ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 30-58.

УДК 517.9

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ТОНКОГО $\mathcal{PT}$-СИММЕТРИЧНОГО ВОЛНОВОДА

Д.И. БОРИСОВ

Аннотация. В тонком многомерном слое рассматривается дифференциальный $\mathcal{PT}$-симметричный оператор второго оператора. Оператор имеет достаточно общий вид, его коэффициенты – произвольные функции, зависящие как от медленных, так и от быстрой переменных. $\mathcal{PT}$-симметричность оператора обеспечивается путем введения краевых условий третьего типа с чисто мнимым коэффициентом. В работе определяется вид предельного оператора, доказывается равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к предельному и выводятся неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости. Установлена сходимость спектра возмущённого оператора к спектру предельного. Для возмущённых собственных значений, сходящихся к предельным изолированных собственным значениям конечной кратности, доказана их вещественность и построены полные асимптотические разложения. Также получены полные асимптотические разложения для соответствующих собственных функций.

Ключевые слова: $\mathcal{PT}$-симметричный оператор, тонкая область, равномерная резольвентная сходимость, оценки скорости сходимости, спектр, асимптотические разложения.

Mathematics Subject Classification: 35P05, 35B25, 35C20

1. Введение

В конце прошлого века возникло новое направлении в математической физике – $\mathcal{PT}$-симметричные операторы. Таким термином обычно обозначают дифференциальные (или более общие) операторы, коммутирующие с композицией $\mathcal{PT}$, где $\mathcal{T}$ – операция взятия комплексного сопряжения, $(\mathcal{T}u)(x) = \overline{u(x)}$, а $\mathcal{P}$ – обычно некоторый оператор, описывающий симметричное преобразование по пространственной переменной, скажем, $(\mathcal{P}u)(x) = u(-x)$. Такие операторы обычно являются несамосопряжёнными, и основной интерес связан с их различными спектральными свойствами. Одни из первых пионерских работ, с которых началось бурное исследование $\mathcal{PT}$-симметричных операторов – это статьи [1]–[9], см. также обзор [10], а также списки литературы в цитированных работах.

Одно из наиболее интересных свойств $\mathcal{PT}$-симметричных операторов связано с тем, что они могут обладать вещественным спектром, что несёт потенциальную возможность дать квантово-механическую интерпретацию этим оператором. В частности, был обнаружен ряд примеров $\mathcal{PT}$-симметричных операторов с вещественными спектрами, см., например, [11]–[18]. Следует подчеркнуть, что достаточно большая часть исследований была посвящена случаю оператора Шрёдингера с $\mathcal{PT}$-симметричным потенциалом.

Более сложная модель $\mathcal{PT}$-симметричного оператора, в которой $\mathcal{PT}$-симметричность была обусловлена граничными условиями, а не дифференциальным выражением, была

D.I. Borisov, Discrete spectrum of thin $\mathcal{PT}$-symmetric waveguide.

Работа частично поддержана грантом РФФИ, грантом Президента РФ для молодых ученых-докторов наук (МД-183.2014.1) и стипендией фонда Династия для молодых математиков России.

Поступила 14 августа 2013 г.

предложена в работе [19]. Здесь рассматривался оператор Лапласа в прямой бесконечной плоской полосе с краевыми условиями третьего типа. Коэффициент в краевом условии был чисто мнимым, что и обеспечивало требуемую $\mathcal{PT}$-симметричность. Предполагалось, что коэффициент отличается от постоянного лишь на финитную функцию, умноженную на малый параметр. Был найден существенный спектр такого оператора, который оказался фиксированной вещественной полуосью, и исследован эффект возникновения изолированных собственных значений из края существенного спектра. Ряд численных экспериментов, проведённых в работе [20], показал, что в случае, когда упомянутый выше малый параметр становится конечным и возрастает, в спектре данной модели появляются и пары комплексно сопряжённых изолированных собственных значений, которые ведут себя достаточно причудливым образом. Схожая модель, но существенно более сложная – оператор Лапласа-Бельтрами в полосе на двумерном римановом многообразии, рассматривалась в [21]. Был получен ряд результатов общего характера о самом операторе и его спектре.

Описанная модель из работы [19], по сути, была оператором с малым регулярным возмущением, что серьезно облегчала её изучение. Более сложные случаи сингулярного возмущённых $\mathcal{PT}$-симметричных операторов рассматривались в недавних работах [22], [23]. В [22] вновь рассматривалась модель из [19], однако коэффициент в краевом условии на границе был произвольной достаточно гладкой ограниченной функцией, а возмущение состояло в прорезании пары малых симметричных отверстий внутри полосы. Предельным оператором здесь является такой же $\mathcal{PT}$-симметричный оператор, но без малых отверстий. Была доказана равномерная резольвентная сходимость возмущённого оператора к предельному и доказаны оценки скорости сходимости. Кроме того, отдельно был детально исследован эффект возникновения изолированных собственных значений из края существенного спектра и показано, что достаточные и необходимые условия возникновения либо отсутствия таких собственных значений здесь существенно отличаются от схожих результатов для самосопряжённых операторов [24].

В работе [23] рассматривалось ещё одно развитие модели из [19]. Здесь полоса заменялась на многомерный слой, а сингулярность возмущения состояла в том, что ширина этого слоя предполагалась малой. Основной результат статьи [23] – определение вида предельного оператора для такой модели, доказательство равномерной резольвентной сходимости возмущённого оператора к предельному и получение оценок скорости сходимости. Предельный оператор оказался самосопряжённым – это позволило утверждать, что спектр возмущённого оператора если и не является вещественным, то, по крайней мере, локализуется возле вещественной оси.

Настоящая работа посвящена обобщению и дальнейшему развитию результатов работы [23]. Мы вновь рассматриваем $\mathcal{PT}$-симметричный оператор в многомерном тонком слое. Однако, в отличие от [23], мы рассматриваем произвольный скалярный оператор второго порядка с переменными коэффициентами общего вида, а не просто Лапласиан. На коэффициенты оператора налагаются лишь достаточно слабые условия гладкости, а также условия, обеспечивающие $\mathcal{PT}$-симметричность. Кроме того, эти коэффициенты могут зависеть от быстрой (растянутой) переменной по поперечному направлению в слое, что фактически делает эти коэффициенты быстро осциллирующими. $\mathcal{PT}$-симметричность оператора вновь порождается краевым условием третьего типа с чисто мнимым коэффициентом.

Первая часть работы посвящена определению вида предельного оператора. Такой оператор найден, причём его вид существенно более сложный по сравнению [23]. Это связано с присутствием всех коэффициентов в возмущённом операторе и весьма нетривиальными формулами для коэффициентов предельного оператора. Наш основной результат здесь –

доказательство равномерной резольвентной сходимости возмущённого оператора к предельному и получение оценок скорости сходимости. Показано, что эти оценки неулучшаемы по порядку, причём в [23] такой результат отсутствовал.

Во второй части работы рассматривается асимптотическое поведение спектра возмущённого оператора. Вначале доказывается сходимость спектра возмущённого оператора к спектру предельного. Следует подчеркнуть, что здесь не удаётся воспользоваться классическими теоремами о сходимости в случае равномерной резольвентной сходимости, так как возмущённый оператор несамосопряжён. Вместо этого мы предлагаем подход, основанный на несамосопряжённой версии метода Бирмана-Швингера, предложенной в [25], [26], в комбинации с доказанной равномерной резольвентной сходимостью.

Затем изучается поведение собственных значений возмущённого оператора, сходящихся к изолированным собственным значениям предельного оператора. Здесь удалось найти простой, но оригинальный трюк и показать, что все такие возмущённые собственные значения вещественные, причём кратность этих собственных значений не важна, см. (5.17), (5.18), (5.19). Отметим, что схожие результаты о вещественности исследуемых собственных значений в [19], [22] были основаны на их простоте.

Далее мы строим полные асимптотические разложения вышеупомянутых собственных значений и соответствующих собственных функций. Асимптотики строятся вначале формально на основе метода многих масштабов [34], а затем обосновываются. И если формальное построение по сути не отличалось от аналогичных конструкций для самосопряжённых операторов в тонких областях (см., например, [27]–[30], а также [31], [32]), то для обоснования не удалось воспользоваться стандартным подходом из самосопряжённого случая, как, например, в [27], [33]. Здесь для обоснования нам пришлось отдельно разрабатывать определённый теоретико-функциональный аппарат. Следует также подчеркнуть, никаких результатов об асимптотическом поведении спектра в [23] получено не было.

В заключение опишем структуру статьи. В следующем параграфе даётся постановка задачи и формулируются основные результаты. В третьем параграфе доказываются общие качественные свойства возмущённого оператора. Четвёртый параграф посвящён доказательству равномерной резольвентной сходимости и получению оценок скорости сходимости. В пятом параграфе проводится доказательство сходимости спектра. В шестом параграфе на формальном уровне строятся асимптотические разложения собственных значений и собственных функций возмущённого оператора, а в седьмом параграфе они строго обосновываются.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x=(x',x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, $\Omega^\varepsilon:=\{x:-\varepsilon/2<x_n<\varepsilon/2\}$ – тонкий многомерный слой в $\mathbb{R}^n$, ε – малый положительный параметр, причём $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, где ε_0 – малое фиксированное положительное число. Обозначим

$$\Omega:=\{(x',\xi):\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\ \xi\in(-1/2,1/2)\},\quad \Pi:=\Omega\times(0,\varepsilon_0).$$

В Π зададим функции $A_{ij}=A_{ij}(x',\xi,\varepsilon)$, $A_j=A_j(x',\xi,\varepsilon)$, $A_0=A_0(x',\xi,\varepsilon)$, удовлетворяющие условиям

$$A_{ij}(\cdot,\cdot,\varepsilon),A_j(\cdot,\cdot,\varepsilon)\in C^1(\overline{\Omega}),\quad A_0(\cdot,\cdot,\varepsilon)\in C(\overline{\Omega}),\tag{2.1}$$

$$A_{ji}=A_{ij},\quad \sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x',\xi,\varepsilon)\zeta_i\zeta_j\geqslant c_0|\zeta|^2,\quad \zeta\in\mathbb{R}^n,\quad (x',\xi,\varepsilon)\in\overline{\Pi},\tag{2.2}$$

где c_0 – положительная константа, не зависящая от x', ξ, ε и ζ. Функции A_{ij} считаем вещественными, функции A_j, A_0 – комплекснозначными, и

$$A_{ij},\ \nabla_{x,\xi}A_{ij},\ A_j,\ \nabla_{x,\xi}A_j,\ A_0\in L_\infty(\Pi).$$

Кроме того, предполагаются выполненными следующие условия симметричности:

$$\begin{aligned}
&A_{ij}(x',-\xi,\varepsilon)=A_{ij}(x',\xi,\varepsilon), && i,j=1,\dots,n-1,\\
&A_{in}(x',-\xi,\varepsilon)=-A_{in}(x',\xi,\varepsilon), && i=1,\dots,n-1,\\
&A_{nn}(x',-\xi,\varepsilon)=A_{nn}(x',\xi,\varepsilon), &&\\
&\overline{A}_j(x',-\xi,\varepsilon)=A_j(x',\xi,\varepsilon), && j=1,\dots,n-1,\\
&A_n(x',-\xi,\varepsilon)=-\overline{A}_n(x',\xi,\varepsilon), &&\\
&A_0(x',-\xi,\varepsilon)=\overline{A}_0(x',\xi,\varepsilon). &&
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Пусть $a = a(x',\varepsilon)$ – вещественная функция, принадлежащая $W^1_\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Обозначим:

$$\begin{aligned}
\eta(\varepsilon):=&\sum_{i,j=1}^{n}\sup_{\overline{\Omega}}|A_{ij}(x',\xi,\varepsilon)-A_{ij}(x,\xi,0)|\\
&+\sum_{i,j=1}^{n}\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla_{x,\xi}(A_{ij}(x',\xi,\varepsilon)-A_{ij}(x',\xi,0))|\\
&+\sum_{j=1}^{n}\sup_{\overline{\Omega}}|A_j(x',\xi,\varepsilon)-A_j(x',\xi,0)|\\
&+\sup_{\mathbb{R}^{n-1}}|\alpha(x',\varepsilon)-\alpha(x',0)|.
\end{aligned}$$

Всюду далее функции A_{ij}, A_j, A_0, α предполагаем непрерывными по ε в точке $\varepsilon=0$, а именно,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\eta(\varepsilon)=0.\tag{2.4}$$

Положим

$$\begin{aligned}
&A^\varepsilon_{ij}(x):=A_{ij}\left(x',\frac{x_n}{\varepsilon},\varepsilon\right), && A^\varepsilon_j(x):=A_j\left(x',\frac{x_n}{\varepsilon},\varepsilon\right),\\
&A^\varepsilon_0(x):=A_0\left(x',\frac{x_n}{\varepsilon},\varepsilon\right), && \alpha^\varepsilon(x'):=\alpha(x',\varepsilon).
\end{aligned}$$

Основным объектом изучения настоящей работы является оператор

$$\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A^\varepsilon_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}\left(A^\varepsilon_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A^\varepsilon_j}\right)+A^\varepsilon_0\quad \text{в}\quad \Omega^\varepsilon\tag{2.5}$$

с граничным условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu^\varepsilon}+\mathrm{i}\alpha\right)u=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega^\varepsilon,\qquad \frac{\partial}{\partial\nu^\varepsilon}:=\sum_{j=1}^{n}A^\varepsilon_{nj}\frac{\partial}{\partial x_j}+\overline{A^\varepsilon_n},\tag{2.6}$$

где i – мнимая единица.

Строго мы вводим оператор $\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha$ как оператор в $L_2(\Omega^\varepsilon)$, заданный дифференциальным выражением (2.5) на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha)=\{u\in W^2_2(\Omega^\varepsilon):\ \text{выполнено краевое условие (2.6)}\}.\tag{2.7}$$

Далее этот оператор называем возмущённым.

Основной целью работы является изучение асимптотического поведения резольвенты и дискретного спектра оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha$ при $\varepsilon\to+0$.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся дополнительные обозначения. В $L_2(\Omega^\varepsilon)$ определим отображения

$$(\mathcal{P}u)(x):=u(x',-x_n),\quad \mathcal{T}u:=\overline{u}.\tag{2.8}$$

Наш первый результат описывает качественные свойства оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$.

Теорема 2.1. *Оператор $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ m-секториален, $\mathcal{T}$-самосопряжён и $\mathcal{P}$-псевдоэрмитов, то есть,*

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon)^* = \mathcal{T}\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon\mathcal{T}, \quad (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon)^* = \mathcal{P}\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon\mathcal{P}, \tag{2.9}$$

и $\mathcal{PT}$-симметричен:

$$\mathcal{PT}\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon = \mathcal{H}_\alpha^\varepsilon\mathcal{PT}. \tag{2.10}$$

Сопряжённый к $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ оператор даётся равенством

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon)^* = \mathcal{H}_{-\alpha}^\varepsilon. \tag{2.11}$$

Для спектра оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ выполнено вложение

$$\begin{gathered}\sigma(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon) \subseteq \mathbb{K},\\ \begin{aligned}\mathbb{K} := &\left\{ z\in\mathbb{C}:\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \frac{c_3}{c_0}\left(c_1+\sqrt{c_1^2+c_0(|\operatorname{Re}\lambda|+c_2)}\right)+c_2\right\}\\ \subseteq &\left\{ z\in\mathbb{C}:\ |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \frac{c_3}{\sqrt{c_0}}\sqrt{|\operatorname{Re} z|}+\frac{(c_1+\sqrt{c_1^2+c_0c_2})c_3}{c_0}+c_2\right\},\end{aligned}\end{gathered} \tag{2.12}$$

где

$$c_1 := \left(\sum_{j=1}^{n} \sup_{\Pi}{}^2 |A_j(x',\xi,\varepsilon)|\right)^{1/2},$$
$$c_2 := \sup_{\Pi}{}^2|A_0(x',\xi,\varepsilon)|, \quad c_3 := 2\sup_{\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\varepsilon_0]}|\alpha(x',\varepsilon)|.$$

Для описания асимптотического поведения резольвенты оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ определим предельный оператор. Пусть

$$\begin{aligned} A_{ij}^0(x') &:= \int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(A_{ij}(x',\xi,0)-\frac{A_{in}(x',\xi,0)A_{nj}(x',\xi,0)}{A_{nn}(x',\xi,0)}\right)\mathrm{d}\xi,\\ A_{j}^0(x') &:= \int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(A_{j}(x',\xi,0)-\frac{A_{n}(x',\xi,0)A_{nj}(x',\xi,0)}{A_{nn}(x',\xi,0)}\right)\mathrm{d}\xi,\\ A_{0}^0(x') &:= \int\limits_{-1/2}^{1/2}\Bigg(A_{0}(x',\xi,0)+\frac{\alpha^2(x',0)}{A_{nn}(x',\xi,0)}\\ &\qquad -2\mathrm{i}\alpha(x',0)\frac{\operatorname{Re}A_n(x',\xi,0)}{A_{nn}(x',\xi,0)}-\frac{|A_n(x',\xi,0)|^2}{A_{nn}(x',\xi,0)}\Bigg)\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $i,j=1,\ldots,n-1$. В $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ введём оператор

$$\mathcal{H}_\alpha^0 := -\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}^0\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n-1}\left(A_j^0\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j^0}\right)+A_0^0 \tag{2.14}$$

на области определения $W_2^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Через $\mathcal{Q}^\varepsilon$ обозначим проектор в $L_2(\Omega^\varepsilon)$:

$$(\mathcal{Q}^\varepsilon f)(x') := \varepsilon^{-1}\int\limits_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x)\,\mathrm{d}x_n \tag{2.15}$$

и положим:

$$L^\varepsilon := \mathcal{Q}^\varepsilon L_2(\Omega^\varepsilon), \quad L_\perp^\varepsilon := \mathcal{Q}_\perp^\varepsilon L_2(\Omega_\varepsilon), \quad \mathcal{Q}_\perp^\varepsilon := \mathrm{I} - \mathcal{Q}^\varepsilon. \tag{2.16}$$

Пространство $L_2(\Omega^\varepsilon)$ тогда можно представить в виде прямой суммы

$$L_2(\Omega^\varepsilon) = L^\varepsilon \oplus L_\perp^\varepsilon. \tag{2.17}$$

В смысле этого разложения оператор $\varepsilon^{-1/2}(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon$, действующий в L^ε при подходящих $\lambda \in \mathbb{C}$, можно расширить до оператора $\varepsilon^{-1/2}(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon \oplus 0$, действующего в $L_2(\Omega^\varepsilon)$.

Сформулируем основной результат об асимптотическом поведении резольвенты оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$.

Теорема 2.2. *Оператор $\mathcal{H}_\alpha^0$ самосопряжён. Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{K} \cup \sigma(\mathcal{H}_\alpha^0))$ и достаточно малых ε операторы $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1}$ и $(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}$ корректно определены и ограничены. Для всех $f \in L_2(\Omega^\varepsilon)$ справедливы равномерные по ε и f оценки*

$$\big\|(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} f - \big((\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon \oplus 0\big) f\big\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant (\varepsilon + \eta(\varepsilon)) C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{2.18}$$

и

$$\begin{aligned} \big\|(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} f &- \big((\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon \oplus 0\big) f \\ &- \varepsilon \mathcal{W}^\varepsilon (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon f\big\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant (\varepsilon + \eta(\varepsilon)) C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $C(\lambda)$ – некоторые константы, не зависящие от ε, f, но зависящие от λ, а оператор $\mathcal{W}^\varepsilon : W_2^2(\mathbb{R}^{n-1}) \to W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}^\varepsilon u)(x,\varepsilon) := &- \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x') \int\limits_0^{\frac{x_n}{\varepsilon}} \frac{A_{nj}(x',t,\varepsilon)}{A_{nn}(x',t,\varepsilon)}\,\mathrm{d}t - u(x') \int\limits_0^{\frac{x_n}{\varepsilon}} \overline{A}_n(x',t,\varepsilon)\,\mathrm{d}t \\ &- \mathrm{i}\alpha^\varepsilon(x') u(x') \int\limits_0^{\frac{x_n}{\varepsilon}} \frac{\mathrm{d}t}{A_{nn}(x',t,\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Кратко остановимся на результатах этой теоремы. Вначале отметим, что по сравнению с частным случаем в [23] вид коэффициентов предельного оператора достаточно нетривиален, и фактически в пределе происходит "перемешивание" коэффициентов возмущённого оператора, см. (2.13).

Отдельно следует подчеркнуть, что оценки скорости сходимости в теореме 2.2 неулучшаемы по порядку. А именно, если предположить коэффициенты возмущённого оператора и функцию f бесконечно дифференцируемыми так что $\eta(\varepsilon) = C\varepsilon$, $C = const$, то на основе метода многих масштабов [34] можно построить полное асимптотическое разложение функции $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} f$. Подобные конструкции мы используем ниже для построения асимптотик собственных значений. В данном случае они приводят к формулам:

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} f = \big((\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} \oplus 0\big) f + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \eta^2(\varepsilon))$$

в норме $L_2(\Omega^\varepsilon)$, и

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} f = \big((\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} \oplus 0\big) f - \varepsilon \mathcal{W}^\varepsilon (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon f + \varepsilon^2 u_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

в норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, где $u_1 = u_1(x', x_n\varepsilon^{-1})$, $u_2 = u_2(x', x_n\varepsilon^{-1})$ – некоторые функции, зависящие от выбора f. Отсюда и следует оптимальность оценок скорости сходимости в теореме 2.2.

Наш следующий результат описывает сходимость спектра возмущённого оператора. Подчеркнём, что в данном случае не удаётся воспользоваться классическими теоремами о сходимости спектра в случае равномерной резольвентной сходимости, так как оператор $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ несамосопряжён. Кроме того, возмущённый и предельный операторы действуют на разных пространствах, а для возмущённого оператора пространство ещё и зависит от ε.

Теорема 2.3. *Спектр оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ сходится к спектру оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ при $\varepsilon \to +0$. А именно, для любого компакта $\mathbb{M} \subset \mathbb{C}$, $\delta > 0$ существует $\varkappa(\mathbb{M}, \delta) > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varkappa(\mathbb{M}, \delta)$ часть спектра $\sigma(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon) \cap \mathbb{M}$ оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ лежит в δ-окрестности части спектра $\sigma(\mathcal{H}_\alpha^0) \cap \mathbb{M}$ оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$. Если λ_0 – изолированное m-кратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$, то существует в точности m собственных значений оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$, взятых с учётом кратности, сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to +0$. При достаточно малых ε эти собственные значения вещественны.*

Данная теорема утверждает сходимость спектра в каждой компактной части комплексной плоскости. При этом не исключается наличие точек в спектре возмущённого оператора, которые стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to +0$. Отдельного внимания заслуживает утверждение о вещественности собственных значений, сходящихся к изолированным собственным значениям предельного оператора. Единственное требование – конечная кратность предельного собственного значения, и вообще говоря, сходящиеся к нему собственные значения возмущённого оператора не обязательно должны быть простыми. Этим наш результат выгодно отличается от аналогичных утверждений в [19], [22], где простота собственных значений была основой для доказательства их вещественности.

Наш следующий результат посвящён получению полных асимптотических разложений собственных значений возмущённого оператора, сходящихся к предельным изолированным собственным значениям конечной кратности, а также получению полных асимптотик для соответствующих собственных функций.

Теорема 2.4. *Предположим, что функции A_{ij}, A_j, A_0, α не зависят от ε, бесконечно дифференцируемы по x так, что для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ выполнено*

$$\frac{\partial^{|\beta|} A_{ij}}{\partial x'^\beta}, \ \frac{\partial^{|\beta|} A_j}{\partial x'^\beta}, \ \frac{\partial^{|\beta|} A_0}{\partial x'^\beta}, \ \frac{\partial^{|\beta|} \alpha}{\partial x'^\beta} \in C^2(\overline{\Omega}) \cap L_\infty(\overline{\Omega}). \tag{2.20}$$

Пусть λ^0 – изолированное m-кратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$. Тогда асимптотические разложения собственных значений λ_k^ε, $k = 1, \ldots, m$, сходящихся к λ^0 при $\varepsilon \to +0$, имеют вид:

$$\lambda_k^\varepsilon = \lambda^0 + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \Lambda_k^{(p)}, \tag{2.21}$$

где числа $\Lambda_k^{(p)}$ определены в шестом параграфе. Если существует такое $r > 0$, что для всех достаточно малых ε

$$|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_j^\varepsilon| \geqslant C\varepsilon^r, \quad k \neq j, \tag{2.22}$$

где C – константа, не зависящая от ε, k, j, то собственные функции, соответствующие λ_k^ε, можно выбрать так, что они будут иметь асимптотики

$$\psi_k^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2} \left(\phi_k(x') + \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^p \phi_k^{(p)}(x', \xi) \right) \tag{2.23}$$

в норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$, где члены этого ряда определены в шестом параграфе.

Следует отметить, что условие отсутствия зависимости функций A_{ij}, A_j, A_0, α от ε несущественно и сделано лишь для упрощения. В случае, если коэффициенты от ε зависят, то конструкция асимптотик в целом сохраняется, и все формулы в шестом параграфе остаются без изменений – необходимо лишь считать, что коэффициенты асимптотик собственных значений и собственных функций зависят от ε, и эта зависимость порождается как раз аналогичной зависимостью для A_{ij}, A_j, A_0, α. Вместе с тем, для обоснования асимптотик в этом случае нужно требовать равномерную ограниченность по ε в норме $L_\infty(\Omega)$ всех производных из (2.20). В случае, если коэффициенты A_{ij}, A_j, A_0, α при этом раскладываются в какой-либо асимптотический ряд по ε, то эти разложения можно подставить в формулы для коэффициентов асимптотик (2.21), (2.23), получить аналогичные разложения для коэффициентов и подставить затем их в ряды (2.21), (2.23). Полученные при этом двойные асимптотические ряды будут давать асимптотики для собственных значений и собственных функций возмущённого оператора. Описанные конструкции, являясь простыми с идейной точки зрения, достаточно громоздки с технической стороны. Именно поэтому мы не приводим эти выкладки в работе, а ограничиваемся лишь случаем, когда функции A_{ij}, A_j, A_0 не зависят от ε.

3. Качественные свойства оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$

В настоящем параграфе мы доказываем теорему 2.1. Основные идеи доказательства заимствованы из [19, §3].

Доказательство основано на теории секториальных полуторалинейных форм, см. [35, Гл. VI]. В пространстве $L_2(\Omega^\varepsilon)$ определим полуторалинейную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon(u,v) := &\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^n \left(A_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}, v\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(u, A_j^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (A_0^\varepsilon u, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \mathrm{i}\mathfrak{b}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon u, v),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\mathfrak{b}^\varepsilon(u,v) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right) \overline{v}\left(x', \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}x' - \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u\left(x', -\frac{\varepsilon}{2}\right) \overline{v}\left(x', -\frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}x',$$

с областью определения $\mathcal{D}(\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon) := W_2^1(\Omega^\varepsilon)$. Здесь $\mathfrak{b}^\varepsilon$ следует понимать как полуторалинейную форму в $L_2(\Omega^\varepsilon)$ с областью определения $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$.

Согласно [35, Гл. VI, §1.1], вещественная и мнимая части формы $\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{\alpha,\mathrm{r}}^\varepsilon(u,v) := &\sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &+ \sum_{j=1}^n \left(\left(A_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}, v\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \left(u, A_j^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\big((A_0^\varepsilon u, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + (u, A_0^\varepsilon v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\big)\end{aligned} \tag{3.2}$$

и

$$\mathfrak{h}_{\alpha,\mathrm{i}}^\varepsilon(u,v) := \frac{1}{2\mathrm{i}}\big((A_0^\varepsilon u, v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - (u, A_0^\varepsilon v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\big) + \mathfrak{b}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon u, v). \tag{3.3}$$

Областью определения этих форм вновь является пространство $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$.

Ясно, что форма $\mathfrak{h}_{\alpha,\mathrm{r}}^\varepsilon$ плотно определена, симметрична и замкнута. Из элементарных оценок

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^n \left(A_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}, u\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \left(u, A_j^\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n \sup_{\overline{\Omega^\varepsilon}} |A_j^\varepsilon| \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \delta\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2 + c_1\delta^{-1}\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2,\end{aligned} \tag{3.4}$$

δ – произвольно, и

$$\big|((\operatorname{Re} A_0^\varepsilon)u, u)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\big| \leqslant c_2\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}^2 \tag{3.5}$$

вытекает полуограниченность снизу формы $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}$:

$$\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}(u,u) \geqslant -\frac{c_1+c_2c_0}{c_0}\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что граничный член в форме $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}$ можно оценить следующим образом:

$$|\mathfrak{b}^\varepsilon(\alpha^\varepsilon u,u)| = \left|\int\limits_{\Omega^\varepsilon} \alpha^\varepsilon(x')\frac{\partial |u|^2}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant c_3\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{3.7}$$

Отсюда и из оценки (3.4) с $\delta = c_0/2$ и произвольным δ следует, что форма $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}$ ограничена относительно формы $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}$. А именно, для любого $\delta>0$ верна оценка

$$|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}(u,u)| \leqslant \delta|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}(u,u)| + C(\delta)\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.8}$$

где $C(\delta)$ – некоторая константа, не зависящая от u. Из полученных свойств форм $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}$ и $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}$ в силу [35, Гл. VI, §1, Теорема 1.33] следует, что форма $\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha$ секториальна. Применяя теперь первую теорему о представлении [35, Гл. VI, §2.1, Теорема 2.1], заключаем, что существует m-секториальный оператор $\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha$ такой, что

$$\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha(u,v) = (\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha u,v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \tag{3.9}$$

для всех $u\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha)$, $v\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha)$. Область определения оператора $\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha$ состоит из функций $u\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha)$, таких что существует функция $f\in L_2(\Omega^\varepsilon)$, зависящая от выбора u и удовлетворяющая равенству

$$\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha(u,v) = (f,v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \tag{3.10}$$

для всех $v\in\mathcal{D}(\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha)$. Легко убедиться, что $\mathcal{D}(\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha)\subseteq\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha)$, и оператор $\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha$ является расширением оператора $\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha$. Теперь для доказательства m-секториальности оператора достаточно проверить равенство $\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha=\widetilde{\mathcal{H}}^\varepsilon_\alpha$, что эквивалентно равенству областей определения. С другой стороны, последнее эквивалентно тому, что любое решение интегрального тождества (3.10) для $f\in L_2(\Omega^\varepsilon)$ принадлежит $\mathcal{D}(\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha)$. Этот факт означает выполнение теоремы о повышении гладкости обобщённых решений эллиптических краевых задач. В нашем случае такую теорему можно легко доказать стандартным образом на основе анализа соответствующих разностных отношений (см., например, [36, Гл. VI, §2], [19, Lm. 3.2]), поэтому на этом доказательстве мы не останавливаемся.

Применим теперь теорему 2.5 из [35, Гл. VI, §2.1], тогда получим, что сопряжённый к $\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha$ оператор соответствует в смысле первой теоремы о представлении сопряжённой форме $(\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha)^*$. Согласно [35, Гл. VI, §1.1] и в силу равенств (3.3) сопряжённая форма имеет вид:

$$(\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha)^*(u,v) = \overline{\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha(u,v)} = \mathfrak{h}^\varepsilon_{-\alpha}(u,v),$$

откуда и вытекает равенство (2.11). Равенства (2.9), (2.10) теперь несложно проверить прямыми вычислениями с использованием соотношений (2.3).

Остаётся доказать вложение (2.12). Спектр m-секториального оператора является подмножеством его числовой области значений [35, Гл. V, §3.10], а потому достаточно определить положение последней для нашего оператора. Непосредственно из оценок (3.4), (3.5), (3.7) и условия эллиптичности (2.2) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}(u,u)| \leqslant c_3\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)},\\ &|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}(u,u)| \geqslant c_0\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - 2c_1\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Положим теперь $\|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=1$, решим второе неравенство относительно $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$, и полученную оценку для $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$ подставим в первое неравенство для $\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}(u,u)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned}|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{i}}(u,u)| &\leqslant \frac{c_3}{c_0}\left(c_1+\sqrt{c_1^2+c_0(|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}(u,u)|+c_2)}\right)+c_2\\ &\leqslant \frac{c_3}{\sqrt{c_0}}\sqrt{|\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}(u,u)|}+\frac{(c_1+\sqrt{c_1^2+c_0c_2})c_3}{c_0}+c_2 \quad \text{при} \quad \|u\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=1.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Из этого неравенства и упомянутого выше вложения спектра в числовую область значений вытекает (2.12). Теорема 2.1 полностью доказана.

4. Равномерная резольвентная сходимость

В настоящем параграфе будет исследовано асимптотическое поведение резольвенты возмущённого оператора при $\varepsilon\to+0$ и доказана теорема 2.2. Всюду в параграфе через $C(\lambda)$ обозначаем различные несущественные константы, не зависящие от ε, x и f, но, вообще говоря, зависящие от λ.

В силу теоремы 2.1 при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{K}$ резольвента $(\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha-\lambda)^{-1}$ определена корректно. Следующая лемма является ключевой в доказательстве теоремы 2.2.

Лемма 4.1. *Пусть $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{K}$, $f\in L^\varepsilon_\perp$. Тогда верна равномерная по ε и λ оценка*

$$\|(\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha-\lambda)^{-1}f\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\varepsilon C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Доказательство. Обозначим $v^\varepsilon:=(\mathcal{H}^\varepsilon_\alpha-\lambda)^{-1}f$. Тогда в силу результатов предыдущего параграфа и принадлежности $f\in L^\varepsilon_\perp$ функция v^ε удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha(v^\varepsilon,v^\varepsilon)-\lambda\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=(f,v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=(f,v^\varepsilon_\perp)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.1}$$

где $v^\varepsilon_\perp:=\mathcal{Q}^\varepsilon_\perp v^\varepsilon\in L^\varepsilon_\perp$. Так как в силу результатов предыдущего параграфа $\mathfrak{h}^\varepsilon_\alpha(v^\varepsilon,v^\varepsilon)/\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\in\mathbb{K}$ (см. (3.12)), то из равенства (4.1) получаем

$$\|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\frac{\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|v^\varepsilon_\perp\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\operatorname{dist}(\mathbb{K},\lambda)}. \tag{4.2}$$

Возьмём теперь реальную часть равенства (4.1):

$$\mathfrak{h}^\varepsilon_{\alpha,\mathrm{r}}(v^\varepsilon,v^\varepsilon)-\operatorname{Re}\lambda\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|v^\varepsilon_\perp\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$$

и воспользуемся оценкой (3.11):

$$\begin{aligned}c_0\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}&-2c_1\|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\ &-(c_2+\operatorname{Re}\lambda)\|v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|v^\varepsilon_\perp\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

В силу (4.2) отсюда выводим:

$$\|\nabla v^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\|v^\varepsilon_\perp\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.4}$$

Разлагая функцию v^ε в стандартный ряд Фурье по переменной x_n, приходим к неравенству

$$\|v^\varepsilon_\perp\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\left\|\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_n}\right\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.5}$$

Подставим эту оценку вначале в левую часть (4.4):

$$\|v^\varepsilon_\perp\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\varepsilon^2C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.6}$$

а затем в правую:

$$\|\nabla v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\varepsilon C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.7}$$

Из неравенства (4.2) теперь следует:

$$\|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\varepsilon C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.8}$$

Отсюда и из (4.7) следует утверждение леммы. $\square$

В следующей лемме мы доказываем самосопряжённость оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ и оценку его резольвенты.

Лемма 4.2. *Оператор* $\mathcal{H}_\alpha^0$ *самосопряжён. Для всех* $\lambda \notin \sigma(\mathcal{H}_\alpha^0)$ *и всех* $F \in L_2(\mathbb{R}^{d-1})$ *справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} F\|_{W_2^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C(\lambda)\|F\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

где $C(\lambda)$ *– некоторая константа, не зависящая от* F.

Доказательство. Из равенств (2.3), (2.13) следует, что функции A_{ij}^0, A_0^0 вещественны и справедливы принадлежности $A_{ij}^0, A_j^0 \in W_\infty^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $A_0^0 \in L_\infty(\mathbb{R}^{d-1})$. Коэффициент $A_{nn}(x',\xi,0)$ при этом положителен и равномерно отделён от нуля в силу условия эллиптичности (2.2) с $\zeta = \zeta_* := (0,\ldots,0,1)$. Покажем, что схожее условие эллиптичности верно и для коэффициентов A_{ij}^0.

Через A обозначим матрицу с коэффициентами $A_{ij}(x',\xi,0)$ и пусть $\zeta' := (\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},0)$, $\zeta_j \in \mathbb{R}$. Тогда из (2.13) и (2.2) следует

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij}^0 \zeta_i \zeta_j = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{A_{nn}(x',\xi,0)} \big((\mathrm{A}\zeta_*, z_*)_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{A}\zeta',\zeta')_{\mathbb{R}^n} - (\mathrm{A}\zeta',\zeta_*)^2_{\mathbb{R}^{n-1}} \big)\, \mathrm{d}\xi. \tag{4.9}$$

Ввиду условия (2.3) форму $(\mathrm{A}\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ можно рассматривать как эквивалентное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а потому в силу неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$(\mathrm{A}\zeta',\zeta_*)^2_{\mathbb{R}^n} < (\mathrm{A}\zeta',\zeta')_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{A}\zeta_*,\zeta_*)_{\mathbb{R}^n}.$$

Данное неравенство строгое ввиду неколлинеарности векторов ζ' и ζ_*. Следовательно,

$$\min_{\|\zeta'\|_{\mathbb{R}^{n-1}}=1} \big((\mathrm{A}\zeta',\zeta')_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{A}\zeta_*,\zeta_*)_{\mathbb{R}^n} - (\mathrm{A}\zeta',\zeta_*)^2_{\mathbb{R}^n} \big) \geqslant C > 0.$$

Отсюда и из (4.9) вытекает требуемое условие эллиптичности.

Доказательство самосопряжённости оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ теперь несложно провести аналогично доказательству m-секториальности оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ в предыдущем параграфе. При этом аналогом формы $\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon$ будет следующая форма:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_0^0(u,v) := &\sum_{i,j=1}^{n-1} \left(A_{ij}^0 \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(A_j^0 \frac{\partial u}{\partial x_j}, v \right)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \left(u, A_j^0 \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} + (A_0^0 u, v)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}.\end{aligned}$$

Требуемую оценку резольвенты можно доказать на основе второго основного неравенства для эллиптических операторов, см. [37, Гл. Ⅲ, §8]. □

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2.2. Пусть $f \in L_2(\Omega^\varepsilon)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{K} \cup \sigma(\mathcal{H}_\alpha^0))$. Положим

$$F_\varepsilon := \varepsilon^{-1/2} \mathcal{Q}_\varepsilon f, \qquad F_\perp^\varepsilon := \mathcal{Q}_\perp^\varepsilon f, \qquad u^\varepsilon := (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} f,$$
$$U^\varepsilon := (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} F^\varepsilon, \qquad u^0 := (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} F^\varepsilon.$$

Ясно, что

$$\|F^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \|F_\perp^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = \|f\|^2_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{4.10}$$

и в силу леммы 4.1

$$\|u^\varepsilon - U^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \varepsilon C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.11}$$

Таким образом, достаточно оценить норму разности $U^\varepsilon - u^0$. Для этого мы вводим специальный корректор, который далее будет играть ключевую роль. Фактически, данный корректор является вторым членом асимптотического разложения функции U^ε, если последнее строить на основе метода двух масштабов. А именно, положим

$$
\begin{aligned}
w(x',\xi,\varepsilon) :=& -\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x') \int\limits_0^\xi \frac{A_{nj}(x',t,\varepsilon)}{A_{nn}(x',t,\varepsilon)}\,\mathrm{d}t - u^0(x')\int\limits_0^\xi \overline{A}_n(x',t,\varepsilon)\,\mathrm{d}t\\
&- \mathrm{i}\alpha^\varepsilon(x')u^0(x')\int\limits_0^\xi \frac{\mathrm{d}t}{A_{nn}(x',t,\varepsilon)},\\
w^\varepsilon(x) :=& \, w\left(x',\frac{x_n}{\varepsilon},\varepsilon\right) \equiv (\mathcal{W}^\varepsilon u^0)\left(x',\frac{x_n}{\varepsilon},\varepsilon\right).
\end{aligned}
$$

Ясно, что $w^\varepsilon \in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ для всех $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$. Функция w^ε является вышеупомянутым корректором и далее наша цель – оценить норму разности функции $v^\varepsilon(x) := U^\varepsilon(x) - W^\varepsilon(x)$, $W^\varepsilon(x) := u^0(x') - \varepsilon w^\varepsilon(x)$.

Вначале отметим, что функция ω является решением уравнения

$$
A_{nn}\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \sum_{j=1}^{n-1} A_{nj}\frac{\partial u^0}{\partial x_j} + (\overline{A}_n + \mathrm{i}\alpha)u^0 = 0, \quad (x',\xi,\varepsilon)\in\overline{\Pi}. \tag{4.12}
$$

Из определения функции U^ε и доказательств теоремы 2.1, и леммы 4.1 следует, что эта функция удовлетворяет интегральному тождеству

$$
\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon(U^\varepsilon,v) - \lambda(U^\varepsilon,v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (F^\varepsilon,v)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \tag{4.13}
$$

для всех $v\in W_2^1(\Omega^\varepsilon)$. А из леммы 4.2 и гладкости коэффициентов оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ вытекает соотношение

$$
F_\varepsilon = \left(-\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}^0\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(A_j^0\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j^0}\right) + (A_0^0-\lambda)\right)u^0. \tag{4.14}
$$

Положим теперь $v=v^\varepsilon$ в (4.13) и воспользуемся равенством $U^\varepsilon = v^\varepsilon + u^0 + \varepsilon w^\varepsilon$. Тогда получим:

$$
\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon(v^\varepsilon,v^\varepsilon) - \lambda\|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (F^\varepsilon,v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - \mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon(W^\varepsilon,v^\varepsilon) + \lambda(W^\varepsilon,v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.15}
$$

Основная идея в получении оценки для v^ε состоит в том, что мы вначале преобразуем правую часть последнего равенства к более удобному виду, потом оценим её малой величиной и затем уже выведем оценку для v^ε.

Займемся преобразованием правой части. Интегрируя по частям, имеем:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon(u^0,v^\varepsilon) - \lambda(u^0,v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} =& (g_1^\varepsilon + g_2^\varepsilon, v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\
&+ \mathfrak{b}^\varepsilon\left(\frac{\partial u^0}{\partial\nu^\varepsilon} + \mathrm{i}\alpha^\varepsilon u^0, v^\varepsilon\right),
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

$$
g_1^\varepsilon := -\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}^\varepsilon\frac{\partial u^0}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n-1}\left(A_j^\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j^\varepsilon}\right)u^0 + (A_0^\varepsilon - \lambda)u^0,
$$

$$
g_2^\varepsilon := -\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial A_{nj}^\varepsilon}{\partial x_n}\frac{\partial u^0}{\partial x_j} - \frac{\partial\overline{A_n^\varepsilon}}{\partial x_n}u^0.
$$

Аналогично интегрируем по частям:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left(A_{in}^{\varepsilon}\frac{\partial\omega^{\varepsilon}}{\partial x_n},\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x_i}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}&=-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A_{in}^{\varepsilon}\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_n},v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}\\
&\qquad+\varepsilon\mathfrak{b}^{\varepsilon}\left(A_{nn}^{\varepsilon}\frac{\partial\omega^{\varepsilon}}{\partial x_n},v^{\varepsilon}\right),\\
\mathrm{i}\varepsilon\mathfrak{b}^{\varepsilon}(\alpha^{\varepsilon}w^{\varepsilon},v^{\varepsilon})=\mathrm{i}\varepsilon\left(\alpha^{\varepsilon}w^{\varepsilon},\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x_n}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}&+\mathrm{i}\varepsilon\left(\alpha^{\varepsilon}\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_n},v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

В силу (4.12) получаем:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon A_n^{\varepsilon}\frac{\partial\omega^{\varepsilon}}{\partial x_n}&=-\frac{A_n^{\varepsilon}}{A_{nn}^{\varepsilon}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}A_{nj}^{\varepsilon}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}+(\overline{A_n^{\varepsilon}}+\mathrm{i}\alpha^{\varepsilon})u^0\right),\\
-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{in}^{\varepsilon}\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_n}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{A_{in}^{\varepsilon}}{A_{nn}^{\varepsilon}}\left(\sum_{j=1}^{n-1}A_{nj}^{\varepsilon}\frac{\partial u^0}{\partial x_j}+(\overline{A_n^{\varepsilon}}+\mathrm{i}\alpha^{\varepsilon})u^0\right).
\end{aligned}
$$

Из последних равенств и (4.16), (4.17), (4.12) выводим:

$$
\mathfrak{h}_{\alpha}^{\varepsilon}(W^{\varepsilon},v^{\varepsilon})-\lambda(W^{\varepsilon},v^{\varepsilon})=\varepsilon G_1^{\varepsilon}(w^{\varepsilon},v^{\varepsilon})+G_2^{\varepsilon}(u^0,v^{\varepsilon})+G_3^{\varepsilon}(u^0,v^{\varepsilon}),\tag{4.18}
$$

$$
\begin{aligned}
G_1^{\varepsilon}(w^{\varepsilon},v^{\varepsilon}):=&\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(A_{ij}^{\varepsilon}\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_i},\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}+\sum_{j=1}^{n-1}\left(A_j^{\varepsilon}\frac{\partial w^{\varepsilon}}{\partial x_j},v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}\\
&+\sum_{j=1}^{n-1}\left(w^{\varepsilon},A_j^{\varepsilon}\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x_j}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}+((A_0^{\varepsilon}-\lambda_0)w^{\varepsilon},v^{\varepsilon})_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}\\
&+\mathrm{i}\varepsilon\left(\alpha^{\varepsilon}w^{\varepsilon},\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial x_n}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})},\\
G_2^{\varepsilon}(u^0,v^{\varepsilon}):=&\,\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n-1}\left(u^0\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\alpha^{\varepsilon}\frac{\partial A_{jn}^{\varepsilon}}{A_{nn}^{\varepsilon}}\right),v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}\\
G_3^{\varepsilon}(u^0,v^{\varepsilon}):=&-\sum_{i,j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}B_{ij}\frac{\partial u^0}{\partial x_j},v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}+\sum_{j=1}^{n-1}\left(B_j\frac{\partial u^0}{\partial x_j},v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}\\
&-\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{B_j}u^0,v^{\varepsilon}\right)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}+\big((B_0-\lambda)u^0,v^{\varepsilon}\big)_{L_2(\Omega^{\varepsilon})},
\end{aligned}
$$

где $B_{ij}^{\varepsilon}(x)=B_{ij}(x',x_n\varepsilon^{-1},\varepsilon)$, $B_j^{\varepsilon}(x)=B_j(x',x_n\varepsilon^{-1},\varepsilon)$, $B_0^{\varepsilon}(x)=B_0(x',x_n\varepsilon^{-1},\varepsilon)$, $B_{ij}=B_{ij}(x',\xi,\varepsilon)$, $B_j=B_j(x',\xi,\varepsilon)$, $B_0=B_0(x',\xi,\varepsilon)$,

$$
\begin{aligned}
&B_{ij}:=A_{ij}-\frac{A_{in}A_{nj}}{A_{nn}},\quad B_j:=A_j-\frac{A_nA_{nj}}{A_{nn}},\\
&B_0:=A_0+\frac{\alpha^2}{A_{nn}}-\mathrm{i}\alpha\frac{A_n+\overline{A_n}}{A_{nn}}-\frac{|A_n|^2}{A_{nn}}.
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Непосредственно из определения функции w^{ε} и леммы 4.2 следует оценка:

$$
|G_{\varepsilon}^1(w^{\varepsilon},v^{\varepsilon})|\leqslant\varepsilon C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^{\varepsilon})}\|v^{\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega^{\varepsilon})}.\tag{4.20}
$$

Положим $v_\perp^\varepsilon := \mathcal{Q}_\perp^\varepsilon v^\varepsilon$. В силу условий (2.3) выполнены равенства:

$$\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{A_{jn}\left(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, \varepsilon\right)}{A_{nn}\left(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, \varepsilon\right)} \,\mathrm{d}x_n = 0 \quad \text{для всех} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Так как функции α^ε и u^0 не зависят от ξ, то $u^0 \dfrac{\partial}{\partial x_j} \alpha^\varepsilon \dfrac{A_{jn}^\varepsilon}{A_{nn}^\varepsilon} \in L_\perp^\varepsilon$. Тогда величину G_2^ε можно переписать в виде

$$G_2^\varepsilon(u^0, v^\varepsilon) = \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n-1} \left(u^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha^\varepsilon \frac{\partial A_{jn}^\varepsilon}{A_{nn}^\varepsilon} \right), v_\perp^\varepsilon \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

откуда, из леммы 4.2 и неравенства (4.5) выводим оценку:

$$|G_2^\varepsilon(u^0, v^\varepsilon)| \leqslant \varepsilon C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.21}$$

Положим

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^4(u^0, v^\varepsilon) := &- \sum_{i,j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} B_{ij}^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_j}, v^\varepsilon \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(B_j^0 \frac{\partial u^0}{\partial x_j}, v^\varepsilon \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \\ &- \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{B_j^0} u^0, v^\varepsilon \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} + \left((B_0^0 - \lambda) u^0, v^\varepsilon \right)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} B_{ij}^0(x, \varepsilon) := B_{ij} \left(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, 0 \right), \quad B_j^0(x, \varepsilon) := B_j \left(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, 0 \right), \\ B_0^0(x, \varepsilon) := B_0 \left(x', \frac{x_n}{\varepsilon}, 0 \right). \end{gathered} \tag{4.22}$$

Тогда из гладкости и ограниченности функций A_{ij}, A_j, A_0 и их производных, а также из леммы 4.2 следует оценка:

$$|G_4^\varepsilon(u^0, v^\varepsilon) - G_3^\varepsilon(u^0, v^\varepsilon)| \leqslant \eta(\varepsilon) C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{4.23}$$

Непосредственно из определения (2.13) функций A_{ij}^0, A_j^0, A_0^0 и определения (4.19), (4.22) функций B_{ij}^0, B_j^0, B_0^0 вытекает, что

$$\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(A_\flat^0(x') - B_\flat^0(x, \varepsilon) \right) \mathrm{d}x_n = 0, \quad \flat = ij, \quad \flat = j, \quad \flat = 0.$$

Из этих равенств и леммы 4.2 следует, что выполнено соотношение

$$(F_\varepsilon, v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - G_\varepsilon^4(u^0, v^\varepsilon) = (g_3^\varepsilon, v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

где функция g_3^ε принадлежит пространству $L_\perp^\varepsilon$ и удовлетворяет оценке

$$\|g_3^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Отсюда аналогично выводу (4.21) несложно проверить, что верно неравенство:

$$|(F_\varepsilon, v^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} - G_\varepsilon^4(u^0, v^\varepsilon)| \leqslant (\varepsilon + \eta(\varepsilon)) C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

В силу этой оценки и (4.15), (4.18), (4.20), (4.21), (4.23) заключаем, что правая часть в (4.15) оценивается величиной $(\varepsilon + \eta(\varepsilon)) C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \|v^\varepsilon|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}$. Теперь достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 4.1, чтобы получить требуемую оценку для v^ε:

$$\|v^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant (\varepsilon + \eta(\varepsilon)) C(\lambda) \|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Отметим ещё очевидное неравенство, вытекающее непосредственно из определения функции w^ε:

$$\|w^\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \varepsilon C(\lambda)\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.$$

Из последних двух оценок и (4.11) получаем утверждение теоремы 2.2.

5. Сходимость спектра

Данный параграф посвящён доказательству теоремы 2.3.

Пусть λ лежит в некотором компакте на комплексной плоскости, а $\mu \in \mathbb{C}$ – некоторое фиксированное число, находящееся на расстоянии 1 от множества $\mathbb{K}\cup\sigma(\mathcal{H}_\alpha^0)$. Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)u = f, \quad f \in L_2(\Omega^\varepsilon) \tag{5.1}$$

и исследуем его разрешимость. Перепишем его в виде

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \mu + \mu - \lambda)u = f$$

и применим оператор $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \mu)^{-1}$, который определён в силу теоремы 2.2. Обозначая $\mathcal{T}_1^\varepsilon := (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \mu)^{-1} - (\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon \oplus 0$, получим:

$$u + (\mu-\lambda)(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u \oplus 0 + (\mu-\lambda)\mathcal{T}_1^\varepsilon u = f_1^\varepsilon, \quad f_1^\varepsilon := (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \mu)^{-1} f. \tag{5.2}$$

В силу теоремы 2.2 норма оператора $\mathcal{T}_1^\varepsilon : L_2(\Omega^\varepsilon) \to L_2(\Omega^\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Поэтому при достаточно малых ε оператор $\mathrm{I} + (\mu-\lambda)\mathcal{T}_1^\varepsilon$ обратим и

$$\begin{aligned} &u = \mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda) f_1^\varepsilon - (\mu-\lambda)\mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda)(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u \oplus 0, \\ &\mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda) := (\mathrm{I} + (\mu-\lambda)\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{T}_1^\varepsilon)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Эта равенство означает, что для решения уравнения (5.1) достаточно отыскать функцию $\mathcal{Q}^\varepsilon u$. Отметим также, что оператор $\mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda)$ голоморфен по λ. Производная этого оператора по λ имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{T}_2^\varepsilon}{\partial\lambda}(\lambda) = (\mathrm{I} + (\mu-\lambda)\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{T}_1^\varepsilon)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{T}_1^\varepsilon(\mathrm{I} + (\mu-\lambda)\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{T}_1^\varepsilon)^{-1}, \tag{5.4}$$

и его норма стремится при $\varepsilon \to +0$.

Подействуем оператором $\mathcal{Q}^\varepsilon$ на уравнение (5.2) и подставим затем формулу (5.3) в определение $\mathcal{T}_1^\varepsilon$ и воспользуемся затем легко проверяемыми равенствами

$$\mathrm{I} + (\mu-\lambda)(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1} = (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}, \quad (\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon = \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon.$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda + \mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u = f_2^\varepsilon, \\ &f_2^\varepsilon := \big(\mathrm{I} - (\mu-\lambda)\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{T}_\varepsilon^1(\lambda)\mathcal{T}_\varepsilon^2(\lambda)\big)\mathcal{Q}^\varepsilon f_\varepsilon^1, \\ &\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda) := -(\mu-\lambda)^2\mathcal{Q}^\varepsilon\mathcal{T}_1^\varepsilon\mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda)\mathcal{Q}^\varepsilon. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Полученное равенство мы рассматриваем как уравнение на $(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u$. Оно эквивалентно исходному уравнению (5.1), так как, отыскав $(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u$, по формуле (5.3) уже можно восстановить решение уравнения (5.1).

Отметим, что, отождествляя пространства $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ и L^ε, для всех $v \in L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ имеем очевидное равенство $\|\mathcal{Q}^\varepsilon v\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = \varepsilon^{1/2}\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}$. Отсюда и из определения оператора $\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda) : L_2(\mathbb{R}^{n-1}) \to L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ следует, что его норма стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Кроме того, этот оператор голоморфен по λ, и в силу (5.4) норма его производной по λ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$.

Если теперь λ отделено от спектра оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ для всех достаточно малых ε, то уравнение (5.5) однозначно разрешимо:

$$(\mathcal{H}_\alpha^0 - \mu)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u = (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda + \mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))^{-1} f_2^\varepsilon. \tag{5.6}$$

Следовательно, спектр оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ сходится к спектру оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ в том смысле, как это было указано в утверждении теоремы 2.3.

Пусть теперь λ_0 – изолированное m-кратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$, $\phi_1, \dots \phi_m$ – соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Положим $f = 0$ в (5.1), то есть будем рассматривать уравнение на собственные значения для возмущённого оператора. Для его изучения воспользуемся модифицированной версией метода Бирмана-Швингера из [25], [26].

При λ, близких к λ_0, справедливо представление [35, Гл. V, §3.5]:

$$(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} = \sum_{j=1}^m \frac{(\cdot, \phi_j)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}}{\lambda_0 - \lambda}\phi_j + \mathcal{T}_4(\lambda), \tag{5.7}$$

где оператор $\mathcal{T}_4(\lambda)$ действует из $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ в подмножество $W_2^2(\mathbb{R}^{n-1})$, состоящее из функций, ортогональных $\phi_1, \dots, \phi_m$ в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Кроме того, оператор $\mathcal{T}_4(\lambda)$ голоморфен по λ из достаточно малой окрестности λ_0. Обозначим

$$U := (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}^\varepsilon u \tag{5.8}$$

и обернём оператор $(\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)$ в (5.5) с учётом (5.7):

$$(\mathrm{I} + \mathcal{T}_4(\lambda)\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))U + \sum_{j=1}^m \frac{(\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda)U, \phi_j)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}}{\lambda_0 - \lambda}\phi_j = 0.$$

Так как оператор $\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda)$ мал, а оператор $\mathcal{T}_4(\lambda)$ – голоморфен, то оператор $(\mathrm{I} + \mathcal{T}_4(\lambda)\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))$ обратим и

$$U + \sum_{j=1}^m \frac{(\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda)U, \phi_j)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}}{\lambda_0 - \lambda}(\mathrm{I} + \mathcal{T}_4(\lambda)\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))^{-1}\phi_j = 0. \tag{5.9}$$

Положим:

$$Z = (z_1, \dots, z_m)^t, \quad z_j := (\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda)U, \phi_j)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{5.10}$$

Как следует из (5.9), зная величины z_j, можно определить функцию U и, тем самым, с помощью (5.3), (5.8) решить уравнение (5.1) с $f = 0$. Чтобы определить вектор z, подействуем оператором $\mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda)$ на уравнение (5.9) и умножим затем скалярно на ϕ_i в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Тогда получим матричное уравнение:

$$\big((\lambda_0 - \lambda)\mathrm{E}_m + \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)\big)Z = 0, \tag{5.11}$$

где E_m – единичная матрица размера $m \times m$, $\mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)$ – матрица с компонентами

$$A_{ij}^\varepsilon(\lambda) := \big(\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda)(\mathrm{I} + \mathcal{T}_4(\lambda)\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))^{-1}\phi_i, \phi_j\big)_{L_2(R^{n-1})}.$$

Точки, в которых матрица $(\lambda_0 - \lambda)\mathrm{E}_m + \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)$ необратима, являются в точности собственными значениями оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$. Действительно, если λ – одна из таких точек, то уравнение (5.11) имеет конечное число линейно независимых решений. Каждому такому решению по формулам (5.9), (5.10), (5.3) с $f_1^\varepsilon = 0$ соответствует собственная функция оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$:

$$u = \mathcal{T}_2^\varepsilon(\lambda)U, \quad U = \sum_{j=1}^m z_j(\mathrm{I} + \mathcal{T}_4(\lambda)\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda))^{-1}\phi_j. \tag{5.12}$$

Множители $1/(\lambda - \lambda_0)$ в формуле для U и $(\mu - \lambda)$ в формуле для u можно убрать, так как собственная функция определена с точностью до умножения на константу. Также несложно проверить, что линейно независимым векторам z соответствуют линейно независимые собственные функции оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$. Таким образом, кратность собственного значения λ оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ совпадает с числом линейно независимых решений уравнения (5.11).

Из свойств оператора $\mathcal{T}_3^\varepsilon(\lambda)$ и $\mathcal{T}_4(\lambda)$ следует, что элементы матрицы $\mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)$ голоморфны по λ. Кроме того, эти элементы и их производные по λ стремятся к нулю при $\varepsilon \to +0$ равномерно по λ из малой окрестности точки λ_0. Обозначим:

$$R^\varepsilon(\lambda) := \det(\lambda - \lambda_0 - \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)).$$

Лемма 5.1. *Функция $\lambda \mapsto R^\varepsilon(\lambda)$ имеет ровно m нулей (с учётом порядков), сходящихся к λ_0 при $\varepsilon \to +0$.*

Доказательство. Ясно, что

$$R^\varepsilon(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m + R_1^\varepsilon(\lambda),$$

где функция $R_1^\varepsilon(\lambda)$ голоморфна по λ из малой окрестности точки λ_0 и равномерно по λ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. Используя данное представление и применяя теорему Руше, приходим к утверждению леммы. □

Пусть λ^ε – один из нулей функции $R^\varepsilon(\lambda)$ порядка $k(\varepsilon)$, описанный в лемме 5.1. Ему соответствует $q(\varepsilon)$ линейно независимых решений уравнения (5.11), причём $q(\varepsilon)$ является также кратностью λ^ε, рассматриваемого как собственное значение оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$. Докажем, что кратность λ^ε, рассматриваемого как собственное значение, совпадает с его порядком как нуля функции $R^\varepsilon(\lambda)$.

Лемма 5.2. *Для всех достаточно малых ε и всех нулей функции $R^\varepsilon(\lambda)$ выполнено равенство $p(\varepsilon) = q(\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $Z_1, \ldots, Z_q$ – линейно независимые решения уравнения (5.11), соответствующие $\lambda = \lambda^\varepsilon$. Без ограничения общности выберем векторы Z_j ортонормированными в $\mathbb{C}^m$. Так как $q \leqslant m$, то эти вектора дополним векторами Z_j, $j = q+1, \ldots, m$, так чтобы в совокупности полученная система образовала ортонормированный базис в $\mathbb{C}^m$. Через S обозначим матрицу со столбцами Z_j, $j = 1, \ldots, m$. Так как вектора Z_j ортонормированы, то матрица S невырождена и ортогональна: $\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}^*$.

В силу упомянутых выше свойств элементов матрицы $\mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)$ и леммы Адамара справедливо представление

$$\mathrm{B}^\varepsilon(\lambda) - \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon) = (\lambda - \lambda^\varepsilon)\mathrm{B}_1^\varepsilon(\lambda),$$

где матрица $\mathrm{B}_1^\varepsilon(\lambda)$ голоморфна по λ из малой окрестности точки λ_0, и её элементы стремятся к нулю равномерно по λ при $\varepsilon \to +0$. Используя данное представление, прямыми вычислениями проверяем, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}^{-1}\big((\lambda-\lambda_0)\mathrm{E}_m - \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda)\big)\mathrm{S} = (\lambda-\lambda^\varepsilon)\big(\mathrm{E}_m + \mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}_1^\varepsilon(\lambda)\mathrm{S}\big)\\
&\ + \mathrm{S}^{-1}\big((\lambda^\varepsilon-\lambda_0)\mathrm{E}_m - \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)\big)\mathrm{S} = \big(\mathrm{E}_m + \mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}_1^\varepsilon(\lambda)\mathrm{S}\big)\big((\lambda-\lambda^\varepsilon)\mathrm{E}_m + \mathrm{B}_2^\varepsilon\big),\\
&\mathrm{B}_2^\varepsilon(\lambda) := \mathrm{S}^{-1}\big(\mathrm{E}_m + \mathrm{B}_1^\varepsilon(\lambda)\big)^{-1}\big((\lambda^\varepsilon-\lambda_0)\mathrm{E}_m - \mathrm{B}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)\big)\mathrm{S}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

В силу определения матрицы S матрица B_2^ε имеет вид блочный вид:

$$\mathrm{B}_2^\varepsilon(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{B}_3^\varepsilon(\lambda) \\ 0 & \mathrm{B}_4^\varepsilon(\lambda) \end{pmatrix},$$

где нулевой блок в левом верхнем углу имеет размер $q \times m$, нулевой блок в левом нижнем углу имеет размер $(m-q) \times m$, а блоки B_3^ε и B_4^ε соответственно размера $q \times (m-q)$ и $(m-q) \times (m-q)$. Отсюда и из свойств матрицы B_1^ε следует:

$$\begin{gathered}
R^\varepsilon(\lambda) = (\lambda-\lambda^\varepsilon)^q R_1^\varepsilon(\lambda),\\
R_\varepsilon^1(\lambda) := \det{}^{-1}(\mathrm{E}_m + \mathrm{S}^{-1}\mathrm{B}_1^\varepsilon(\lambda)\mathrm{S})\,\det\big((\lambda-\lambda^\varepsilon)\mathrm{E}_{m-q} - \mathrm{B}_4^\varepsilon(\lambda)\big).
\end{gathered} \tag{5.14}$$

Из равенства (5.13) с $\lambda=\lambda^\varepsilon$ и предположения

$$\operatorname{rank}\big((\lambda^\varepsilon-\lambda_0)\mathrm{E}_m-\mathrm{B}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)\big)=m-q$$

следует, что $\operatorname{rank}\mathrm{A}_4^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)=m-q$, а потому $R_\varepsilon^1(\lambda^\varepsilon)\neq 0$. Отсюда и из (5.14) уже следует утверждение леммы. □

Замечание 5.1. Отметим, что схожая лемма в рамках аналогичного подхода на основе модифицированного метода Бирмана-Швингера была доказана в [38, Lm. 6.3]. Вместе с тем, в указанной работе по существу использовался факт самосопряжённости как возмущённого, так и предельного операторов. В настоящей работе нам удалось избавиться от этого предположения для возмущённого оператора.

Из лемм 5.1, 5.2 вытекает вторая часть утверждения теоремы 2.3 о сходимости собственных значений. Осталось доказать вещественность собственных значений возмущённого оператора, сходящихся к λ_0.

Пусть λ^ε – одно из таких собственных значений, а ψ^ε – соответствующая собственная функция. Тогда для ψ^ε справедливо представление (5.12) с заменой u на ψ^ε. Нормируем нетривиальное решение Z уравнения (5.11) следующим образом:

$$\|Z\|_{\mathbb{C}^m}=\varepsilon^{-1}. \tag{5.15}$$

Тогда из (5.12), определений операторов $\mathcal{T}_2^\varepsilon$, $\mathcal{T}_3^\varepsilon$, $\mathcal{T}_4$ и теоремы 2.2 выводим:

$$\psi^\varepsilon=\sum_{j=1}^m z_j\phi_j+\mathcal{O}(\varepsilon+\eta)\quad\text{в норме}\quad L_2(\Omega^\varepsilon). \tag{5.16}$$

Используя равенства (2.9), (2.11) и уравнение на собственные значения для ψ^ε, непосредственными вычислениями проверяем:

$$\begin{aligned}0=&\big((\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda^\varepsilon)\psi^\varepsilon,\mathcal{P}\psi^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=\big(\psi^\varepsilon,(\mathcal{H}_{-\alpha}^\varepsilon-\overline{\lambda^\varepsilon})\mathcal{P}\psi^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\=&\big(\psi^\varepsilon,\mathcal{P}(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\overline{\lambda^\varepsilon})\psi^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=(\overline{\lambda^\varepsilon}-\lambda^\varepsilon)(\psi^\varepsilon,\mathcal{P}\psi^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Из определения оператора $\mathcal{P}$ и (5.16) следует, что

$$\mathcal{P}\psi^\varepsilon=\sum_{j=1}^m z_j\phi_j+\mathcal{O}(\varepsilon+\eta)\quad\text{в норме}\quad L_2(\Omega^\varepsilon), \tag{5.18}$$

а потому в силу (5.15), (5.16) и ортонормированности ϕ_j в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$

$$(\psi^\varepsilon,\mathcal{P}\psi^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=1+\mathcal{O}(\varepsilon+\eta). \tag{5.19}$$

Отсюда вытекает, что равенство (5.17) возможно только при вещественных λ^ε. Теорема 2.3 полностью доказана.

6. Асимптотические разложения: формальное построение

В настоящем параграфе мы приводим первую часть доказательства теоремы 2.4 – формальное построение асимптотических разложений собственных значений и собственных функций возмущённого оператора. Вторая часть доказательства – строгое обоснование и получение оценок остатков – будет дана в следующем параграфе.

Пусть λ^0 – изолированное m-кратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$, а $\phi_k=\phi_k(x')$, $k=1,\ldots,m$ – соответствующие ортонормированные в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ вещественные собственные функции. Согласно теореме 2.3, существует ровно m собственных значений λ_k^ε,

$k=1,\ldots,m$, возмущённого оператора, сходящихся к λ^0 при $\varepsilon\to+0$. Асимптотики этих собственных значений будем строить в виде:

$$\lambda_k^\varepsilon=\lambda^0+\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon^p\Lambda_k^{(p)},\quad k=1,\ldots,m, \tag{6.1}$$

а асимптотики соответствующих собственных функций – в виде:

$$\psi_k^\varepsilon(x)=\phi_k(x')+\sum_{p=1}^{\infty}\varepsilon^p\phi_k^{(p)}(x',\xi),\quad k=1,\ldots,m, \tag{6.2}$$

где $\xi=x_n\varepsilon^{-1}$ – растянутая переменная, $\Lambda_k^{(p)}$ и $\psi_k^{(p)}$ – некоторые числа и функции, определение которых и является основной целью формального построения асимптотик. Асимптотики будем строить на основе метода многих масштабов [34].

Собственные функции возмущённого оператора далее будет удобно рассматривать как обобщённые решения краевых задач:

$$\begin{gathered}\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}^\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}\left(A_j^\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j^\varepsilon}\right)+A_0^\varepsilon\right)\psi_k^\varepsilon=\lambda_k^\varepsilon\psi_k^\varepsilon\quad\text{в}\quad\Omega^\varepsilon,\\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu^\varepsilon}+\mathrm{i}\alpha^\varepsilon\right)\psi_k^\varepsilon=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega^\varepsilon.\end{gathered} \tag{6.3}$$

Подставим ряды (6.1), (6.2) в эту краевую задачу, учтём зависимость функций $\phi_k^{(p)}$ от переменной ξ и соберём затем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда получим рекуррентную систему краевых задач:

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial\xi}A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\phi_k^{(p-1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_k^{(p-1)}}{\partial\nu}\\ &\qquad+\mathcal{T}_5\phi_k^{(p-2)}=\lambda^0\phi_k^{(p-2)}+\sum_{q=1}^{p-2}\Lambda_k^{(q)}\phi_k^{(p-q-2)}\quad\text{в}\quad\Omega,\\ &A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi_k^{(p-1)}}{\partial\nu}=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega,\quad p\geqslant1,\end{aligned} \tag{6.4}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\nu}:=\sum_{j=1}^{n-1}A_{nj}\frac{\partial}{\partial x_j}+\overline{A}_n+\mathrm{i}\alpha,\\ &\frac{\partial}{\partial\nu^*}:=-\sum_{j=1}^{n-1}A_{nj}\frac{\partial}{\partial x_j}+A_n+\mathrm{i}\alpha,\\ &\mathcal{T}_5:=-\sum_{i,j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n-1}\left(A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j}\right)+A_0,\\ &\phi_k^{(0)}:=\phi_k,\quad\phi_k^{(-1)}:=0.\end{aligned}$$

Для решения задач (6.4) мы будем использовать следующую вспомогательную лемму.

Лемма 6.1. *Пусть $F=F(x',\xi)$ – некоторая функция, такая что $F(x',\cdot)\in L_2(-1/2,1/2)$ для всех $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $g_\pm=g_\pm(x')$ – некоторые функции. Краевая задача*

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}A_{nn}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}+F=0\quad\text{в}\quad\Omega,\quad A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(p)}}{\partial\xi}+g_\pm=0\quad\text{при}\quad\xi=\pm1/2, \tag{6.5}$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x',\xi)\,\mathrm{d}\xi = g_-(x') - g_+(x') \quad \textit{для всех} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{6.6}$$

Существует единственное решение задачи (6.5), удовлетворяющее условию

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(x',\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \quad \textit{для всех} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{6.7}$$

Это решение даётся формулой

$$\begin{aligned}\phi(x',\xi) = &-g_-(x')\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\xi} \frac{\mathrm{d}t}{A_{nn}(x',t)} + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(t-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}t}{A_{nn}(x',t)}\right)\\ &+\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\xi} \frac{\mathrm{d}t}{A_{nn}(x',t)} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{t} F(x',s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \frac{t-\frac{1}{2}}{A_{nn}(x',t)} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{t} F(x',s)\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Общее решение отличается от последнего на произвольную функцию, зависящую лишь от x'.

Утверждение данной леммы проверяется непосредственными вычислениями.

Переходим к решению задач (6.4). Вначале мы отдельно рассмотрим эти задачи для $p = 1, 2, 3$, а затем уже построим решения для произвольного p. Необходимость отдельного рассмотрения случаем $p = 1, 2, 3$ связана с тем, что для построения решения в случае произвольного p используются конструкции из решений для $p = 1, 2, 3$.

Для $p = 1$ задача (6.4) принимает вид:

$$-\frac{\partial}{\partial\xi} A_{nn} \frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_k}{\partial\nu} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad A_{nn}\frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial\phi_k}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Отсюда следует, что

$$A_{nn}\frac{\partial \phi_k^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial\phi_k}{\partial\nu} = 0, \tag{6.9}$$

$$\phi_k^{(1)} = \hat{\phi}_k^{(1)} + \Phi_k^{(1)}, \quad \hat{\phi}_k^{(1)} := \mathcal{T}_6\phi_k, \tag{6.10}$$

где $\Phi_k^{(1)} = \Phi_k^{(1)}(x')$ – некоторая функция, которая будет определена ниже,

$$(\mathcal{T}_6\phi)(x',\xi) := \sum_{j=1}^{n-1} G_j(x',\xi)\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x') + G_0(x',\xi)\phi(x'), \tag{6.11}$$

$$G_j(x',\xi) := -\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\xi} \frac{A_{nj}(x',t)\,\mathrm{d}t}{A_{nn}(x',t)} - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{tA_{nj}(x',t)}{A_{nn}(x',t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$G_0(x',\xi) := -\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\xi} \frac{\overline{A}_n(x',t)+\mathrm{i}\alpha(x')}{A_{nn}(x',t)}\,\mathrm{d}t - \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(t-\frac{1}{2}\right)\frac{\overline{A}_n(x',t)+\mathrm{i}\alpha(x')}{A_{nn}(x',t)}\,\mathrm{d}t.$$

С учётом равенств (2.3) несложно проверить, что функция $\phi_k^{(1)}$ удовлетворяет условию (6.7).

Выпишем теперь задачу (6.4) для $p=2$:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial\xi}A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\nu}+\mathcal{T}_5\phi_k=\lambda^0\phi_k \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(2)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\nu}=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Запишем для неё условие разрешимости (6.6):

$$
\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\xi}\,\mathrm{d}\xi-\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\xi+\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}(\mathcal{T}_5\phi_k-\lambda^0\phi_k)\,\mathrm{d}\xi=-\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\nu}\bigg|_{\xi=-\frac12}^{\xi=\frac12},
$$

откуда следует:

$$
\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{T}_6+\mathcal{T}_5-\lambda^0\right)\phi_k\,\mathrm{d}\xi=0.
$$

Подставив сюда выражение для $\frac{\partial}{\partial\nu^*}$ и равенства (6.9), (6.10), получим уравнения для собственных функций ϕ_k:

$$
\mathcal{H}_\alpha^0\phi_k=\lambda^0\phi_k,
$$

которое выполнено по определению собственных функций ϕ_k и собственного значения λ^0. Возвращаясь теперь к задаче (6.12), подставим в неё формулы (6.9), (6.10), учтём равенство

$$
\frac{\partial\phi_k^{(1)}}{\partial\xi}=\frac{\partial\hat\phi_1^{(k)}}{\partial\xi}
\tag{6.13}
$$

и выпишем затем решение с помощью леммы 6.1. В результате получим:

$$
\phi_k^{(2)}(x',\xi)=\check\phi_k^{(2)}(x',\xi)+\hat\phi_k^{(2)}(x',\xi)+\Phi_k^{(2)}(x'),
\tag{6.14}
$$

$$
\hat\phi_k^{(2)}=\mathcal{T}_6\Phi_k^{(1)},\quad \check\phi_k^{(2)}=\mathcal{T}_7\Phi_k^{(1)},
\tag{6.15}
$$

где $\mathcal{T}_7\phi$ – функция, определённая формулой (6.8) с

$$
F=\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{T}_6-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\nu}\mathcal{T}_6+\mathcal{T}_5-\lambda^0\right)\phi,\quad g_-=\frac{\partial}{\partial\nu}\mathcal{T}_6\phi\bigg|_{\xi=-\frac12}.
$$

Переходим к случаю $p=3$. Здесь задача (6.4) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial\xi}A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\phi_k^{(2)}}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_k^{(2)}}{\partial\nu}\\
&+\mathcal{T}_5\phi_k^{(1)}=\lambda^0\phi_k^{(1)}+\Lambda_k^{(1)}\phi_k \quad \text{в} \quad \Omega,\\
&A_{nn}\frac{\partial\phi_k^{(3)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\phi_k^{(2)}}{\partial\nu}=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Выпишем условие разрешимости (6.6) для этой задачи и учтём формулы (6.10), (6.14), (6.14) и равенство (6.7) для $\hat{\phi}_k^{(1)}$, $\hat{\phi}_k^{(2)}$, $\check{\phi}_k^{(2)}$. В результате имеем:

$$(\mathcal{H}_\alpha^0-\lambda^0)\Phi_k^{(1)}=h_k^{(1)}+\lambda_k^{(1)}\phi_k, \tag{6.17}$$

$$h_k^{(1)}:=-\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi}+\mathcal{T}_5\hat{\phi}_k^{(1)}\right)\mathrm{d}\xi=-\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{T}_7+\mathcal{T}_5\mathcal{T}_6\right)\phi_k\,\mathrm{d}\xi.$$

Так как λ^0 – m-кратное собственное значение оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ и последний самосопряжён, то полученное уравнение будет разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна всем ϕ_s, $s=-1,\ldots,m$, в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$(h_k^{(1)},\phi_s)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}+\lambda_k^{(1)}\delta_{ks}=0,\quad k,s=1,\ldots,m, \tag{6.18}$$

где δ_{ks} – символ Кронекера-Капелли. Покажем, что числа $\Lambda_k^{(1)}$ и функции ϕ_k можно выбрать так, что эти равенства будут выполнены. Для этого вначале докажем, что матрица, составленная из чисел $-(h_k^{(1)},\phi_s)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}$, эрмитова. Обозначим эту матрицу через L.

Непосредственно из определения следует

$$-(h_k^{(1)},\phi_s)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}=\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi},\phi_s\right)_{L_2(\Omega)}+(\mathcal{T}_5\hat{\phi}_k^{(1)},\phi_s)_{L_2(\Omega)}. \tag{6.19}$$

Интегрируя по частям с использованием (6.9), (6.13), (6.15), имеем:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi},\phi_s\right)_{L_2(\Omega)}=\left(\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi},\frac{\partial\phi_s}{\partial\nu^*}\right)_{L_2(\Omega)}=-\left(\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi},A_{nn}\frac{\partial\hat{\phi}_s^{(1)}}{\partial\xi}\right)_{L_2(\Omega)}\\
&=-\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}A_{nn}\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi}\overline{\hat{\phi}_s^{(1)}}\bigg|_{\xi=-\frac12}^{\xi=\frac12}\mathrm{d}x'+\left(\frac{\partial}{\partial\xi}A_{nn}\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi},\hat{\phi}_s^{(1)}\right)_{L_2(\Omega)}\\
&=-\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}A_{nn}\frac{\partial\check{\phi}_k^{(2)}}{\partial\xi}\overline{\hat{\phi}_s^{(1)}}\bigg|_{\xi=-\frac12}^{\xi=\frac12}\mathrm{d}x'-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\hat{\phi}_k^{(1)}}{\partial\nu}-\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial\hat{\phi}_k^{(1)}}{\partial\xi}-\mathcal{T}_5\phi_k,\hat{\phi}_s^{(1)}\right)_{L_2(\Omega)}\\
&=\left(\frac{\partial\hat{\phi}_k^{(1)}}{\partial\nu},\frac{\partial\hat{\phi}_s^{(1)}}{\partial\xi}\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\frac{\partial\hat{\phi}_k^{(1)}}{\partial\xi},\frac{\partial\hat{\phi}_s^{(1)}}{\partial\nu}\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\mathcal{T}_5\phi_k,\hat{\phi}_s^{(1)}\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Эти равенства и (6.19) доказывают эрмитовость матрицы L. В силу теоремы об одновременной диагонализации двух квадратичных форм теперь заключаем, что, сохраняя собственные функции ϕ_k ортонормированными в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$, можно выбрать их так, что матрица L будет диагональной. В таком случае равенства (6.18) очевидно выполнены, если положить $\Lambda_k^{(1)}$ равными собственным значениям матрицы L. Всюду далее величины $\Lambda_k^{(1)}$ и собственные функции ϕ_k считаем выбранными именно таким образом.

Так как условия разрешимости (6.18) выполнены, то уравнение (6.17) имеет единственное решение, ортогональное всем собственным функциям ϕ_s, $s=1,\ldots,m$, в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Обозначим это решение через $\Psi_k^{(1)}$; тогда общее решение уравнения (6.17) даётся формулой:

$$\Phi_k^{(1)}=\Psi_k^{(1)}+\sum_{s=1}^m b_{k,s}^{(1)}\phi_s, \tag{6.20}$$

где $b_{k,s}^{(1)}$ – некоторые константы. Решив уравнение (6.17), мы возвращаемся к краевой задаче (6.16) и находим её решение с помощью леммы 6.1.

Далее мы дополнительно будем предполагать, что собственные значения матрицы L различны. Такое предположение является техническим и несущественным и нужно лишь для упрощения дальнейших построений, см. замечание 6.1 ниже.

Дальнейший процесс решения краевой задачи (6.4) для произвольного p аналогичен приведённым выше рассуждениям. А именно, выписывая условие разрешимости (6.6) для задачи (6.4), получаем уравнение для функции $\Phi_k^{(p-2)}(x')$, возникающей при решении задачи (6.4) для $(p-2)$ в качестве произвольного слагаемого в общем решении. Уравнение на функцию $\Phi_k^{(p-2)}$ аналогично уравнению (6.17), но с некоторой другой правой частью. Условие разрешимости этого уравнения – ортогональность правой части всем собственным функциям ϕ_q, $q=1,\ldots,m$, в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ – позволяет определить числа $\Lambda_k^{(p-2)}$. Затем решаем полученное уравнение для $\Phi_k^{(p-2)}$ и с помощью леммы 6.1 – задачу (6.4). Построенные таким образом функции $\phi_k^{(p)}$ и числа $\Lambda_k^{(p)}$ описываются в следующем утверждении.

Лемма 6.2. *Существуют числа $\Lambda_k^{(p)}$, $p\geqslant 1$, такие, что краевая задача (6.4) разрешима для всех $p\geqslant 1$. Решения этих задач представимы в виде:*

$$\phi_k^{(p)}(x',\xi)=\tilde{\phi}_k^{(p)}(x',\xi)+\check{\phi}_k^{(p)}(x',\xi)+\hat{\phi}_k^{(p)}(x',\xi)+\Phi_k^{(p)}(x'),\tag{6.21}$$

где

$$\hat{\phi}_k^{(p)}=\mathcal{T}_6\Phi_k^{(p-1)},\quad \check{\phi}_k^{(p)}=\mathcal{T}_7\Phi_k^{(p-2)},\tag{6.22}$$

$$\Phi_k^{(p)}=\Psi_k^{(p)}+\sum_{s=1}^m b_{k,s}^{(p)}\phi_s,\tag{6.23}$$

$\Psi_k^{(p)}$ *– ортогональное всем собственным функциям ϕ_q, $q=1,\ldots,m$, в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ решение уравнения*

$$(\mathcal{H}_\alpha^0-\lambda^0)\Psi_k^{(p)}=h_k^{(p)}+\sum_{q=1}^p \Lambda_k^{(q)}\Phi_k^{(p-q)},\tag{6.24}$$

$$h_k^{(p)}=\check{h}_k^{(p)}-\sum_{s=1}^m b_{k,s}^{(p-1)}\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{T}_7+\mathcal{T}_5\mathcal{T}_6\right)\phi_s\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\begin{aligned}\check{h}_k^{(p)}:=&-\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(\tilde{\phi}_k^{(p+1)}+\mathcal{T}_7\Psi_k^{(p-1)}\Big)\,\mathrm{d}\xi\\&-\int\limits_{-\frac12}^{\frac12}\mathcal{T}_5\Big(\tilde{\phi}_k^{(p)}+\check{\phi}_k^{(p)}+\mathcal{T}_6\Psi_k^{(p-1)}\Big)\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

числа $b_{k,s}^{(p)}$ и $\Lambda_k^{(p)}$ определяются равенствами

$$\begin{gathered}\Lambda_k^{(p)}=-(\check{h}_k^{(p)},\phi_k)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}-\sum_{q=2}^{p-1}\Lambda_k^{(q)}b_{k,q}^{(p-q)},\\ b_{k,k}^{(p)}=0,\quad b_{k,s}^{(p)}=\frac{(\check{h}_k^{(p+1)},\phi_s)_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}+\sum\limits_{q=2}^p\Lambda_k^{(q)}b_{k,q}^{(p-q+1)}}{\Lambda_s^{(1)}-\Lambda_k^{(1)}}.\end{gathered}\tag{6.25}$$

Функции $\tilde{\phi}_k^{(p)}$ определяются формулой (6.8) с

$$
\begin{aligned}
F =& \left(\frac{\partial}{\partial\nu^*}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\nu} + \mathcal{T}_5\right)\left(\tilde{\phi}_k^{(p-1)} + \check{\phi}_k^{(p-1)}\right) \\
&- \lambda^0\left(\tilde{\phi}_k^{(p-1)} + \check{\phi}_k^{(p-1)} + \hat{\phi}_k^{(p-1)}\right) + \sum_{q=1}^{p-2}\Lambda_k^{(q)}\phi_k^{(p-q-2)}, \\
g_- =& \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\tilde{\phi}_k^{(p-1)} + \check{\phi}_k^{(p-1)} + \Phi_k^{(p-1)}\right)\Big|_{\xi=-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Функции $\phi_k^{(p)}$ бесконечно дифференцируемы по x', и для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ справедливы принадлежности

$$\frac{\partial^{|\beta|}\phi_k^{(p)}}{\partial x^\beta} \in C^2(\overline{\Omega}) \cap L_\infty(\Omega).$$

Утверждение леммы несложно проверить по индукции, используя вид функций $\phi_k^{(1)}$, $\phi_k^{(2)}$, полученный выше. При этом следует считать, что $\tilde{\phi}_k^{(1)} = \tilde{\phi}_k^{(2)} = \hat{\phi}_k^{(2)} = 0$.

Замечание 6.1. Предположение о различных собственных значениях матрицы L использовалось в лемме 6.2 для вывода формул (6.25). Если такое предположение не выполнено, то это лишь означает, что полного расщепления возмущённых собственных значений на уровне первых поправок не происходит. В этом случае определение членов рядов (6.1), (6.2) также не составляет большого труда. Единственным отличием будет лишь то, что на следующих шагах возникнет матрица, аналогичная L, которая и будет определять нужный выбор собственных функций ϕ_k. Существенных изменений в схеме построения решений задач (6.4) при этом не будет.

Таким образом, независимо от вида собственных значений матрицы L, можно построить формальные асимптотические ряды (6.1), (6.2), такие что, будет выполнено следующее утверждение.

Лемма 6.3. *Пусть N – произвольное натуральное число. Для функций*

$$\phi_k^{(\varepsilon,N)}(x) = \varepsilon^{-1/2}\left(\phi_k(x') + \sum_{p=1}^{N}\varepsilon^p\phi_k^{(p)}(x', x_n\varepsilon^{-1})\right), \quad \lambda_k^{(\varepsilon,N)} = \lambda^0 + \sum_{p=1}^{N-2}\varepsilon^p\Lambda_k^{(p)}$$

выполнены оценки

$$\|\phi_k^{(\varepsilon,N)} - \varepsilon^{-1/2}\phi_k\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon, \quad |\lambda_k^{(\varepsilon,N)} - \lambda^0| \leqslant C\varepsilon, \tag{6.26}$$

$$\|f_k^{(\varepsilon,N)}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{N-1}, \quad f_k^{(\varepsilon,N)} := (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda_k^{(\varepsilon,N)})\phi_k^{(\varepsilon,N)}. \tag{6.27}$$

Здесь C – некоторые константы, не зависящие от ε, но зависящие, вообще говоря, от N, а оценка (6.27) включает в себя также утверждение о принадлежности функции $\phi_k^{(\varepsilon,N)}$ области определения оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$.

7. Асимптотические разложения: обоснование

В данном параграфе мы завершаем доказательство теоремы 2.4 и проводим обоснование формальных асимптотических разложений, построенных в предыдущем параграфе. Вначале мы докажем два вспомогательных утверждения, а потом уже займёмся непосредственно обоснованием.

Лемма 7.1. *Собственные функции ψ_k^ε возмущённого оператора можно выбрать так, что для них будут выполнены соотношения*

$$(\psi_k^\varepsilon, \mathcal{P}\psi_j^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = \delta_{jk}, \quad j,k = 1,\ldots,m. \tag{7.1}$$

Доказательство. Согласно результатам пятого параграфа, для каждой собственной функции возмущённого оператора справедливы равенства (5.16) и (5.19). Умножая собственные функции на подходящие константы, из (5.19) получаем (7.1) для $j = k$. В силу этих соотношений форма $(\,\cdot\,,\mathcal{P}\,\cdot)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$ является скалярным произведением на пространстве собственных функций возмущённого оператора, соответствующие одному и тому же собственному значению. Поэтому эти собственные функции можно выбрать так, что они будут удовлетворять соотношениям (7.1).

Пусть теперь собственные функции ψ_k^ε и ψ_j^ε соответствуют различным собственным значениям λ_k^ε и λ_j^ε. Тогда, учитывая вещественность этих собственных значений, аналогично (5.17), легко проверить, что

$$0 = \big((\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda_k^\varepsilon)\psi_k^\varepsilon, \mathcal{P}\psi_j^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = (\lambda_j^\varepsilon - \lambda_k^\varepsilon)\big(\psi_k^\varepsilon, \mathcal{P}\psi_j^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

откуда вновь следует требуемое равенство (7.1). □

Лемма 7.2. *При λ, лежащих в некоторой малой фиксированной окрестности точки λ^0, и всех достаточно малых ε резольвента $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1}$ представима в виде:*

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\,\cdot\,,\mathcal{P}\psi_k^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda_k^\varepsilon - \lambda}\psi_k^\varepsilon + \mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda), \tag{7.2}$$

где оператор $\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda) : L_2(\Omega^\varepsilon) \to W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ – ограничен равномерно по λ и ε и голоморфен по λ, а функции $\psi_k^{(\varepsilon)}$ выбраны согласно лемме 7.1.

Доказательство. Пусть γ – окружность малого радиуса с центром в точке λ^0, не содержащая никаких других точек спектра оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$. Тогда в силу теоремы 2.3 при достаточно малых ε все собственные значения возмущённого оператора, сходящиеся к λ^0 при $\varepsilon \to +0$, находятся внутри окружности γ и отделены от неё на положительное расстояние. Из теоремы 2.2 теперь следует, что верна сходимость

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda \to -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} \oplus 0\,\mathrm{d}\lambda, \tag{7.3}$$

понимаемая в смысле нормы операторов в $L_2(\Omega^\varepsilon)$. Согласно [35, Гл. III, §6.5], обе части этой сходимости есть проекторы в $L_2(\Omega^\varepsilon)$, причём в силу самосопряжённости оператора $\mathcal{H}_\alpha^0$ и [35, Гл. V, §3.5] выполнено

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma (\mathcal{H}_\alpha^0 - \lambda)^{-1} \oplus 0\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^{-1}(\cdot, \phi_k)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda^0 - \lambda}\phi_k. \tag{7.4}$$

Согласно [35, Гл. I, §4.6] отсюда вытекает, что размерность проектора в левой части (7.3) также равна m для всех достаточно малых ε.

Непосредственно из определения собственной функции следует

$$(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1}\psi_k^\varepsilon = (\lambda_k^\varepsilon - \lambda)^{-1}\psi_k^\varepsilon,$$

а потому с учётом [35, Гл. III, §6.5, урав. (6.36)] имеем:

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon - \lambda)^{-1}\psi_k^\varepsilon\,\mathrm{d}\lambda = \psi_k^\varepsilon.$$

Следовательно, проектор в левой части (7.3) является проектором на конечномерное пространство, натянутое на функции ψ_k^ε, $k = 1, \ldots, m$. Подчеркнём, что, вообще говоря, он не является оператором ортогонального проектирования, так как оператор $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ несамосопряжён. Таким образом,

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda=\sum_{k=1}^m c_k^\varepsilon(\cdot)\psi_k^\varepsilon, \tag{7.5}$$

где $c_k^\varepsilon: L_2(\Omega^\varepsilon)\to\mathbb{C}$ – некоторые функционалы.

Определим вид функционалов c_k^ε. Для произвольной функции $f\in L_2(\Omega^\varepsilon)$ и $\lambda\in\gamma$ аналогично (5.17) выводим

$$(f,\mathcal{P}\psi_k^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=\big((\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)u,\mathcal{P}\psi_k^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=(\lambda_k^\varepsilon-\lambda)(u,\mathcal{P}\psi_k^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)},$$

откуда, из (7.5) и леммы 7.1 получаем

$$c_k^\varepsilon(f)=(f,\mathcal{P}\psi_k^\varepsilon)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}. \tag{7.6}$$

С каждым собственным значением λ_k^ε в смысле [35, Гл. III, §6.5] связан квазинильпотентный оператор, который имеет вид:

$$-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda_k^\varepsilon)\int\limits_{\gamma_k^\varepsilon}(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Здесь γ_k^ε – малая окружность с центром в точке λ_k^ε, не содержащая никаких других собственных значений возмущённого оператора, отличных от λ_k^ε. Так как интеграл $-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma_k^\varepsilon}(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda$ является частью соответствующего проектора из (7.3), то в силу (7.5), (7.6) вышеупомянутый квазинильпотентный оператор равен нулю. Отсюда, из (7.5), (7.6) и [35, Гл. III, §6.5, урав. (6.35)] вытекает представление (7.2), где $\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda)$ – ограниченный в $L_2(\Omega^\varepsilon)$ оператор, голоморфный по λ. Остаётся лишь доказать, что он равномерно ограничен по ε и λ и голоморфен по λ как оператор из $L_2(\Omega^\varepsilon)$ в $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$.

Для произвольного $f\in L_2(\Omega^\varepsilon)$ в силу оценок (3.11) норма $\|\nabla(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)^{-1}f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$ равномерно оценивается через нормы $\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$ и $\|(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)^{-1}f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}$. С помощью этой оценки несложно проверить, что оператор $\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda)$ голоморфен по λ и как оператор из $L_2(\Omega^\varepsilon)$ в $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$.

В силу теоремы 2.2 при $\lambda\in\gamma$ оператор $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon-\lambda)^{-1}$ сходится к $(\mathcal{H}_\alpha^0-\lambda)^{-1}\oplus 0$ при $\varepsilon\to+0$. Выражая оператор $\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda)$ из (7.2), при $f\in L_2(\Omega^\varepsilon)$, $\lambda\in\gamma$ и достаточно малых ε получаем равномерную оценку

$$\|\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda)f\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\|f\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{7.7}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от f, λ и достаточно малых ε. В силу принципа максимума модуля для голоморфных функций оценка (7.7) верна и для λ, лежащих внутри окружности γ. Лемма доказана. □

Переходим непосредственно к обоснованию. Из лемм 6.3, 7.2 следует:

$$\phi_k^{(\varepsilon,N)}=\sum_{q=1}^m\frac{\big(f_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\psi_q^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda_q^\varepsilon-\lambda_k^{(\varepsilon,N)}}\psi_q^\varepsilon+\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda_k^{(\varepsilon,N)})f_k^{(\varepsilon,N)},\quad k=1,\dots,m. \tag{7.8}$$

Используя лемму 7.1, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\phi_k^{(\varepsilon,N)}-\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda_k^{(\varepsilon,N)})f_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\big(\phi_j^{(\varepsilon,N)}-\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda_j^{(\varepsilon,N)})f_j^{(\varepsilon,N)}\big)\Big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\\
&\qquad=\sum_{q=1}^m\frac{\big(f_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\psi_q^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda_q^\varepsilon-\lambda_k^{(\varepsilon,N)}}\overline{\left(\frac{\big(f_j^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\psi_q^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda_q^\varepsilon-\lambda_j^{(\varepsilon,N)}}\right)}
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

$$
\big(\phi_k^{(\varepsilon,N)}-\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda_k^{(\varepsilon,N)})f_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\psi_j^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=\frac{\big(f_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\psi_j^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda_j^\varepsilon-\lambda_k^{(\varepsilon,N)}}. \tag{7.10}
$$

Из лемм 6.3, 7.2 вытекает сходимость

$$
\|\mathcal{T}_8^\varepsilon(\lambda_k^{(\varepsilon,N)})f_k^{(\varepsilon,N)}\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}\to 0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to+0,
$$

а из оценок (6.26) – соотношения

$$
\begin{aligned}
&\big(\phi_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\phi_j^{(\varepsilon,N)}\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}=\delta_{kj}+o(1),\quad\varepsilon\to+0,\\
&|F_{kj}^\varepsilon|\leqslant C,\quad F_{kj}^\varepsilon:=\frac{\big(f_k^{(\varepsilon,N)},\mathcal{P}\psi_j^\varepsilon\big)_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\lambda_j^\varepsilon-\lambda_k^{(\varepsilon,N)}},
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

где константа C не зависит от ε, k, j. Отсюда следует, что определитель матрицы, составленный из левых частей равенств (7.9), стремится к единице при $\varepsilon\to+0$. С другой стороны, матрицу, составленную из правых частей равенств (7.9), можно представить в виде произведения $\mathrm{F}^\varepsilon(\mathrm{F}^\varepsilon)^*$, где F^ε – матрица с элементами F_{kj}^ε. Таким образом, получаем:

$$
|\det\mathrm{F}^\varepsilon|\to 1\quad\text{при}\quad\varepsilon\to+0.
$$

Следовательно, для каждого достаточно малого ε существует перестановка $q_1,\ldots,q_m$, такая что

$$
\left|\prod_{k=1}^m F_{kq_k}^\varepsilon\right|\geqslant\frac{1}{m!},
$$

откуда и из (7.11) выводим:

$$
|F_{kq_k}^\varepsilon|\geqslant\frac{1}{C^{m-1}m!}.
$$

Подставляя сюда определение $F_{kq_k}^\varepsilon$ из (7.11) и используя оценки (6.27), приходим к равенствам

$$
\lambda_{kq_k}^\varepsilon-\lambda_k^{(\varepsilon,N)}=\mathcal{O}(\varepsilon^{N-1}),
$$

которые доказывают асимптотики (2.21) для собственных значений возмущённого оператора после подходящего их упорядочивания.

Переходим к обоснованию асимптотик собственных функций. Пусть выполнено условие (2.22). Тогда из асимптотик (2.21) следует, что

$$
|\lambda_j^\varepsilon-\lambda_k^{(\varepsilon,N)}|\geqslant C\varepsilon^r
$$

при $N>r$, а потому в силу (6.27) выполнено

$$
|F_{kj}^\varepsilon|\leqslant C\varepsilon^{N-r-1},
$$

где C – некоторая константа, не зависящая от ε, k, j. Подставим последние оценки и (6.27) в равенство (7.8) и перенесём член $F_{kk}^\varepsilon\psi_k^\varepsilon$ в левую часть. Тогда получим:

$$
\|\phi_k^{(\varepsilon,N)}-F_{kk}^\varepsilon\psi_k^\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)}\leqslant C\varepsilon^{N-r-1}.
$$

Так как F^{ε}_{kk} – число, то $F^{\varepsilon}_{kk}\psi^{\varepsilon}_{k}$ – собственная функция, соответствующая $\lambda^{\varepsilon}_{k}$. Поэтому последняя оценка доказывает асимптотики (2.23) для собственных функций возмущённого оператора. Теорема 2.4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.M. Bender, S. Boettcher *Real spectra in non-hermitian hamiltonians having PT symmetry* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. No. 24. P. 5243–5246.
2. A. Mostafazadeh *Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian* // J. Math. Phys. 2002. V. 43. No. 1. P. 205–214.
3. A. Mostafazadeh *Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry II: A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum* // J. Math. Phys. 2002. V. 43. No. 5. P. 2814–2816.
4. A. Mostafazadeh *Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry III: Equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries* // J. Math. Phys. 2002. V. 43. No. 8. P. 3944–3951.
5. A. Mostafazadeh *On the Pseudo-Hermiticity of a Class of PT-Symmetric Hamiltonians in One Dimension* // Mod. Phys. Lett. A. 2002. V. 17. No. 30. P. 1973–1977.
6. M. Znojil *Exact solution for Morse oscillator in PT-symmetric quantum mechanics* // Phys. Lett. A. 1999. V. 264. No. 2. P. 108–111.
7. M. Znojil *Non-Hermitian matrix description of the PT-symmetric anharmonic oscillators* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. No. 42. P. 7419–7428.
8. M. Znojil *PT-symmetric harmonic oscillators* // Phys. Lett. A. 1999. V. 259. No. 3-4. P. 220–223.
9. G. Levai and M. Znojil *Systematic search for $\mathcal{PT}$-symmetric potentials with real energy spectra* // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V. 33. No. 40. P. 7165–7180.
10. C.M. Bender *Making sense of non-Hermitian Hamiltionians* // Rep. Prog. Phys. 2007. V. 70. No. 6. P. 947–1018.
11. E. Caliceti, F. Cannata, S. Graffi *Perturbation theory of $\mathcal{PT}$-symmetric Hamiltonians* // J. Phys. A. 2006. V. 39. No. 32. P. 10019–10027.
12. E. Caliceti, S. Graffi, J. Sjöstrand *Spectra of $\mathcal{PT}$-symmetric operators and perturbation theory* // J. Phys. A. 2005. V. 38. No. 1. P. 185–193.
13. E. Caliceti, F. Cannata, S. Graffi *$\mathcal{PT}$-symmetric schrödinger operators: reality of the perturbed eigenvalues* // SIGMA. 2010. V. 6. id 009. 8pp.
14. P. Dorey, C. Dunning, and R. Tateo *Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in $\mathcal{PT}$-symmetric quantum mechanics* // J. Phys. A. 2001. V. 34. No. 28. P. 5679–5704.
15. D. Krejčiřík, H. Bíla and M. Znojil *Closed formula for the metric in the Hilbert space of a $\mathcal{PT}$-symmetric model* // J. Phys. A. 2006. V. 39. No. 32. P. 10143–10153.
16. H. Langer and Ch. Tretter *A Krein space approach to PT-symmetry* // Czech. J. Phys. 2004. V. 54. No. 10. P. 1113–1120.
17. K.C. Shin *On the reality of the eigenvalues for a class of $\mathcal{PT}$-symmetric oscillators* // Commun. Math. Phys. 2002. V. 220. No. 3. P. 543–564.
18. M. Znojil *$\mathcal{PT}$-symmetric square well* // Phys. Lett. A. 2001. V. 285. No. 1,2. P. 7-10.
19. D. Borisov, D. Krejcirik *$\mathcal{PT}$-symmetric waveguide* // Integr. Equat. Oper. Th. 2008. V. 62. No. 4. P. 489–515.
20. D. Krejčiřík and M. Tater *Non-Hermitian spectral effects in a PT-symmetric waveguide* // J. Phys. A. 2008. V. 41. No. 24. id 244013.
21. D. Krejčiřík and P. Siegl *$\mathcal{PT}$-symmetric models in curved manifolds* // J. Phys. A. 2010. V. 43. No. 48. id485204.
22. Борисов Д.И. *О $\mathcal{PT}$-симметричном волноводе с парой малых отверстий* // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2. С. 22–37.
23. D. Borisov, D. Krejčiřík *The effective Hamiltonian for thin layers with non-Hermitian Robin-type boundary conditions* // Asympt. Anal. 2012. V. 76. No. 1. P. 49–59.
24. Назаров С.А. *Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра* // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. No. 5. С. 1086–1101.
25. Гадыльшин Р.Р. *О локальных возмущениях оператора Шрёдингера на оси* // Теор. и матем. физика. 2002. Т. 132. No. 1. С. 97–104.

26. Борисов Д.И. *Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном* // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 4. С. 3–32.
27. Назаров С.А. *Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки.* Новосибирск: Научная книга (ИДМИ). 2002. 406 с.
28. D. Borisov and P. Freitas *Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains* // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2009. V. 26. No. 2. P. 547–560.
29. D. Borisov, and P. Freitas *Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in Rd* // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. No. 3. P. 893–912.
30. D. Borisov, and G. Cardone *Complete asymptotic expansions for the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in thin three-dimensional rods* // ESAIM. Contr. Op. Ca. Va. 2011. V. 17. No. 3. P. 887–908.
31. G. Cardone, A. Corbo-Esposito, G. Panasenko *Asymptotic partial decomposition for diffusion with sorption in thin structures* // Nonlin. Anal. 2006. V. 65. No. 1. P. 79–106.
32. G. Panasenko, E. Perez *Asymptotic partial decomposition of domain for spectral problems in rod structures* // J. Math. Pures Appl. 2007. V. 87. No. 1. P. 1–36.
33. Борисов Д.И. *Асимптотики и оценки собственных элементов Лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий* // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. No. 6. С. 23–70.
34. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука. 1974. 408 с.
35. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1982. 740 с.
36. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1976. 392 с.
37. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 577 с.
38. D. Borisov *Asymptotic behaviour of the spectrum of a waveguide with distant perturbation* // Math. Phys. Anal. Geom. 2007. V. 10. No. 2. P. 155–196.

Денис Иванович Борисов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `BorisovDI@yandex.ru`