ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 116-129.

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ю. ТРЫНИН

Аннотация. В работе предложено решение некоторой обратной задачи Штурма-Лиувилля, позволяющее определять потенциал и краевые условия дифференциального оператора по значениям дифференциалов Гато одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0, \pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ при приращении w из множества $\mathbb{W}$. В качестве $\mathbb{W}$ рассмотрены некоторые множества классических и обобщённых функций.

Ключевые слова: собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, узловые точки задачи Штурма-Лиувилля, дифференциал Гато, обратная задача Штурма-Лиувилля, обратная узловая задача, узловые точки.

Mathematics Subject Classification: 34A55

1. Введение

Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами являются предметом исследований ведущих научных школ спектральной теории дифференциальных операторов уже довольно длительный промежуток времени. Круг этих задач на данный момент достаточно полно изучен. Не претендуя на полноту обзора публикаций по данной тематике, приведём ряд известных работ этого научного направления, опубликованных относительно недавно.

В [1] для фиксированного суммируемого потенциала получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений классической задачи Штурма-Лиувилля с помощью современной трактовки метода Лиувилля-Стеклова.

Работы [2], [3] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщённой функцией первого порядка, $q(x) = u'(x)$, где $u \in L_2[0, \pi]$.

К исследованиям, в которых оценки изучаемых параметров операторов Штурма-Лиувилля равномерны по потенциалу q в шаре пространства Соболева, следует отнести работы [4], [5].

Статья [6] посвящена доказательству того факта, что система собственных и присоединённых функций оператора Штурма-Лиувилля с суммируемым с квадратом потенциалом и периодическими или антипериодическими краевыми условиями образует базис Рисса.

В [7] рассматривается класс дискретных операторов Штурма-Лиувилля, для которых в существенной части носителя меры имеется конечное число лакун.

Исследованию свойств спектров различных видов периодических самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка на оси, имеющих важные приложения, посвящена серия интересных публикаций [8], [9], [10]. В этих работах построены также асимптотические разложения для собственных значений и соответствующих собственных функций возмущённых операторов.

A.Yu. Trynin, On inverse nodal problem for Sturm-Liouville operator.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Поступила 15 апреля 2013 г.

В фундаментальных работах [11], [12], [13] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети или графах.

В [14] получены некоторые асимптотические формулы для значений дифференциальных операторов, ассоциированных с задачей Коши, с дифференциальным выражением в виде линейного уравнения второго порядка $y'' + [\lambda - q_\lambda(x)]y = 0$, где потенциал q_λ может меняться в зависимости от λ, т.е. является функцией двух переменных x и λ. Характер зависимости потенциала от λ обусловлен лишь тем, что при каждом λ функция q_λ принадлежит шару с центром в нулевом элементе и радиусом, растущим медленнее $\sqrt{\lambda}$, в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле. В [14] приводится также асимптотика узловых точек рассматриваемых дифференциальных операторов, правда, при условии, что функция q_λ принадлежит шару с центром в нулевом элементе и радиусом, растущим медленнее $\sqrt{\lambda}/\ln\lambda$. В работе [15] построен пример потенциала, показывающий, что, если отказаться от ограниченности изменения q, то полученный порядок аппроксимации асиптотики не может быть достигнут, не только на классе функций q из $C[0,\pi]$, например в шарах, но даже для конкретного представителя пространства непрерывных потенциалов.

Начиная с широко известных классических работ [16] – [24] и по сей день (смотрите, например, статьи [4], [25]), обратным задачам Штурма-Лиувилля, т.е. задачам построения оператора Штурма-Лиувилля по тем или иным исходным данным, посвящено большое количество интересных исследований. В [16] установлена эквивалентность представления собственных значений в виде $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ равенству нулю непрерывного потенциала задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Неймана.

Работа [17] содержит исследование обратной задачи Штурма-Лиувилля восстановления параметров задачи по спектрам. Показано, что в общем случае по одному спектру $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператор Штурма-Лиувилля восстановить нельзя, а знание двух спектров задач с одним потенциалом и различными краевыми условиями достаточно для определения как потенциала, так и граничных условий обеих задач.

Автор [18] доказал, что в случае неотрицательности всех собственных значений фаза рассеяния, заданная для всех положительных энергий и любого фиксированного углового момента, определяет потенциал однозначно.

В [21] приводятся методы восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции. Эта задача сводится к некоторому линейному интегральному уравнению. Выясняется также, какие монотонные функции могут служить спектральными функциями дифференциального уравнения второго порядка.

В работе [22] показано, что по спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля можно однозначно его восстановить.

В интересных статьях [4], [25] получена точная и равномерная асимптотика спектральных данных для задач Штурма-Лиувилля в предположении, что потенциал изменяется в шаре фиксированного радиуса в пространстве Соболева $W_2^{\alpha}[0,1]$ при некотором $\alpha > -1$. Эти исследования позволяют гарантировать равномерную устойчивость при восстановлении потенциала по спектральным данным.

Актуальная задача восстановления плотности струны по оператору реакции, отображающему граничное управление в величину силы, приложенной к концу струны, рассматривается в работе [26].

Начиная с пионерской работы [27], в статьях [28], [29], [30], [31], [32] приведены теоремы единственности решения обратных узловых задач для различных дифференциальных операторов второго порядка.

Достаточно полный обзор результатов, полученных в области изучения обратных задач Штурма-Лиувилля, можно найти в известных монографиях [33], [34], [35].

Пусть $q \in L[0,\pi]$, и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ — n-е собственное значение регулярной задачи Штурма-Лиувилля (определение смотрите в [35])

$$\begin{cases} \hat{y}'' + [\lambda - q]\hat{y} = 0, \\ \sin\alpha\hat{y}'(0) + \cos\alpha\hat{y}(0) = 0, \\ \sin\beta\hat{y}'(\pi) + \cos\beta\hat{y}(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$, а $\hat{y}(x,q,\lambda_n) \equiv \hat{y}_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|\hat{y}(\cdot,q,\lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Будем нумеровать нули функции $\hat{y}_n$, таким образом $0 \le x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} \le \pi$. Зафиксируем некоторые $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q $k+1$-й слева нуль n-й собственной функции $\hat{y}(x,q,\lambda_n[q])$. Договоримся обозначать через

$$D\phi[q,w] = \lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+tw)-\phi(q)}{t}$$

дифференциал Гато функционала $\phi : L[0,\pi] \to \mathbb{R}$ при приращении $w \in L[0,\pi]$.

В случае граничных условий первого рода в [27] получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек задачи Штурма-Лиувилля, правда, содержащие производные собственных функций как по переменной x, так и по спектральному параметру.

Теорема 1 ([27]). *Пусть q, $w \in L_2[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$ при $\alpha = \beta = 0$ в (1)) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\left[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}\int_0^{x_{k,n}} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau$$

$$-\frac{\dot{y}(x_{k,n},q,\lambda_n)}{\dot{y}(\pi,q,\lambda_n)y'(x_{k,n},q,\lambda_n)y'(\pi,q,\lambda_n)}\int_0^{\pi} w(\tau)y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau,$$

где

$$y'(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}y(x,q,\lambda), \quad \dot{y}(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}y(x,q,\lambda).$$

Это соотношение использовалось автором для исследования свойств обратной узловой задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом из пространства $L_2[0,\pi]$. В [27] установлена теорема единственности восстановления потенциала по произвольному плотному в отрезке $[0,\pi]$ множеству нулей собственных функций.

В работе [36] приведены дифференциальные соотношения, аналогичные соотношениям, установленным в статье [27], в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом и краевыми условиями третьего рода, из которых обязательно следовало удалять условия первого рода ($\alpha \ne \pi l$ и $\beta \ne \pi m$, $l, m \in \mathbb{Z}$). С их помощью, в частности, удалось показать отсутствие устойчивости задачи представления непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции с помощью интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

В работе [37] получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма-Лиувилля с произвольными краевыми условиями третьего рода.

Теорема 2 ([37]). *Пусть q, $w \in L[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}\int_0^{\pi} w(\tau)\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где
$$\beta_{k,n}(\tau) = \begin{cases} 1-\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in [0, x_{k,n}], \\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in (x_{k,n}, \pi], \end{cases} \qquad \alpha_{k,n} = \int_0^{x_{k,n}} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau.$$

Замечание. В случае, когда хотя бы одно краевое условие принимает вид условий Дирихле: $\alpha = 2\pi l$, *или* $\beta = 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$, *т.е.* $x_{0,n}[q] \equiv 0$, *или* $x_{n,n}[q] \equiv \pi$ *соответствующий дифференциал Гато для любых* q, $w \in L[0,\pi]$
$$Dx_{0,n}[q,w] = 0 \text{ или } Dx_{n,n}[q,w] = 0.$$

В настоящей работе предложено решение некоторой обратной задачи Штурма-Лиувилля, позволяющее определять потенциал и краевые условия дифференциального оператора по значениям дифференциалов Гато одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0,\pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ при приращении w из множества $\mathbb{W}$. В случае, когда $\mathbb{W} = \{\delta[1](x),\ x \in \mathbb{M}\}$, ($\delta[1](x)$ — дельта функция Дирака), и $\mathbb{M}$ плотно в $[0,\pi]$, однозначно, с точностью до нормировки $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$, определяется потенциал задачи Штурма-Лиувилля $q \in L[0,\pi]$ или $q \in C[0,\pi]$. Для любого фиксированного $q \in L[0,\pi]$ значения дифференциалов Гато и их производных по x одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0,\pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ на концах отрезка $[0,\pi]$: $Dx_{k,n}[q, \delta[1](0)]$, $\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=0}$ и $Dx_{k,n}[q, \delta[1](\pi)]$, $\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=\pi}$, позволяют однозначно определить параметры краевых условий задачи (1) α и β соответственно. В случае, когда $\mathbb{W}$ представляет собой множество непрерывно дифференцируемых, имеющих абсолютно непрерывную производную, функций на $[0,\pi]$ получена теорема единственности решения обратной задачи при условии нормировки потенциала $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$. Эти исследования опираются на изучение дифференциального соотношения, полученного в работе [37].

Обоснование актуальности предложенных в настоящей работе исследований может быть проиллюстрировано с точки зрения математической физики следующим образом. Возьмём неоднородную струну, неизвестная линейная плотность которой может не только непрерывно меняться от точки к точке, но и допускает разрывы первого рода. Считаем, что натяжение струны в состоянии покоя известно. Если начальные условия таковы, что колебания струны будут организованы в виде стоячей волны с одной из собственных частот, то узлы этой стоячей волны будут находиться в нулях собственной функции, соответствующей этой частоте. Результаты работы позволяют найти линейную плотность струны в точке, где находится масса $\mathbf{m}$, из наблюдений за динамикой движения одного из внутренних узлов стоячей волны при перемещении с постоянной скоростью вдоль струны точечной массы $\mathbf{m}$. Знание дифференциала Гато и его производной по независимой переменной некоторого внутреннего узла задачи Штурма-Лиувилля при возмущении суммируемого потенциала с помощью функции Дирака на концах отрезка даёт возможность определить константы α и β в краевых условиях третьего рода задачи (1). Это, в свою очередь, позволяет полностью определить силы сопротивления перемещению концов струны.

2. Основные результаты

Изменение потенциала $q \in L[0,\pi]$ задачи (1) на аддитивную константу $q + C$ приводит к сдвигу спектра $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ на ту же константу $\{\lambda_n + C\}_{n=1}^\infty$. Поэтому, за исключением специально оговорённых случаев, считаем, что выполнено условие нормировки
$$\int_0^\pi q(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Определим $\delta[f](x)$-дельта функцию Дирака (строгое обоснование определения можно найти, например, в [38, Гл.2, §5], [39, §16.7]) как функционал, ставящий в соответствие всякой суммируемой на отрезке $[0,\pi]$ функции f действительное число по правилу

$$\delta[f](x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\pi f(\tau)\Psi(\tau,x,\varepsilon)\,d\tau,$$

где

$$E(x,\varepsilon)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\cap[0,\pi],$$
$$\Psi(\tau,x,\varepsilon)=\begin{cases}\frac{1}{mesE(x,\varepsilon)}, & \text{при } \tau\in E(x,\varepsilon),\\ 0, & \text{при } \tau\in[0,\pi]\setminus E(x,\varepsilon).\end{cases}$$

Будем обозначать дифференциал Гато функционала ϕ на элементе $q\in L[0,\pi]$ при приращении $\delta[1](x)$

$$D\phi[q,\delta[1](x)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+t\Psi(\cdot,x,\varepsilon))-\phi(q)}{t}.$$

А через

$$\frac{d^kD\phi[q,\delta[1](x)]}{dx^k}=\frac{d^k}{dx^k}\Big\{\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+t\Psi(\cdot,x,\varepsilon))-\phi(q)}{t}\Big\}$$

его k-ю производную по x. Эта производная, вообще говоря, может пониматься как обобщённая производная [38, Гл.2, §6, п.1]. Но в случае, когда функция $\frac{d^k}{dx^k}\Big\{\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+t\Psi(\cdot,x,\varepsilon))-\phi(q)}{t}\Big\}$, как функция переменного x, непрерывна, считаем, что обобщённая производная совпадает с классической производной в смысле определений [38, Гл.2, §5, п.5,6].

Знание дифференциала Гато некоторого внутреннего узла задачи Штурма-Лиувилля при возмущении потенциала с помощью функции Дирака на плотном в $[0,\pi]$ множестве даёт возможность определить любой суммируемый потенциал изучаемой задачи.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{M}$ произвольное плотное в отрезке $[0,\pi]$ множество,*

$$x_{k,n}\in(0,\pi) \tag{4}$$

некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (1), и дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ на элементе $q\in L[0,\pi]$ при приращении $\delta[1](x)$ принимает в каждой точке x множества $\mathbb{M}$ значение $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$.

Тогда потенциал задачи Штурма-Лиувилля (1), удовлетворяющий условию нормировки (3), может быть почти всюду представлен следующим образом

$$q(x)\overset{п.в.}{=}\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\Big(\sqrt{\Big|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\Big|}\Big)^{-1}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\Big(\sqrt{\Big|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\Big|}\Big)^{-1}\right\}dx, \tag{5}$$

где $\{x_p\}_{p=1}^\infty$ — любая, стремящаяся к x вдоль множества $\mathbb{M}$ последовательность, т.е. $x_p\in\mathbb{M}$, $x_p\to x$.

Предложение 1. *Пусть (4) некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (1), и дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ на элементе $q\in L[0,\pi]$ при приращении $\delta[1](x)$ принимает в почти каждой точке x отрезка $[0,\pi]$ значение $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$.*

Тогда потенциал задачи Штурма-Лиувилля (1), удовлетворяющий условию нормировки (3), имеет вид

$$q(x)\overset{п.в.}{=}\frac{d^2\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx^2}\Big(\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}\Big)^{-1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{ \frac{d^2\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx^2}\Big(\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}\Big)^{-1}\right\} dx. \qquad (6)$$

Знание дифференциала Гато и его производной по независимой переменной некоторого внутреннего узла задачи Штурма-Лиувилля при возмущении суммируемого потенциала с помощью функции Дирака на концах отрезка даёт возможность определить константы α и β в краевых условиях третьего рода задачи (1). Это позволяет полностью определить силы сопротивления перемещению концов струны.

Предложение 2. *Пусть* (4) — *некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1), *и дифференциал Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q \in L[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *вместе с его производной по* x *принимают на концах отрезка* $[0,\pi]$ *значения* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]$, $Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]$, $\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=0}$ *и* $\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=\pi}$.

Тогда параметры краевых условий задачи Штурма-Лиувилля (1) *могут быть найдены из соотношений*

$$\alpha = \begin{cases} -\operatorname{arcctg}\left\{\Big(\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=0}\Big)\Big(Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]\Big)^{-1}\right\} + \pi p, \quad p \in \mathbb{Z}, \\ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)] \neq 0, \\ \pi p, \quad p \in \mathbb{Z}, \ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)] = 0, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} -\operatorname{arcctg}\left\{\Big(\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\Big|_{x=\pi}\Big)\Big(Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]\Big)^{-1}\right\} + \pi r, \quad r \in \mathbb{Z}, \\ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)] \neq 0, \\ \pi r, \quad r \in \mathbb{Z}, \ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)] = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Для определения непрерывности потенциала задачи Штурма-Лиувилля (1) и его нахождения всюду на $[0,\pi]$ можно предложить следующее уточнение теоремы 3.

Предложение 3. *Пусть* (4) *некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1), *и дифференциал Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q \in L[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *принимает в каждой точке* x *плотного в отрезке* $[0,\pi]$ *множества* $\mathbb{M}$ *значение* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$. *Тогда, условие непрерывности на* $[0,\pi]$ *функции переменного* x

$$\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\Big(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\Big|}\Big)^{-1}$$

необходимо и достаточно для непрерывности потенциала задачи Штурма-Лиувилля (1) *на* $[0,\pi]$. *И функция* (5) *представляет собой потенциал задачи Штурма-Лиувилля* (1), *удовлетворяющий условию нормировки* (3), *всюду на* $[0,\pi]$.

Теорема 4. *Пусть некоторые собственные функции* $\hat{y}_n$ *и* $\hat{\tilde{y}}_m$ $n,m \in \mathbb{N}$ *двух задач Штурма-Лиувилля с суммируемыми потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки* (3), *вида* (1) *и*

$$\begin{cases} \hat{\tilde{y}}'' + [\tilde{\lambda} - \tilde{q}]\hat{\tilde{y}} = 0, \\ \sin\tilde{\alpha}\hat{\tilde{y}}'(0) + \cos\tilde{\alpha}\hat{\tilde{y}}(0) = 0, \\ \sin\tilde{\beta}\hat{\tilde{y}}'(\pi) + \cos\tilde{\beta}\hat{\tilde{y}}(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

имеют общий нуль x^*, *т.е. найдутся такие* $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m, n,m \in \mathbb{N}$, *что* $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0,\pi)$, *и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для приращения* $\delta[1](x)$ *в каждой точке* x *плотного в отрезке* $[0,\pi]$ *множества* $\mathbb{M}$, *т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)] = D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},\delta[1](x)], \ \textit{для любого } x \in \mathbb{M}. \qquad (9)$$

Тогда $\tilde{q} = q$ *почти всюду на* $[0,\pi]$, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$ *и* $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$.

Через $\mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]$ обозначим множество определённых на отрезке $[0,\pi]$ функций, непрерывно дифференцируемых и имеющих абсолютно непрерывную производную на $[0,\pi]$.

Теорема 5. *Пусть некоторые собственные функции $\hat{y}_n$ и $\hat{\tilde{y}}_m$ $n,m \in \mathbb{N}$ двух задач Штурма-Лиувилля с суммируемыми потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки* (3), *вида* (1) *и* (8) *имеют общий нуль x^*, т.е. найдутся такие $0 \le k \le n$, $0 \le l \le m, n, m \in \mathbb{N}$, что $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0,\pi)$, и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для любого приращения $w \in \mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]$, т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,w] = D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},w], \text{ для любого } w \in \mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]. \tag{10}$$

Тогда $\tilde{q} = q$ почти всюду на $[0,\pi]$, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$ и $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$.

Обозначим через $C^2_t[0,\pi]$ множество функций пространства $C^1[0,\pi]$ дважды непрерывно дифференцируемых на каждом из сегментов $[0,t]$ и $(t,\pi]$. В точке $t \in [0,\pi]$ вторые производные элементов множества $C^2_t[0,\pi]$ могут иметь разрыв первого рода. Для классических решений уравнения задачи Штурма-Лиувилля (1) справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть некоторые собственные функции $\hat{y}_n$ и $\hat{\tilde{y}}_m$ $n,m \in \mathbb{N}$ двух задач Штурма-Лиувилля с непрерывными потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки* (3), *вида* (1) *и* (8) *имеют общий нуль x^*, т.е. найдутся такие $0 \le k \le n$, $0 \le l \le m, n, m \in \mathbb{N}$, что $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0,\pi)$, и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для любого приращения $w \in C^2_{x^*}[0,\pi]$, т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,w] = D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},w], \text{ для любого } w \in C^2_{x^*}[0,\pi].$$

Тогда $\tilde{q} = q$ всюду на $[0,\pi]$, $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$ и $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$.

Условие предложения 1, являющееся следствием теоремы 3, удобно, но использует избыточную информацию, т.к. для восстановления потенциала задачи Штурма-Лиувилля требуется знание значения $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$ в почти каждой точке x отрезка $[0,\pi]$. Утверждение теоремы 3 окончательно в том смысле, что отказаться от плотности множества $\mathbb{M}$ в отрезке $[0,\pi]$ нельзя, т.к. верно следующее предложение.

Предложение 5. *Для произвольного интервала $(a,b) \subset [0,\pi]$ найдутся два нормированных соотношением* (3) *потенциала ограниченной вариации*

$$q \overset{\text{п.в.}}{\neq} \tilde{q} \tag{11}$$

такие, что существует $n \in \mathbb{N}$, для которого собственные функции $\hat{y}_n$ и $\hat{\tilde{y}}_n$ двух задач Штурма-Лиувилля вида (1) *и* (8) *(с $\alpha = \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{\beta}$ и потенциалами q и $\tilde{q}$ соответственно) имеют одинаковые нули $x_{k,n}[q] = \tilde{x}_{k,n}[\tilde{q}] \in [0,\pi], 0 \le k \le n$ и дифференциалы Гато любого из этих нулей совпадают для любого приращения $\delta[1](x)$ в каждой точке x множества $[0,\pi] \setminus (a,b)$, т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)] = D\tilde{x}_{k,n}[\tilde{q},\delta[1](x)], \tag{12}$$
$$\text{для любых } x \in [0,\pi] \setminus (a,b), \quad x_{k,n}[q] = \tilde{x}_{k,n}[\tilde{q}] \in [0,\pi], 0 \le k \le n.$$

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 3. Возьмём произвольный узел (4) задачи Штурма-Лиувилля (1). В силу теоремы 2 имеем

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2} \int_0^\pi \Psi(\tau,x,\varepsilon)\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}\delta\left[\hat{y}^2(\cdot,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\cdot)\right](x).$$

Функция $\hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \pi]$. Поэтому множество $[0, \pi]$ состоит из точек Лебега функции $\hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)$, и всюду на $[0, \pi]$ имеет место равенство

$$Dx_{k,n}[q, \delta[1](x)] = \frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n}, q, \lambda_n)\right]^2}\hat{y}^2(x, q, \lambda_n)\beta_{k,n}(x). \tag{13}$$

В силу теоремы 2 и (4), функция $\beta_{k,n}(x) \neq 0$. Таким образом, на множестве $[0, \pi]$ имеет место представление

$$\left|\hat{y}(x, q, \lambda_n)\right| = \sqrt{\left|Dx_{k,n}[q, \delta[1](x)]\right| \frac{\left[\hat{y}'(x_{k,n}, q, \lambda_n)\right]^2}{\left|\beta_{k,n}(x)\right|}}.$$

Отсюда следует, что на каждом из отрезков $[0, x_{0,n}]$, $[x_{0,n}, x_{1,n}]$,..., $[x_{n-1,n}, x_{n,n}]$, $[x_{n,n}, \pi]$ собственная функция может быть представлена как

$$\hat{y}(x, q, \lambda_n) = \eta_{l,n}\sqrt{\Big|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}, \quad 0 \le l \le n+1, \tag{14}$$

где каждый индекс l у константы $\eta_{l,n}$ соответствует номеру отрезка, в который попадает x, а последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ произвольная, стремящаяся к x вдоль плотного в отрезке $[0, \pi]$ множества $\mathbb{M}$, т. е. $x_p \in \mathbb{M}$. По определению [40, Гл. IV, §1] обобщённого решения дифференциального уравнения задачи Штурма-Лиувилля (1), функция $y(x, q, \lambda_n)$ на каждом из отрезков $[0, x_{0,n}]$, $[x_{0,n}, x_{1,n}]$,... $[x_{n-1,n}, x_{n,n}]$, $[x_{n,n}, \pi]$ имеет абсолютно непрерывную производную и почти всюду вторую производную, которая при подстановке в уравнение задачи (1) обращает его в верное равенство почти всюду. Отсюда следует существование для почти всех $x \in [0, \pi]$ второй производной

$$\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}$$

и представление

$$q(x) - \lambda_n \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{y}''(x, q, \lambda_n)}{\hat{y}(x, q, \lambda_n)}$$

$$\overset{\text{п.в.}}{=} \frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Таким образом, потенциал задачи Штурма-Лиувилля (1), удовлетворяющий условию нормировки (3), может быть представлен через значения дифференциала Гато при приращении в виде дельта функции Дирака следующим образом:

$$q(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}\right)^{-1} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}\right)^{-1}\right\}dx.$$

Теорема 3 доказана.

□

Доказательство предложения 1. Утверждение предложения 1 сразу следует из теоремы 3, если в качестве $\mathbb{M}$ взять весь отрезок $[0, \pi]$, а последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ выбирать стационарной.

Предложение 1 доказано.

□

Доказательство предложения 2. По определению [40, Гл. IV, §1] обобщённого решения дифференциального уравнения задачи Штурма-Лиувилля (1) функция $y(x,q,\lambda_n)$ на каждом из отрезков $[0,x_{0,n}]$, $[x_{n,n},\pi]$ имеет абсолютно непрерывную производную. Из представления (14) следует существование $\frac{d\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx}$ на концах отрезка $[0,\pi]$ и возможность определения параметров краевых условий задачи Штурма-Лиувилля (1) по формулам (7).

Предложение 2 доказано.

□

Замечание. Из представления (13) *и теоремы 2, в частности, следует, что при* $x<x_{k,n}$, $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\ge 0$, *а при* $x>x_{k,n}$ $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\le 0$. *Если возмущать функцией Дирака потенциал в узле, то сам этот узел и другие узлы останутся неподвижными. Действительно, из* (13) *следует*

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_{l,n})]\frac{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}{\beta_{k,n}(x_{l,n})}=\hat{y}^2(x_{l,n},q,\lambda_n)=0,\quad k,l\in[0,n].$$

Доказательство предложения 3. В силу непрерывности функции (15) из (14) следует истинность равенства (15) всюду на $[0,\pi]$.

Предложение 3 доказано.

□

Замечание. В предположениях теоремы 3 для нормированного с помощью соотношения (3) *потенциала n-е собственное значение задачи* (1) *определяется формулой*

$$\lambda_n=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left\{\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1}\right\}dx.$$

Значения дифференциала Гато позволяют не только вычислить собственное значение, но и определить собственную функцию $\hat{y}(x,q,\lambda_n)$. Для этого нужно соответствующим образом подобрать константы $\eta_{l,n}$ в представлении (14).

Доказательство теоремы 4. В силу (9) и (13) для любого $x\in\mathbb{M}$ имеем равенство

$$\frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}\hat{y}^2(x,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(x)=Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]=$$
$$=D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},\delta[1](x)]=\frac{1}{\left[\hat{\tilde{y}}'(\tilde{x}_{l,m},\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\right]^2}\hat{\tilde{y}}^2(\tilde{x},\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\tilde{\beta}_{l,m}(x).$$

Откуда следует, что множества узлов рассматриваемых задач совпадают, и на каждом из отрезков $[0,x_{0,n}]$, $[x_{0,n},x_{1,n}]$,..., $[x_{n-1,n},x_{n,n}]$, $[x_{n,n},\pi]$ собственные функции могут быть представлены как

$$\hat{\tilde{y}}(x,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)=\hat{y}(x,q,\lambda_n)=\eta_{\nu,n}\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|},\quad 0\le\nu\le n+1,\tag{16}$$

где каждый индекс ν у константы $\eta_{\nu,n}$ соответствует номеру отрезка, в который попадает x, а последовательность $\{x_p\}_{p=1}^\infty$ произвольная, стремящаяся к x вдоль плотного в отрезке $[0,\pi]$ множества $\mathbb{M}$, т. е. $x_p\in\mathbb{M}$. Теперь из представления (15) устанавливаем, что

$$\tilde{q}-\tilde{\lambda}_m=q-\lambda_n$$

почти всюду на $[0,\pi]$. Проинтегрировав по τ полученное соотношение в пределах от 0 до π с учётом нормировки (3), получим $\lambda_n=\tilde{\lambda}_m$. Из (16) следуют также равенства $\tilde{\alpha}=\alpha$ и $\tilde{\beta}=\beta$.

Теорема 4 доказана.

□

Замечание. Аналогично устанавливается, что некоторый нуль $x_{k,n}[q]$ (4) *одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1) *и значения* $Dx_{k,n}[q, \delta[1](x)]$ *дифференциала Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q \in C[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *в каждой точке* x *плотного множества в отрезке* $[0,\pi]$ *единственным образом определяют потенциал* $q \in C[0,\pi]$ *с точностью до нормировки* (3).

Доказательство теоремы 5. Пусть при некоторых $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m, n, m \in \mathbb{N}$ $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0,\pi)$ общий нуль рассматриваемых в теореме 5 задач Штурма-Лиувилля, тогда из теоремы 2 и (10) для любого $w \in \mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]$ имеем равенство

$$\begin{aligned} 0 &= Dx_{k,n}[q,w] - D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},w] \\ &= \int_0^\pi w(\tau)\Big\{ \frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*,q,\lambda_n)\big]^2}\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\big]^2}\hat{\tilde{y}}^2(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\tilde{\beta}_{l,m}(\tau)\Big\}\,d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу (2) функция

$$\frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*,q,\lambda_n)\big]^2}\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau) - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\big]^2}\hat{\tilde{y}}^2(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\tilde{\beta}_{l,m}(\tau)$$

принадлежит множеству $\mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]$. Взяв в качестве приращения обоих дифференциалов Гато функцию

$$w(\tau) = \frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*,q,\lambda_n)\big]^2}\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau) - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\big]^2}\hat{\tilde{y}}^2(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\tilde{\beta}_{l,m}(\tau),$$

из (17) получим

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \Big\{ \frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*,q,\lambda_n)\big]^2}\hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\big]^2}\hat{\tilde{y}}^2(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\tilde{\beta}_{l,m}(\tau)\Big\}^2 d\tau = 0. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то в силу теоремы 2 имеем представление

$$\hat{\tilde{y}}(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m) \overset{\text{п.в.}}{=} \begin{cases} C_1\hat{y}(\tau,q,\lambda_n), & \text{при } \tau \in [0,x^*], \\ C_2\hat{y}(\tau,q,\lambda_n), & \text{при } \tau \in (x^*,\pi], \end{cases} \qquad C_i \neq 0,\ i = 1,2. \tag{18}$$

Соотношение $C_i \neq 0$, $i = 1,2$ следует из условия $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0,\pi)$, и, значит, $\beta_{k,n}(\tau) \neq 0$, $\tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \neq 0$. В силу того, что $\hat{y}$ и $\hat{\tilde{y}}$ есть решения дифференциальных уравнений задачи (1) при соответствующих собственных значениях λ_n, $\tilde{\lambda}_m$ и потенциалах q и $\tilde{q}$, получаем

$$q(\tau) - \lambda_n \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{y}''(\tau,q,\lambda_n)}{\hat{y}(\tau,q,\lambda_n)} \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{\tilde{y}}''(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_n)}{\hat{\tilde{y}}(\tau,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)} \overset{\text{п.в.}}{=} \tilde{q}(\tau) - \tilde{\lambda}_m. \tag{19}$$

Проинтегрировав по τ полученное соотношение в пределах от 0 до π с учётом нормировки (3), получим $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$.

Соотношения $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$ также следуют из (1), (8) и (18).

Теорема 5 доказана.

□

Доказательство предложения 4. Для того чтобы установить истинность предложения 4 в доказательстве теоремы 5, доопределим потенциалы q и $\tilde{q}$ в соотношении (19) по непрерывности.

Предложение 4 доказано.

□

Доказательство предложения 5. Чтобы не усложнять рассуждения громоздкими техническими деталями, приведём доказательство для случая краевых условий Дирихле $\alpha = \pi m, \beta = \pi p, m, p \in \mathbb{Z}$.

В качестве $\tilde{q}$ возьмём $\tilde{q} \equiv 0$, тогда $\tilde{x}_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$. Для произвольного интервала $(a,b) \subset [0,\pi]$ найдутся такие $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k_0 \le n-1$, что $[x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n}] \subset (a,b)$.

Пусть $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$. Рассмотрим неудовлетворяющий условию нормировки (3) потенциал

$$\breve{q}(x,z,t) = \begin{cases} \frac{2}{(x-x_{k_0,n}-t)^2-t^2+z^2}, & x_{k_0,n}+z \le x \le x_{k_0,n}+t, \\ \frac{2}{(x_{k_0+1,n}-x-t)^2-t^2+z^2}, & x_{k_0+1,n}-t \le x \le x_{k_0+1,n}-z, \\ -n^2, & x \in [0,\pi] \setminus [x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n}], \\ 0, & \text{в остальных точках } [0,\pi]. \end{cases} \tag{20}$$

Собственная функция задачи (1) с потенциалом (20), соответствующая n-му собственному значению $\breve{\lambda}_n = 0$, имеет вид:

$$y(x,\breve{q},\breve{\lambda}_n,z,t) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{k_0} Y(x-x_{k_0,n},z,t), & x_{k_0,n} \le x \le \frac{x_{k_0,n}+x_{k_0+1,n}}{2}, \\ (-1)^{k_0} Y(x_{k_0+1,n}-x,z,t), & \frac{x_{k_0,n}+x_{k_0+1,n}}{2} < x \le x_{k_0+1,n}, \\ \sin nx, & x \in [0,\pi] \setminus [x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n}], \end{cases} \tag{21}$$

где

$$Y(x,z,t) = \begin{cases} nx, & \text{при } x \in [0,z], \\ -\frac{n}{2(t-z)}(x-t)^2 + nz + \frac{n(t-z)}{2}, & \text{при } x \in (z,t], \\ nz + \frac{n(t-z)}{2}, & \text{при } x \in (t, \frac{\pi}{2n}]. \end{cases}$$

Здесь собственные функции задач (1) с потенциалами (20) и $\tilde{q} \equiv 0$ при любых $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$ одинаково нормированы условием $y'(0,\breve{q},\breve{\lambda}_n,z,t) = \tilde{y}'(0,n^2) = n$. Кроме того, множества их нулей $x_{k,n} = \tilde{x}_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $0 \le k \le n$ совпадают.

На треугольнике $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$ рассмотрим функцию

$$F(z,t) = \frac{1}{2}\|y^2(\cdot,\breve{q},\breve{\lambda}_n,z,t)\|^2_{L_2(x_{k_0,n},x_{k_0+1,n})} - \frac{1}{2}\|\tilde{y}^2(\cdot,\tilde{q},n^2)\|^2_{L_2(x_{k_0,n},x_{k_0+1,n})} =$$

$$= \frac{n^2z^3}{3} + \frac{n^2(t-z)^3}{20} - \frac{n^2(t+z)(t-z)^2}{6} + \left\{\frac{n(t+z)}{2}\right\}^2\left(\frac{\pi}{2n} - z\right) - \frac{\pi}{4n}.$$

В замкнутой области $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$ функция F непрерывна. Через точки с координатами $z=0$, $t=0$ и $z=\frac{\pi}{2n}$, $t=\frac{\pi}{2n}$ проведём непрерывную кривую Γ, принадлежащую внутренности (кроме концов кривой) области $0 < z < t < \frac{\pi}{2n}$. Так как $F(0,0) = -\frac{\pi}{4n}$, а $F(\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{4n}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$, то на кривой Γ найдутся точки с координатами $(z^*,t^*) \in \Gamma$, $0 < z^* < t^* < \frac{\pi}{2n}$, для которых (смотрите (21)) справедливо равенство

$$F(z^*,t^*) = \frac{1}{2}\|y^2(\cdot,\breve{q},\breve{\lambda}_n,z^*,t^*)\|^2_{L_2(x_{k_0,n},x_{k_0+1,n})} - \frac{1}{2}\|\tilde{y}^2(\cdot,\tilde{q},n^2)\|^2_{L_2(x_{k_0,n},x_{k_0+1,n})} = 0,$$

где $0 < z^* < t^* < \frac{\pi}{2n}$.

Отсюда, а также из теоремы 2 и (21) получаем соотношения

$$\|y^2(\cdot,\breve{q},\breve{\lambda}_n,z^*,t^*)\|^2_{L_2(0,\pi)}=\|\tilde{y}^2(\cdot,\tilde{q},n^2)\|^2_{L_2(0,\pi)},\quad \breve{\beta}_{k,n}\equiv\tilde{\beta}_{k,n}\text{ на }[0,\pi],\quad 0\le k\le n,$$

и

$$Dx_{k,n}[\breve{q},\delta[1](x)]=D\tilde{x}_{k,n}[\tilde{q},\delta[1](x)],$$
$$\text{для любого } x\in[0,\pi]\setminus(x_{k_0,n},x_{k_0+1,n}), 0\le k\le n.$$

Откуда следует (12).

После нормировки потенциала

$$\breve{q}(x,z^*,t^*)=\begin{cases}\frac{2}{(x-x_{k_0,n}-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}}, & x_{k_0,n}+z^*\le x\le x_{k_0,n}+t^*,\\ \frac{2}{(x_{k_0+1,n}-x-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}}, & x_{k_0+1,n}-t^*\le x\le x_{k_0+1,n}-z^*,\\ -n^2, & x\in[0,\pi]\setminus[x_{k_0,n},x_{k_0+1,n}],\\ 0, & \text{в остальных точках } [0,\pi]\end{cases}$$

получаем удовлетворяющий условиям (3), (11) и (12) потенциал

$$q(x)=\breve{q}(x,z^*,t^*)-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\breve{q}(x,z^*,t^*)\,dx.$$

Так как функция $(x-x_{k_0,n}-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}$ на отрезке $x_{k_0,n}+z^*\le x\le x_{k_0,n}+t^*$ и функция $(x_{k_0+1,n}-x-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}$ на отрезке $x_{k_0+1,n}-t^*\le x\le x_{k_0+1,n}-z^*$ отделены от нуля, то потенциал q является функцией ограниченной вариации на $[0,\pi]$. В силу (21) все нули собственных функций $y(\cdot,q,\lambda_n,z^*,t^*)$ и $\tilde{y}(\cdot,\tilde{q},n^2)$ совпадают.

Случай произвольных α, $\beta\in\mathbb{R}$ доказывается аналогично.

Предложение 5 доказано.

□

Замечание. Так как кривая Γ *в доказательстве предложения 5 выбиралась произвольным образом во внутренности области* $0<z<t<\frac{\pi}{2n}$*, то различных точек* (t^*,z^*)*, а, следовательно, и различных потенциалов* q*, удовлетворяющих условиям* (11), (12) *предложения 5, не менее континуума.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Изв. РАН, Сер. мат.. **64**, №4. 2000. С. 47–108.
2. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки. **66**, №6. 1999. С. 897–912.
3. Савчук А.М. *О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом* // Матем. заметки. **69**, №2. 2001. С. 277–285.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. **260**. 2008. С. 227–247.
5. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева* // Матем. заметки. **80**, №6. 2006. С. 897–912.
6. Велиев О.А., Шкаликов А.А. *О базисности Рисса собственных и присоединённых функций периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля* // Матем. заметки. **85** 5, 2009. С. 671–686.
7. Суетин С.П. *Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля* // УМН. 2006. **61** 2(368). С. 171–172.
8. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением* // Изв. РАН. Сер. матем.. 2008. **72** №4. С. 37–66.

9. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре самосопряженного дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами* // Матем. сб.. 2007. **198** №8. С. 3–34.
10. Борисов Д.И. *О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов* // ТМФ. 2007. **151** №2. С. 207–218.
11. Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. *Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети* // Успехи мат. наук. **59**, №3(357). 2004. С. 116–150.
12. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Ищенко А.С., Шабров С.А. *О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля* // Матем. заметки. **82**, №4. 2007. С. 578–582.
13. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. *Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач* // Успехи мат. наук. **63**, №1(379). 2008. С. 111–154.
14. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Мат. сборник. 2009. **200**. 11. С. 61–108.
15. Трынин А.Ю. *Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма-Лиувилля* // Сибирск. матем. журнал **51**. 3. 2010. С. 662–675.
16. Амбарцумян В.А. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie* // Zeitschr. für Physik. 1929. **53.** P. 690–695.
17. G. Borg *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe* // Acta Math. 1946. **78,** 1. P. 1–96.
18. N. Levinson *On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase* // Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. 1949. **25** 9. P. 25.
19. Чудов Л.А. *Обратная задача Штурма-Лиувилля* // Матем. сб. 1949. **25(67).** 3. С. 451–454.
20. Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка* // ДАН. 1950. **72,** 3. С. 457–460.
21. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции* // Известия Академии Наук СССР, Серия математическая. 1951. **15**. С. 309–360.
22. Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка* // Труды Моск. матем. об-ва. 1952. **1**. С. 327–420.
23. Левитан Б.М. *Об определении оператора Штурма — Лиувилля по одному и двум спектрам* // Известия Академии Наук СССР, Серия математическая. **Т.42**, № 1. 1978. С. 185—199.
24. Левитан Б.М. *Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов* // Тр. ММО. **45**. 1982. С. 3—36.
25. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость, Функциональный анализ и его приложения* // 2010. **44**, № 4. С. 34–53.
26. Белишев В.М. *Граничное управление и обратные задачи: одномерный вариант BC-метода, Математические вопросы теории распространения волн. 37* // Зап. научн. сем. ПОМИ, **354**, ПОМИ, СПб., 2008. С. 19–80.
27. J.R. McLaughlin *Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result* // J. Differ. Equations. 1988. **73**, №2. P. 354–362.
28. E.S. Panakhov, H. Koyunbakan *Inverse Nodal Problems for Second Order Differential Operators with a Regular Singularity* // International Journal of Difference Equations. 2006. **1** №2. P. 241—247, ISSN 0973-6069.
29. Y-H. Cheng, C.K. Law, J. Tsay *Remarks on a New Inverse Nodal Problem* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. **248**. P. 145–155.
30. Sh. Akbarpoor, A.H. Dabbaghian *The Uniqueness Theorem for Boundary Value Problem with Aftereffect and Eigenvalue in the Boundary Condition* // Int. J. Contemp. Math. Sciences. 2011. **6**, №. 20. P. 963–970.
31. M. Sat, E.S. Panakhov *Inverse nodal problem for Sturm-Liouville operators with coulomb potential* // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. **80**, №2. P. 173–180.
32. Юрко В.А. *Обратные узловые задачи для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на звездообразном графе* // Сибирский мат. журн., Март-апрель. 2009. **Т. 50**, № 2. С. 469–475.

33. Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* Киев: „Наукова думка“. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1977.
34. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: „Наука“, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1984.
35. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.* М.: "Наука" , Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 432 с. ISBN 5-02-013751-0.
36. Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. №9(460). С. 60–73.
37. Трынин А.Ю. *Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* // Уфимский матем. журн.. Том 3, № 4. 2011. С. 133–143.
38. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: "Наука" , Гл. ред-ия физико-математической литературы. 1988.
39. Никольский С.М. *Курс математического анализа. Т. 2.* М.: "Наука" , Гл. ред-ия физико-математической литературы. 1983.
40. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: "Мир" , 1970.

Александр Юрьевич Трынин,
Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83,
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: atrynin@gmail.com