (15), получаем

$$\int\limits_{\Omega}\eta^{p_s}F'(\overline{u})^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}|\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}\leqslant$$
$$\leqslant C_1\int\limits_{\Omega}F(\overline{u})F'(\overline{u})^{p_s-1}\eta^{p_s-1}|\eta_{x_s}|\big(|\overline{u}_{x_s}|^{p_s-1}+|\Phi_s|\big)d\mathbf{x}+$$
$$+C_1\int\limits_{\Omega}\eta^{p_s}F'(\overline{u})^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}|\Phi_\alpha||\overline{u}_{x_\alpha}|d\mathbf{x}.$$

Применяя неравенство Юнга, выводим

$$\int\limits_{\Omega}\eta^{p_s}F'(\overline{u})^{p_s}\sum_{\alpha=1}^{n}|\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\eta^{p_s}F'(\overline{u})^{p_s}|\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}+$$
$$+C_2\int\limits_{\Omega}F(\overline{u})^{p_s}|\eta_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}+C_2\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\eta^{p_s}F'(\overline{u})^{p_s}|\Phi_\alpha|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}d\mathbf{x}.$$

Учитывая (20), получаем

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\eta^{p_s}F'(\overline{u})^{p_s}|\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}\leqslant\\ \leqslant C_3\int\limits_{\Omega}\overline{u}^{qp_s}|\eta_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}+C_3\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}|\Phi_\alpha|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}\eta^{p_s}\overline{u}^{p_s(q-1)}d\mathbf{x}.\end{gathered}\tag{31}$$

Предположим, что правая часть (31) конечна. Устремим μ к ∞ в левой части (31) и применим лемму Фату:

$$\int\limits_{\Omega^\rho}\overline{u}^{p_s(q-1)}\sum_{\alpha=1}^{n}|\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C_3}{q^{p_s}}\left(\frac{1}{\sigma^{p_s}}\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_s}d\mathbf{x}+\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}|\Phi_\alpha|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}\overline{u}^{p_s(q-1)}d\mathbf{x}\right).$$

Далее, применяя неравенство Гельдера, воспользовавшись (9), выводим неравенства

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega^\rho}\overline{u}^{p_s(q-1)}|\overline{u}_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}\leqslant\frac{C_3}{q^{p_s}}\left(\frac{1}{\sigma^{p_s}}\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_sl}d\mathbf{x}\right)^{1/l}\left(\operatorname{mes}\Omega^{2R_1}\right)^{(l-1)/l}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}|\Phi_\alpha|^{k_\alpha}d\mathbf{x}\right)^{(l-1)/l}\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{p_s(q-1)l}d\mathbf{x}\right)^{1/l}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_4\left(1+\frac{1}{\sigma^{p_s}}\right)\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_sl}d\mathbf{x}\right)^{1/l}.$$

Учитывая замечание применим лемму 3 для $D=\Omega^\rho$ и функции $u\in\overset{\circ}{H}{}^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Таким образом, используя (18), получаем

$$\left(\int\limits_{\Omega^\rho}|u|^{P+p_s(q-1)K}d\mathbf{x}\right)^{1/K}\leqslant C_5\left(1+\frac{1}{\sigma^{p_s}}\right)\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_sl}d\mathbf{x}\right)^{1/l}.\tag{32}$$

Ввиду (10), $K>l$. Далее, пользуясь (32), выводим следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_{\Omega^\rho} \overline{u}^{P+p_s(q-1)K}d\mathbf{x} \leqslant C_6\int\limits_{\Omega^\rho}|u|^{P+p_s(q-1)K}d\mathbf{x}+C_6\mathrm{mes}\,\Omega^\rho \leqslant \tag{33}$$

$$\leqslant C_7\left(1+\frac{1}{\sigma^{p_s}}\right)^K\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_sl}d\mathbf{x}\right)^{K/l}+C_6\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_sl}d\mathbf{x}\leqslant$$

$$\leqslant C_8\left(1+\frac{1}{\sigma^{p_s}}\right)^K\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}\overline{u}^{qp_sl}d\mathbf{x}\right)^{K/l}.$$

Положим $\rho+\sigma=\rho_\nu=(1+2^{-\nu})R_1,\ \rho=\rho_{\nu+1}=(1+2^{-\nu-1})R_1,\ \sigma=R_12^{-\nu-1}$. Пусть $h=lp_s(q-1)+l\theta,\ \tau=P-K\theta=l(p_s-\theta)$, где $\theta=(P-lp_s)/(K-l)$. Тогда $\tau+hm=P+Kp_s(q-1)$, $m=K/l,\ \tau+h=lp_sq$. Из условия (10) следует, что $\theta>0$.

Из (33) выводим

$$\left(\int\limits_{\Omega^\rho}|u|^{\tau+mh}d\mathbf{x}\right)^{1/(mh)}\leqslant\frac{{C_9}^{1/h}}{\sigma^{p_sl/h}}\left(\int\limits_{\Omega^{\rho+\sigma}}|u|^{\tau+h}d\mathbf{x}\right)^{1/h}.$$

Положим $h=l\theta m^\nu,\quad \nu=0,1,2,...$, тогда

$$\left(\int\limits_{\Omega^{\rho_{\nu+1}}}|u|^{\tau+l\theta m^{\nu+1}}d\mathbf{x}\right)^{1/(l\theta m^{\nu+1})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{{C_9}^{1/(l\theta m^\nu)}2^{p_s(\nu+1)/(m^\nu\theta)}}{R_1^{p_s/(\theta m^\nu)}}\left(\int\limits_{\Omega^{\rho_\nu}}|u|^{\tau+l\theta m^\nu}d\mathbf{x}\right)^{1/(l\theta m^\nu)}.$$

Введя обозначение

$$\Theta_\nu=\left(\int\limits_{\Omega^{\rho_\nu}}|u|^{\tau+l\theta m^\nu}d\mathbf{x}\right)^{1/(l\theta m^\nu)},$$

получаем неравенство

$$\Theta_{\nu+1}\leqslant\frac{{C_9}^{1/(l\theta m^\nu)}2^{p_s(\nu+1)/(m^\nu\theta)}}{R_1^{p_s/(\theta m^\nu)}}\Theta_\nu,\quad \nu=0,1,2,....$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\Theta_{\nu+1}\leqslant\frac{{C_9}^{1/(l\theta)\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}1/m^\nu}2^{p_s/\theta\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)/m^\nu}}{R_1^{p_s/\theta\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}1/m^\nu}}\Theta_0,\quad \nu=0,1,2,....$$

Переходя к пределу при $\nu\to\infty$, получим

$$\sup_{\Omega^{R_1}}\overline{u}(\mathbf{x})\leqslant C_{10}\left(\int\limits_{\Omega^{2R_1}}\overline{u}(\mathbf{x})^{p_sl}d\mathbf{x}\right)^{1/(\theta l)}. \tag{34}$$

Применяя (10), (14), (16), выводим

$$\int\limits_{\Omega^{2R_1}} \overline{u}^{p_s l} d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega^{2R_1}} \overline{u}^{P} d\mathbf{x} \leqslant C_{11} \mathrm{mes}\, \Omega^{2R_1} + C_{11} \int\limits_{\Omega} |u|^P d\mathbf{x} \leqslant C_{12}. \qquad (35)$$

Соединяя (34), (35), в итоге, получаем (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колодий И.М. *Об ограниченности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений* // Вестник МГУ. 1970. № 5. С. 45–52.
2. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Решения анизотропных эллиптических уравнений в неограниченных областях* // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. 2013. № 1 (30). С. 90–96.
3. Лу Вень-туан. *К теоремам вложения для пространств функций с частными прозводными, суммируемыми с различными степенями* // Вестник ЛГУ. 1961. № 7. С. 23–27.
4. Кружков С.Н. *Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка* // Матем. сб. 1968. № 77. С. 229–334.
5. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т 3, № 4. С. 64–85.
6. L. Nirenberg *On elliptic partial differential equations* // Ann. Scuola norm. super. Pisa. 1959. № 13. P. 115–162.
7. Дубинский Ю.А. *Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений* // Матем. сб. 1964. № 3. С. 458–480.
8. Климов В.С. *К теоремам вложения анизотропных классов функций* // Матем. сб. 1985. № 127(169):2(6). С. 198–208.
9. J. Moser *A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations* // Communs Pure and Appl. Math. 1960. № 3. P. 457–468.
10. Кружков С.Н. *О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений* // ДАН СССР. 1963. № 3. С. 470–473.
11. J. Serrin *Local behavior of solutions of quasilinear equatons* // Acta math. 1964. № 3–4. P. 247–302.

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

Анна Александровна Хаджи,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: anna_5955@mail.ru