ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 99-103.

УДК 517.3

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СУММЫ ДВУХ ИДЕАЛОВ, ДОПУСКАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Выведены правила построения оптимальной системы неподобных подалгебр суммы двух идеалов, для которых оптимальные системы известны. Приведены неподобные подалгебры пяти еще не рассмотренных алгебр Ли, допускаемых уравнениями гидродинамического типа, что заканчивает перечисления подалгебр всех алгебр Ли групповой классификации моделей уравнений газовой динамики по уравнению состояния.

Ключевые слова: уравнения гидродинамического типа, алгебра Ли, оптимальная система подалгебр.

Mathematics Subject Classification: 35B06, 35Q35

Введение

В работе [1] выдвинута программа ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики. Основными задачами программы являются: вычисление допускаемой группы (алгебры Ли), групповая классификация по уравнению состояния, построение оптимальной системы подалгебр для моделей групповой классификации, изучение подмоделей, построенных по подалгебрам. В работе [2] показано, что есть 10 неизоморфных конечномерных алгебр Ли для моделей гидродинамического типа. Для почти всех из них оптимальные системы построены. Осталось построить оптимальные системы для 5 алгебр Ли суммы двух идеалов, для которых оптимальные системы построены. Все модели гидродинамического типа допускают 11-мерную алгебру Ли L_{11}, базис которой в декартовой системе координат состоит из переносов по пространству $T_3 = \{X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_y, X_3 = \partial_z\}$, галилеевых переносов $\Gamma_3 = \{X_4 = t\partial_x + \partial_u, X_5 = \partial_y + \partial_v, X_6 = \partial_z + \partial_w\}$, вращений $S_3 = \{X_7 = z\partial_y - y\partial_z + w\partial_v - v\partial_w, X_8 = x\partial_z - z\partial_x + u\partial_w - w\partial_u, X_9 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v\}$, переноса по времени $X_{10} = \partial_t$ и равномерного растяжения $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ [1]. Оптимальная система алгебры L_{11} построена в работе [1]. Модель газовой динамики с уравнением состояния с разделенной в произведение плотностью допускает алгебру Ли $L_{12} = \{X_{12}\} \dot{\oplus} L_{11}$ (полупрямая сумма подалгебры и идеала), где $X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho$ – еще одно растяжение. Оптимальная система для L_{12} построена в работе [3]. Модель с нулевой скоростью звука допускает бесконечную алгебру Ли, которая имеет максимальную конечномерную подалгебру $L_{12} \oplus P_3$ (прямая сумма двух идеалов), где $P_3 = \{Y_1 = \partial_p, Y_p = \rho\partial_\rho + p\partial_p, Y_{p^2} = 2\rho p\partial_\rho + p^2\partial_p\}$ – простая алгебра не изоморфная S_3 над полем действительных чисел R. Не подобных собственно подалгебр в P_3 только две: $\{Y_1\}$, $\{Y_1, Y_p\}$ [2]. Оптимальная система для $L_{11} \oplus \{Y_1\}$

S.V. Khabirov, Optimal system for the sum of two ideals admitted by the hydrodynamic type equations.

Работа поддержана РФФИ (12-01-00648, 14-01-97027), Советом по грантам Президента РФ для государственной поддержки научных школ (№НШ-6706.2012.1), грантом № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Поступила 5 декабря 2013 г.

построена в работе [4]. В настоящей работе будут описаны оптимальные системы для алгебр Ли, каждая из которых есть сумма двух идеалов: $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p\}$, $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$, $L_{12} \oplus \{Y_1\}$, $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p\}$, $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$. Структурные постоянные простой алгебры P_3 заданы коммутаторами: $[Y_1, Y_p] = Y_1$, $[Y_1, Y_{p^2}] = 2Y_p$, $[Y_p, Y_{p^2}] = Y_{p^2}$, а для алгебры S_3 – коммутаторами: $[X_7, X_8] = X_9$, $[X_8, X_9] = X_7$, $[X_9, X_7] = X_8$. Простых трехмерных алгебр Ли есть только две не изоморфных над полем R.

Описание процедуры представления оптимальной системы суммы двух идеалов основано на уже построенных оптимальных системах каждого идеала. В каждом идеале действуют свои автоморфизмы. Коммутаторы базисных операторов подалгебры выделяют подалгебры из идеала, которые уже приведены внутренними автоморфизмами к подалгебрам из оптимальной системы идеала. Поэтому в дальнейшем внутренние автоморфизмы идеалов не понадобятся, и они здесь не приводятся. Выделенные подалгебры обладают специальными свойствами, с помощью которых они разыскиваются в оптимальной системе идеала. Достаточно перечислить эти подалгебры, чтобы по определенным правилам конструировать оптимальную систему суммы двух идеалов.

1. Оптимальная система алгебры Ли $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$

Любая подалгебра размерности $k+1$ в алгебре $L_{11} \oplus \{Y_1\}$ представлена базисом $Z_1 = X_{i_1} + ...$, $Z_2 = X_{i_2} + ...$, ... ,$Z_k = X_{i_k} + ...$, $Y_1 + Z_{k+1}$, где Z_{k+1} и многоточия после знака плюс есть линейная комбинация базисных элементов из L_{11}, не содержащих $X_{i_1}, ..., X_{i_k}$. Линейные множества $\{Z_1, ..., Z_k\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}\}$ – подалгебры в L_{11}. Подалгебра $\{Z_1, ..., Z_k\}$ – идеал в $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}\}$. Это следует из того, что оператор Y_1 коммутирует с любым элементом из L_{11}. Правило перечисления подалгебр из $L_{11} \oplus \{Y_1\}$ таково: для любой подалгебры из L_{11} надо найти подалгебру на единицу большей размерности, для которой подалгебра будет идеалом. Все такие подалгебры перечислены в [4]. Если к базису подалгебры из L_{11} приписать Y_1, то получается тривиальное расширение. Тривиальные расширения не приводятся в оптимальной системе работы [4].

1.1. Оптимальная система алгебры Ли $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p\}$. Любая подалгебра размерности $k+2$ в алгебре $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p\}$ представлена базисом из ранее введенных операторов $Z_1, ..., Z_k$, $Y_1 + Z_{k+1}$ и оператора $Y_p + Z_{k+2}$, где Z_{k+2} есть линейная комбинация базисных элементов из L_{11}, не содержащих X_{i_1}, ... ,X_{i_k}. Линейные оболочки $\{Z_1, ..., Z_k\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+2}\}$ – подалгебры в L_{11}. Подалгебра $\{Z_1, ..., Z_k\}$ – идеал в $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}\}$ и в $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+2}\}$. Линейные оболочки $\{Z_1, ..., Z_k, Y_1 + Z_{k+1}\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Y_p + Z_{k+2}\}$ – подалгебры оптимальной системы для алгебры $L_{11} \oplus \{Y_1\}$. Из равенства

$$[Y_1 + Z_{k+1}, Y_p + Z_{k+2}] = Y_1 + [Z_{k+1}, Z_{k+2}]$$

следует соотношение

$$[Z_{k+1}, Z_{k+2}] = Z_{k+1} + \sum_{l=1}^{k} C_{12}^l Z_k \tag{1.1}$$

или $Z_{k+1} = 0$ и $C_{12}^l = 0$.

В последнем случае надо взять подалгебру из $L_{11} \oplus \{Y_1\}$. В ней вместо Y_1 написать Y_p и приписать к полученному базису оператор Y_1. Такие подалгебры тоже считаем тривиальными расширениями.

В первом случае правило нахождения подалгебр таково: найти две подалгебры из $L_{11} \oplus \{Y_1\}$ вида $L_k \oplus \{Y_1 + Z_{k+1}\}$, $L_k \oplus \{Y_1 + Z_{k+2}\}$, проверить равенство (1.1), включить $L_k \oplus \{Y_1 + Z_{k+1}, Y_p + Z_{k+2}\}$ в оптимальную систему алгебры Ли $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p\}$. Просмотр оптимальной системы из [4] дает следующий результат: оператор Y_p прибавляется к оператору, содержащему X_{11}. Оператор Y_1 прибавляется к оператору из подалгебры переносов

T_3, либо к оператору X_{10}. Всего получается 43 подалгебры, 18 из которых содержат оператор Y_1+X_{10}. Нет смысла их перечислять, их легко можно усмотреть из таблицы работы [4].

1.2. Оптимальная система алгебры Ли $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_p^2\}$. Любая подалгебра в алгебре $L_{11} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$ с трехмерной проекцией на P_3 представлена базисом из ренее введенных операторов Z_1, ... ,Z_k, Y_1+Z_{k+1}, Y_p+Z_{k+2} и оператора $Y_{p^2}+Z_{k+3}$, где Z_{k+3} есть линейная комбинация базисных элементов из L_{11}, не содержащих X_{i_1}, ... ,X_{i_k}. Линейные оболочки $\{Z_1, ..., Z_k\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+2}\}$, $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+3}\}$ – подалгебры в L_{11}. Первая подалгебра есть идеал в остальных подалгебрах. Коммутаторы

$$[Y_1 + Z_{k+1}, Y_p + Z_{k+2}] = Y_1 + [Z_{k+1}, Z_{k+2}],$$

$$[Y_1 + Z_{k+1}, Y_{p^2} + Z_{k+3}] = 2Y_p + [Z_{k+1}, Z_{k+3}],$$

$$[Y_p + Z_{k+2}, Y_{p^2} + Z_{k+3}] = Y_{p^2} + [Z_{k+2}, Z_{k+3}]$$

задают равенства с некоторыми постоянными C_{ij}^l

$$[Z_{k+1}, Z_{k+2}] = Z_{k+1} + \sum_{l=1}^{k} C_{12}^l Z_l,$$

$$[Z_{k+1}, Z_{k+3}] = 2Z_{k+2} + \sum_{l=1}^{k} C_{13}^l Z_l,$$

$$[Z_{k+2}, Z_{k+3}] = Z_{k+3} + \sum_{l=1}^{k} C_{23}^l Z_l,$$

которые показывают, что линейная оболочка $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}, Z_{k+2}, Z_{k+3}\}$ есть подалгебра в L_{11}. Проекция этой подалгебры на подпространство $\{Z_{k+1}, Z_{k+2}, Z_{k+3}\}$ есть простая алгебра P_3. Она изоморфна некоторой подалгебре в L_{11}. Но в L_{11} есть только одна простая подалгебра S_3, которая не подобна P_3 над полем R. Противоречие. Значит, $Z_{k+1} = Z_{k+2} = Z_{k+3} = 0$ и получается только тривиальные расширения любой подалгебры из L_{11}.

2. Оптимальная система алгебры Ли $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$

Оптимальная система для L_{12} построена в работе [3]. Не нулевые коммутаторы операторов X_{12}, X_{11} таковы: $[X_{12}, X_k] = X_k$, $k = 4, 5, 6$, $[X_{12}, X_{10}] = -X_{10}$, $[X_{11}, X_l] = -X_l$, $l = 1, 2, 3$, $[X_{11}, X_{10}] = -X_{10}$. Другие коммутаторы не понадобятся.

2.1. Оптимальная система алгебры Ли $L_{12} \oplus \{Y_1\}$. Любая подалгебра размерности $k+1$ в алгебре $L_{12} \oplus \{Y_1\}$ представлена базисом из ранее введенных операторов Z_1, $Z_2, ..., Z_k$ и оператора $Y_1 + X_{12} + Z_{k+1}$, или из ранее введенных операторов Z_1, ... ,Z_{k-1} и операторов $Z_k + X_{12}$, $Y_1 + Z_{k+1}$, где Z_{k+1}, Z_k есть линейная комбинация базисных элементов из L_{11}, не содержащих X_{i_1}, ... ,X_{i_k}. В первом случае линейная оболочка $\{Z_1, ..., Z_k\}$ – подалгебра в L_{11}, $\{Z_1, ..., Z_k, X_{12} + Z_{k+1}\}$ – подалгебры в L_{12}, подалгебра $\{Z_1, ..., Z_k\}$ – идеал в $\{Z_1, ..., Z_k, X_{12} + Z_{k+1}\}$. Правило нахождения подалгебр из $L_{12} \oplus \{Y_1\}$ таково: подалгебра из L_{12} должна иметь подалгебры на единицу меньшей размерности из L_{11}. Легко проверить, что все подалгебры из оптимальной системы L_{12} обладают этим свойством. Значит, достаточно прибавить к оператору, содержащему X_{12} (он присутствует только в одном базисном операторе), оператор Y_1. Такое расширение тоже можно считать тривиальным.

Во втором случае правило нахождения подалгебр из $L_{12} \oplus \{Y_1\}$ таково: $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, Z_{k+1}\}$ – подалгебра в L_{11}, $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, X_{12} + Z_k, Z_{k+1}\}$, $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, X_{12} + Z_k\}$, $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}\}$ – подалгебры в L_{12}; $\{Z_1, ..., Z_{k-1}\}$ – идеал в $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, Z_{k+1}\}$ и в $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, Z_k\}$;

$[Z_k, Z_{k+1}]$ – линейная комбинация остальных операторов. Очевидно подалгебра из L_{12} удовлетворяет этим свойствам, если оператор, не содержащий X_{12}, коммутирует с остальными, к одному из них прибавляется Y_1. Такие подалгебры считаются тривиальными расширениями. Все двумерные подалгебры такие. Для любой неабелевой подалгебры из L_{12} размерности не меньше трех выбирается базисный оператор, не содержащий X_{12}, чтобы остальные образовывали идеал. К этому оператору, не коммутирующим с остальными, прибавляется Y_1. Проверяется условие подалгебры. Просмотр оптимальной системы из [3] дает следующий результат. Оператор Y_1 прибавляется к оператору, содержащему либо X_7, либо X_{11}, либо X_{10}, если в операторе, содержащим X_{12}, стоит комбинация $X_{12} - X_{11}$. При этом к операторам полной подалгебры вращений ничего прибавлять нельзя. Подалгебры легко выписываются по таблице из работы [3] и не приводятся здесь из-за большого объема.

2.2. Оптимальная система алгебры Ли $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p\}$. Любая подалгебра размерности $k+2$ в алгебре $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p\}$ представлена базисом из ранее введенных операторов Z_1, ... ,Z_k, $Y_1 + Z_{k+1}$ и оператора $Y_p + X_{12} + Z_{k+2}$, или из ранее введенных операторов Z_1, ... ,Z_{k-1}, $Z_k + X_{12}$, $Y_1 + Z_{k+1}$, $Y_p + Z_{k+2}$. В первом случае линейная оболочка $\{Z_1, ..., Z_k\}$ – идеал в подалгебрах $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}\} \subset L_{11}$, $\{Z_1, ..., Z_k, X_{12} + Z_{k+2}\} \subset L_{12}$ и выполняется равенство

$$[Z_{k+1}, X_{12} + Z_{k+2}] = Z_{k+1} + \sum_{l=0}^{k} D^l Z_l. \tag{2.1}$$

Отсюда следует, что $\{Z_1, ..., Z_k, Z_{k+1}, X_{12} + Z_{k+2}\}$ – подалгебра в L_{12}. Если $Z_{k+1} = 0$, то $D^l = 0$ и у любой подалгебры алгебры $L_{12} \oplus \{Y_1\}$ вместо Y_1 надо написать Y_p и приписать Y_1. Получается тривиальная подалгебра из $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p\}$. Если $Z_{k+1} \neq 0$, то у любой подалгебры из $L_{12} \oplus \{Y_p\}$ надо выбрать оператор, не коммутирующий с $X_{12} + Z_{k+2}$, а остальные должны образовывать идеал, и проверить равенство (2.1). Просмотр оптимальной системы показывает, что это возможно только для подалгебр с базисным оператором X_{10}, к которому прибавляется оператор Y_1, и нет оператора X_{11} в других базисных операторах.

Во втором случае линейная оболочка $\{Z_1, ..., Z_{k-1}\}$ – идеал подалгебры $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, X_{12} + Z_k, Z_{k+1}, Z_{k+2}\} \subset L_{12}$. Выполняются равенства

$$[Z_{k+1}, X_{12} + Z_k] = \sum_{l=0}^{k-1} A^l Z_l, \quad [Z_{k+2}, X_{12} + Z_k] = \sum_{l=0}^{k-1} B^l Z_l,$$

$$[Z_{k+1}, +Z_{k+2}] = Z_{k+1} + \sum_{l=0}^{k-1} D^l Z_l. \tag{2.2}$$

Если $Z_{k+1} = 0$, $D^l = 0$, то подалгебра тривиальна: приписывается оператор Y_1 к подалгебрам из $L_{12} \oplus \{Y_p\}$.

Правило составления оптимальной системы для $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p\}$ таково. Для подалгебры из L_{12} выбираются три базисных оператора, включая базисный оператор, содержащий X_{12}, так, чтобы остальные образовывали идеал. Для выбранных операторов проверяется равенство (2.2).

Перебор подалгебр из L_{12} с этими свойствами приводит к следующему результату. Если подалгебра $\{Z_1, ..., Z_{k-1}, Z_{k+1}, Z_{k+2}\}$ абелева, то для нее подалгебру из $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p\}$ образовать нельзя. Обязательно, Y_1 прибавляется к оператору X_{10} (или к $X_n, n = 1, 2$), при этом Z_{k+2} содержит X_{11}, а оператор с X_{12} имеет вид $X_{12} - X_{11} + ...$(или не содержит X_{11}).

Просмотр оптимальной системы из работы [3] выделяет следующие подалгебры: 3.2(a=1,b=-1); 4.5, 7(b=1), 7(b=0), 9, 10, 18; 5.5, 7(a=1,b=-1), 8(a=1,b=-1), 12, 17(a=1,b=-1), 21(a=1,b=0), 23, 24(a=0), 25, 33, 34, 35, 36; 6.5, 7, 8, 10, 11, 12, 13(a=1,b=0), 17(a=1,b=0), 18, 19, 20, 20(a=0); 7.5, 6, 8, 9(a=1,b=-1), 13(a=1,b=0), 13(a=1,b=-1), 15, 16(a=0), 19(a=1,b=0), 20(a=0), 21, 21(a=0); 8.5, 7, 9(a=1,b=0), 9(a=1,b=-1), 10, 10(a=0), 11(a=1,b=0), 12, 16; 9.2, 3, 4(a=1,b=0), 4(a=1,b=-1), 5, 6; 10.4.

Например, подалгебры порожденные 5.34 из [3] бывают двух типов $\{Y_1 + X_3, aX_1 + X_2, X_4, Y_p + X_{11}, X_{12}\}$ и $\{X_3, Y_1 + aX_1 + X_2, X_4, Y_p + X_{11}, X_{12}\}$.

Любая подалгебра в алгебре $L_{12} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$ с трехмерной проекцией на P_3 представляется базисом вида $Z_1 = X_{i_1} + ...$, ... ,$Z_k = X_{i_k} + ...$, $Y_1 + Z_{k+1}$, $Y_p + Z_{k+2}, Y_{p^2} + Z_{k+3}$, где Z_{k+1}, Z_{k+2}, Z_{k+3} и многоточия есть линейная комбинация базисных элементов из L_{12}, не содержащих X_{i_1}, ... ,X_{i_k}. Рассуждения аналогичные тем, которые были сделаны в конце пункта 1, приводят к тривиальным расширениям, т.е. к любой подалгебре из L_{12} надо приписать операторы из P_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. Хабиров С.В. *Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 2. С. 87–90.
3. Макаревич Е.В. *Опимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнений состояния с разделенной плотностью* // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 19–38.
4. Сираева Д.Т. *Опимальная система 11-мерной алгебры Ли, расширенной коммутирующим оператором* // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 1, С. 94–107.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru