ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 115-120.

О СТРУКТУРЕ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

М.В. ЯНГУБАЕВА

Аннотация. В работе описывается структура интегралов систем дискретных уравнений. Рассматривается пример дискретной цепочки Тоды, соответствующей алгебре Ли серии A_2.

Ключевые слова: система дискретных уравнений, полный набор интегралов.

Mathematics Subject Classification: 35Q53, 37K10

1. Введение

Настоящая статья посвящена описанию структуры интегралов системы уравнений на квадратной решетке общего вида:

$$u_{1,1}^i = f^i(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \mathbf{u}_{0,1}), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(n,m)$ вектор-функция двух дискретных аргументов, определенная на $\mathbb{C}^N$: $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^N)^T$. Нижние индексы переменных означают сдвиги аргументов функции: $\mathbf{u}_{p,q} = D_n^p D_m^q \mathbf{u}(n,m) = \mathbf{u}(n+p, m+q)$, где D_m, D_n операторы сдвига. Набор динамических переменных включает в себя переменные $\mathbf{u}$ и их сдвиги $\mathbf{u}_{p,0}, \mathbf{u}_{0,q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$. Полагаем также, что система уравнений (1) разрешима относительно переменных $\mathbf{u}_{-1,-1}$, $\mathbf{u}_{-1,1}$, $\mathbf{u}_{1,-1}$.

Определение 1. *i) Функция* $I(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \mathbf{u}_{2,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k,0})$, $\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial I}{\partial u_{k,0}^i}\right)^2 \neq 0$ *(функция* $F(n,\ m,\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}_{0,1},\ \mathbf{u}_{0,2}, \ldots,\ \mathbf{u}_{0,l})$, $\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial u_{0,l}^i}\right)^2 \neq 0$*) называется m-интегралом (соответственно n-интегралом) системы уравнений* (1)*, если выполняется равенство* $D_m I = I$ *(или* $D_n F = F$*).*
ii) Интегралы вида $I = I(n)$ *(*$F = F(m)$*) называются тривиальными.*
iii) Система уравнений, допускающая N *нетривиальных независимых интегралов в каждом направлении, называется интегрируемой по Дарбу.*
iv) Интегралы называются независимыми, если ни один из них не выражается через остальные и их сдвиги.

Вопросы интегрируемости по Дарбу дифференциальных уравнений гиперболического типа и систем таких уравнений активно изучаются в течение многих десятилетий [1], [2]. В работах [3], [4] доказано, что гиперболическая система интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда её характеристическое кольцо Ли имеет конечную размерность (см. также [5]). В работах [6], [7] введено понятие характеристического кольца дискретного уравнения и с помощью этого понятия проведена классификация интегрируемых по Дарбу дифференциально-разностных уравнений вида $u_{1,x} = f(u, u_1, u_x)$. В работе [8], [9] изучается проблема построения полного набора интегралов гиперболической системы.

M.V. Yangubaeva, On structure of integrals for systems of discrete equations.

Работа поддержана РФФИ (гранты 13-01-00070-а, 14-01-97008 р-поволжье-а).

Поступила 25 октября 2013 г.

Структура интегралов дифференциальных уравнений была изучена в [5]. В работах [10], [11] обсуждается связь интегрируемости по Дарбу и обрыванием ряда инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения. Работы [12], [13] посвящены изучению интегрируемых по Дарбу дискретных уравнений в рамках симметрийного подхода.

1.1. Условия полноты набора интегралов систем дискретных уравнений.

Порядком интеграла $I = I(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \mathbf{u}_{2,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k,0})$ системы дискретных уравнений (1) называется число k. Предполагается, что существуют такие i, j, что $\frac{\partial I}{\partial u^i} \neq 0$, $\frac{\partial I}{\partial u^j_{k,0}} \neq 0$.

Пусть система (1) имеет N независимых m-интегралов I^1, $I^2, \ldots,$ I^N минимальных порядков $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_N$, $(ord I^i = k_i)$. Это значит, что выполнены следующие условия

1. $D_m I(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k,0}) = I(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k,0}), k \leqslant k_1$ тогда и только тогда, когда $I = I(n)$;

2. $D_m I(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k,0}) = I(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k,0}), k \in [k_{j-1}, k_j), j \in [2; N]$ тогда и только тогда, когда I является функцией, зависящей только от n, I^1, $I^2, \ldots,$ I^{j-1} и их сдвигов по n.

Справедливо утверждение:

Лемма 1. *Пусть система уравнений (1) имеет N независимых m-интегралов минимального порядка k. Тогда любой другой m-интеграл является функцией переменных n, интегралов I^1, $I^2, \ldots,$ I^N и их сдвигов по n.*

Доказательство. Пусть выполнено условие $\frac{\partial I^1}{\partial u^1_{k,0}} \neq 0$. Если это не так, то добьемся выполнения этого условия переобозначением переменных. Выразим переменную $u^1_{k,0}$ через остальные переменные и интеграл I^1:

$$u^1_{k,0} = g^1(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0}, u^2_{k,0}, \ldots, u^N_{k,0}, I^1). \tag{2}$$

Затем перейдем от набора переменных $n, m, \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_{1,0}, \ldots,$ $\mathbf{u}_{k,0}$ к новому набору переменных $n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0}$, $u^2_{k,0}, \ldots,$ $u^N_{k,0}$, I^1. В результате все интегралы $I^s, s = 2, 3, \ldots, N$ перепишутся в виде $I^s = I^s(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0}, u^2_{k,0}, \ldots,$ $u^N_{k,0}, I^1)$. Тогда имеем $\sum_{i=2}^N \left(\frac{\partial I^2}{\partial u^i_{k,0}}\right)^2 \neq 0$. Действительно, в противном случае второй из интегралов заданного набора можно было бы разложить в окрестности точки $I^1 = i_0$, где i_0 — некоторое комплексное число, в степенной ряд

$$I^2 = \sum_{j=0}^{\infty} I_j(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0})(I^1 - i_0)^j. \tag{3}$$

Так как I^1, I^2 являются m-интегралами, то все коэффициенты ряда (3) также будут m-интегралами порядка не превосходящего $k - 1$. Действительно, имеем

$$D_m I^2 = D_m \left(\sum_{j=0}^{\infty} I_j(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0})(I^1 - i_0)^j\right),$$

$$D_m I^2 = \sum_{j=0}^{\infty} D_m I_j(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0}) D_m (I^1 - i_0)^j,$$

$$I^2 = \sum_{j=0}^{\infty} D_m I_j(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0})(I^1 - i_0)^j. \tag{4}$$

Сравнивая ряды (3) и (4) и пользуясь единственностью разложения в ряд Тейлора, получаем равенство

$$D_m I_j(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0}) = I_j(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \ldots, \mathbf{u}_{k-1,0}),$$

и интеграл I^2 является функцией от переменных n, I^1, что противоречит требованию независимости рассматриваемого набора интегралов.

Аналогично предыдущим рассуждениям можно считать, что $\frac{\partial I^2}{\partial u^2_{k,0}} \neq 0$. Тогда переменную $u^2_{k,0}$ выразим через оставшиеся переменные и интегралы I^1, I^2

$$u^2_{k,0} = g^2(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0}, u^3_{k,0}, \dots, u^N_{k,0}, I^1, I^2). \tag{5}$$

От переменных $n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots,\ \mathbf{u}_{k-1,0},\ u^2_{k,0}, \dots,\ u^N_{k,0},\ I^1$ перейдем к набору переменных $n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots,\ \mathbf{u}_{k-1,0}, u^3_{k,0}, \dots,\ u^N_{k,0}, I^1, I^2$ в интегралах $I^s, s = 3, 4, \dots, N$.

Продолжая наши рассуждения выше на случай переменной $u^3_{k,0}$ и интеграла I^3, можно показать, что $\sum_{i=3}^N \left(\frac{\partial I^3}{\partial u^i_{k,0}}\right)^2 \neq 0$. Предполагая $\frac{\partial I^3}{\partial u^3_{k,0}} \neq 0$, находим

$$u^3_{k,0} = g^3(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0}, u^4_{k,0}, \dots, u^p_{k,0}, I^1, I^2, I^3). \tag{6}$$

На i-ом шаге получим соотношения

$$u^i_{k,0} = g^i(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0}, u^{i+1}_{k,0}, \dots, u^N_{k,0}, I^1, \dots, I^i), i \leqslant N. \tag{7}$$

В результате проведенных преобразований приходим к формулам

$$u^i_{k,0} = \tilde{g}^i(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0}, I^1, \dots, I^N), i = 1, 2, \dots, N. \tag{8}$$

Применяя оператор сдвига D^j_n к последним соотношениям, имеем, что

$$\begin{gathered} u^i_{k+j,0} = \phi^i(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0}, I^1, \dots, I^N, \\ D_n I^1, \dots, D_n I^N, \dots, D^j_n I^1, \dots, D^j_n I^N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть G — произвольный m-интеграл порядка $q \geq k$:

$$G = G(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{q,0}).$$

От переменных $n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{q,0}$ перейдем к переменным $n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0},\ I^1, \dots,$ $I^N, D_n I^1, \dots, D_n I^N, \dots, D^{q-k}_n I^1, \dots, D^{q-k}_n I^N$ и в окрестности точки

$$\left(\xi^{(1)}, \xi^{(1)}_{1,0}, \dots, \xi^{(1)}_{q-k,0}, \xi^{(2)}, \xi^{(2)}_{1,0}, \dots, \xi^{(2)}_{q-k,0}, \dots, \xi^{(N)}, \xi^{(N)}_{1,0}, \dots, \xi^{(N)}_{q-k,0}, \right)$$

функцию G разложим в степенной ряд:

$$\begin{aligned} G = & \sum_{\alpha[1,0]+\alpha[1,1]+\dots+\alpha[1,q-k]=0}^{\infty} \ \sum_{\alpha[2,0]+\alpha[2,1]+\dots+\alpha[2,q-k]=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha[N,0]+\alpha[N,1]+\dots+\alpha[N,q-k]=0}^{\infty} \\ & G_{\alpha^1\alpha^2\dots\alpha^N}(n, m, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{1,0}, \dots, \mathbf{u}_{k-1,0}) \left(I^1 - \xi^{(1)}\right)^{\alpha[1,0]} \cdot \left(D_n I^1 - \xi^{(1)}_1\right)^{\alpha[1,1]} \dots \\ & \left(D^{q-k}_n I^1 - \xi^{(1)}_{q-k}\right)^{\alpha[1,q-k]} \cdot \left(I^2 - \xi^{(2)}\right)^{\alpha[2,0]} \cdot \left(D_n I^2 - \xi^{(2)}_1\right)^{\alpha[2,1]} \dots \\ & \left(D^{q-k}_n I^2 - \xi^{(2)}_{q-k}\right)^{\alpha[2,q-k]} \cdot \left(I^N - \xi^{(N)}\right)^{\alpha[N,0]} \dots \left(D^{q-k}_n I^N - \xi^{(N)}_{q-k}\right)^{\alpha[N,q-k]}, \end{aligned}$$

где $\alpha^j = (\alpha[k,0], \alpha[j,1], \alpha[j,2], \dots, \alpha[j,q-k]), \quad j = 1, 2, \dots, N$. Так как функции $G, I^1, \dots,$ $I^N, D_n I^1, \dots, D_n I^N, \dots, D^{q-k}_n I^1, \dots, D^{q-k}_n I^N$ являются m-интегралами, то все коэффициенты этого ряда должны быть также m-интегралами порядка, не превосходящего $k-1$. Так как число k является минимальным порядком интеграла, то $G_{\alpha^1\alpha^2\dots\alpha^N}$ является функцией от переменной n.

В результате получаем, что произвольный m-интеграл G выражается через интегралы заданного набора и их сдвиги по n

$$G = G(n, I^1, \dots, I^N, D_n I^1, \dots, D_n I^N, \dots, D^{q-k}_n I^1, \dots, D^{q-k}_n I^N).$$

Лемма доказана.

Далее докажем теорему о структуре интегралов системы (1) в общем случае.

Теорема 1. *Пусть система уравнений (1) имеет p независимых m-интегралов I^j, $j=1,2,\ldots,N$ минимальных порядков $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_N$. Тогда любой другой m-интеграл является функцией от переменных n, интегралов $I^1,\ldots,I^N$ и их сдвигов по n.*

Доказательство. Обзначим $K=k_N$. Приведем интегралы $I^j, j=1,2,\ldots,N$ заданного набора к одному порядку K, подействовав на них оператором сдвига $D_n^{K-k_j}$ и прибавив I^j, получим

$$D_n^{K-k_j} I^j + I^j = \tilde{I}^j(n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_{K-k_j,0},\mathbf{u}_{K-k_j+1,0},\ldots,\mathbf{u}_{K,0}), \quad j=1,2,\ldots,N-1. \tag{10}$$

Таким образом, мы имеем N интегралов $\tilde{I}^1,\tilde{I}^2,\ldots,\tilde{I}^{N-1},I^N$ одного порядка K. Отметим, что построенные интегралы являются независимыми. Далее, проводя аналогичные рассуждения, как и в доказательстве леммы 1, получаем, что переменные $u^i_{K,0}, i=1,2,\ldots,N$ можно выразить через динамические переменные $\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\ldots,\mathbf{u}_{K-1,0}$ и набор интегралов $\tilde{I}^1,\tilde{I}^2,\ldots,\tilde{I}^{N-1},I^N$

$$u^i_{K,0} = g^i(n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\ldots,\mathbf{u}_{K-1},\tilde{I}^1,\tilde{I}^2,\ldots,\tilde{I}^{N-1},I^N), \quad i=1,2,\ldots,N$$

или, учитывая (10),

$$u^i_{K,0} = g^i(n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\ldots,\mathbf{u}_{K-1},I^1,\ldots,I^{N-1},I^N,D_n^{K-k_1}I^1,\ldots,D_n^{K-k_{N-1}}I^{N-1}), \quad i=1,2,\ldots,N.$$

Применим оператор сдвига D_n^r к последним соотношениям, получим формулу

$$\begin{gathered} u^i_{K+r,0} = \psi^i(n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\ldots,\mathbf{u}_{K-1,0},D_n^{K-k_1}I^1,D_n^{K-k_1+1}I^1,\ldots,D_n^{K-k_1+r}I^1, \\ D_n^{K-k_2}I^2,D_n^{K-k_2+1}I^2,\ldots,D_n^{K-k_2+r}I^2,\ldots,D_n^{K-k_{N-1}}I^{N-1},D_n^{K-k_{N-1}+1}I^{N-1},\ldots, \\ D_n^{K-k_{N-1}+r}I^{N-1},I^N,D_nI^N,\ldots,D_m^rI^N), \quad i=1,2,\ldots,N, \quad k=1,2,\ldots. \end{gathered}$$

Пусть G — произвольный m-интеграл порядка $s \geq K$:

$$G = G(n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\mathbf{u}_{2,0},\ldots,\mathbf{u}_{s,0}).$$

Далее, как и выше, от переменных $n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\mathbf{u}_{2,0},\ldots,\mathbf{u}_{s,0}$ перейдем к переменным $n,m,\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_{1,0}$, $\mathbf{u}_{2,0},\ldots$, $\mathbf{u}_{K-1,0}$, $D_n^{K-k_1}I^1$, $D_n^{K-k_1+1}I^1$, $\ldots$, $D_n^{K-k_1+r}I^1$, $D_n^{K-k_2}I^2$, $D_n^{K-k_2+1}I^2,\ldots$, $D_n^{K-k_2+r}I^2,\ldots$, $D_n^{K-k_{N-1}}I^{N-1}$, $D_n^{K-k_{N-1}+1}I^{N-1},\ldots$, $D_n^{K-k_{N-1}+r}I^{N-1}$, I^N, $D_nI^N,\ldots,D_m^rI^N$. В окрестности точки ($\xi^{(1)}_{K-k_1,0},\xi^{(1)}_{K-k_1+1,0},\ldots$, $\xi^{(1)}_{r-k_1,0}$, $\xi^{(2)}_{K-k_2,0}$, $\xi^{(2)}_{K-k_2+1,0},\ldots,\xi^{(2)}_{r-k_2,0},\ldots,\xi^{(N-1)}_{K-k_{N-1},0}$, $\xi^{(N-1)}_{K-k_{N-1}+1,0},\ldots$, $\xi^{(N-1)}_{s-k_{N-1},0},\xi^{(N)}$, $\xi^{(N)}_{1,0},\ldots,\xi^{(N)}_{s-K,0}$) последнюю функцию G представим в виде степенного ряда

$$\begin{gathered} G = \sum_{\alpha[1,K-k_1]+\cdots+\alpha[1,s-k_1]=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha[N-1,K-k_{N-1}]+\cdots+\alpha[N-1,s-k_{N-1}]=0}^{\infty} \sum_{\alpha[N,0]+\alpha[N,1]+\cdots+\alpha[N,s-K]=0}^{\infty} \\ G_{\alpha^1\alpha^2\ldots\alpha^N}(n,m,\mathbf{u},\mathbf{u}_{1,0},\ldots,\mathbf{u}_{K-1,0})\left(D_n^{K-k_1}I^1-\xi^{(1)}_{K-k_1}\right)^{\alpha[1,K-k_1]}\cdot \\ \left(D_n^{K-k_1+1}I^1-\xi^{(1)}_{K-k_1+1}\right)^{\alpha[1,K-k_1+1]}\ldots\left(D_n^{s-k_1}I^1-\xi^{(1)}_{s-k_1}\right)^{\alpha[1,s-k_1]}\ldots \\ \left(D_n^{K-k_{N-1}}I^{N-1}-\xi^{(N-1)}_{K-k_{N-1}}\right)^{\alpha[N-1,K-k_{N-1}]}\left(D_n^{K-k_{N-1}+1}I^{N-1}-\xi^{(N-1)}_{K-k_{N-1}+1}\right)^{\alpha[N-1,K-k_{N-1}+1]}\ldots \\ \left(D_n^{s-k_{N-1}}I^{N-1}-\xi^{(N-1)}_{s-k_{N-1}}\right)^{\alpha[N-1,s-k_{N-1}]}\cdot\left(I^N-\xi^{(N)}\right)^{\alpha[N,0]}\cdot\left(D_nI^N-\xi^{(N)}_1\right)^{\alpha[N,1]}\ldots \\ \left(D_n^{s-K-1}I^N-\xi^{(N)}_{s-K-1}\right)^{\alpha[N,s-K-1]}\cdot\left(D_n^{s-K}I^N-\xi^{(N)}_{s-K}\right)^{\alpha[N,s-K]}. \end{gathered}$$

Здесь $\alpha^j = (\alpha[k,K-k_j],\alpha[j,K-k_j+1],\ldots,\alpha[j,s-k_j])$, $j=1,2,\ldots,N-1$, $\alpha^N=(\alpha[N,0],\,\alpha[N,1],\ldots,\alpha[N,s-K])$. Так как G и все функции $D_n^{K-k_1}I^1$, $D_n^{K-k_1+1}I^1$, $\ldots$,

$D_n^{s-k_1}I^1$, $D_n^{K-k_2}I^2$, $D_n^{K-k_2+1}I^2$, $\dots$, $D_n^{s-k_2}I^2$, $\dots$, $D_n^{K-k_{N-1}}I^{N-1}$, $D_n^{K-k_{N-1}+1}I^{N-1}$, $\dots$, $D_n^{s-k_{N-1}}I^{N-1}$, $I^N, D_nI^N, \dots, D_n^{s-K}I^N$ являются m-интегралами, то все коэффициенты этого ряда должны быть также m-интегралами порядка не превосходящего $K-1$. Из определения интегралов минимальных порядков вытекает, что $G_{\alpha^1\alpha^2\dots\alpha^N}$ является функцией от переменных n, I^1, $I^2, \dots$, I^{N-1}, I^N и их сдвигов по n.

Таким образом, произвольный m-интеграл G имеет вид

$$G = G(n, I^1, \dots, I^N, D_nI^1, \dots, D_nI^N, \dots, D_n^{s-k_1}I^1, \dots, D_n^{s-k_N}I^N),$$

и, следовательно, интегралы $I^1, I^2, \dots, I^N$ образуют полный базис.

Теорема доказана.

1.2. Пример системы дискретных уравнений, имеющий полные наборы интегралов.

Рассмотрим дискретную цепочку Тоды, соответствующую простой алгебре Ли серии A_2

$$\begin{array}{rcl} a_{0,0}a_{1,1} - a_{1,0}a_{0,1} &=& b_{1,0}, \\ b_{0,0}b_{1,1} - b_{1,0}b_{0,1} &=& a_{0,1}, \end{array} \tag{11}$$

здесь $a = a(n,m), b = b(n,m)$ — неизвестные функции двух дискретных переменных n, m. В работе [14] было построено характеристическое кольцо Ли L_m, имеющее базис

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial a_{0,-1}}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial b_{0,-1}},$$

$$Y_1 = D_m^{-1}\frac{\partial}{\partial a_{0,1}}D_m = \frac{\partial}{\partial a_{0,0}} + \left(\frac{a_{1,0}}{a_{0,0}} - \frac{b_{1,0}b_{0,-1}}{a_{0,0}b_{0,0}a_{0,-1}} + \frac{1}{a_{0,-1}b_{0,0}}\right)\frac{\partial}{\partial a_{1,0}} +$$

$$+\left(\frac{a_{-1,0}}{a_{0,0}} + \frac{b_{0,-1}}{a_{0,0}a_{0,-1}}\right)\frac{\partial}{\partial a_{-1,0}} + \dots + \frac{1}{b_{0,-1}}\frac{\partial}{\partial b_{1,0}} - \left(\frac{a_{-1,0}}{a_{0,0}b_{0,-1}} + \frac{1}{a_{0,0}a_{0,-1}}\right)\frac{\partial}{\partial b_{-1,0}} + \dots,$$

$$Y_2 = D_m^{-1}\frac{\partial}{\partial b_{0,1}}D_m = \frac{\partial}{\partial b_{0,0}} + \left(\frac{b_{1,0}}{b_{0,0}} - \frac{a_{0,0}}{b_{0,0}b_{0,-1}}\right)\frac{\partial}{\partial b_{1,0}} + \left(\frac{b_{-1,0}}{b_{0,0}} + \frac{a_{-1,0}}{b_{0,0}b_{0,-1}}\right)\frac{\partial}{\partial b_{-1,0}} + \dots,$$

$P_1 = [X_1, Y_1]$, $P_2 = [X_2, Y_1]$, $P_3 = [X_2, Y_2]$. В каждом из операторов отбросим слагаемые, содержащие переменные с отрицательными сдвигами, и решим систему уравнений

$$\begin{array}{c} X_1(F) = 0, \quad X_2(F) = 0, \quad Y_1(F) = 0, \quad Y_2(F) = 0, \\ P_1(F) = 0, \quad P_2(F) = 0, \quad P_3(F) = 0. \end{array} \tag{12}$$

Для решения системы (12) достаточно считать, что F зависит от $b_{0,0}$, $a_{0,0}$, $b_{1,0}$, $a_{1,0}$, $b_{2,0}$, $a_{2,0}$ или от $a_{0,0}$, $b_{1,0}$, $a_{1,0}$, $b_{2,0}$, $a_{2,0}$, $b_{3,0}$. Если предположить, что F зависит от меньшего числа переменных, то получим только тривиальные интегралы. В результате получаются две системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Решая эти системы, мы получим два независимых m-интеграла данной системы

$$I^1 = \frac{b_{0,0}}{b_{1,0}} + \frac{a_{0,0}b_{2,0}}{a_{1,0}b_{1,0}} + \frac{a_{2,0}}{a_{1,0}}, \qquad I^2 = \frac{a_{0,0}}{a_{1,0}} + \frac{a_{2,0}b_{1,0}}{a_{1,0}b_{2,0}} + \frac{b_{3,0}}{b_{2,0}}.$$

Таким образом, найден полный набор m-интегралов минимальных порядков. Условие теоремы 1 выполнено, поэтому любой другой m-интеграл является функцией, зависящей от n, I^1, I^2 и их сдвигов.

Автор благодарит И.Т. Хабибуллина за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Darboux *Lecons sur la théorie générale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal.* Gauthier-Villars. Paris. 1896. V. 1–4.
2. E. Goursat *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* // Annales de la faculté des Sciences de l'Université de Toulouse 2^e série. V. 1. № 1. 1899. P. 31–78.
3. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // ТМФ. Т. 51, № 1. 1982. С. 10-–21.
4. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт. Башкирский филиал АН СССР. Уфа. 1981. 22 с.
5. Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. *Характеристические кольца Ли и нелиейные интегрируемые уравнения.* М. Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2012. 376 с.
6. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *On the classification of Darboux integrable equations* // Journal of Mathematical Physics. V. 49, № 102702. 2008.
7. I. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1,x} = t_x + d(t, t_1)$ // Journal of Mathematical Physics. 2009. T. 50, № 1.
8. Жибер А.В., Гурьева *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. Уфа. Т.6, № 2 (13). 2005. С. 26–34.
9. Жибер А.В., Костригина О.С. *Характеристические алгебры нелинейных гиперболических систем уравнений* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2010. Т. 3, № 2. С. 173-–184.
10. Адлер В.Э., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. 1999. Т. 121, № 2. С. 271-–284.
11. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. 2001. Т. 56, № 1 (337). С. 63-–106.
12. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov *Examples of Darboux Integrable Discrete Equations Possessing First Integrals of an Arbitrarily High Minimal Order* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 3. С. 177–183.
13. R.N. Garifullin, R.I. Yamilov *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45, № 345205.
14. R.N. Garifullin, I.T. Habibullin, M.V. Yangubaeva *Affine and Finite Lie Algebras and Integrable Toda Field Equations on Discrete Space-Time* // SIGMA. V. 8. 2012. 33 p.

Марина Валерьевна Янгубаева,
Уфимский государственный университет экономики и сервиса,
ул. Чернышевского, 145,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: marina.yangubaeva@mail.ru