ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 75-83.

УДК 517.5

ТЕОРЕМА КОШИ–АДАМАРА ДЛЯ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ

Аннотация. В данной статье изучается связь роста коэффициентов ряда экспонент с его областью сходимости в конечномерных вещественных и комплексных пространствах. К первым результатам данной тематики относится известная формула Коши–Адамара.

Получены точные условия на показатели экспонент и выпуклую область, при которых имеет место обобщение теоремы Коши–Адамара.

С последовательностью коэффициентов рядов экспонент сопоставляется пространство последовательностей, образующее коммутативное кольцо с единицей. Изучение свойств этого кольца позволит получать результаты о разрешимости неоднородных систем уравнений свертки.

Ключевые слова: выпуклые области, ряды экспонент, формула Коши–Адамара.

Mathematics Subject Classification: 40B05

1. Введение

В данной статье изучается связь роста коэффициентов ряда экспонент с его областью сходимости.

К первому результату этого направления можно отнести хорошо известную теорему Коши–Адамара после соответствующей замены переменных. Аналог теоремы Коши–Адамара для рядов экспонент с неотрицательными показателями одной переменной был доказан Валироном [1], для рядов экспоненциальных мономов одной комплексной переменной изучен в статье [2], случай ряда экспонент многих переменных с комплексными показателями был рассмотрен в статье [3].

2. Теорема Коши–Адамара

Для дальнейшего нам понадобятся несколько определений.

Пусть $\mathbb{E}$ — это пространство $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$. Для элементов $z,\ w \in \mathbb{E}$ будем полагать

$$zw = \sum_{j=1}^{m} z_j w_j.$$

Через $\mathbb{B}$ будем обозначать замкнутый единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{E}$.

Опорная функция множества $M \subset \mathbb{E}$ определяется по формуле

$$H(\lambda, M) = \sup_{z\in M} \operatorname{Re} \lambda z,\ \ \lambda \in \mathbb{E}.$$

Это однородная выпуклая функция. Как известно, если множество M не пусто и ограничено, эта функция будет непрерывной.

S.G. Merlyakov, Cauchy–Hadamard theorem for exponential series.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00 779) и Гранта Президента РФ НШ 3081.2008.1.

Поступила 11 апреля 2013 г.

В данной статье мы приведем точные условия на произвольную выпуклую область $U \subset \mathbb{E}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{E} : n \in \mathbb{N}\}$, члены которой не обязательно различны, при которых выполняется утверждение Коши–Адамара, а именно, абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}, \tag{1}$$

$c_n \in \mathbb{C}$, в области U эквивалентна соотношению

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln |c_n| + H(\lambda_n, U)}{|\lambda_n|} \leqslant 0. \tag{2}$$

Если данная эквивалентность выполняется, то будем называть последовательность Λ системой Коши–Адамара для области U.

Несложно показать, что всегда найдутся коэффициенты $c_n > 0, n \in \mathbb{N}$, для которых ряд (1) сходится абсолютно во всем пространстве. В таком случае, очевидно, утверждение Коши–Адамара не будет выполняться, если $H(\lambda_n, U) = \infty$ или $\lambda_n = 0$ для бесконечного числа индексов, поэтому без ограничения общности будем считать, что $H(\lambda_n, U) < \infty$, $\lambda_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что любая подпоследовательность системы Коши–Адамара для области U сама будет такой системой. Действительно, ряд экспонент с показателями из этой подпоследовательности можно дополнить недостающими членами с нулевыми коэффициентами, что не влияет ни на сходимость ряда, ни на упомянутый верхний предел.

Положим

$$S = \left\{ \frac{\lambda}{|\lambda|} : \lambda \in \Lambda \right\}. \tag{3}$$

Для дальнейшего нам понадобятся несколько результатов о связи поведения ряда (1) с соотношением (2).

Лемма 1. *Пусть для коэффициентов ряда* (1) *выполнено условие* (2), *а для компакта* $R \subset U$ *и точки* $z \in U$ *имеет место включение* $z+R \subset U$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\ln |c_n e^{\lambda_n z}| \leqslant -\delta(z)|\lambda_n| - H(\lambda_n, R),\ \delta(z) > 0,\ n \geqslant N(\delta(z)). \tag{4}$$

Доказательство. Как несложно показать, найдется число $\delta(z) > 0$, для которого $z + 2\delta(z)\mathbb{B} + R \subset U$, поэтому $\operatorname{Re} \lambda z \leqslant H(\lambda, U) - 2\delta(z)|\lambda| - H(\lambda, R), \lambda \in \mathbb{E}$, а из неравенства (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива формула $\ln |c_n| \leqslant -H(\lambda_n, U) + \varepsilon|\lambda_n|$, $n \geqslant N(\varepsilon)$, из чего и вытекает искомое.

Следствие 1. Пусть выполнено неравенство (2) и соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda_n| - H(\lambda_n, R)} < \infty. \tag{5}$$

Тогда ряд (1) будет сходиться абсолютно в любой точке $z \in \mathbb{E}$ со свойством $z + R \subset U$.

Следствие 2. Пусть выполнено соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda_n|} < \infty \tag{6}$$

и левая часть формулы (2) равна $-\delta, \delta > 0$.

Тогда ряд (1) абсолютно сходится в области $U + \delta\mathbb{B}$.

Действительно, в таком случае, как легко видеть, будут выполнены неравенство (2) с заменой области U на $U + \delta\mathbb{B}$ и соотношение (5) для $R = \{0\}$.

Следствие 3. *Неравенство (2) влечет поточечную ограниченность членов ряда (1) в области U.*

Действительно, искомое получится, если положить $R = \{0\}$.

При дополнительных предположениях верно и обратное.

Предложение 1. *Если функция $H(s,U)$ непрерывна на замыкании множества S, члены ряда (1) поточечно ограничены в области U, и имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty, \tag{7}$$

то будет выполнено соотношение (2).

Доказательство. Область U можно исчерпать возрастающей по включению последовательностью компактов $K_p, p \in \mathbb{N}$, при этом, как несложно показать, будет выполнено соотношение

$$H(s,K_p) \uparrow H(s,U).$$

По теореме Дини эта сходимость будет равномерной на компакте $\overline{S}$, так что для любого числа $\delta > 0$ найдется компакт $K \subset U$ со свойством $H(s,U) \leqslant H(s,K) + \delta, s \in S$.

Компакт K содержится в выпуклой оболочке некоторых точек $z_1, \ldots, z_k$ области U (см. [4], с. 59), поэтому для любого элемента $z \in K$ будет выполнено соотношение

$$\operatorname{Re} sz \leqslant \max\{\operatorname{Re} sz_1, \ldots, \operatorname{Re} sz_k\}, s \in S, \tag{8}$$

так что получим

$$\ln|c_n| + H(\lambda_n, U) \leqslant \ln|c_n| + H(\lambda_n, K) + \delta|\lambda_n| \leqslant$$
$$\max\{\ln|c_n| + \operatorname{Re}\lambda_n z_1, \ldots, \ln|c_n| + \operatorname{Re}\lambda_n z_k\} + \delta|\lambda_n|.$$

Из условия на члены ряда (1) и произвольности числа $\delta > 0$ и вытекает искомое.

Следствие. Пусть выполнено равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} \leqslant d < \infty, \tag{9}$$

и члены ряда (1) поточечно ограничены в некотором шаре U радиуса большего d. Тогда ряд (1) сходится абсолютно в центре этого ряда.

Действительно, очевидно, что будет выполнено условие (7), и, следовательно, неравенство (2).

Положим $R = d\mathbb{B}$. В таком случае $H(\lambda, R) = d|\lambda|, \lambda \in \mathbb{E}$, и, как легко видеть, будет выполнено соотношение (5), поэтому искомое вытекает из следствия 1 леммы 1.

Полученный результат обобщает теорему 3.1.2 монографии [5].

Ряды экспонент обладают следующим свойством.

Предложение 2. *Абсолютно сходящийся в области U ряд (1) будет сходиться нормально на компактах этой области.*

Доказательство. Как отмечалось выше, для любого компакта K области U найдутся точки $z_1, \ldots, z_k$ этой области, удовлетворяющие соотношению (8) для точек компакта K, так что получим

$$\max_{z\in K} |c_n e^{\lambda_n z}| \leqslant |c_n| e^{\max\{\operatorname{Re}\lambda_n z_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n z_k\}} \leqslant |c_n| \left(|e^{\lambda_n z_1}| + \cdots + |e^{\lambda_n z_k}|\right),$$

и, наконец,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{z\in K} |c_n e^{\lambda_n z}| < \infty. \tag{10}$$

Утверждение доказано.

Приведем пример, показывающий точность следствия утверждения 1.

Пример. Пусть

$$U = \{z \in \mathbb{E} : |z| < 2\}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 1, \ \ln |c_n| = -2|\lambda_n|.$$

Члены ряда (1), очевидно, поточечно ограничены в шаре U, поэтому по следствию утверждения 1 он абсолютно сходится в шаре $\{z \in \mathbb{E} : |z| < 1\}$, но не обладает этим свойством в шаре большего радиуса.

Действительно, предположим, что ряд (1) сходится абсолютно в шаре

$$\{z \in \mathbb{E} : |z| < 1 + \delta\}, \delta > 0.$$

По только что доказанному результату этот ряд должен сходиться нормально на шаре $\mathbb{B}$, а это эквивалентно сходимости гармонического ряда. Полученное противоречие и доказывает искомое.

Предложение 3. *Пусть имеет место равенство* $U = R+V$ *для выпуклого компакта* $R \subset \mathbb{E}$ *и выпуклой области* $V \subset \mathbb{E}$*, функция* $H(s, U)$ *непрерывна на замыкании множества* S*, и для любой последовательности коэффициентов, удовлетворяющей неравенству* (2)*, ряд* (1) *сходится абсолютно в точках области* V*. Тогда будет иметь место соотношение* (5)*.*

Доказательство. Из представления области U вытекает равенство

$$H(\lambda, U) = H(\lambda, R) + H(\lambda, V), \ \lambda \in \mathbb{E},$$

(см.[6], с. 130).

По условию ряд (1) с коэффициентами

$$c_n = e^{-H(\lambda_n, U)}, \ n \in \mathbb{N},$$

сходится абсолютно в области V, и, согласно утверждению (2), эта сходимость нормальная на любом компакте области V. Как показано выше, для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset V$, что $H(s, V) \leqslant H(s, K) + \varepsilon, s \in S$.

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda_n| - H(\lambda_n, R)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{H(\lambda_n, K) - H(\lambda_n, U)} = \sum_{n=1}^{\infty} \max_{z\in K} |c_n e^{\lambda_n z}| < \infty,$$

что и требовалось доказать.

В литературе для рядов экспонент общеупотребительно условие (5), поэтому выясним его связь с условием (5) в случае $R = d\,\mathbb{B}$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda_n| - d|\lambda_n|} < \infty. \tag{11}$$

Очевидно, что последнее условие вытекает из соотношения (5). Обратное не верно, точки λ_n, как несложно показать, можно так переставить некоторой перестановкой $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_{r(n)}|} = \infty,$$

а условие (11) не изменится.

Но при дополнительном предположении эти условия будут эквивалентны.

Предложение 4. *Пусть последовательность* $\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$ *монотонно возрастает и удовлетворяет соотношению* (11)*. Тогда имеет место равенство* (5)*.*

Доказательство. Для любого числа $\varepsilon > 0$ члены ряда (11) монотонно убывают, и, как хорошо известно, это влечет равенство

$$\lim_{n\to\infty} ne^{-(d+\varepsilon)|\lambda_n|} = 0,$$

из чего получим

$$\lim_{n\to\infty} \ln n - (d+\varepsilon)|\lambda_n| = -\infty,$$

и, наконец,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} \leqslant d+\varepsilon.$$

Утверждение вытекает из произвольности числа ε.

Приведем теперь примеры применения полученных результатов.

Пример 1. Пусть задан ряд

$$\sum_{\|k\|=0}^{\infty} c_k(z-a)^k,\ c_k\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}_0^m,\ z\in\mathbb{C}^m,$$

и $r\in\mathbb{R}_+^m$ — его сопряженные радиусы сходимости (см. [7], с. 46), где через $\mathbb{N}_0$ обозначено множество целых неотрицательных чисел, а $\|b\| = \sum_{j=1}^m |b_j|, b\in\mathbb{E}$.

Сделав замену

$$z-a = (e^{w_1},\ldots,e^{w_m}),$$

получим ряд экспонент с показателями $\{k : k\in\mathbb{N}_0^m\}$, члены которого ограничены в области

$$U = \{w\in\mathbb{E} : \operatorname{Re} w_1 < \ln r_1,\ldots,\operatorname{Re} w_m < \ln r_m\}.$$

Как несложно видеть, опорная функция этой области задается равенствами $H(\lambda,U) = \lambda\ln r$, если $\lambda_1\geqslant 0,\ldots,\lambda_m\geqslant 0$, и $H(\lambda,U)=\infty$ в противном случае. Очевидно, функция H непрерывна на множестве S, последовательность $\{k : k\in\mathbb{N}_0^m\}$ стремится к бесконечности, а для произвольной точки $b\in\mathbb{E}$ выполняются неравенства

$$\frac{\|b\|}{\sqrt{m}} \leqslant |b| \leqslant \sqrt{m}\|b\|,$$

так что

$$\sum_{\|k\|=0}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} \leqslant \sum_{\|k\|=0}^{\infty} e^{-\varepsilon\|k\|/\sqrt{m}} = \frac{e^{\varepsilon\sqrt{m}}}{(1-\varepsilon/\sqrt{m})^m},\ \varepsilon>0.$$

В таком случае из утверждения 1 получим

$$\overline{\lim_{\|k\|\to\infty}} \sqrt[\|k\|]{|c_k|r^k} \leqslant 1.$$

Левая часть данного соотношения не может быть меньше единицы, иначе по следствию 2 леммы 1 степенной ряд будет абсолютно сходиться на некотором вздутии поликруга $\{z\in\mathbb{E} : |z_1-a_1|<r_1,\ldots,|z_m-a_m|<r_m\}$, что противоречит определению сопряженных радиусов сходимости.

Это доказывает классическую формулу Коши–Адамара.

Пример 2. Пусть $\mathbb{E}=\mathbb{C}^m$, множество D является областью пространства $\mathbb{R}^m$, $\operatorname{Re}\lambda_n\neq 0$, $H(\lambda_n,D)\neq\infty, n\in\mathbb{N}$, функция $H(\operatorname{Re}s,D)$ непрерывна на замыкании множества

$$\left\{\frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\operatorname{Re}\lambda|} : \lambda\in\Lambda\right\},$$

и

$$\forall\varepsilon>0\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon|\operatorname{Re}\lambda_n|} < \infty.$$

Тогда абсолютная сходимость ряда (1) на множестве D эквивалентна неравенству

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|c_n| + H(\operatorname{Re}\lambda_n, D)}{|\operatorname{Re}\lambda_n|} \leqslant 0.$$

Действительно, как легко видеть, это сводится к применению утверждения 1 и следствия 1 леммы 1 для случая $\mathbb{E} = \mathbb{R}^m$.

Утверждение 1 и следствие 1 леммы 1 для случая $R = \{0\}$ усиливают один из результатов статьи [3], а именно

Теорема. *Пусть U — ограничення выпуклая область пространства $\mathbb{C}^m, c_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \in \mathbb{C}^m$, $n \in \mathbb{N}$.*

Если ряд (1) сходится равномерно на компактах области U, а последовательность $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию (7), то выполняется соотношение (2).

Обратно, если имеет место неравенство (2) и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = 0, \tag{12}$$

то ряд (1) сходится нормально на компактах области U.

Заметим, что формула Коши–Адамара для степенных рядов не вытекает из этого результата, потому что после замены переменных всегда получаются неограниченные области.

Приведем теперь основной результат данной статьи.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность Λ была системой Коши–Адамара для области U, необходимо и достаточно выполнение следующих условий.*

1. *Сужение функции $H(s, U)$ на замыкание множества (3) непрерывно.*
2. *Имеет место соотношение (6).*

Доказательство. Достаточность, очевидно, следует из утверждения 1 и следствия 1 леммы 1 для случая $R = \{0\}$.

Предположим теперь, что последовательность Λ является системой Коши–Адамара для области U, и покажем выполнение условий 1 и 2 теоремы.

Докажем вначале, что имеет место равенство (7).

Действительно, по условию ряд (1), у которого $\ln|c_n| = -H(\lambda_n, U), n \in \mathbb{N}$, сходится абсолютно в области U, поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ec_n e^{\lambda_n z}$$

будет таким же. По предположению это влечет неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \leqslant 0,$$

что эквивалентно искомому равенству.

Возьмем теперь произвольную точку $s \in \overline{S}$ и докажем равенство

$$\lim_{\lambda\to s, \lambda\in S} H(\lambda, U) = H(s, U). \tag{13}$$

Функция $H(s, U)$ полунепрерывная снизу как верхняя огибающая семейства непрерывных функций (см. [8], с. 192), поэтому достаточно показать выполнение неравенства

$$\varlimsup_{\lambda\to s, \lambda\in S} H(\lambda, U) \leqslant H(s, U). \tag{14}$$

Левую часть этой формулы обозначим через b.

Найдется отображение $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которого выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{r(n)}}{|\lambda_{r(n)}|} = s, \ \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\lambda_{r(n)}, U\right)}{|\lambda_{r(n)}|} = b.$$

Если функция r ограничена, то, очевидно, $b = H(s, U)$, так что будем предполагать неограниченность указанной функции.

Несложно построить отображение $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что суперпозиция $l = r \circ p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ будет строго возрастающей и, принимая во внимание равенство (7), удовлетворяющей условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_{l(n)}|} = 0.$$

Положим $\mu_n = \lambda_{l(n)}, n \in \mathbb{N}$. Итак, $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$, следовательно, системой Коши–Адамара для области U, и для нее выполнены следующие соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{|\mu_n|} = s, \ \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mu_n, U)}{|\mu_n|} = b, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\mu_n|} = 0. \tag{15}$$

Покажем, что $b < \infty$.

Действительно, в противном случае положим $\ln |c_n| = |\mu_n| - H(\mu_n, U)$ и оценим члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\mu_n z}. \tag{16}$$

Для любого фиксированного числа z имеем

$$\ln |c_n| + \operatorname{Re} \mu_n z = |\mu_n| - H(\mu_n, U) + \operatorname{Re} \mu_n z \leqslant -|\mu_n|,$$

если число $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Из третьего равенства соотношений (15) заключаем, что ряд (16) сходится абсолютно на всем пространстве $\mathbb{E}$, а, с другой стороны,

$$\frac{\ln |c_n| + H(\mu_n, U)}{|\mu_n|} = 1, n \in \mathbb{N}.$$

Полученное противоречие и доказывает искомое.

Из полунепрерывности снизу функции H следует оценка $H(s, U) \leqslant b$, так что $H(s, U) < \infty$. Покажем теперь сходимость ряда (16) с коэффициентами $\ln |c_n| = -H(s, U)|\mu_n|$ в области U.

Зафиксируем точку z области U. Эта точка лежит в области с некоторой окрестностью, поэтому найдется число $\varepsilon > 0$ со свойством

$$H(s, U) \geqslant \operatorname{Re} sz + \varepsilon.$$

Из первой формулы равенств (15) следует, что для любого числа $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} \mu_n z \leqslant |\mu_n| \operatorname{Re} sz + \delta |\mu_n|, n \geqslant N(\delta).$$

Таким образом, имеем

$$\ln |c_n e^{\mu_n z}| \leqslant (\delta - \varepsilon)|\mu_n|, n \geqslant N(\delta),$$

и, взяв $\delta < \varepsilon$, получим сходимость ряда (16) в точке z. Из аналога неравенства (2) для последовательности $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ и второго равенства формул (15) вытекает соотношение $b \leqslant H(s, U)$, и доказательство равенства (13) завершено.

Итак, мы показали, что для любой точки $s \in \overline{S}$ выполнено равенство (13) и $H(s, U) < \infty$, из чего следует непрерывность функции $H(s, U)$ на множестве $\overline{S}$ (см. [9], с. 70).

Условие 2 теоремы вытекает из утверждения 3.

Теорема доказана.

Приведем пример последовательности, не являющейся системой Коши–Адамара.

Пример. Пусть

$$U = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 2x + y^2 < 0\right\}, \ \lambda_n = 1 + in, \ n \in \mathbb{N}.$$

В этом случае для точек $\lambda = u + iv \in \mathbb{C}$ имеем

$$H(\lambda, U) = \begin{cases} v^2/2u & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u = 0, \ v = 0, \\ +\infty & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Как несложно показать, опорная функция области U будет разрывной на множестве $\overline{S}$.

3. Пространства последовательностей

Введем пространство последовательностей

$$A = \left\{c \in \mathbb{C}^\infty : \forall z \in U \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n e^{\lambda_n z}| < \infty\right\},$$

и пространство L, элементы которого удовлетворяют неравенству (2).

В пространстве A определим топологию с помощью семейства полунорм

$$\|c\|_{A,K} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| e^{H(\lambda_n, K)}, \ c \in A,$$

где K — компакт области U, а для пространства L положим

$$\|c\|_{L,\varepsilon} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n| e^{H(\lambda_n, U) - \varepsilon|\lambda_n|}, \ c \in L, \ \varepsilon > 0.$$

Как несложно показать, это будут пространства Фреше.

Пространства A и L связаны следующим образом.

Предложение 5. *В случае выполнения соотношения* (6) *имеет место включение $L \subset A$, причем вложение $L \to A$ непрерывно.*

Если же сужение функции $H(s, U)$ на замыкание множества (3) *непрерывно, то непрерывно и вложение $A \to L$.*

Доказательство. Для произвольного компакта $K \subset U$, как указывалось выше, верно неравенство $H(\lambda_n, K) \leqslant H(\lambda_n, U) - 2\varepsilon|\lambda_n|, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$, поэтому

$$\|c\|_{A,K} \leqslant \|c\|_{L,\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon|\lambda_n|},$$

что и доказывает первую часть предложения.

В условиях второй части для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset U$, что $H(\lambda_n, U) - \varepsilon|\lambda_n| \leqslant H(\lambda_n, K)$, и, следовательно,

$$\|c\|_{L,\varepsilon} \leqslant \|c_{A,K}\|.$$

Предложение доказано.

С рядами экспонент тесно связано пространство последовательностей

$$\mathbb{K} = \left\{a \in \mathbb{C}^\infty : \varlimsup_{n \to \infty} \frac{\ln|a_n|}{\alpha_n} \leqslant 0\right\},$$

где $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ некоторая фиксированная последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности.

Очевидно, что множество $\mathbb{K}$ инвариантно относительно покомпонентного умножения.

Для элементов $a, b \in \mathbb{K}$ имеют место неравенства

$$\ln|a_n| \leqslant \varepsilon\alpha_n, \ln|b_n| \leqslant \varepsilon\alpha_n, \varepsilon > 0, n \geqslant N(\varepsilon),$$

так что

$$\ln|a_n + b_n| \leqslant \ln(|a_n| + |b_n|) \leqslant \ln 2 + \varepsilon\alpha_n, n \geqslant N(\varepsilon),$$

поэтому множество $\mathbb{K}$ инвариантно и относительно покомпонентного сложения.

Таким образом, множество $\mathbb{K}$, очевидно, является коммутативным кольцом с единицей.

Несложно видеть, что операция умножения в данном кольце непосредственно связана с операторами свертки.

Введем теперь топологию в кольце $\mathbb{K}$ с помощью семейства полунорм

$$\|a\|_\varepsilon = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| e^{-\alpha_n\varepsilon},\ a \in \mathbb{K},\ \varepsilon \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что с этой топологией кольцо $\mathbb{K}$ является пространством Фреше, а кольцевые операции будут непрерывными.

При условии (7) пространство последовательностей A, очевидно, топологически изоморфно кольцу $\mathbb{K}$ для $\alpha_n = |\lambda_n|, n \in \mathbb{N}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Valiron *Sur l'abscisse de convergence des séries de Diriclet, Bull. Soc. math. de France* 52, 1924.
2. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 2. С. 43–56.
3. Le Hai Khoi *Holomorphic Dirichlet series in several variables* // Math. Scand. 77. 1995. №. 1. P. 85–107.
4. Мерзляков С.Г. *Интегралы от экспоненты по мере Радона* // Уфимск. матем. журн. Т. 3, № 2. 2011. С. 57–80.
5. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
6. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973. 470 с.
7. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ, часть 2.* М.: Наука. 1976. 400 с.
8. Бурбаки Н. *Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства.* М. Наука. 1969. 392 с.
9. Дьедонне Ж. *Основы современного анализа.* М: Мир. 1964. 430 с.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: msg2000@mail.ru