ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 31-37.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ

Б.В. ВИННИЦКИЙ, В.Н. ДИЛЬНЫЙ

Аннотация. В работе рассматривается пространство Харди $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ в полуплоскости с экспоненциальным весом. В этом пространстве изучается задача аналитического продолжения функции с границы. Ранее получено утверждение для случая $p \in (1;2]$ об аналитическом продолжении с мнимой оси, которое является обобщением одной теоремы Пэли-Винера. Но для многих приложений более интересным является случай $p = 1$. Для этого случая в статье получены оценки функции, удовлетворяющей некоторым стандартным условиям.

Ключевые слова: весовое пространство Харди, теорема Пэли-Винера, угловые граничные значения

Mathematics Subject Classification: 30H10, 30E20

1. Введение

Обозначим через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, пространство функций, аналитических в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, для которых

$$||f||_{H^p} := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

А.М. Седлецкий [1] показал, что это пространство совпадает с пространством Харди $\widetilde{H}^p(\mathbb{C}_+)$ аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых

$$||f||_{\widetilde{H}^p} = \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty,$$

и нормы $||\cdot||_{H^p}$ и $||\cdot||_{\widetilde{H}^p}$ являются эквивалентными. Свойства пространств Харди достаточно полно изложены в [2], [3]. Функции из пространств Харди имеют почти всюду на $i\mathbb{R}$ угловые граничные значения, которые обозначаем через $f(iy)$ и $f(iy) \in L^p(\mathbb{R})$. Хорошо известной [3, с. 94] является следующая теорема Пэли-Винера.

Теорема 1. *Функция $f_0 \in L^p(i\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, является угловой граничной функцией некоторой функции $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ в том и только том случае, если*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(it) e^{i\tau t} dt = 0,$$

для почти всех отрицательных чисел τ.

B.V. Vinnitskii, V.N. Dilnyi, On generalization of Paley-Wiener Theorem for weighted Hardy spaces.

Поступила 28 сентября 2013 г.

Б.В. Винницкий рассмотрел [4] следующее обобщение пространства Харди. Обозначим через $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, пространство аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых

$$||f||_{H^p_\sigma} := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Функции из этого пространства имеют почти всюду на на $i\mathbb{R}$ угловые граничные значения, которые обозначаем через $f(iy)$ и $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$.

В [5] получено следующее обобщение теоремы Пэли-Винера.

Теорема 2. *Функция $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такая, что $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant 2$, является угловой граничной функцией некоторой функции $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ в том и только том случае, если существует функция f_2 такая, что*

1) $f_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

2) $f_3(iv) := f_1(iv) + f_2(iv) \in L^p(-\infty; 0)$, $f_1(iv) := f_0(iv)e^{-\sigma v}$;

3) для почти всех $\tau < 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv + \frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + \int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)e^{i\tau v}dv = 0.$$

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2 для случая $\sigma = 0$. При исследовании цикличности в некоторых пространствах и свойств уравнений свертки (см [6], [7]) возникает вопрос о справедливости теоремы 2 для случая $p = 1$. В [5] показано, что необходимая часть этой теоремы справедлива и для случая $p = 1$, но вопрос о достаточности условий остается открытым. Цель этой статьи – получить описание функций, угловые граничные функции которых удовлетворяют условиям 1)-3) предыдущей теоремы.

2. Основной результат

Получено следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ и выполняются условия 1)–3) теоремы 2, то существует аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция f, для которой функция f_0 является угловой граничной функцией и*

$$\sup\left\{\int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in (-\pi/2;\pi/2)\backslash(-\delta;\delta)\right\} < +\infty \tag{1}$$

для всех $\delta \in (0;\pi/2)$.

Доказательство в существенном базируется на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. *Если выполняются условия теоремы 3 и*

$$\Xi(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_1(iv)}{iv-z}dv + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_3(iv)}{iv-z}dv + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_2(u)}{u-z}du,$$

то $\Xi(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}_- := \{z : \mathrm{Re} z < 0\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\eta_1(\tau) = \int\limits_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv,\ \eta_2(\tau) = \frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du,\ \eta_3(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)e^{i\tau v}dv.$$

Тогда из условия 3) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\left(\eta_1(\tau)+\eta_2(\tau)+\eta_3(\tau)\right)d\tau=0,\quad \mathrm{Re}z<0. \tag{2}$$

Но по теореме Фубини мы имеем для $\mathrm{Re}z<0$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_1(\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(iv-z)}d\tau dv=\int_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv-z}dv.$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_3(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv-z}dv,\quad \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_2(\tau)d\tau=\frac{1}{i}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du.$$

Поэтому из (2) получаем утверждение леммы. □

Введем обозначение $\mathbb{C}(\alpha;\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$.

Лемма 2. *Если выполняются условия теоремы 3, то угловые граничные значения функции*

$$f(z)=\begin{cases}-e^{-i\sigma z}\Xi(z), z\in\mathbb{C}(0;\pi/2),\\ -e^{-i\sigma z}\left(\Xi(z)-f_2(z)\right), z\in\mathbb{C}(-\pi/2;0),\end{cases}$$

совпадают почти всюду на $i\mathbb{R}$ с функцией f_0.

Доказательство. По лемме 1 имеем $\Xi(-\bar z)=0$, $z\in\mathbb{C}_+$. Поэтому

$$\Xi(z)=\Xi(z)-\Xi(-\bar z)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\left(\frac{1}{iv-z}-\frac{1}{iv+\bar z}\right)dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f_3(iv)\left(\frac{1}{iv-z}-\frac{1}{iv+\bar z}\right)dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty} f_2(u)\left(\frac{1}{u-z}-\frac{1}{u+\bar z}\right)du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar z)}dv+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f_3(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar z)}dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty} f_2(u)\frac{2x}{(u-z)(u+\bar z)}du.$$

Последний интеграл равен нулю [1] на мнимой оси за исключением, возможно, точки $z=0$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar z)}dv=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{x}{(v-y)^2+x^2}dv$$

является интегралом Пуассона, поэтому для него существуют угловые граничные значения почти всюду на $\partial\mathbb{C}_+$ из $\mathbb{C}_+$ и эти значения равны $-f_1(iv)$ для $v>0$ и 0 для $v<0$. Аналогично можно показать, что угловые граничные значения на $\partial\mathbb{C}_+$ из $\mathbb{C}_+$ функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f_3(iv)\frac{2x}{(iv-z)\,(iv+\bar{z})}dv$$

равняются почти всюду $-f_3(iv)$ для $v<0$ и нулю для $v>0$. □

Лемма 3. *Если выполняются условия теоремы 3, то для функции f, определенной в лемме 2, справедливо условие (1).*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что для $\mathrm{Re}z>0$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv+z}dv+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv+z}dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u+z}du,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv+\overline{z}}dv+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv+\overline{z}}dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u+\overline{z}}du.$$

Из вышеприведенных равенств получим для $z=x+iy\in\mathbb{C}_+$, $y\neq 0$,

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\left(-\frac{1}{iv+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{iv+\bar{z}}-\frac{1}{iv+z}\right)\right)dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} f_3(iv)\left(-\frac{1}{iv+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{iv+\overline{z}}-\frac{1}{iv+z}\right)\right)dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty} f_2(u)\left(-\frac{1}{u+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{u+\overline{z}}-\frac{1}{u+z}\right)\right)du.$$

Поэтому, обозначив

$$\chi(w;z):=\frac{2}{\pi i}\frac{wx}{(w+\bar{z})(w-z)(w+z)}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+\bar{z}}-\frac{1}{w+z}\right)\right),$$

получим

$$\Xi(z)=i\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\chi(iv;z)dv+i\int_{-\infty}^{0} f_3(iv)\chi(iv;z)dv+\int_{0}^{+\infty} f_2(u)\chi(u;z)du.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $0<\varphi<\pi/2$. Тогда

$$\int_{0}^{+\infty}\left|f(re^{i\varphi})\right|e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr=\int_{0}^{+\infty}\left|\Xi(re^{i\varphi})\right|dr\leqslant\int_{0}^{+\infty}\left|\int_{0}^{+\infty} f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})dv\right|dr+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{0} f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})dv\right|dr+\int_{0}^{+\infty}\left|\int_{0}^{+\infty} f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})du\right|dr\leqslant$$

$$\leqslant\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left|f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv+\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{+\infty}\left|f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\left|f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})\right|drdu.$$

Очевидно,

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}dr.$$

Если $v>0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1-2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1+2s\sin\varphi+s^2}}.$$

Поскольку $\varphi\in(0;\pi/2)$, то использовав неравенство $s<\sqrt{s^2+1}$, имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1-2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1+2s\sin\varphi+s^2}}\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\varphi ds}{1-2s\sin\varphi+s^2}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\varphi\le\pi.$$

Если же $v<0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1+2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1-2s\sin\varphi+s^2}}\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1+s^2)\sqrt{2s(1-\sin\varphi)}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)ds}{(1+s^2)\sqrt{4s\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}}\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)ds}{1+s^2}\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}ds}{1+s^2}=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому по теореме Фубини при $\varphi\in(0;\pi/2)$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}dr\int\limits_0^{+\infty}\left|f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dv\le c<+\infty,\quad\int\limits_0^{+\infty}dr\int\limits_0^{+\infty}\left|f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dv\le c<+\infty,$$

Также для $u>0$ получим

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|\chi(u;re^{i\varphi})\right|dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{ux}{|(u+\bar z)(u-z)(u+z)|}dr=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur\cos\varphi}{(u^2+2ur\cos\varphi+r^2)\sqrt{u^2-2ur\cos\varphi+r^2}}dr=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi}{(s^2+2s\cos\varphi+1)\sqrt{s^2-2s\cos\varphi+1}}dr=\int\limits_0^{2}\frac{2}{\sqrt{s^2-2s\cos\varphi+1}}dr+$$

$$+\int\limits_2^{+\infty}\frac{s}{(s^2+1)\sqrt{(s-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}}dr\leqslant 2\int\limits_0^{2}\frac{1}{\sqrt{(s-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}}dr+$$

$$+\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{s\sqrt{2(s-\cos\varphi)\sin\varphi}}dr\leqslant 2\int\limits_0^{2}\frac{1}{|\sin\varphi|}dr+\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{(s-\cos\varphi)^{3/2}}dr<c_2.$$

Поэтому также

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+\infty} \left|f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})\right| du \le c_1 < +\infty, \quad \varphi \in (-\pi/2+\delta;\pi/2-\delta)\,. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь случай $-\pi/2 < \varphi < 0$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|} dr \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \left|\Xi(re^{i\varphi})\right| dr + \int\limits_0^{+\infty} \left|f_2(re^{i\varphi})\right| e^{-2\sigma r|\sin\varphi|} dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} |f_1(iv)| \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right| drdv + \int\limits_{-\infty}^{0} |f_3(iv)| \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right| drdv +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} |f_2(u)| \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(u;re^{i\varphi})\right| drdu + c.$$

Аналогично случаю $0 < \varphi < \pi/2$ можно показать, что если $v > 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|v|\, r\cos\varphi dr}{(v^2 - 2vr\sin\varphi + r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}} \le \pi\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а если $v > 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|v|\, r\cos\varphi dr}{(v^2 + 2vr\sin\varphi + r^2)\sqrt{v^2-2vr\sin\varphi+r^2}} \le \pi.$$

Учитывая также (3), получим справедливость (1) и для $\varphi \in (-\pi/2;-\delta)$. □

Доказательство теоремы 3 вытекает из лемм 1–3, если учесть, что функция f, определенная в лемме 2, является аналитической в $\mathbb{C}_+$. Действительно, функция

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_1(iv)}{iv-z}dv + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_3(iv)}{iv-z}dv$$

очевидно аналитическая в $\mathbb{C}_+$. Функция

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_2(u)}{u-z}du - f_2(z)$$

аналитическая в углах $\mathbb{C}(0;\pi/2)$ и $\mathbb{C}(-\pi/2;0)$. На положительной действительной полупрямой по теореме Сохоцкого предельные значения из верхнего и нижнего угла совпадают. Поэтому, как и при доказательстве леммы 8 из [7], легко получим, что f – аналитическая в $\mathbb{C}_+$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. 1975. **96**. № 1. С. 75–82.
2. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p.* М.: Наука. 1984. 368 с.
3. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир. 1984. 469 с.
4. Винницкий Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. 1994. **46**. № 5. С. 484–500.
5. Винницкий Б.В. *Об обобщении теоремы Пэли-Винера* // Мат. студ. 1995. **4**. С. 37–44.
6. B. Vinnitskii, V. Dil'nyi *On extension of Beurling-Lax theorem* // Math. Notes, **79**. 2006. P. 362–368.
7. V. Dilnyi *On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces* // Журн. матем. фіз., анал., геом. 2011. **7**. С. 19–33.

Богдан Васильевич Винницкий,
Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко,
ул. Стрыйская, 3,
82100, г. Дрогобыч, Украина
Владимир Николаевич Дильный,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1,
82000, г. Львов, Украина
E-mail: dilnyi@mail.ru