ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 26-35.

УДК 517.5

РАСЩЕПЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.Н. ДИЛЬНЫЙ

Аннотация. В пространствах Пэли-Винера и весовых пространствах Харди в полуплоскости рассматриваются задачи о расщеплении функции на сумму двух функций, каждая из которых "большая" только в своей области. Для первого пространства задача решена полностью, для второго получены достаточные условия разрешимости.

Ключевые слова: весовое пространство Харди, теорема Пели-Винера, угловые граничные значения, расщепление.

Mathematics Subject Classification: 2010: 30D15, 30H10

1. Введение

Обозначим через W^p_σ, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\sigma > 0$, пространство Пели-Винера, то есть пространство целых функций f экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, принадлежащих $L^p(\mathbb{R})$. Пространство W^p_σ может быть определено (см. [1, с. 663]) также как пространство целых функций, удовлетворяющих условию $A(0; 2\pi)$, где

$$A(\alpha,\beta) := \sup_{\varphi\in(\alpha,\beta)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Пространства W^p_σ, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\sigma > 0$, являются банаховыми пространствами с нормой $\|f\| := A(0; 2\pi)$. Следующее утверждение играет фундаментальную роль в теории пространств Пэли-Винера (см. [2]).

Теорема П.-В. *Пространство W^2_σ совпадает с пространством функций, представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t) e^{itz} dt, \quad \varphi \in L^2(-\sigma,\sigma). \tag{1}$$

Обозначим через $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\sigma \geq 0$, пространство аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$ функций, для которых справедливо условие $A(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) < +\infty$. Некоторые свойства этого пространства изучались Б.В. Винницким и автором (см. [6], [7], [18]). Через $H^p(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty$, обозначим пространство Харди аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f, для которых

$$||f||^p = \sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\} < +\infty.$$

А.М. Седлецкий показал [10], что для случая $\sigma = 0$ пространство $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ совпадает с пространством Харди, поэтому мы можем рассматривать $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ как весовое пространство

V.N. Dilnyi, Splitting of some spaces of analytic functions.

Поступила 17 марта 2014 г.

Харди. Легко видеть также, что $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ является аналогом для полуплоскости пространства целых функций Пели-Винера W^p_σ. Свойства пространств Харди достаточно полно изложены в [9], [15]. Сингулярная граничная функция h функции $\psi \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ определяется с точностью до аддитивной постоянной и значений в точках непрерывности равенством

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x\to 0+} \int\limits_{t_1}^{t_2} \log|\psi(x+iy)|dy - \int\limits_{t_1}^{t_2} \log|\psi(iy)|dy.$$

Сингулярная граничная функция является невозрастающей и $h'(t) = 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$.

2. Задачи

Р. С. Юлмухаметов в [3], [4] рассматривает задачу о расщеплении каждой функции из пространства Пэли-Винера на произведение двух функций для случая, когда φ в представлении (1) бесконечно дифференцируема. Ю. И. Любарский в [25] изучал расщепление функций с треугольной индикаторной диаграммой. Мы рассматриваем похожие задачи о расщеплении функций из пространства Пэли-Винера на сумму двух функций, каждая из которых наследует, в некотором смысле, свойства исходной.

Рассматриваемые ниже задачи непосредственно мотивированы исследованиями [8, 14], в которых получено полное описание циклических функций в пространстве $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. При этом оказалось, что имеются качественные отличия от безвесового случая $H^p(\mathbb{C}_+)$. Для дальнейшего продвижения в этом направлении, а именно для описания всех трансляционно инвариантных относительно оператора сдвига подпространств пространства $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, определяющее значение имеет следующее [7] утверждение, доказательство которого нам известно лишь для случая $p \in (1;2]$.

Теорема А1. *Функция $\widetilde{f}_1 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такая что $\widetilde{f}_1(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(-\infty;+\infty)$ является угловой граничной функцией некоторой функции $\widetilde{f} \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 < p \leqslant 2$, в том и только том случае, если существует функция $\widetilde{f}_2$, удовлетворяющая условиям*

а) $\widetilde{f}_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

б) $\widetilde{f}_3(iy) := e^{-\sigma y}\widetilde{f}_1(iy) + \widetilde{f}_2(iy) \in L^p(-\infty;0)$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \widetilde{f}_1(iv)e^{-\sigma t}e^{i\tau v}dv + \frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} \widetilde{f}_2(u)e^{\tau u}du + \int\limits_{-\infty}^{0} \widetilde{f}_3(iv)e^{i\tau v}dv = 0$ *для почти всех* $\tau \in (-\infty;0]$.

Для случая $\sigma = 0$ (тогда $\widetilde{f}_2 \equiv 0$) условия а), б) тривиальны, а условие в) переходит в "$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}_1(iv)e^{i\tau v}dv = 0$ для почти всех $\tau \in (-\infty;0]$." Тогда эта теорема совпадает с одной теоремой Пэли-Винера (см. [15, с. 88]). Для случая $p = 1$ в [7] получено следующее утверждение.

Теорема А2. *Функция $\widetilde{f}_1 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, такая что $\widetilde{f}_1(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(-\infty;+\infty)$ является угловой граничной функцией некоторой функции $\widetilde{f} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, если существует функция $\widetilde{f}_2$, удовлетворяющая условиям а), б), в) предыдущей теоремы и*

г) функция $\widetilde{f}_2$ допускает расщепление $\widetilde{f}_2 = \widetilde{f}_5 - \widetilde{f}_4$, где $\widetilde{f}_4(z)e^{-i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\widetilde{f}_5(z)e^{i\sigma z} \in H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Мы не знаем, справедлива ли эта теорема без условия г).

При исследовании одного уравнения типа свертки [24] показано, что отсутствие нетривиальных решений этого уравнения эквивалентно аналогу теоремы А2 при $p = 1$. Основное отличие аналога от приведенной здесь формулировки в том, что дополнительно можно считать $\widetilde{f}_2$ произведением двух функций из $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Мы не знаем, является ли это дополнение существенным, то есть каждая ли функция $f \in H^1_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$ допускает расщепление на произведение двух функций из $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Но такое расщепление в дополнение к полученному Б. Винницким расщеплению $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+) = e^{i\sigma z}H^2(\mathbb{C}_+) + e^{-i\sigma z}H^2(\mathbb{C}_+) + W^2_\sigma$ позволяет рассмотреть следующую задачу.

Задача 1. *Каждая ли функция $f \in W^p_\sigma$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, допускает расщепление $f = f_2 - f_3$ с целой функцией f_2, удовлетворяющей условию $B(0;\pi)$, где*

$$B(\hat\alpha,\hat\beta): \sup_{\varphi\in(\hat\alpha,\hat\beta)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty$$

и f_3, удовлетворяющей условию $B(\pi;2\pi)$?

Положительное решение задачи 1 для $p = 1$ имело бы следствием решение упомянутой задачи о нетривиальных решениях уравнения типа свертки. Однако, как показано ниже, существуют функции $f \in W^1_\sigma$, для которых требуемое расщепление невозможно. Поэтому приходится рассматривать задачу с менее ограничительными условиями, а именно задачу 2.

Задача 2. *Каждая ли функция $f \in W^p_\sigma$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, допускает расщепление $f = f_4 - f_5$, где функции f_4 и f_5 аналитичны в $\mathbb{C}_+$, f_4, удовлетворяет условию $B\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и f_5 удовлетворяет $B\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$?*

Мы рассматриваем здесь наиболее качественно интересные случаи $p = 2$ и $p = 1$. Сформулированные задачи также представляют непосредственный интерес в теории интегральных операторов, исследованиях оператора сдвига.

3. Представления

Утверждения, аналогичные теореме Пэли-Винера, известны также для случаев $1 < p < 2$ и $p = 1$ (см. [16], [17], [22]).

Теорема Б1. (Boas R., [23, c.106]) *Пространство W^1_σ совпадает с пространством функций, представимых в виде (1), где функция*

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi(t), |t| \leqslant \sigma, \\ 0, \quad |t| > \sigma, \end{cases}$$

имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье на $(-\sigma-\delta;\sigma+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$.

Хорошо известно (см. [5, с. 638]), что если ряд Фурье функции φ^* сходится абсолютно на $(-\sigma-\delta;\sigma+\delta)$ для некоторых положительных σ и δ, то для каждого $\delta_1 \in [0;+\infty)$ ряд Фурье функции φ^* сходится абсолютно на $(-\sigma-\delta_1;\sigma+\delta_1)$.

В другой форме критерий принадлежности пространству W^1_σ получил Г. Бер.

Теорема Б2. *Пространство W^1_σ совпадает с пространством функций, представимых в виде (1), где*

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}},$$

причем $(c_k) \in l^1$ и

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} c_{k+m} \frac{k}{k^2+1} \right| < +\infty.$$

Сформулируем результат Р. Боаса в более удобной для нас форме, воспользовавшись теоремой Пэли-Винера.

Лемма 1. *Функция f принадлежит пространству W^1_σ, $\sigma > 0$, в том и только том случае, если она представляется в виде*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k \frac{\pi \sin \sigma z}{\sigma z - \pi k}, \tag{2}$$

где $(c_k) \in l^2$ *и*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{k\pi}{\sigma}(1-\delta)\right)\right| < +\infty. \tag{3}$$

для некоторого $\delta \in (0;1)$.

Общее описание интерполяционных последовательностей в W_σ^p получено А. Берлингом, Ю. Любарским, К. Сэйпом [19], [20, с.341-365]. Для наших целей достаточно сформулированного результата. Заметим, что условие $(c_k) \in l^1$ является следствием условия (3).

Следствие 1. *Если* $f \in W_\sigma^1$, $\sigma > 0$, *то справедливо представление (2) и*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k = 0.$$

Действительно, по теореме Б1 $\varphi(\sigma) = 0$, но

$$\varphi(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ik\pi} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k.$$

Следствие 2. *Условие (3) эквивалентно условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s c_s \frac{\sin(k\pi(1-\delta))}{k(1-\delta)-s}\right| < +\infty.$$

4. Разложения в пространстве Пэли-Винера

Для случая $p = 2$ имеем элементарное решение задачи 1, основанное на теореме Пэли-Винера:

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \varphi(t)e^{itz}dt, \qquad f_3(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^0 \varphi(t)e^{itz}dt. \tag{4}$$

Но для $p = 1$ вышеприведенное расщепление не является решением задачи 1 в общем случае. Например, если $\varphi(t) = \sigma - |t|$, то

$$f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos\sigma z}{z^2} \in W_\sigma^1,$$

но

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{-e^{i\sigma z}+1+i\sigma z}{z^2} \notin W_\sigma^1, \quad f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\sigma z}-1+i\sigma z}{z^2} \notin W_\sigma^1.$$

Лемма 2. *Если для* $f \in W_\sigma^1$ *задача 1 имеет положительное решение, то в обозначениях теоремы Пэли-Винера справедливы представления (4).*

Доказательство. Для функции f_2 выполняются при $p = 1$ условия $A(0;\pi)$ и $B(-\pi;0)$, из чего вытекает, что $f_2(z)e^{-i\sigma z/2} \in W_{\sigma/2}^1$. Поэтому по теореме Пэли-Винера

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\sigma \varphi_2(t)e^{itz}dt,$$

для некоторой функции $\varphi_2 \in L^2[0;\sigma]$. Аналогично получаем для некоторой функции $\varphi_3 \in L^2[-\sigma;0]$ равенство

$$f_3(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^0 \varphi_3(t)e^{itz}dt.$$

Функция $f - f_2 + f_3$ принадлежит пространству W^2_σ, поэтому для нее справедливо представление

$$f(z) - f_2(z) + f_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \widetilde{\varphi}(t) e^{itz} dt,$$

для некоторой функции $\widetilde{\varphi} \in L^2[-\sigma; \sigma]$. Но $f - f_2 + f_3$ – тождественный ноль, поэтому $\widetilde{\varphi} \equiv 0$, из чего вытекает утверждение леммы. □

Мы дадим два критерия разрешимости задачи 1, основываясь на теоремах Боаса и Бэра.

Теорема 1. *Если $f \in W^1_\sigma$, то задача 1 имеет положительное решение в том и только том случае, когда*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\delta m} - 1}{m - \delta m - k} \right| < +\infty, \tag{5}$$

для некоторого $\delta \in (0; 1)$, причем считаем, что

$$\frac{(-1)^{m+k} e^{i\pi\delta m} - 1}{m - \delta m - k} = \pi i, \qquad \textit{если} \quad m - \delta m - k = 0.$$

Доказательство. Если $f \in W^1_\sigma$, то для нее справедливо представление (1). По лемме 2 положительное решение задачи 1 существует в том и только том случае, когда функция f_2, определенная первым равенством (4), принадлежит W^1_σ. Для f_2 справедливо представление

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\sigma \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}} e^{itz} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int\limits_0^\sigma e^{it\left(z - \frac{k\pi}{\sigma}\right)} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma(z - k\pi/\sigma)} - 1}{i(z - k\pi/\sigma)}.$$

Заметим, что

$$\sqrt{2\pi} f_2\left(\frac{m\pi}{\sigma}(1-\delta)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{e^{i\sigma\left(\frac{m\pi}{\sigma}(1-\delta) - \frac{k\pi}{\sigma}\right)} - 1}{i\left(\frac{m\pi}{\sigma}(1-\delta) - \frac{k\pi}{\sigma}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{\sigma e^{i\pi(m - \delta m - k)} - 1}{i\pi(m - \delta m - k)},$$

из чего получаем условие (5). Также по теореме Пэли-Винера $f_2 \in W^2_\sigma$, поэтому последовательность коэффициентов ее разложения (2) принадлежит l^2. Осталось воспользоваться леммой 1 для f_2. □

Теорема 2. *Если $f \in W^1_\sigma$, то задача 1 имеет положительное решение в том и только том случае, когда*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k^2+1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s \frac{(-1)^s - (-1)^{k+m}}{k + m - s} \right| < +\infty, \tag{6}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^{k+m} - 1}{m - k} \right| < +\infty, \tag{7}$$

причем считаем, что

$$\frac{(-1)^s - (-1)^{k+m}}{k + m - s} = \pi i, \quad \textit{если } s = k + m, \ \textit{и} \quad \frac{(-1)^{k+m} - 1}{m - k} = \pi i, \quad \textit{если } m = k.$$

Доказательство. При доказательстве предыдущей теоремы показано, что

$$f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k e^{i\sigma z} - 1}{i(z - k\pi/\sigma)}.$$

Воспользуемся для f_2 теоремой Б2, записав ее условие в виде

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+m} f\left(\frac{k+m}{\sigma}\right) \frac{k}{k^2+1} \right| < +\infty.$$

Тогда

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+m} k}{k^2+1} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_s \frac{(-1)^s e^{i\sigma \frac{k+m}{\sigma}\pi} - 1}{i\left(\frac{k+m}{\sigma}\pi - \frac{s\pi}{\sigma}\right)} \right| < +\infty,$$

из чего следует условие (6). Поскольку

$$f\left(\frac{\pi m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{(-1)^k e^{i\pi m} - 1}{i(\pi m/\sigma - k\pi/\sigma)},$$

то из условия принадлежности l^1 последовательности коэффициентов разложения (2) функции f_2 получим условие (7). □

Полученные условия являются достаточно сложными для проверки конкретных функций. Часто удобнее воспользоваться более простыми необходимыми или достаточными условиями.

Следствие 3. *Если для функции $f \in W^1_\sigma$ задача 1 решается положительно, то для коэффициентов ее разложения (2)*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k = 0. \tag{8}$$

Действительно, если f_2 решает задачу 1, то справедливы представления (4), причем по теореме Б1 $\varphi(0) = \varphi(\sigma) = 0$. Но $\varphi(0) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^0 = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k$. Из этого следствия легко получаем, что для функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos\sigma z}{z^2} \in W^1_\sigma$$

решения задачи 1 не существует, поскольку условие (8) не выполняется:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) > 0.$$

Теорема 3. *Если в представлении (2) функции $f \in W^1_\sigma$ коэффициенты c_k равны нулю для всех нечетных $k \in \mathbb{Z}$, то задача 1 имеет для нее положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что искомое расщепление имеет вид

$$f_2(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{2k}(e^{i\sigma z} - 1)}{z - 2k\pi/\sigma}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_{2k}(e^{-i\sigma z} - 1)}{z - 2k\pi/\sigma}.$$

Действительно, f_2 и f_3 – целые функции экспоненциального типа $\leqslant \sigma$. Заметим, что

$$f_2(z) = \frac{f(z)\,(e^{i\sigma z} - 1)}{2i \sin\sigma z} = \frac{f(z) e^{i\sigma z/2}}{2\cos(\sigma z/2)},$$

поэтому функция $f_2^*(z) = f_2(z+i)$ принадлежит $L^1(\mathbb{R})$. Значит, по определению $f_2^*(z)e^{-i\sigma z} \in W^1_\sigma$, из чего имеем $f_2(z)e^{-i\sigma z} \in W^1_\sigma$. Аналогично показывается, что $f_3 e^{i\sigma z} \in W^1_\sigma$.

□

5. Разложения в весовом пространстве Харди

Сформулируем следствие из одного результата Б. Винницкого [6].

Теорема B. *Пространство* $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ *совпадает с пространством функций, представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} \varphi(t) e^{tz} dt,$$

где $\varphi \in L^2[\partial D_\sigma]$, $D_\sigma = \{z : |\Im z| < \sigma, \Re z < 0\}$. Из этого утверждения вытекает следующее решение задачи 2 для случая $p = 2$:

$$f_4(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \cap \mathbb{C}^+} \varphi(t) e^{tz} dt, \quad f_5(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma \cap \mathbb{C}^-} \varphi(t) e^{tz} dt,$$

где $\mathbb{C}^+ = \{z : \Im z > 0\}$, $\mathbb{C}^- = \{z : \Im z < 0\}$.

Замечание 1. *Для функции*

$$f(z) = \frac{1 - \cos \sigma z}{z^2} \in W^1_\sigma$$

решение проблемы 2 существует.

Доказательство.

$$f_4(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\sigma z} - 1 - i\sigma z + \frac{i\sigma}{z+\pi} z^2}{z^2}, \quad f_5(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\sigma z} - 1 + i\sigma z - \frac{i\sigma}{z+\pi} z^2}{z^2}$$

□

Обозначим через $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ прямое произведение пространств $H^2_{\sigma/2}(\mathbb{C}_+)$ и $H^2_{\sigma/2}(\mathbb{C}_+)$. Очевидно, $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+) \subset H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Нам неизвестно, совпадает ли пространство $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$ с $H^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Из положительного решения задачи 2 вытекает более общий результат.

Лемма 3. *Если задача 2 решается положительно для* W^1_σ, *то она имеет положительное решение и для каждой функции из пространства* $\widehat{H}^1_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Доказательство. По теореме B, если $f_1 \in H^2_{\sigma/2}(\mathbb{C}_+)$, то $f_1(z) = e^{\frac{i\sigma z}{z}} h_1(z) + h_2(z) + e^{-\frac{i\sigma z}{z}} h_3(z)$, где

$$h_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} f\left(t + i\frac{\sigma}{2}\right) e^{tz} dt, \quad h_2(z) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} f(it) e^{itz} dt,$$

$$h_3(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{-\infty} f\left(t - i\frac{\sigma}{2}\right) e^{tz} dt.$$

Согласно теоремам Пэли-Винера (см. выше и [15]) имеем $h_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $h_2 \in W^2_{\frac{\sigma}{2}}$, $h_3 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Аналогично, если $f_1^* \in H^2_{\frac{\sigma}{2}}$, то $f_1^*(z) = e^{\frac{i\sigma z}{2}} h_1^*(z) + h_2(z) + e^{-\frac{i\sigma z}{2}} h_3^*(z)$, где $h_1^* \in H^2(\mathbb{C}_+)$, $h_2^* \in W^2_{\frac{\sigma}{2}}$, $h_3^* \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Условия $A\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $B\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняются для функций $e^{\frac{i\sigma z}{2}} h_1(z) f_1^*(z) + h_2(z) e^{\frac{i\sigma z}{2}} h_1^*(z)$, а условия $A\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $B\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ – для функции $e^{-\frac{i\sigma z}{2}} h_3(z) f_1^*(z) + h_2(z) e^{-\frac{i\sigma z}{2}} h_3^*(z)$ с $p = 1$. Поэтому задача 2 имеет положительное решение для функции $f_1 f_1^*$ в том и только том случае, если она решается положительно для функции $h_1 h_1^*$. □

Теорема 4. *Если в представлении (2) функции $f \in W^1_\sigma$ лишь конечное количество ненулевых коэффициентов c_k, то задача 2 решается для этой функции положительно.*

Доказательство. Для упрощения выкладок будем считать $\sigma = \pi$. Из условия теоремы имеем
$$f(z) = \sin \pi z \left(\frac{(-1)^{k_1} c_{k_1}}{z-k_1} + \frac{(-1)^{k_2} c_{k_2}}{z-k_2} + ... + \frac{(-1)^{k_n} c_{k_n}}{z-k_n} \right), \quad k_n \in Z.$$
По следствию 1 функция в скобках рациональна, и после сведения к общему знаменателю степень знаменателя будет превышать степень числителя не менее чем на 2. Положим
$$f_4(z) = \frac{e^{i\pi z} - \frac{a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0}{(z+1)^{n-1}}}{2i} \left(\frac{(-1)^{k_1} c_{k_1}}{z-k_1} + \frac{(-1)^{k_2} c_{k_2}}{z-k_2} + ... + \frac{(-1)^{k_n} c_{k_n}}{z-k_n} \right),$$
$$f_5(z) = \frac{e^{-i\pi z} - \frac{a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z+a_0}{(z+1)^{n-1}}}{2i} \left(\frac{(-1)^{k_1} c_{k_1}}{z-k_1} + \frac{(-1)^{k_2} c_{k_2}}{z-k_2} + ... + \frac{(-1)^{k_n} c_{k_n}}{z-k_n} \right),$$
где $a_0, ..., a_{n-1}$ – неизвестные коэффициенты. Выберем их как решения системы уравнений
$$e^{\pm i\pi z} - \frac{a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{(z+1)^{n-1}} \Bigg|_{z=k_1,...,k_n} = 0.$$
Эквивалентна последней система
$$\cos \pi z (z+1)^{n-1} - a_{n-1}z^{n-1} - ... - a_1 z - a_0 \big|_{z=k_1,...,k_n} = 0.$$
Запишем ее в виде
$$\begin{cases} a_0 + a_1 k_1 + a_2 k_1^2 + ... + a_{n-1} k_1^{n-1} = (-1)^{k_1}(k_1+1)^{n-1} \\ a_0 + a_1 k_2 + a_2 k_2^2 + ... + a_{n-1} k_2^{n-1} = (-1)^{k_2}(k_2+1)^{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 k_n + a_2 k_n^2 + ... + a_{n-1} k_n^{n-1} = (-1)^{k_n}(k_n+1)^{n-1}. \end{cases}$$
Определитель этой системы является определителем Вандермонда
$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 & \cdots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & \cdots & k_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_n & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant m < s \leqslant n} (k_m - k_s) \neq 0,$$
поэтому существует единственное решение вышеприведенной системы. Значит, функции f_4 и f_5 решают задачу 2. □

В связи с доказательством последней теоремы возникает вопрос о возможности применения этого метода для случая, когда f имеет бесконечно много ненулевых коэффициентов. То есть проблема состоит в нахождении вместо
$$\frac{a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}{(z+1)^{n-1}}$$
такой функции $h \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $p \geq 1$, что $e^{i\pi z} - h(z)\big|_{z \in N \bigcup \{0\}} = 0$. Но такая функция не существует.

Действительно, если $f_1(z) = e^{-\frac{i\pi z}{2}}(e^{i\pi z} - h(z))$, то $f_1 \in H^\infty_{\pi/2}$ и множество нулей функции $e^{i\pi z} - h(z)$ и f_1 совпадает. Б. Винницкий показал [6], что для последовательности нулей (λ_n) в $\mathbb{C}_+$ функции $H^\infty_{\pi/2}$ условие
$$\limsup_{r \to +\infty} \left(\sum_{1 < |\lambda_n| \leqslant r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{\Re \lambda_n}{|\lambda_n|} - \frac{1}{2} \ln r \right) < +\infty$$

является необходимым и достаточным. Но последовательность $\lambda_n = n$ не удовлетворяет этому условию, потому что

$$\sum_{1<|\lambda_n|\leqslant r}\left(\frac{1}{|\lambda_n|}-\frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\frac{\Re\lambda_n}{|\lambda_n|}=\sum_{n=2}^{[r]}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{r^2}\right)\frac{n}{n}=$$

$$=\ln[r]-\frac{[r]([r]+1)}{2}\frac{1}{r^2}+O(1)=\ln r+O(1),\ r\to+\infty.$$

Теорема 5. *Если в представлении (2) функции $f\in W_\sigma^1$ коэффициенты c_k равны нулю для всех нечетных $k\in\mathbb{N}$, то задача 2 имеет для нее положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что искомое разложение имеет вид

$$f_4(z)=\frac{1}{2i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_{2k}(e^{i\sigma z}-1)}{z-2k\pi/\sigma},\qquad f_5(z)=\frac{1}{2i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_{2k}(e^{-i\sigma z}-1)}{z-2k\pi/\sigma}.$$

Как и при доказательстве теоремы 3, можно показать, что

$$f_4(z)=\frac{f(z)e^{i\sigma z/2}}{2\cos(\sigma z/2)}.$$

Утверждение теоремы для f_4, будет следовать из неравенств [21]

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dx\right\}<+\infty;\ \sup_{x>0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dy\right\}<+\infty,$$

где $f_4^*(z)=f_4(z)e^{-i\sigma z/2}$. Второе из них и неравенство

$$\sup_{y\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dx\right\}<+\infty$$

очевидны. Для доказательства условия

$$\sup_{y\in[-1;1]}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f_4^*(x+iy)|e^{-\sigma|y|}dx\right\}<+\infty$$

заметим, что из факторизационной теоремы [18] для пространств $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ вытекает существование такого $c\in\mathbb{R}$, что $f_4^*(z)e^{-cz}\in H_\sigma^1(\mathbb{C}_+)$. Поэтому для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой типа Фрагмена-Линделёфа для полуполосы. Утверждение для f_5 проверяется аналогично.

□

Очевидно, аналогичный результат справедлив, если вместо обнуления коэффициентов c_k с нечетными номерами требовать, чтобы нулевыми были все коэффициенты с четными номерами. Учитывая теорему 4, условия разрешимости задачи 2, указанные в теореме 5, можно еще ослабить: требовать, чтобы отличным от нуля было только конечное количество коэффициентов c_k с четными или нечетными номерами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39,№ 3. С. 657–702.
2. R.E.A.C. Paley, N. Wiener *Fourier transforms in complex domain.* Providence: AMS. 1934. 184 с.
3. Юлмухаметов Р.С. *Расщепление целых функций с нулями в полосе* // Мат. сборн. 1995. Т. 186, № 7. С. 147–160.
4. Юлмухаметов Р.С. *Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации* // Мат. сборн. 1999. Т. 190, № 4. С. 123–157.
5. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* М.: ФИЗМАТГИЗ. 1961. 936 с.
6. Винницкий Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 5. С. 484–500.
7. Винницкий Б.В., Дильный В.М. *Об аналоге теоремы Пэли-Винера для весовых пространств Харди* // Матем. студ. 2000. Т. 14, № 1. С. 35–40.
8. Винницкий Б.В., Дильный В.М. *Об обобщении теоремы Берлинга-Лакса* // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 3. С. 362–368.
9. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p.* М.: Наука. 1984. 368 с.
10. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. 1975. Т. 96. № 1. С. 75–82.
11. P. Lax *Translation invariant subspaces* // Acta math. 1959. T. 101. C. 163–178.
12. N.K. Nikolskii *Treatise on the shift operator. Spectral function theory* Berlin: Springer-Verlag. 1986. 461 c.
13. Гурарий В.П. *Гармонический анализ в пространствах с весом* // Труды Моск. матем. общ. 1976. Т. 35. С. 21–76.
14. V. Dilnyi *On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces* // Журн. матем. фiз., анал., геом. 2011. Т. 7. С. 19–33.
15. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир. 1984. 469 с.
16. B.Ja. Levin *Lectures on entire functions.* AMS, Providence, RI: Translations of Mathematical Monographs, 150. 1996.
17. G.Z. Ber *О явлении интерференции в интегральной метрике и аппроксимация целыми функциями экспоненциального типа* // Теор. функц., функц. анал. и прил. 1980. Т. 34. С. 11–24.
18. Винницкий Б.В., Дильный В.М. *О необходимых условиях существования решения уравнения типа свертки* // Матем. студ. 2001. Т. 16. № 1. С. 61–70.
19. Y. Lyubarskii, K. Seip *Complete interpolating sequences for Paley-Wiener spaces and Muckenhoupt's (A_p) condition* // Rev. Matem. Iberoamer. 1997. T. 13. C. 361–376.
20. A. Beurling *The collected works of Arne Beurling. Vol. 2. Harmonic analysis.* Boston: Birkhuser. 1989.
21. Дильный В.М. *Equivalent definition of some weighted Hardy spaces* // Ukr. Math. Journ. 2008. T. 60. № 9. C. 1477–1482.
22. L.S. Maergois *An analog of the Paley-Wiener theorem for entire functions of the space W^p_σ, $1 < p < 2$, and some Applications* // CMFT. 2006. T. 6. C. 459–469.
23. R. Boas *Entire functions.* New York: Academic Press. 1954. 207 c.
24. Дильный В.М. *О решениях однородного уравнения свертки в одном классе функций Харди-Смирнова* // Матем. студ. 2000. Т. 14. № 2. С. 171–174.
25. Любарский Ю.И. *Представление функций из H^p в полуплоскости и некоторые его приложения* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. межвед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. –Вып. 38. Харьков: Вища школа, 1982. С. 76–84.

Владимир Николаевич Дильный,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1,
82000, г. Львов, Украина
E-mail: `dilnyi@mail.ru`