ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 3-11.

УДК 517.9

ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦИИ С ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ

Р.А. АТНАГУЛОВА, О.В. СОКОЛОВА

Аннотация. В работе построено обобщение метода факторизации на случай, когда $\mathcal{G}$ — конечномерная алгебра Ли, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus M \oplus N$ (прямая сумма векторных подпространств), где $\mathcal{G}_0$ — подалгебра в $\mathcal{G}$, а M, N — $\mathcal{G}_0$-модули, $\mathcal{G}_0 + M$, $\mathcal{G}_0 + N$ — подалгебры в $\mathcal{G}$. В частности, в эту конструкцию включается случай, когда $\mathcal{G}$ — $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли. С помощью этого обобщения построенны конкретные системы типа волчков, связанные с алгеброй $so(3,1)$. Согласно общей конструкции, такие системы сводятся к решению системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для них найден полный набор первых полиномиальных интегралов и инфинитезимальных симметрий.

Ключевые слова: метод факторизации, алгебры Ли, интегрируемые динамические системы.

Mathematics Subject Classification: 17B80

1. Введение

Классический метод факторизации [1, 2, 3, 4] (другое название: схема Адлера-Константа-Саймса) позволяет проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего специального вида:

$$U_t = [U_+, U], \quad U(0) = U_0. \tag{1}$$

Здесь $U(t)$ — функция со значениями в алгебре Ли $\mathcal{G}$, являющейся прямой суммой векторных пространств $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$, каждое из которых – подалгебра в $\mathcal{G}$. Через U_+ обозначена проекция U на $\mathcal{G}_+$. Можно считать для простоты, что $\mathcal{G}$ вложено в алгебру матриц.

Решение задачи (1) задается формулой

$$U(t) = A(t)U_0A^{-1}(t). \tag{2}$$

В формуле (2) матрица $A(t)$ определяется как решение задачи факторизации

$$A^{-1}B = \exp(-U_0t), \quad A \in G_+, \quad B \in G_-, \tag{3}$$

где G_+ и G_- — группы Ли алгебр $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$. Если $\mathcal{G}_-$ — идеал, задача факторизации решается явно: $A = \exp((U_0)_+t)$, $B = A\exp(-U_0t)$. В случае, если G_+ и G_- — алгебраические группы, условия $A \in G_+$ и $A\exp(-U_0t) \in G_-$ представляют собой систему алгебраических уравнений, из которой (при t близких к нулю) матрица A находится однозначно.

В работе [4] было показано, что классическая задача факторизации может быть сведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Кроме того, в работе [4] метод факторизации был обобщен на случай

$$\mathcal{G} = V_1 \oplus V_2, \tag{4}$$

R.A. Atnagulova, O.V. Sokolova, Factorization problem with intersection.

Поступила 2 сентября 2013 г.

где V_1, V_2 — некоторые векторные подпространства, принадлежащие соответственно подалгебрам $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$. Было показано, что если

$$[\mathcal{G}_+ \cap \mathcal{G}_-,\, V_i] \subset V_i, \qquad i = 1, 2, \tag{5}$$

то интегрирование уравнения (1), в котором «+» означает проецирование на V_1 параллельно V_2, также может быть сведено к решению системы линейных ОДУ с переменными коэффициентами.

Напомним конструкцию Голубчика-Соколова. В работе [4] авторы рассматривали задачу факторизации, где фигурируют правые логарифмические производные от A и B:

$$A^{-1}B = Z(t), \quad A_tA^{-1} \in V_1, \quad B_tB^{-1} \in V_2, \quad Z(0) = A(0) = B(0) = E, \tag{6}$$

а V_i – произвольные векторные подпространства, удовлетворяющие (4). Пусть $U(t) = A(t)q(t)A^{-1}(t)$, где $q(t) = -Z_tZ^{-1}$. Можно увидеть, что эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$U_t = [U_+, U] + Aq_tA^{-1}. \tag{7}$$

Заметим, что если положить $Z(t) = \exp(-U_0t)$, то $q(t) = U_0$, $q_t = 0$ и уравнение (7) совпадает с (1). Таким образом, решение задачи факторизации связано с решением нелинейного дифференциального уравнения (1).

Далее рассматривалась следующая задача факторизации:

$$\alpha^{-1}\beta = Z(t), \quad \alpha^{-1}\alpha_t \in V_1, \quad \beta^{-1}\beta_t \in V_2, \quad Z(0) = \alpha(0) = \beta(0) = E, \tag{8}$$

в которой обе фигурирующие логарифмические производные являются левыми. Эта задача напрямую не связана с уравнениями типа (1), зато может быть сведена к линейному уравнению с переменными коэффициентами. А именно, в работе [4] рассматривалось линейное отображение $L(t) : V_1 \to V_1$, заданное формулой

$$L(t)(v) = (Z^{-1}(t)vZ(t))_+.$$

Поскольку $L(0)$ — тождественное отображение, $L(t)$ обратимо при малых t. Далее в работе доказывалось, что решение α линейного уравнения

$$\alpha_t = -\alpha L^{-1}(t)((Z^{-1}Z_t)_+), \qquad \alpha(0) = E, \tag{9}$$

и функция β, заданная следующей формулой

$$\beta = \alpha Z(t), \tag{10}$$

являются единственным решением задачи факторизации (8).

Завершающий шаг конструкции состоит в том, что при дополнительном условии (5) устанавливается связь между двумя задачами факторизации. А именно, пусть $V_1 \subset \mathcal{G}_+$, $V_2 \subset \mathcal{G}_-$, где $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$ подалгебры Ли алгебры $\mathcal{G}$ такие, что $\mathcal{G}_+ \cap \mathcal{G}_- = \mathcal{G}_0 \neq \{0\}$. Тогда решения задач (6) и (8) удовлетворяют одной и той же задаче факторизации:

$$A^{-1}B = Z(t), \quad A \in G_+, \quad B \in G_-, \quad A(0) = B(0) = E, \tag{11}$$

где G_+ и G_- — группы Ли алгебр $\mathcal{G}_+$ и $\mathcal{G}_-$. Поскольку $\mathcal{G}_0 \neq \{0\}$, то решение задачи (11) неединственно. Пусть α, β – решение задачи факторизации (8). Так как оно является и решением задачи (11), то все остальные решения задачи (11) можно получить из соотношения

$$A = H\alpha, \quad B = H\beta, \quad H(0) = E, \tag{12}$$

где H – произвольный элемент группы Ли G_0 алгебры Ли $\mathcal{G}_0$.

В работе [4] было показано следующее: для того чтобы A, B удовлетворяли задаче факторизации (6), H должно быть решением следующего линейного уравнения:

$$H_t = -H((\alpha_t\alpha^{-1})_- + (\beta_t\beta^{-1})_+), \quad H(0) = E. \tag{13}$$

Таким образом, решив уравнение (9) на α, мы можем найти функцию β из соотношения (10). Далее, решив уравнение (13), мы можем из (12) найти решение A, B задачи факторизации (6). На последнем шаге мы можем выписать решение уравнения (7), используя формулу (2).

В большинстве работ, посвященных задаче факторизации, рассматривается случай, когда алгебра $\mathcal{G}$ раскладывается в сумму двух подпространств. В частности, в работе [4] И. З. Голубчик и В. В. Соколов построили схему для такого случая. Цель данной работы — обобщить их конструкцию на случай, когда алгебра $\mathcal{G}$ является прямой суммой трех подпространств. Такое обобщение позволит решать методом задачи факторизации более широкий класс интегрируемых систем ОДУ.

В §2 данной работы построено обобщение метода факторизации с пересечением на случай, когда $\mathcal{G}$ — конечномерная алгебра Ли, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus M \oplus N$ (прямая сумма векторных подпространств), где $\mathcal{G}_0$ — подалгебра в $\mathcal{G}$, а M, N — $\mathcal{G}_0$-модули, $\mathcal{G}_0 + M$, $\mathcal{G}_0 + N$ — подалгебры в $\mathcal{G}$. В эту конструкцию включается важный частный случай, когда $\mathcal{G}$ является градуированной алгеброй Ли.

В §3 построены некоторые динамические системы типа волчков, связанные с алгебрами Ли $sl(2)$ и $so(3,1)$. Согласно общей схеме, эти системы могут быть сведены к линейным системам ОДУ с переменными коэффициентами. Для всех этих систем найдены полиномиальные первые интегралы и инфинитезимальные симметрии. Показано, что системы могут быть проинтегрированы в квадратурах с помощью алгоритма Ли. Однако они не удовлетворяют тесту Пенлеве, поскольку обладают подвижными точками ветвления.

2. Основная конструкция

Пусть имеется разложение

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus M \oplus N$$

конечномерной алгебры Ли $\mathcal{G}$ над $\mathbb{R}$ в прямую сумму (как векторных подпространств) подалгебры Ли $\mathcal{G}_0$ и двух векторных подпространств M и N, таких, что

- M, N – $\mathcal{G}_0$-модули;
- $\mathcal{G}_0 + M$, $\mathcal{G}_0 + N$ – подалгебры в $\mathcal{G}$.

Теорема. *Пусть линейный оператор R задается формулой*

$$R(q) = \alpha_{-1} q^{-1} + \alpha_0 q^0 + \alpha_1 q^1, \tag{14}$$

где $q = q^{-1} + q^0 + q^1$, $q^{-1} \in N$, $q^0 \in \mathcal{G}_0$, $q^1 \in M$, $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$. Тогда уравнение

$$q_t = [R(q), q], \quad q|_{t=0} = q_0, \tag{15}$$

сводится с помощью конструкции Голубчика-Соколова к системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (см. Введение).

Доказательство. Применим конструкцию из статьи [4]. Для этого возьмем в качестве $\bar{\mathcal{G}}$ прямую сумму трех экземпляров алгебры $\mathcal{G}$, т.е.

$$\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}.$$

В качестве $\bar{\mathcal{G}}_+$ возьмем диагональную подалгебру алгебры $\bar{\mathcal{G}}$:

$$\bar{\mathcal{G}}_+ = \{(a, a, a) |\, a \in \mathcal{G}\},$$

а в качестве $\bar{\mathcal{G}}_-$ следующую подалгебру:

$$\bar{\mathcal{G}}_- = \{(a, b, c) |\, a \in \mathcal{G}_0 + N, b \in \mathcal{G}_0 + M, c \in \mathcal{G}\}.$$

Рассмотрим векторное подпространство

$$\bar{M} = \{(a, b, c) |\, a \in \mathcal{G}_0 + N, b \in \mathcal{G}_0 + M, c \in N + M\}.$$

Тогда для $\bar{\mathcal{G}}$ и $\bar{\mathcal{G}}_+, \bar{M}$ выполнено условие (4), т.е. $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_+ \oplus \bar{M}$. Выполнение условия (5) для подалгебры $\bar{\mathcal{G}}_+$ очевидно. А для $\bar{M}$ легко проверить, что

$$[(\bar{\mathcal{G}}_+ \cap \bar{\mathcal{G}}_-), \bar{M}] \subset \bar{M}.$$

Таким образом, из работы [4] следует, что уравнение

$$\bar{q}_t = [\bar{q}_+, \bar{q}], \quad \bar{q}|_{t=0} = \bar{q}_0, \tag{16}$$

где $\bar{q} \in \bar{\mathcal{G}}$, $\bar{q}_+$ — проекция $\bar{q}$ на $\bar{\mathcal{G}}_+$ параллельно $\bar{M}$, сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Для завершения доказательства предложения остается взять $\bar{q} = (\alpha_1 q, \alpha_{-1} q, \alpha_0 q)$, где $q \in \mathcal{G}$. Заметим, что в данном случае $\bar{q}_+ = (R(q), R(q), R(q))$, где оператор R задается формулой (14). Теперь видно, что уравнение (16) для каждой компоненты имеет вид $q_t = [R(q), q]$, что совпадает с уравнением (15). □

Следствие 1. *Пусть* $\mathcal{G} = \bigoplus_{i=-k}^{k} \mathcal{G}_i$ *—* $\mathbb{Z}$*-градуированная алгебра Ли и* $N = \bigoplus_{i=-k}^{-1} \mathcal{G}_i$, $M = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{G}_i$. *Тогда выполнены все условия теоремы, и уравнение*

$$q_t = \left[\alpha_{-1} \sum_{i=-k}^{-1} q_i + \alpha_0 q_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^{k} q_i,\ q\right] \tag{17}$$

сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Замечание 1. Из формулы (15) следует, что следы q^i, $i = 1, 2, \ldots$, являются полиномиальными первыми интегралами для динамической системы (15). Поскольку q не зависит от спектрального параметра, то количество этих интегралов не достаточно для полной интегрируемости (15).

Замечание 2. Для произвольного элемента $g \in \mathcal{G}$, такого, что $[g, \mathcal{G}_0] \subseteq \mathcal{G}_0, [g, M] \subseteq M, [g, N] \subseteq N$, выполнено $[g, R(q)] = R([g, q])$. Следовательно, $q_\tau = [g, q]$ является линейной симметрией для уравнения (15).

3. Примеры

Приведем два важных примера, вытекающих из следствия 1.

Пример 1. Рассмотрим на $\mathcal{G} = \mathfrak{sl}_2$ следующую градуировку:

$$\mathcal{G}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда уравнение (17) может быть переписано в виде системы

$$\begin{cases} w_t &= (\alpha_1 - \alpha_{-1})\, uv, \\ u_t &= 2(\alpha_0 - \alpha_1)\, uw, \\ v_t &= 2(\alpha_{-1} - \alpha_0)\, vw. \end{cases} \tag{18}$$

Данная система обладает линейной инфинитезимальной симметрией

$$\begin{cases} w_\tau &= 0, \\ u_\tau &= u, \\ v_\tau &= -v, \end{cases}$$

а также ожидаемым (см. замечание 1) полиномиальным первым интегралом

$$H_1 = \frac{1}{2} Tr(q^2) = uv + w^2.$$

Заметим, что инфинитезимальная симметрия порождается преобразованиями $u \to ku$, $v \to k^{-1}v$, $w \to w$.

Систему (18) можно легко проинтегрировать разными способами. Продемонстрируем алгоритм Ли на этом простом примере. Чтобы применить этот алгоритм для системы ОДУ от n переменных, необходимо иметь в сумме n симметрий (включая исходную систему) и первых интегралов, таких, что: 1) все симметрии коммутируют друг с другом; 2) все первые интегралы являются первыми интегралами для каждой симметрии. В нашем случае мы имеем две симметрии и один интеграл H_1. Легко проверить, что $\frac{dH_1}{d\tau} = 0$. Используя тождество $H_1 = C$, исключаем w и получаем

$$\begin{cases} u_t &= 2(\alpha_0 - \alpha_1)\, u\sqrt{C - uv}, \\ v_t &= 2(\alpha_{-1} - \alpha_0)\, v\sqrt{C - uv}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_\tau &= u, \\ v_\tau &= -v. \end{cases} \tag{19}$$

Далее мы ищем замену переменных $\bar{u} = \varphi(u, v)$, $\bar{v} = \psi(u, v)$ такую, что

$$\begin{cases} \varphi_t &= 1, \\ \psi_t &= 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_\tau &= 0, \\ \psi_\tau &= 1. \end{cases}$$

Легко заметить, что функции φ, ψ удовлетворяют следующим переопределенным системам уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} 2((\alpha_0 - \alpha_1)\, \varphi_u u + (\alpha_{-1} - \alpha_0)\, \varphi_v v)\sqrt{C - uv} = 1, \\ \varphi_u u - \varphi_v v = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2((\alpha_0 - \alpha_1)\psi_u u + (\alpha_{-1} - \alpha_0)\psi_v v)\sqrt{C - uv} = 0, \\ \psi_u u - \psi_v v = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим все частные производные φ и ψ. Существование функций φ и ψ следует из совместности систем (19). Интегрируя, получаем следующий ответ:

$$\varphi(u, v) = \frac{\operatorname{arth}\sqrt{1 - \frac{uv}{C}}}{(\alpha_1 - \alpha_{-1})\sqrt{C}} + k_1,$$

$$\psi(u, v) = \frac{\alpha_0 - \alpha_{-1}}{\alpha_1 - \alpha_{-1}} \ln{(\alpha_1 - \alpha_{-1})u} + \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_{-1}} \ln{(\alpha_1 - \alpha_{-1})v} + k_2.$$

Функции $u(t)$ и $v(t)$ находим из условия $\psi(u, v) = 0$, $\varphi(u, v) = t$. Получаем решение исходной системы:

$$u = zk_3\ \left(\operatorname{ch} z(\alpha_1 - \alpha_{-1})(t - k_1)\right)^{\frac{2\,(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_1 - \alpha_{-1}}},$$

$$v = \frac{z}{k_3}\ \left(\operatorname{ch} z(\alpha_1 - \alpha_{-1})(t - k_1)\right)^{\frac{2\,(\alpha_0 - \alpha_{-1})}{\alpha_{-1} - \alpha_1}},$$

$$w = z\ \operatorname{th} z(\alpha_1 - \alpha_{-1})(t - k_1),$$

где z, k_1, k_3 — произвольные постоянные. При этом $z^2 = C$, а k_3 связано с k_1, k_2, C довольно громоздкой формулой, которую мы здесь не приводим. Из формул для решения видно, что при общих значениях постоянных α_i функции $u(t)$ и $v(t)$ имеют в комплексной плоскости подвижные точки ветвления. □

Ниже мы приводим не столь тривиальные примеры, связанные с алгеброй Ли $so(3,1)$. Интегрируемые гамильтоновы динамические системы с квадратичной правой частью, связанные с полупростыми алгебрами Ли, рассматривались в работах [5, 6, 7]. С точки зрения приложений одной из наиболее интересных является алгебра $so(4)$ или комплексно-изоморфная ей $so(3,1)$. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с этими алгебрами, изучались в [8, 9, 10]. Мы приводим два новых примера, связанных с алгеброй $so(3,1)$. Системы из этих примеров, видимо, не являются гамильтоновыми. Мы нашли для них достаточное количество первых интегралов и инфинитезимальных симметрий, чтобы утверждать, что они локально интегрируемы с помощью алгоритма Ли (см. пример 1).

Пример 2. Возьмем $\mathcal{G} = \{A \in \mathbb{R}_{4\times 4} | \, A^* = -A\}$, где инволюция задается формулой $A^* = TA^tT^{-1}$, $T = e_{11} + e_{22} + e_{34} + e_{43}$, индекс t означает транспонирование, а e_{ij} – матричные единицы. Если выбрать $T = e_{11} + e_{22} + e_{33} - e_{44}$, то условие кососимметричности относительно инволюции задаст алгебру $so(3,1)$. Изоморфизм между $\mathcal{G}$ и $so(3,1)$ задается формулой $\bar{q} = B^{-1}\, q\, B$, где $q \in \mathcal{G}$, $\bar{q} \in so(3,1)$, а матрица B равна

$$e_{11} + e_{22} + \frac{\sqrt{2}}{2}(e_{33} + e_{34} + e_{43} - e_{44}).$$

На алгебре $\mathcal{G}$ можно задать 3-градуировку. Действительно, общий элемент алгебры имеет вид:

$$q = \begin{pmatrix} 0 & w_1 & u_1 & v_1 \\ -w_1 & 0 & u_2 & v_2 \\ -v_1 & -v_2 & w_2 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & 0 & -w_2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что разложение алгебры $\mathcal{G}$ в сумму компонент

$$\begin{gathered} \mathcal{G}_0 = \{w_1(e_{12} - e_{21}) + w_2(e_{33} - e_{44})\}\,, \\ \mathcal{G}_1 = \{u_1(e_{13} - e_{41}) + u_2(e_{23} - e_{42})\}\,, \\ \mathcal{G}_{-1} = \{v_1(e_{14} - e_{31}) + v_2(e_{24} - e_{32})\} \end{gathered}$$

снабжает $\mathcal{G}$ структурой 3-градуированной алгебры Ли.

Уравнение (17) в данном случае можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} w_{1t} &= (\alpha_1 - \alpha_{-1})\,(u_2v_1 - u_1v_2), \\ u_{1t} &= (\alpha_0 - \alpha_1)\,(u_2w_1 - u_1w_2), \\ v_{1t} &= (\alpha_0 - \alpha_{-1})\,(v_2w_1 + v_1w_2), \\ w_{2t} &= (\alpha_1 - \alpha_{-1})\,(u_1v_1 + u_2v_2), \\ u_{2t} &= (\alpha_1 - \alpha_0)\,(u_1w_1 + u_2w_2), \\ v_{2t} &= (\alpha_{-1} - \alpha_0)\,(v_1w_1 - v_2w_2). \end{cases}$$

Данная система обладает следующими линейными и квадратичной инфинитезимальными симметриями:

$$\begin{cases} w_{1\tau_1} &= 0, \\ u_{1\tau_1} &= -u_1, \\ v_{1\tau_1} &= v_1, \\ w_{2\tau_1} &= 0, \\ u_{2\tau_1} &= -u_2, \\ v_{2\tau_1} &= v_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{1\tau_2} &= 0, \\ u_{1\tau_2} &= u_2, \\ v_{1\tau_2} &= v_2, \\ w_{2\tau_2} &= 0, \\ u_{2\tau_2} &= -u_1, \\ v_{2\tau_2} &= -v_1. \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{1\tau_3} &= (-\alpha_1 + \alpha_{-1})\,(u_1v_1 + u_2v_2), \\ u_{1\tau_3} &= (-\alpha_0 + \alpha_1)\,(u_1w_1 + u_2w_2), \\ v_{1\tau_3} &= (\alpha_0 - \alpha_{-1})\,(v_1w_1 - v_2w_2), \\ w_{2\tau_3} &= (-\alpha_1 + \alpha_{-1})\,(u_1v_2 - u_2v_1), \\ u_{2\tau_3} &= (\alpha_1 - \alpha_0)\,(u_2w_1 - u_1w_2), \\ v_{2\tau_3} &= (\alpha_0 - \alpha_{-1})\,(v_2w_1 + v_1w_2). \end{cases}$$

Также система имеет два полиномиальных первых интеграла второй степени:

$$I_1 = w_1w_2 + u_1v_2 - v_1u_2, \qquad I_2 = w_1^2 + 2u_1v_1 - w_2^2 + 2u_2v_2.$$

Следы степеней q выражаются через данные два интеграла. Легко проверить, что все симметрии коммутируют друг с другом и что I_1, I_2 являются первыми интегралами для всех симметрий. Таким образом, алгоритм Ли также применим к данной системе. □

Следующий пример отличается от предыдущих тем, что алгебра $\mathcal{G}$ не является $\mathbb{Z}$-градуированной.

Пример 3. Пусть $\mathcal{G}$ — такая же алгебра, что и в примере 2. Рассмотрим

$$\mathcal{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & w_1 & 0 & 0 \\ -w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kw_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -kw_1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & lw_2 & 0 & v_1 \\ -lw_2 & 0 & 0 & v_2 \\ -v_1 & -v_2 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где k и l — параметры, такие, что $kl \neq 1$. Ясно, что выполнены все условия теоремы. Тогда уравнение (15) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} w_{1t} & = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_{-1}}{1 - kl} \left(-lu_1v_1 + u_2v_1 - u_1v_2 - lu_2v_2\right), \\ u_{1t} & = (\alpha_1 - \alpha_0)\,(ku_1 - u_2)w_1 + (\alpha_1 - \alpha_{-1})(u_1 - lu_2)w_2, \\ v_{1t} & = (\alpha_0 - \alpha_{-1})\,(kv_1 + v_2)w_1, \\ w_{2t} & = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_{-1}}{1 - kl} \left(u_1v_1 - ku_2v_1 + ku_1v_2 + u_2v_2\right), \\ u_{2t} & = (\alpha_1 - \alpha_0)\,(u_1 + ku_2)w_1 + (\alpha_1 - \alpha_{-1})(lu_1 + u_2)w_2, \\ v_{2t} & = (\alpha_{-1} - \alpha_0)\,(v_1 - kv_2)w_1. \end{cases}$$

Данная система обладает точно такими же линейными инфинитезимальными симметриями, что и система в примере 2. Также у нее существует квадратичная симметрия:

$$
\begin{cases}
w_{1\tau} &= -\dfrac{(l^2+1)(u_1v_1 - ku_2v_1 + ku_1v_2 + u_2v_2)}{kl-1}, \\[2ex]
u_{1\tau} &= (k^2+1)(lu_2w_1 - u_1w_1) - \\
&-\dfrac{k\left(\alpha_0+\alpha_1-2\alpha_{-1}\right)+2l\left(\alpha_1-\alpha_{-1}\right)+kl^2\left(\alpha_0-\alpha_1\right)}{\alpha_1-\alpha_{-1}}u_1w_2 + \\
&+\dfrac{\alpha_0-\alpha_1+2kl\left(\alpha_1-\alpha_{-1}\right)+l^2\left(\alpha_0+\alpha_1-2\alpha_{-1}\right)}{\alpha_1-\alpha_{-1}}u_2w_2, \\[2ex]
v_{1\tau} &= -\dfrac{(\alpha_{-1}-\alpha_0)(l^2+1)(kv_1+v_2)w_2}{\alpha_1-\alpha_{-1}}, \\[2ex]
w_{2\tau} &= \dfrac{k^2+2kl-1}{kl-1}(u_1v_2 - u_2v_1) - \dfrac{k^2l-2k-l}{kl-1}(u_1v_1+u_2v_2), \\[2ex]
u_{2\tau} &= -(k^2+1)(lu_1w_1 + u_2w_1) - \\
&-\dfrac{\alpha_0-\alpha_1+2kl\left(\alpha_1-\alpha_{-1}\right)+l^2\left(\alpha_0+\alpha_1-2\alpha_{-1}\right)}{\alpha_1-\alpha_{-1}}u_1w_2 - \\
&-\dfrac{k(\alpha_0+\alpha_1-2\alpha_{-1})+2l\left(\alpha_1-\alpha_{-1}\right)+kl^2\left(\alpha_0-\alpha_1\right)}{\alpha_1-\alpha_{-1}}u_2w_2, \\[2ex]
v_{2\tau} &= \dfrac{(\alpha_{-1}-\alpha_0)(l^2+1)(v_1-kv_2)w_2}{\alpha_1-\alpha_{-1}}.
\end{cases}
$$

Кроме того, система имеет следующие квадратичные первые интегралы:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -2u_1v_1 - 2u_2v_2 + (kw_1+w_2)^2 - (w_1+lw_2)^2, \\
I_2 &= u_2v_1 - u_1v_2 - (kw_1+w_2)(w_1+lw_2).
\end{aligned}
$$

Заметим, что I_1 является следом q^2. Легко проверить, что алгоритм Ли применим и в данном случае. $\square$

Замечание 3. Заметим, что некоторые первые интегралы систем из примеров 1–3 не являются однозначными в комплексной плоскости. Например,

$$H_2 = u^{\alpha_0-\alpha_{-1}}v^{\alpha_0-\alpha_1}$$

является первым интегралом для (18). Система из примера 2 обладает первым интегралом вида $I = f(u_1,u_2,v_1,v_2)$. Легко проверить, что такой интеграл должен удовлетворять двум уравнениям вида $X(f)=0$ и $Y(f)=0$, где X, Y задаются следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
X &= (\alpha_1-\alpha_0)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_2} - u_2\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + (\alpha_{-1}-\alpha_0)\left(v_1\frac{\partial}{\partial v_2} - v_2\frac{\partial}{\partial v_1}\right), \\
Y &= (\alpha_1-\alpha_0)\left(u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial}{\partial u_2}\right) - (\alpha_{-1}-\alpha_0)\left(v_1\frac{\partial}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial v_2}\right).
\end{aligned}
$$

Решая эту систему из двух уравнений в частных производных, мы находим два простейших ее решения:

$$I_3 = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_{-1}-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2} - \operatorname{arctg}\frac{v_1}{v_2}\right),$$

$$I_4 = (u_1^2+u_2^2)^{\frac{\alpha_{-1}-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}}(v_1^2+v_2^2)\sin^2\left(\frac{\alpha_{-1}-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} - \operatorname{arctg}\frac{v_2}{v_1}\right).$$

Отметим, что количество полиномиальных симметрий и первых интегралов в примерах 1–3 равно количеству независимых переменных, и это дает возможность проинтегрировать данные системы в квадратурах с помощью алгоритма Ли. Мы не знаем, справедливо ли это для всех систем, описанных в теореме §2.

Благодарности

Авторы выражают большую благодарность И.З. Голубчику, В.В. Соколову за уделенное внимание к работе, А.И. Зобнину за внимание к работе и помощь при работе с текстом. Исследования О.С. были частично поддержаны грантом РФФИ 11-01-00341-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Konstant *Quantization and representation theory* // Lect. Notes Ser. 1979. 34. P. 287–316.
2. Семенов-Тян-Шанский М.А. *Что такое классическая r-матрица* // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 7, №4. С. 17—33.
3. Голод П.И. *Гамильтоновы системы на орбитах аффинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения* // В кн.: Физика многочастичных систем, Киев: Наукова Думка. 1985. Т. 7. С. 30–39.
4. Голубчик И.З., Соколов В.В. *О некоторых обобщениях метода факторизации* // ТМФ. 1997. Т. 110, № 3. С. 339—350.
5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Известия АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, №2. С. 396–415.
6. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. *Интегрируемые системы. Теоретико–групповой подход.* Ижевск: РХД. 2003. 351 с.
7. Борисов А.В., Мамаев И.С. *Динамика твердого тела.* Ижевск: РХД. 2001. 384 с.
8. Веселов А.П. *Об условиях интегрируемости уравнения Эйлера на $so(4)$* // ДАН СССР. 1983. Т. 270, №6. С. 1298–1300.
9. Соколов В.В. *Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$* // Доклады РАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 602–605.
10. V.V. Sokolov, T. Wolf *New integrable quadratic Hamiltonians on $so(4)$ and $so(3,1)$* // Journal Phys. A: Math. Gen. 2006. 39. P. 1915–1936.

Рушания Ахъяровна Атнагулова,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
ул. Октябрьской революции, 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: rushania2009@yandex.ru

Ольга Владимировна Соколова,
Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,
ГСП-1, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
119991, Москва, Россия
E-mail: Olga.Efimovskaya@gmail.com