ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 69-74.

УДК 517.98

# ДИНАМИКА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С АЛГЕБРОЙ SU(1, 1).

В.Э. КИМ

**Аннотация.** В настоящей работе рассматриватеся линейный непрерывный оператор в сепарабельном пространстве Фреше, являющийся одним из генераторов алгебры Ли su$(1,1)$. Изучается динамическая система с дискретным временем, порождаемая итерациями этого оператора. Показано, что при некоторых дополнительных условиях оператор, порождающий указанную динамическую систему, является часто-гиперциклическим и хаотическим (в смысле Девани). Указываются применения полученного результата к исследованию конкретных операторов.

**Ключевые слова:** часто-гиперциклический оператор, алгебра Ли.

**Mathematics Subject Classification:** 47A16

## 1. Введение

Среди динамических систем с дискретным временем важный подкласс составляют системы, описываемые с помощью итераций какого-либо одного отображения (см., например, [1], [2]). Пусть $X$ – сепарабельное пространство Фреше, $T : X \to X$ – непрерывный оператор. Тогда итерации $\{T^n,\, n = 0, 1, \cdots\}$ задают в пространстве $X$ дискретную динамическую систему. Существуют различные подходы к определению хаотичности динамической системы (см., например, [3]). В данной статье мы будем пользоваться определением хаотического отображения по Девани [1], [2]. Оператор $T$ является хаотическим (по Девани), если выполняются следующие условия: 1) оператор $T$ является топологически транзитивным, т.е. существует такой элемент $x \in X$, что его орбита $\mathrm{Orb}(T, x) = \{T^n x,\, n = 0, 1, \cdots\}$ является плотным подмножеством в $X$; 2) множество периодических точек оператора $T$ плотно в $X$. Напомним, что точка $x \in X$ называется периодической для оператора $T$, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $T^n x = x$.

Линейный топологически транзитивный оператор обычно называют гиперциклическим оператором. Хорошо известно, что в конечномерных пространствах топологически транзитивными могут быть только нелинейные операторы. Однако в бесконечномерных пространствах существуют широкие классы гиперциклических и линейных хаотических операторов. Так, например, известная теорема Годфруа-Шапиро [4] утверждает, в частности, что все операторы свертки (кроме операторов умножения на константу) в пространстве всех целых функций $H(\mathbb{C})$ являются гиперциклическими и хаотическими. В работе [5] было показано, что указанные операторы являются также часто-гиперциклическими.

Понятие часто-гиперциклического оператора было впервые введено в работе [6]. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ – некоторое множество. Обозначим через $\underline{\mathrm{dens}}(A)$ нижнюю плотность множества $A$, т.е.

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \lim\inf_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in A : n \leqslant N\}}{N}.$$

V.E. Kim, Dynamics of linear operators connected with su$(1,1)$ algebra.



Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00572, 11-01-97019).

*Поступила 18 июля 2013 г.*

Согласно определению, данному в работе [6], линейный непрерывный оператор $T : X \to X$ называется часто-гиперциклическим, если найдется такой элемент $x \in X$, что для любого непустого открытого подмножества $U \subset X$ выполняется: $\underline{\mathrm{dens}}\{n \in \mathbb{N} : T^n x \in U\} > 0$. Нетрудно видеть, что любой часто-гиперциклический оператор является гиперциклическим. Однако есть примеры гиперциклических операторов, не являющихся часто-гиперциклическими. Более подробные сведения об этих и других вопросах динамики линейных операторов можно найти, например, в книге [7].

В ряде работ (см., например, [8]–[11] ) исследовался вопрос о том, какие еще операторы в пространстве $H(\mathbb{C})$, помимо операторов свертки, являются гиперциклическими. Так, в работе [11] было, в частности, доказано, что линейный непрерывный неинъективный оператор $T : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ является гиперциклическим, если $T$ удовлетворяет коммутационному соотношению

$$\left[T, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right] = I, \tag{1}$$

где $I$ – тождественный оператор. Известно, что коммутационное соотношение типа (1) порождает алгебру Ли, называемую обычно алгеброй Гейзенберга-Вейля (см., например, [12, с. 24]). Цель настоящей работы — показать, что свойством гиперцикличности (а также частой гиперцикличности и хаотичности) обладают также операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям, порождающим другую алгебру Ли, а именно, алгебру $\mathrm{su}(1,1)$. Как известно (см., например, [12, с. 38]), генераторы $K_0$, $K_-$, $K_+$ алгебры $\mathrm{su}(1,1)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[K_0, K_+] = K_+;\ [K_0, K_-] = -K_-;\ [K_-, K_+] = 2K_0. \tag{2}$$

Статья организована следующим образом. В параграфе 1 доказывается основной результат статьи (Теорема 2). В параграфе 2 приводятся примеры, иллюстрирующие применение Теоремы 2. Эти примеры показывают, что с помощью Теоремы 2 устанавливаются некоторые новые классы гиперциклических и хаотических операторов, а также, что из этой теоремы вытекают некоторые уже известные результаты о гиперциклических операторах.

## 2. Основные результаты

В этом разделе будет сформулирован и доказан основной результат статьи о гиперциклическом и хаотическом поведении оператора $K_-$, удовлетворяющего коммутационным соотношениям вида (2). Для доказательства этого результата мы будем использовать следующую теорему, доказанную в работе [6]:

**Теорема 1** (F. Bayart, S. Grivaux)**.** *Пусть $X$ – сепарабельное пространство Фреше, $T$ – линейный непрерывный оператор на $X$. Предположим, что существует плотное подмножество $X_0 \subset X$ и отображение $S : X_0 \to X_0$, такие что*

**i:** *ряд $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ сходится безусловно $\forall x \in X_0$;*
**ii:** *ряд $\sum_{n=0}^{\infty} S^n x$ сходится безусловно $\forall x \in X_0$;*
**iii:** $TSx = x$, $\forall x \in X_0$.

*Тогда оператор $T$ является часто-гиперциклическим и хаотическим.*

Для доказательства основной теоремы нам также понадобится следующая вспомогательная лемма.

**Лемма 1.** *Пусть $X$ – сепрабельное пространство Фреше, $K_0$, $K_-$, $K_+$ – линейные непрерывные операторы на $X$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (2). Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$K_0 K_+^n = nK_+^n + K_+^n K_0. \tag{3}$$

*Доказательство.* Доказательство по индукции. Из соотношений (2) вытекает, что $K_0K_+ = K_+ + K_+K_0$. Таким образом, равенство (3) выполнено при $n = 1$. База индукции установлена. Возьмем произвольное $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Докажем теперь равенство (3) при $n = m$, предполагая, что (3) выполняется при $n = m - 1$, т.е.

$$K_0K_+^{m-1} = (m-1)K_+^{m-1} + K_+^{m-1}K_0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} K_0K_+^m = K_0K_+(K_+^{m-1}) = K_+^m + K_+K_0K_+^{m-1} = \\ = K_+^m + (m-1)K_+^m + K_+^mK_0 = mK_+^m + K_+^mK_0. \end{aligned}$$

□

Следующая теорема является основным результатом статьи.

**Теорема 2.** *Пусть $X$ – сепарабельное пространство Фреше, $\{p_k\}_{k=1}^\infty$ – семейство полунорм, задающих топологию в пространстве $X$. Пусть $K_0$, $K_-$, $K_+$ – линейные непрерывные операторы на $X$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям (2). Предположим, что найдется такой элемент $x \in X \setminus \{0\}$, что*

**A:** $x \in \ker K_-$;
**B:** *система* $\{K_+^n x, n = 0, 1, \cdots\}$ *полна в* $X$;
**C:** *при любом* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется*

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\frac{p_k(K_+^m x)}{(m!)^2}\Big)^{1/m} < 1;$$

**D:** $2K_0x = x$.

*Тогда оператор $K_-$ является часто-гиперциклическим и хаотическим.*

*Доказательство.* Докажем вначале, что

$$K_-K_+^n x = n^2K_+^{n-1}x \tag{4}$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. Проведем доказательство по индукции. Из соотношений (2) и условий **A** и **D** вытекает, что $K_-K_+x = x$. Таким образом, (4) выполняется при $n = 1$. База индукции установлена. Возьмем теперь произвольное $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Предполагая, что (4) выполнено для $n = m$, докажем, что (4) выполняется для $n = m + 1$, т.е. $K_-K_+^{m+1}x = (m+1)^2K_+^m x$. Используя условия **A** и **D**, соотношения (2) и Лемму, получаем:

$$\begin{aligned} K_-K_+^{m+1}x = K_-K_+^{m+1}x + K_+(m^2K_+^{m-1}x - K_-K_+^m x) = \\ = K_-K_+^{m+1}x + m^2K_+^m x - K_+K_-(K_+^m x) = \\ = K_-K_+^{m+1}x + m^2K_+^m x + 2K_0K_+^m x - K_-K_+^{m+1}x = m^2K_+^m x + 2K_0K_+^m x = \\ = m^2K_+^m x + 2mK_+^m x + K_+^m(2K_0x) = (m+1)^2K_+^m x. \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что равенство (4) выполняется при любом $n \in \mathbb{N}$. Заметим теперь, что в силу условия **B** множество $X_0 = \operatorname{span}\{K_+^n x, n = 0, 1, \cdots\}$ является плотным подмножеством в $X$. Возьмем в качестве оператора $T$ в Теореме 1 оператор $K_-$ и покажем, что для него выполняются все условия Теоремы 1.

Из соотношения (4) и условия **A** следует, что для любого $y \in X_0$ найдется такой номер $M \in \mathbb{N}$, что $K_-^m y = 0$ при $m \geq M$. Таким образом, для оператора $K_-$ выполнено условие **i** Теоремы 1. Определим теперь на множестве $X_0$ отображение $S$ следующим образом:

$$SK_+^n = \frac{K_+^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Тогда, как нетрудно видеть, $K_-Sy = y$ для любого $y \in X_0$. Таким образом, выполнено условие **iii** Теоремы 1.

Заметим, что
$$S^m K_+^n x = \frac{(n!)^2 K_+^{n+m} x}{((n+m)!)^2}.$$
Тогда из условия **C** вытекает, что ряды
$$\sum_{m=0}^{\infty} p_k(S^m K_+^n),\ n = 0, 1, \cdots$$
сходятся при любом $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что ряд ряд $\sum_{m=0}^{\infty} S^m y$ сходится безусловно $\forall y \in X_0$. Таким образом, условие **ii** Теоремы 1 также выполнено. Следовательно, оператор $K_-$ является часто-гиперциклическим и хаотическим. □

## 3. Примеры

В этом разделе будут представлены примеры, иллюстрирующие применение Теоремы 2 к изучению динамики конкретных операторов. Вначале мы докажем один результат, относящийся к описанию генераторов алгебры $\mathrm{su}(1,1)$. В качестве следствия будут получены результаты о гиперцикличности и хаотичности некоторых конкретных операторов на примере операторов, действующих в пространстве всех целых функций $H(\mathbb{C})$ с топологией равномерной сходимости на компактах. Отметим, что эквивалентное описание топологии пространства $H(\mathbb{C})$ может быть дано с помощью счетной системы полунорм $p_k(f) = \max_{|z| \leqslant k} |f(z)|$, $k \in \mathbb{N}$.

**Теорема 3.** *Пусть $X$ – топологическое векторное пространство. Пусть $T$, $A$ – линейные непрерывные операторы на $X$, удовлетворяющие коммутационному соотношению*
$$[T, A] = I, \tag{5}$$
*где $I$ – тождественный оператор на $X$. Тогда операторы $K_- = T + AT^2$, $K_+ = A$, $K_0 = (1/2)I + AT$ удовлетворяют коммутационным соотношениям (2), т.е. являются генераторами алгебры* $\mathrm{su}(1,1)$.

*Доказательство.* Отметим, что из соотношения (5) вытекает, что $[T, A^n] = nA^{n-1}$, $[T^n, A] = nT^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Используя этот факт, получаем:
$$[K_-, K_+] = [T + AT^2, A] = [T, A] + [AT^2, A] = I + AT^2A - A^2T^2 =$$
$$= I + A[T^2, A] = I + 2AT = 2K_0.$$
Проверим теперь выполнение остальных соотношений. Имеем:
$$[K_0, K_+] = [(1/2)I + AT, A] = [(1/2)I, A] + [AT, A] = ATA - A^2T =$$
$$= A[T, A] = A = K_+;$$
$$[K_0, K_-] = [(1/2)I + AT, T + AT^2] = [AT, T + AT^2] = [AT, T] + [AT, AT^2].$$
Заметим теперь, что
$$[AT, T] = AT^2 - TAT = AT^2 - T(TA - I) = AT^2 - T^2A + T = -2T + T = -T;$$
$$[AT, AT^2] = ATAT^2 - AT^2AT = AT(AT^2 - TAT) = AT(-T) = -AT^2.$$
Окончательно получаем:
$$[K_0, K_-] = -T - AT^2 = -K_-.$$
Таким образом, все коммутационные соотношения (2) выполнены. □

**Следствие 1.** *Оператор $\Phi$, действующий в пространстве $H(\mathbb{C})$ по правилу*

$$\Phi f(z) = f'(z) + zf''(z), \tag{6}$$

*является часто-гиперциклическим и хаотическим.*

*Доказательство.* Заметим, что $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \mathbf{z}\right] = I$, где через $\mathbf{z}$ обозначен оператор умножения на независимую переменную $z$ в пространстве $H(\mathbb{C})$. Следовательно, по Теореме 6 оператор $\Phi$ является генератором алгебры $\mathrm{su}(1,1)$. Хорошо известно, что система $\{\mathbf{z}^n(1) = z^n,\ n = 0, 1, \cdots\}$ полна в $H(\mathbb{C})$. Кроме того, очевидно, $\Phi(1) = 0$, $(I + 2\mathbf{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})(1) = 1$. Таким образом, условия **A**, **B** и **D** Теоремы 2 выполнены. Заметим также, что

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\frac{p_k(z^m)}{(m!)^2}\Big)^{1/m} = \lim_{m\to\infty}\frac{k}{(m!)^{2/m}} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, условие **C** Теоремы 2 также выполнено, а значит, оператор $\Phi$ является часто-гиперциклическим и хаотическим. □

Отметим, что гиперцикличность оператора вида (6) следует также из результатов работы [9], так как этот оператор является частным случаем оператора Гельфонда-Леонтьева.

В следующем утверждении уставливаются новые классы гиперциклических и хаотических операторов в пространстве $H(\mathbb{C})$.

**Следствие 2.** *Пусть $T$ – оператор в пространстве $H(\mathbb{C})$, действующий по правилу $Tf(z) = P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})f(z) - zf(z)$, где $P \in H(\mathbb{C})$ – некоторый многочлен. Тогда оператор $\Phi = T + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}T^2$ является часто-гиперциклическим и хаотическим оператором в пространстве $H(\mathbb{C})$.*

*Доказательство.* Заметим, что $\left[T, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right] = I$ (см. [9]). Следовательно, по Теореме 6 оператор $\Phi$ является генератором алгебры $\mathrm{su}(1,1)$. Из общей теории линейных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости следует, что найдется такая функция $F \in H(\mathbb{C})$, что $F \in \ker T$, $F \not\equiv 0$. В [9] было показано, что система $\{F^{(n)},\ n = 0, 1, \cdots\}$ полна в $H(\mathbb{C})$. Кроме того, очевидно, $\Phi(F) = 0$, $(I + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}T)(F) = F$. Таким образом, условия **A**, **B** и **D** Теоремы 2 выполнены. Заметим также, что при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\frac{p_k(F^{(m)})}{(m!)^2}\Big)^{1/m} \leqslant \lim_{m\to\infty}\Big(\frac{m!p_{2k}(F)}{k^m(m!)^2}\Big)^{1/m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{k(m!)^{1/m}} = 0.$$

Таким образом, выполнено условие **C** Теоремы 2. Следовательно, оператор $\Phi$ является часто-гиперциклическим и хаотическим. □

Приведем пример конкретного оператора в пространстве $H(\mathbb{C})$, удовлетворяющего условиям Следствия 2. Если в качестве оператора $T$ взять оператор $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \mathbf{z}$, то в качестве функции $F$ можно взять функцию $F(z) = \exp(z^2/2)$. Тогда оператор $\Phi$ будет иметь вид $\Phi f(z) = f'''(z) - zf''(z) - f'(z) - zf(z)$. Согласно Следствию 2 этот оператор является часто-гиперциклическим и хаотическим оператором в пространстве $H(\mathbb{C})$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. R. Devaney *An introduction to chaotic dynamical systems.* Addison-Wesley. 1989. 336 p.
2. M.W. Hirsch, S. Smale, R. Devaney *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.* Elsevier. 2004. 417 p.
3. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. *К вопросу об определении хаоса* // Успехи математических наук. Т. 64, № 4. 2009. С. 125–172.
4. G. Godefroy, J.H. Shapiro *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds* // J. Funct. Anal. V. 98, № 2. 1991. P. 229–269.
5. A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann *On a Theorem of Godefroy and Shapiro* // Integral Equations and Operator Theory. V. 56. 2006. P. 151–162.
6. F. Bayart, S. Grivaux *Frequently hypercyclic operators* // Trans. Amer. Math. Soc. V. 358. 2006. P. 5083–5117.
7. K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris Manguillot *Linear chaos.* Springer. 2011. 386 p.
8. H. Petersson *Supercyclic and hypercyclic non-convolution operators* // J. Operator Theory. V. 55, № 1. 2006. P. 133–151.
9. Ким В.Э. *Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда-Леонтьева* // Матем. заметки. Т. 85, № 6. 2009. С. 849–856.
10. J. Conejero, V. Muller *On the universality of multipliers on* $H(\mathbb{C})$ // J. Approx. Theory. V. 162. 2010. P. 1025–1032.
11. V.E. Kim *Commutation relations and hypercyclic operators* // Archiv der Mathematik. V. 99. 2012. P. 247–253.
12. Переломов А.М. *Обобщенные когерентные состояния и некоторые их применения* // Успехи физических наук. Т. 123, № 1. 1977. С. 23–55.



Виталий Эдуардович Ким,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: kim@matem.anrb.ru