Уфимский
Математический
Журнал

2013. Том 5. № 4

СОДЕРЖАНИЕ

Учредители:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,

ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный
технический университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический
университетим. М. Акмуллы»

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций (Свид. ПИ № ФС77-50877 от 14.08.2012)

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей доступны в Интернете на сайтах Института математики с ВЦ УНЦ РАНmatem.anrb.ru, Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала mathnet.ru

Статьи журнала реферируются в Zentralblatt MATH (ZBMATH).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России журналвключен вПеречень ведущихрецензируемых научных журналов и изданий.

Технические редакторы: Р.Н. Гарифуллин, А.А. Махота.
Корректура:О.А. Соколова.

Подписано в печать 23.12.2013 г. Формат 60 ×84/8.
Усл. печ. л. ???. Уч.-изд. л. ???. Тираж 500 экз. Изд. № ???. Заказ № ???.
Цена договорная.

Отпечатано с предоставленных файлов в редакционно-издательском центре
Уфимского государственного авиационного технического университета.
450074, г.Уфа, ул.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:
ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г.Уфа, ул.Чернышевского, 112, к. 22. Тел.+7 347 273 3342.
E-mail: umj@matem.anrb.ru
URL: http://matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863. Ufimskii matematičeskij žurnal.
Индексвкаталоге «Роспечать» 57382.

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 3-16.

УДК 519.216.73, 519.216.71

ОДНОМЕРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ПОТРАЕКТОРНЫЙ ПОДХОД

М.А. АБДУЛЛИН, Н.С. ИСМАГИЛОВ, Ф.С. НАСЫРОВ

Аннотация. Исследуются потраекторные аналоги одномерных стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом. Найдены условия существования, единственности решений, непрерывности и дифференцируемости по параметру, линеаризуемости таких уравнений, исследована структура решения.

Ключевые слова: симметричный интеграл, дифференциальные уравнения с симметричным интегралом.

Mathematics Subject Classification: 60H10, 60H05

1. Введение. Симметричный интеграл и его свойства

В стохастическом анализе (см., напр. [5]) в основном применяются два вида интегралов, это интегралы Ито и интегралы Стратоновича. Оказалось, что интеграл Стратоновича более восприимчив к обобщению, и его детерминированным аналогом является симметричный интеграл. Симметричные интегралы были введены последним из авторов, систематическое изложение теории симметричных интегралов и некоторые результаты по теории уравнений с симметричными интегралами приведены в монографии [8].

Главная цель данных исследований – перенести на язык теории функций ту часть стохастического анализа, которая может быть построена с привлечением понятия симметричного интеграла. При таком подходе интегрирование можно вести по произвольной непрерывной функции (реализации случайного процесса), а интегранды не обязаны быть предсказуемыми.

Ниже приводятся определение и некоторые свойства симметричного интеграла (см. подробнее в [6], [8]).

Пусть $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, – произвольная непрерывная функция, тогда *симметричным интегралом* называется

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s, X^{(n)}(s))(X^{(n)})'(s)ds, \tag{1}$$

где $X^{(n)}(s)$ – ломаная, построенная по разбиению $\{t_k^{(n)}\}$ отрезка $[0, t]$ и функции $X(s)$, причем $\max_k(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$.

M.A. Abdullin, N.S. Ismagilov, F.S. Nasyrov, One dimensional stochastic differential equations: pathwise approach.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Поступила 24 августа 2013 г.

Будем говорить, что для пары функций $(X(s), f(s,u))$ справедливо условие (S), если выполнены следующие предположения:
(a) $X(s)$, $s \in [0,t]$, – непрерывная функция;
(b) При п. в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, непрерывна справа и имеет ограниченную вариацию;
(c) Полная вариация $|f|(t,u)$ по переменной s функции $f(s,u)$ на $[0,t]$ локально суммируема по переменной u;
(d) При п. в. u $\int_0^t \mathbf{1}(s : X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$.

В [6], [8] показано, что если для функций $(X(s), f(s,u))$ справедливо условие (S), то симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s) * dX(s)$ существует.

Важные свойства симметричного интеграла.

1. Пусть для $(X(s), f(s,u))$ справедливо условие (S), тогда

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,u)du - \int_R \int_0^t \kappa(u, X(0), X(s)) f(ds,u)du, \tag{2}$$

где $\kappa(u,a,b) = sign(b-a)\mathbf{1}(a \wedge b < u < a \vee b)$.

2. Для симметричного интеграла имеет место дифференциал, соответствующий стохастическому дифференциалу с интегралом Стратоновича.
Пусть функция $F(t,u)$ имеет непрерывные частные производные F'_t и F'_u, тогда существует симметричный интеграл $\int_0^t F'_u(s,X(s)) * dX(s)$, и справедлива формула

$$F(t,X(t)) - F(0,X(0)) = \int_0^t F'_u(s,X(s)) * dX(s) + \int_0^t F'_s(s,X(s))ds. \tag{3}$$

3. Пусть $Y(s)$, $s \in R^+$, – непрерывная функция, положим $X(s) = g(s,Y(s))$, где функция $g(s,y)$, $s \in R^+$, $y \in R$ совместно непрерывна вместе со своими частными производными $g'_s(s,y)$ и $g'_y(s,y)$. Пусть выполнены условия:

- Функции $f(s,u)$, $f'_s(s,u)$, $\phi(s,y)$, $\phi'_s(s,y)$, где $\phi(s,y){=}f(s,g(s,y))g'_y(s,y)$, совместно непрерывны.
- Пары функций $(X(s), f(s,u))$ и $(Y(s), \phi(s,y))$ удовлетворяют условию (S) на $[0,t]$.

Тогда справедлива формула замены переменных в симметричном интеграле

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t f(s, g(s,Y(s)))g'_y(s,Y(s)) * dY(s) +$$

$$+ \int_0^t f(s, g(s,Y(s)))g'_s(s,Y(s))ds.$$

Пусть $W(s) = W(s,\omega)$ – стандартный винеровский процесс, тогда в рамках формулы Ито для почти всех траекторий винеровского процесса потраекторный симметричный интеграл $\int_0^t f(s,W(s)) * dW(s)$ совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича $\int_0^t f(s,W(s)) * dW(s)$. Поэтому мы в этой ситуации будем применять одни и те же обозначения для обоих типов интегралов.

2. О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Новый тип интегралов поставил задачу переноса части результатов теории стохастических дифференциальных уравнений (в дальнейшем–СДУ) на детерминированный язык. Хотя класс подынтегральных выражений для симметричного интеграла сравнительно узок, он оказался достаточным для построения содержательной теории детерминированных аналогов СДУ.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения с симметричным интегралом

$$d\xi_t = \sigma(t, X(t), \xi_t) * dX(t) + b(t, X(t), \xi_t)dt, \quad \xi_0 = \xi(0), \quad t \in [0, t_0], \tag{4}$$

где $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная функция.

Решением задачи Коши уравнения (4) называется функция $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ с непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$ такая, что дифференциал с симметричным интегралом этой функции совпадает с правой частью уравнения (4).

Теорема 1. *Пусть $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная функция, а коэффициенты уравнения $\sigma(t, v, \phi)$ и $b(t, v, \phi)$ совместно непрерывны. Предположим, что функция $\varphi(t, v)$, $\varphi(0, X(0)) = \xi(0)$ обладает непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$, и при п. в. $t \in [0, t_0]$ удовлетворяет системе уравнений:*

$$\varphi'_t(t, X(t)) = b(t, X(t), \varphi(t, X(t))), \tag{5}$$

$$\varphi'_v(t, X(t)) = \sigma(t, X(t), \varphi(t, X(t))). \tag{6}$$

Тогда при всех $t \in [0, t_0]$ существует симметричный интеграл

$$\int_0^t \sigma(s, X(s), \varphi(s, X(s))) * dX(s)$$

и $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ есть решение уравнения (4).

Доказательство. Пусть функция $\varphi(t, v)$, $\varphi(0, X(0)) = \xi(0)$, с непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$ при п.в. $t \in [0, t_0]$ удовлетворяет условиям (5) и (6). Заметим, что ввиду непрерывности выражений в обеих частях равенств (5) и (6), справедливость равенств (5) и (6) при п. в. $t \in [0, t_0]$ равносильна их выполнению при всех $t \in [0, t_0]$. Тогда ввиду формулы для дифференциала с симметричным интегралом имеем:

$$\varphi(t, X(t)) - \xi(0) = \int_0^t \varphi'_v(s, X(s)) * dX(s) + \int_0^t \varphi'_s(s, X(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t \sigma(s, X(s), \xi_s) * dX(s) + \int_0^t b(s, X(s), \xi_s)\, ds.$$

Следовательно, функция $\xi(t) = \varphi(t, X(t))$ является решением задачи Коши (4).

Теорема 2. *Пусть $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная, почти везде не дифференцируемая функция, а коэффициенты уравнения $\sigma(t, v, \phi)$ и $b(t, v, \phi)$ удовлетворяют условиям:*

(a) функция $\sigma(t, v, \phi)$ совместно непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\sigma'_t(t, v, \phi)$ и $\sigma'_\phi(t, v, \phi)$;

(b) функция $b(t, v, \phi)$ совместно непрерывна.

Тогда следующие условия равносильны:

1. Задача Коши (4) имеет решение $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ с функцией $\varphi(t, v)$;

2. Функция $\varphi(t, v)$ с непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$, $\varphi''_{tv}(t, v)$ такая, что $\varphi(0, X(0)) = \xi(0)$, при п. в. $t \in [0, t_0]$ удовлетворяет условиям (5) и (6).

Доказательство. Пусть $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ – решение уравнения (4), тогда при любом $t \in [0, t_0]$ ввиду формул для дифференциала и вычисления симметричного интеграла имеем:

$$\varphi(t, X(t)) - \varphi(0, X(0)) = \int_{X(0)}^{X(t)} \varphi'_v(t, v)dv + \int_0^t \varphi'_s(s, X(0))\, ds =$$

$$= \int_{X(0)}^{X(t)} \sigma(t, v, \varphi(t, v))dv + \int_0^t \left[b(s, X(s), \varphi(s, X(s))) - \int_{X(0)}^{X(s)} (\sigma(s, v, \varphi(s, v))'_s dv \right] ds.$$

Обозначим $\Phi(t,v)=\varphi'_v(t,v)-\sigma(t,v,\varphi(t,v)),\ g(t,X(t))=b(t,X(t),\varphi(t,X(t)))-\varphi'_t(t,X(0))-$ $-\int_{X(0)}^{X(t)}(\sigma(t,v,\varphi(t,v))'_t dv$, тогда полученное выше равенство можно записать в виде:

$$\int_{X(0)}^{X(t)}\Phi(t,v)dv=\int_0^t g(s,X(s))ds. \tag{7}$$

Заметим, что правая часть в равенстве (7) непрерывно дифференцируема по t как интеграл с переменным верхним пределом, значит, левая тоже, поэтому, дифференцируя обе части равенства (7) по переменной t, имеем:

$$g(t,X(t))-\int_{X(0)}^{X(t)}\Phi'_t(t,v)dv=\frac{d}{dt}\left(\int_{X(0)}^{X(t)}\Phi(p,v)dv\right)\Bigg|_{p=t},\quad t\in[0,t_0]. \tag{8}$$

Положим

$$a_t(h)=\frac{1}{h}\int_{X(t)}^{X(t+h)}\Phi(t,v)dv,\quad r_t(h)=\frac{1}{X(t+h)-X(t)}\int_{X(t)}^{X(t+h)}\Phi(t,v)dv,$$

если $X(t+h)\neq X(t)$, и $r_t(h)=\Phi(t,X(t))$ в случае $X(t+h)=X(t)$. Ввиду формулы (8) при каждом t существует конечный предел $a(t)=\lim\limits_{h\to 0}a_t(h)$, а предел $r(t)=\lim\limits_{h\to 0}r_t(h)$ существует и конечен в силу непрерывности функции $\Phi(t,v)$ по переменной v, и при этом справедливо при каждом $h\neq 0$ равенство

$$\frac{a_t(h)}{r_t(h)}=\frac{X(t+h)-X(t)}{h}. \tag{9}$$

Но функция $X(t)$ почти везде не дифференцируема, поэтому при п. в. t предел в левой части (9) при $h\to 0$ бесконечен или не существует. Последнее возможно только в том случае, когда либо $a(t)\neq 0,\ r(t)=0$ или $a(t)=r(t)=0$, то есть в любом случае $r(t)=0$. Значит, для любого $t\in[0,t_0]$ справедливо соотношение (6). Далее, ввиду (6) из формулы

$$\varphi'_v(t,X(t))*dX(t)+\varphi'_t(t,X(t))dt=\sigma(t,X(t),\xi_t)*dX(t)+b(t,X(t),\xi_t)dt$$

следует справедливость условия (5).

Для системы уравнений (5), (6), которая является непривычного вида системой уравнений вдоль траектории функции $X(s)$, хорошо разработанные методы решения, по-видимому, отсутствуют. Поэтому представляется разумным заменить задачу решения системы (5), (6) на задачу решения следующей цепочки уравнений

$$\varphi'_v(t,v)=\sigma(t,v,\varphi(t,v)),\ \varphi'_t(t,X(t))=b(t,X(t),\varphi(t,X(t))),\ \varphi(0,X(0))=\xi(0). \tag{10}$$

В этом случае мы можем воспользоваться методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем – ОДУ). Действительно, общее решение первого уравнения из (10), если оно существует, зависит от произвольной функции $C(t)$: $\varphi(t,v)=\varphi^*(t,v,C(t))$, здесь $\varphi^*(t,v,C)$ известная функция, при этом ввиду теоремы о дифференцируемости по параметру решений ОДУ функция $C(t)$ гладкая. Подставляя найденную функцию $\varphi^*(t,v,C(t))$ во второе уравнение из (10), приходим к задаче Коши для неизвестной функции $C(t)$

$$(\varphi^*)'_t(t,X(t),C(t))+(\varphi^*)'_C(t,X(t),C(t))C'(t)=b(t,X(t),\varphi^*(t,X(t),C(t))),$$

$\varphi^*(0,X(0),C(0))=\xi(0)$. Очевидно, решение цепочки (10), если такое существует, дает решение системы (5), (6). Это означает, что вопрос существования решения уравнения (1) можно свести к задаче выяснения условий разрешимости ОДУ из цепочки (10).

Рассмотрим более подробно задачу Коши для более простого уравнения с симметричным интегралом

$$d\xi_t=\sigma(t,\xi_t)*dX(t)+b(t,\xi_t)dt, \tag{11}$$

где $X(t)$ – непрерывная функция.

Предположим, что в области $G = \{(s,\phi)\} \subseteq R^2$ справедливы следующие условия:

- Найдется константа σ_0 такая, что $|\sigma(t,\phi)| \geq \sigma_0 > 0$.
- Функция $\sigma(t,\phi)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным.
- Функция $b(t,\phi)$ непрерывна и удовлетворяет локально условию Липшица по ϕ, то есть для любой точки $(t_0,\phi_0) \in G$ найдется окрестность этой точки U такая, что $|b(t,\phi_1) - b(t,\phi_2)| \leq L|\phi_1 - \phi_2|$ для всех $(t,\phi_k) \in U$, $k = 1,2$, где L не зависит от точек из U.

Заметим, что первое из соотношений в (10) сразу приводит к равенству

$$\Phi(t,\phi,v) \equiv \int \frac{d\phi}{\sigma(t,\phi)} - v = 0.$$

Поскольку ввиду наших предположений при $(t,\phi) \in G$, $v \in R$ существуют непрерывные производные $\Phi'_t(t,\phi,v)$, $\Phi'_v(t,\phi,v)$ и отличная о нуля производная $\Phi'_\phi(t,\phi,v)$, то в силу теоремы о неявной функции (см. [4], стр. 48) существует (локально) функция $\phi = \phi^*(t,v)$, которая непрерывно дифференцируема по t и v. Для любой точки $(t_0,\phi_0) \in G$ обозначим через $J_0(t_0,\phi_0)$ максимальный интервал, в котором существует неявная функция $\phi = \phi(t,v,t_0,\phi_0)$ с начальными данными $\phi(t,X(t_0)) = \phi_0$.

Второе уравнение из (10) можно записать в виде

$$C'(t) = \frac{b(t,\phi(t,X(t)+C(t))) - (\phi)'_t(t,v)|_{v=X(t)+C(t)}}{\sigma(t,\phi(t,X(t)+C(t)))}. \tag{12}$$

Пусть $C(t_0)$ определяется из равенства $\phi(t_0,X(t_0)+C(t_0)) = \phi_0$. Заметим, что правая часть уравнения (11) непрерывна в G, а в ввиду того факта, что $\sigma(t,\phi)$ непрерывно дифференцируемая на G, а $\phi(t,v)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным, из формулы $(\phi)'_v(t,v)$=$\sigma(t,v,\phi(t,v))$ вытекает непрерывная дифференцируемость функции $(\phi)'_t(t,v)|_{v=X(t)+C}$ по переменной C. Следовательно, в силу теоремы 2.3.2 из [4] $G^{(1)} = \{(t,C) : (t,\phi(t,X(t)+C)) \in G\}$ есть область единственности для уравнения (11), и $C(t) = C(t,t_0,C_0)$ есть решение уравнения (11) с начальными данными (t_0,C_0), определенное на множестве $D = \{(t,t_0,C_0) : (t_0,C_0) \in G^{(1)}, t \in J_1(t_0,C_0)\}$, где $J_1(t_0,C_0)$ – максимальный интервал существования решения уравнения (11). Поэтому для любых начальных данных $(t_0,\phi_0) \in G$ существует решение $\xi_t = \phi^*(t,X(t)+C(t))$ на интервале $J(t_0,\phi_0) = J_0(t_0,\phi_0) \cap J_1(t_0,C_0)$.

Пример 1. Рассмотрим линейное уравнение Ито с постоянными коэффициентами вида

$$\xi_t - \xi_0 = \int_0^t [a\xi_s + b]dW(s) + \int_0^t [e\xi_s + f]ds,$$

здесь первое слагаемое в правой части есть стохастический интеграл Ито. Переходя к соответствующему уравнению со стохастическим интегралом Стратоновича, получим

$$\xi_t - \xi_0 = \int_0^t [a\xi_s + b] * dW(s) + \int_0^t [h\xi_s + g]ds, \tag{13}$$

где $h = e - a^2/2$, $g = f - ab/2$.

Будем искать решение (13) в виде $\xi_t = \phi(t,W(t))$. Составим два уравнения

$$\phi'_u(t,u) = a\phi(t,u) + b, \tag{14}$$

$$\phi'_t(t,u)|_{u=W(t)} = h\phi(t,W(t)) + g, \quad \phi(0,W(0)) = \xi_0. \tag{15}$$

Решение уравнения (14) имеет вид: $\ln(a\phi + b) = u + C(t)$ или

$$\phi(t,u) = \frac{1}{a}\left(e^{u+C(t)} - b\right). \tag{16}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (12), приходим к задаче Коши на неизвестную функцию $C(t)$:

$$\frac{1}{a}e^{W(t)+C(t)}C'(t) = \frac{h}{a}\left(e^{W(t)+C(t)} - b\right) + g, \quad \frac{1}{a}\left(e^{W(0)+C(0))} - b\right) = \xi_0.$$

Полученное ОДУ заменой $z(t) = e^{C(t)}$ сводится к линейному неоднородному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$z'(t) - hz(t) = e^{-W(t)}(ag - bh),$$

решение которого имеет вид

$$z(t) = \left((ag - bh)\int_0^t e^{-W(s)}e^{-hs}ds + C^*\right)e^{hs}.$$

Чтобы построить решение уравнения (13), остается найти с помощью начального условия постоянную C^* и подставить в последнюю формулу.

Докажем одно обобщение леммы Гронуолла.

Лемма 1. *Пусть $\delta(s,v)$, $B(s,v)$, $s \in [a,t_0]$, $v \in R$, и $X(s)$, $s \in [a,t_0]$, – непрерывные функции, $C(s)$, $s \in [a,t_0]$, – непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что пара функций $(\delta(s,v)B(s,v), X(s))$ удовлетворяют условию (S) на $[a,t_0]$, и справедливо равенство*

$$\delta(t, X(t)) = C(t) + \int_a^t \delta(s, X(s))B(s, X(s)) * dX(s), \quad t \in [a,t_0]. \tag{17}$$

Если $\delta(s,X(s)) \neq 0$ при $s \in (a,t_0]$ и конечны интегралы

$$\int_a^t (\delta(s,X(s)))^{-1}C'(s)ds, \qquad \int_a^t B(s,X(s)) * dX(s), \quad t \in (a,t_0),$$

то при тех же t

$$|\delta(t,X(t))|=|\delta(a,X(a))| \ \exp\left\{\int_a^t (\delta(s,X(s)))^{-1}C'(s)ds+\int_a^t B(s,X(s)) * dX(s)\right\}.$$

Доказательство. Пусть $a < \varepsilon < t \leq t_0$, тогда в силу формулы для дифференциала и соотношения (17) имеем:

$$d\left(\ln|\delta(s,X(s))|\right) = \frac{d\delta(s,X(s))}{\delta(s,X(s))} = (\delta(s,X(s)))^{-1}C'(s)ds + B(s,X(s)) * dX(s),$$

следовательно,

$$|\delta(t,X(t))| = |\delta(\varepsilon,X(\varepsilon))| \ \exp\left\{\int_\varepsilon^t (\delta(s,X(s)))^{-1}C'(s)ds + \int_\varepsilon^t B(s,X(s)) * dX(s)\right\}.$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $\varepsilon \to a$, получим формулу (17).

Опираясь на лемму 1, мы можем доказать теорему о единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений с симметричным интегралом.

Теорема 3. *Пусть функция $\sigma(t,v,\phi)$ совместно непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\sigma'_t(t,v,\phi)$ и $\sigma'_\phi(t,v,\phi)$, а функция $b(t,v,\phi)$ и ее производная $b'_\phi(t,v,\phi)$ совместно непрерывны. Если решение задачи Коши (4) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $\xi_t^{(1)} = \varphi^{(1)}(t,X(t))$, $\xi_t^{(2)} = \varphi^{(2)}(t,X(t))$ – два решения задачи Коши (4). Покажем, что тогда $\xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}$ при всех $t \in [0,t_0]$. Положим $\delta(t,X(t)) = \varphi^{(1)}(t,X(t)) - \varphi^{(2)}(t,X(t))$, ввиду начального условия $\delta(t,X(t)) = 0$ при $t = 0$. В силу непрерывности функций $\xi_t^{(1)}$, $\xi_t^{(2)}$ множество $\{t \in [0,t_0] : \xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}\}$ замкнуто.

Предположим, что функция $\delta(t, X(t))$ отлична от нуля на некотором непустом множестве L_0, тогда L_0 открыто и значит представляется в виде объединения не более чем счетного числа интервалов: $L_0 = \cup_k(a_k, b_k)$. Зафиксируем такой интервал (a_k, b_k), который ниже будем обозначать без индекса как (a, b). Для $s \in (a, b)$ положим

$$g_1(s, X(s)) = \frac{\sigma(s, X(s), \xi_s^{(1)}) - \sigma(s, X(s), \xi_s^{(2)})}{\xi_s^{(1)} - \xi_s^{(2)}},$$

$$g_2(s, X(s)) = \frac{b(s, X(s), \xi_s^{(1)}) - b(s, X(s), \xi_s^{(2)})}{\xi_s^{(1)} - \xi_s^{(2)}}.$$

Примем обозначения леммы 1:

$$C(t) = \int_a^t \left[b(s, \varphi^{(1)}(s, X(s))) - b(s, \varphi^{(2)}(s, X(s)))\right] ds,$$

$$B(t, u) = \sigma(t, \varphi^{(1)}(t, u)) - \sigma(t, \varphi^{(2)}(t, u)).$$

Так как пара функций $(g_1(s, v), X(s))$ обладает свойством (S), а $g_2(s, X(s))$ суммируема на любом отрезке $[a, a_1] \subset [a, b)$, то справедливы все предположения леммы 1, поэтому имеет место соотношение (17) на множестве $t \in [a, b)$. Но $\delta(a, X(a)) = 0$, значит, $\xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}$ при всех $t \in [a, b)$ и $L_0 = \emptyset$. Следовательно, справедливо утверждение теоремы 3.

Замечание. Хорошо известно, что в стохастическом анализе существует понятие слабого решения, при этом сильное решение является слабым. Покажем, что в потраекторном анализе функция $X(t)$ может быть также найдена с помощью решения ξ_t уравнения (1), а именно, справедливо следующее равенство:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \frac{1}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} * d\xi_s - \int_0^t \frac{b(s, X(s), \xi_s)}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} ds. \tag{18}$$

Действительно, ввиду формулы замены переменных в симметричном интеграле и уравнения (4) правая часть соотношения (18) равна

$$\int_0^t \frac{1}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} [\sigma(s, X(s), \xi_s) * dX(s) + b(s, X(s), \xi_s) ds] - \int_0^t \frac{b(s, X(s), \xi_s)}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} ds.$$

3. О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

В предыдущем разделе было показано, что решение уравнения (11) имеет вид $\xi(t) = \phi(t, X(t) + C(t))$. Это обстоятельство может оказаться весьма полезным при исследовании СДУ. Пусть, например, в уравнении (11) функции $\sigma(t, \phi)$ и $b(t, \phi)$ детерминированы, а $X(t) \equiv W(t)$ есть траектория винеровского процесса. Тогда вся вероятностная информация о решении СДУ содержится в $W(t) + C(t)$, поскольку диффузионный процесс, определяемый как решение уравнения (11), есть детерминированная функция от суммы винеровского процесса и случайного гладкого сноса. Структура решения уравнения (11) впервые была найдена в работах [8], [7] в случае, когда $\sigma(s, \phi, u) = \sigma(s, \phi) \neq 0$.

Целью данного раздела является нахождение структуры решения уравнения (4) в более общих ситуациях, так как знание структуры позволяет во многих случаях существенно упростить исследования как уравнений с симметричными интегралами, так и СДУ. Выяснилось, что для решения этой задачи оказались эффективны методы группового анализа.

Групповой анализ – один из методов, с помощью которого можно многое узнать об исследуемом дифференциальном уравнении. Аппарат группового анализа широко развит и используется как для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Он довольно подробно изложен в работах [1], [2].

Пусть G – однопараметрическая группа $\bar{u}=f(u,\phi,a)$, $\bar{\phi}=g(u,\phi,a)$ с инфинитезимальным оператором $X=\xi(u,\phi)\frac{\partial}{\partial u}+\eta(u,\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$. Будем говорить, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{d\phi}{du}=\sigma(\phi,u)$ допускает группу G, если

$$\frac{d\bar{\phi}}{d\bar{u}}=\sigma(\bar{\phi},\bar{u}).$$

Как правило, нельзя найти группу, допускаемую обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, однако существуют уравнения, для которых допускаемая группа известна. Любую группу G с оператором $X=\xi(u,\phi)\frac{\partial}{\partial u}+\eta(u,\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$ можно соответствующей заменой переменных привести к группе переносов вдоль одной из осей. Канонические переменные $\hat{\phi}=\hat{\phi}(\phi,u)$, $\hat{u}=\hat{u}(\phi,u)$ находятся (см.[1]) из соотношений:

$$\xi(u,\phi)\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial u}+\eta(u,\phi)\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi}=0,\quad \xi(u,\phi)\frac{\partial\hat{u}}{\partial u}+\eta(u,\phi)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\phi}=1. \tag{19}$$

При этом, если группа G является допускаемой, то переход к каноническим переменным приводит это уравнение к виду, где одна из этих переменных отсутствует, и уравнение можно интегрировать в квадратурах.

Пусть выполнены условия существования и единствнности уравнения (4) и коэффициенты уравнения достаточно гладкие, например, трижды непрерывно дифференцируемы. Отметим, что согласно теореме 1 решение уравнения (4) можно свести к решению цепочки из двух обыкновенных дифференциальных уравнений (10).

Рассмотрим первое уравнение цепочки

$$\phi'_u(s,u)=\sigma(s,u,\phi(s,u)). \tag{20}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, где время s является параметром. В общем случае, если решение (20) существует, то структура решения уравнения (20) представляется в виде: $\Psi(\phi(s,u),u,C(s))=0$, где $C(s)$ – произвольная функция. Для того чтобы найти функцию $C(s)$, необходимо выразить из этого соотношения $\phi(s,u)=\phi^*(s,u,C(s))$ и подставить во второе уравнение цепочки (10). В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение на неизвестную функцию $C(s)$. Начальные условия $\phi(0,X(0))=\eta(0)$ переходят в начальное условие $\phi^*(0,X(0),C(0))=\xi(0)$ для $C(s)$.

Заметим, что нашей задачей является определение структуры уравнения (4), а последнее, как видно из приведенных выше рассуждений, полностью определяется уравнением (20). Поэтому мы будем рассматривать конкретные уравнения (20) с известными допускаемыми группами, интегрировать их, тем самым, находя структуру решения соответствующих уравнений с симметричным интегралом.

Ниже приведены некоторые примеры построения структуры решений. Более полный набор возможных структур решения уравнений вида (4) приведен в таблице 1.

A. Рассмотрим уравнение

$$\xi(t)-\xi(0)=\int\limits_0^t\sigma(s,\xi(s))*dX(s)+\int\limits_0^t b(s,\xi(s))ds,\ t\in[0,T]. \tag{21}$$

Первое уравнение цепочки (10) в этом случае можно проинтегрировать:

$$\phi'_u(s,u)=\sigma(s,\phi(s,u)),\qquad \phi(s,u)=\Psi(s,u+C(s)), \tag{22}$$

где Ψ находится из (22), а $C(t)$ можно определить как решение дифференциального уравнения, если подставить функцию $\Psi(s,X(s)+C(s))$ во второе уравнение цепочки (10).

Отметим, что инфинитизимальный оператор допускаемой уравнением (22) группы имеет вид: $X = \frac{\partial}{\partial u}$. Таким образом, $\xi(s) = \Psi(s, X(s) + C(t))$ есть решение СДУ.

B. Пусть:

$$\sigma(s, u, \phi) = F(s, ku + l\phi), \tag{23}$$

где k и l – известные константы. Инфинитизимальный оператор группы преобразований, допускаемой уравнением (23), имеет вид: $X{=}l\frac{\partial}{\partial u} - k\frac{\partial}{\partial \phi}$. Найдем канонические переменные:

$$l\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial u} - k\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial \phi} = 0, \quad l\frac{\partial\hat{u}}{\partial u} - k\frac{\partial\hat{u}}{\partial \phi} = 1.$$

Решая эти уравнения, получим, например $\hat{\phi} = \frac{u}{l} + \frac{\phi}{k}, \quad \hat{u} = \frac{u}{l}$. Обратная замена: $\phi = k(\hat{\phi} - \hat{u}), \quad u = l\hat{u}$. Переходя к новым переменным, имеем:

$$\hat{\phi}'_{\hat{u}} = \frac{lF(lk\hat{\phi})}{k} + 1, \; \hat{\phi} = \Psi(s, \hat{u} + C(s)).$$

$$\text{Структура решения: } \eta(s){=}k\left(\Psi\left(s, \frac{X(s)}{l}{+}C(s)\right) - \frac{X(s)}{l}\right).$$

C. Рассмотрим случай, когда

$$\sigma(s, u, \phi) = F\left(s, \frac{\phi}{u}\right), \; s \in [t_1, t_2], \; t_1 > 0. \tag{24}$$

Так как в этом случае уравнение (20) однородно, то оно допускает группу с инфинитизимальным оператором $X = u\frac{\partial}{\partial u} + \phi\frac{\partial}{\partial \phi}$. Уравнения (19) для нахождения канонических переменных:

$$\phi\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial u} + u\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial \phi} = 0, \quad \phi\frac{\partial\hat{u}}{\partial u} + u\frac{\partial\hat{u}}{\partial \phi} = 1.$$

Решение этих уравнений можно представить в виде: $\hat{\phi} = \frac{\phi}{u} \quad \hat{u} = \ln u$. Обратная замена: $\phi = \hat{\phi}e^{\hat{u}}, \quad u = e^{\hat{u}}$. Переходя к новым переменным, имеем:

$$\hat{\phi}'_{\hat{u}} = (F(s, \hat{\phi}) - \hat{\phi}), \qquad \hat{\phi} = \Psi(s, \hat{u} + C(s)).$$

Структура решения имеет вид: $\xi(s) = X(s)\Psi\left(s, \ln|X(s)| + C(s)\right)$.

D. Рассмотрим следующий пример:

$$\sigma(s, u, \phi) = \frac{\phi}{u + F(s, \phi)}. \tag{25}$$

Инфинитизимальный оператор группы преобразований, допускаемой уравнением (25), известен: $X = \phi\frac{\partial}{\partial u}$. Уравнения (19) для нахождения канонических переменных: $\phi\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial u} = 0, \quad \phi\frac{\partial\hat{u}}{\partial u} = 1$. Решение этих уравнений можно представить в виде: $\hat{\phi} = \phi, \quad \hat{u} = \frac{u}{\phi}$. Обратная замена: $\phi = \hat{\phi}, \quad u = \hat{\phi}\hat{u}$. Переходя к новым переменным, имеем: $\hat{u}'_{\hat{\phi}} = \frac{F(s,\hat{\phi})}{\hat{\phi}^2}$, $\hat{\phi} = \Psi(s, \hat{u} + C(s))$. Получаем структуру решения в виде: $\phi - \Psi\left(s, \frac{X(s)}{\phi} + C(s)\right) = 0$.

Таблица 1. Структура решения некоторых уравнений вида $\xi(t)-\xi(0)=\int\limits_0^t \sigma(s,\xi(s),X(s)) {*} dX(s)+\int\limits_0^t b(s,\xi(s),X(s))ds$.

Уравнение $\phi_u=\sigma(s,u,\phi)$	Оператор группы	Структура решения $\eta(t)$
1. $\sigma=F(s,\phi)$	$\frac{\partial}{\partial u}$	$\Psi(s,X(s)+C(s))$
2. $\sigma=F(s,u)$	$\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\Psi(s,X(s))+C(t)$
3. $\sigma{=}F(s,ku{+}l\phi),\ k,\ l$ – const	$l\frac{\partial}{\partial u}-k\frac{\partial}{\partial\phi}$	$k(\Psi(s,\frac{X(s)}{l}+C(s))-\frac{X(s)}{l})$
4. $\sigma=F(s,\frac{\phi}{u}),\ u\neq 0$	$u\frac{\partial}{\partial u}+\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)\cdot\Psi(s,\ln\lvert X(s)\rvert+C(s))$
5. $\sigma=u^kF(s,\frac{\phi}{u^k}),\ u\neq 0$	$u\frac{\partial}{\partial u}+k\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$(X(s))^k\Psi(s,\ln\lvert X(s)\rvert+C(s))$
6. $u\sigma=F(s,ue^{-\phi}),\ u\neq 0$	$u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\ln\lvert X(s)\rvert-\Psi(s,\ln\lvert X(s)\rvert+C(s))$
7. $\sigma=\phi F(s,\phi e^{-u})$	$\frac{\partial}{\partial u}+\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$e^{X(s)}\Psi(s,X(s)+C(s))$
8. $\sigma=\frac{\phi}{u}+uF(s,\frac{\phi}{u}),\ u\neq 0$	$\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\phi}{u}\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)\Psi(s,X(s)+C(s))$
9. $u\sigma=\phi+uF(s,\frac{\phi}{u}),\ u\neq 0$	$u^2\frac{\partial}{\partial u}+u\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)\Psi(s,-\frac{1}{X(s)}+C(s))$
10. $\sigma=\frac{\phi}{u+F(s,\phi)}$	$\phi\frac{\partial}{\partial u}$	$\phi-\Psi(s,\frac{X(s)}{\phi}+C(s))=0$
11. $u\sigma=\phi+F(s,u),\ u\neq 0$	$u\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)(\Psi(s,X(s))+C(s))$
12. $u\sigma=\frac{\phi}{\ln\lvert u\rvert+F(s,\phi)},\ u\neq 0$	$\phi u\frac{\partial}{\partial u}$	$\phi-\Psi(s,\frac{\ln\lvert X(s)\rvert}{\phi}+C(s))=0$

* — функция Ψ имеет конкретный вид и определяется из уравнения (20)

** — в случаях 10 и 12 структура решения Ψ определяется неявно

*** — функцию $C(s)$ можно найти из второго уравнения цепочки (12).

4. О НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО ПАРАМЕТРУ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Рассмотрим уравнение с симметричным интегралом

$$d\xi_t=\sigma(t,\mu,\xi_t)*dX(t)+b(t,\mu,\xi_t)dt. \tag{26}$$

Предположим, что в области $G_\mu=\{(t,\mu,\phi)\}$ определены функции $\sigma(t,\mu,\phi)$ и $b(t,\mu,\phi)$, которые в этой области удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $\sigma(t,\mu,\phi)$, $b(t,\mu,\phi)$, $\sigma'_t(t,\mu,\phi)$, $\sigma'_\phi(t,\mu,\phi)$ и $b'_\phi(t,\mu,\phi)$ непрерывны.
2. Найдется положительное число σ_0, такое, что $|\sigma(t,\mu,\phi)|\geq\sigma_0$.

Тогда в силу рассуждений, приведенных в разделе 2, область $G=\{(t,\xi):(t,\mu,\xi)\in G_\mu\}$ есть область единственности решения уравнения (26) с $\xi_t=\xi(t,t_0,\xi(0),\mu)$ и с начальным условием $(t_0,\xi(0))$, которое определено на множестве $D_\mu{=}\{(t,t_0,\xi(0),\mu){:}(t_0,\xi(0),\mu)\in G_\mu\}$, $t\in J(t_0,\xi(0),\mu)$, где $J(t_0,\xi(0),\mu)$ – максимальный интервал существования решения (26).

Теорема 4. *При сделанных предположениях $\xi(t,t_0,\xi(0),\mu)$ непрерывна в D_μ.*

Доказательство. Решение уравнения (26) имеет вид

$$\xi_t=\varphi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu)), \tag{27}$$

где функция $\varphi(t,\mu,v)$ определяется из соотношения

$$\Phi(t,\mu,\phi,v) \equiv \int \frac{d\phi}{\sigma(t,\mu,\phi)} - v = 0. \tag{28}$$

Ввиду предположений теоремы 4 в области $G_\mu \times R$ функция $\Phi(t,\mu,\phi,v)$ совместно непрерывна и имеет непрерывные производные $\Phi'_t(t,\mu,\phi,v)$, $\Phi'_v(t,\mu,\phi,v)$ и отличную от нуля производную $\Phi'_\phi(t,\mu,\phi,v)$. Поэтому в силу теоремы о неявной функции существует функция $\phi(t,\mu,v)$, имеющая непрерывные частные производные $\phi'_t(t,\mu,v)$ и $\phi'_v(t,\mu,v)$. Для любой точки $(t_0,\mu,\phi_0) \in G_\mu$ обозначим через $J^{(0)}(t_0,\mu,\phi_0)$ максимальный интервал, в котором существует неявная функция $\phi = \phi^*(t,\mu,v,t_0,\phi_0)$ с начальными данными $\phi^*(t_0) = \phi_0$.

Далее, функция $C(t,\mu)$ из (27) находится как решение задачи Коши

$$C'_t(t,\mu) = \frac{b(t,\mu,\phi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu)))}{\sigma(t,\mu,\phi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu)))} - \int_0^{\phi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu))} \left(\frac{1}{\sigma(t,\mu,\psi)}\right)'_t d\psi, \tag{29}$$

$$\phi(t_0,\mu,X(t_0)+C(t_0,\mu)) = \xi_0.$$

Рассмотрим множество $G_\mu^{(1)} = \{(t,\mu,C) : (t,\mu,C,\phi(t,\mu,X(t)+C) \in G\mu)$, тогда ввиду теоремы 2.3.2 из [4] множество $G^{(1)}{=}\{(t,C) : (t,C,\mu) \in G_\mu^{(1)}\}$ есть область единственности для уравнения (29) при каждом фиксированном μ.

Пусть $C(t,t_0,C_0,\mu)$ есть решение уравнения (29) с начальными данными $\phi(t_0,\mu,X(t_0)+C_0) = \xi_0$, определенными на множестве $D_\mu^{(1)} = \{(t,t_0,C_0,\mu) \in G_\mu^{(1)}$, $t \in J^{(1)}(t_0,C_0,\mu)\}$, где $J^{(1)}(t_0,C_0,\mu)$ – максимальный интервал существования решения. В силу теоремы 5.1.1. из [4] $D_\mu^{(1)}$ есть область и $C(t,t_0,C_0,\mu)$ непрерывна в $D_\mu^{(1)}$. Значит, решение (27) непрерывно в D_μ, где $J(t_0,C_0,\mu) = J^{(0)}(t_0,\mu,\phi_0) \cap J^{(1)}(t_0,C_0,\mu)$.

Теорема 5. *Пусть справедливы все предположения теоремы 4 и производные* $\sigma'_\mu(t,\mu,\phi)$, $\sigma''_{t\mu}(t,\mu,\phi)$, $b'_\mu(t,\mu,\phi)$ *также непрерывны в области* G_μ. *Тогда решение* $\xi_t = \phi(t,\mu,X(t)+C(t_0,\mu,\xi(0)))$ *задачи Коши (26) имеет в области* D_μ *непрерывные производные* $\eta_t^\mu = \frac{\partial}{\partial\mu}\xi_t$ *и* $\eta_t^{\xi(0)} = \frac{\partial}{\partial\xi(0)}\xi_t$. *При этом справедлива формула*

$$d\eta_t^\mu{=}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\sigma(t,\mu,\xi_t){+}\frac{\partial}{\partial\phi}\sigma(t,\mu,\xi_t)\eta_t^\mu\right] * dX(t) + \left[\frac{\partial}{\partial\mu}b(t,\mu,\xi_t) + \frac{\partial}{\partial\phi}b(t,\mu,\xi_t)\eta_t^\mu\right] dt, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\eta_{t_0}^{\xi(0)} = \frac{\partial}{\partial\mu}\xi_{t_0}.$$

Доказательство. Рассуждения во многом повторяют доказательство теоремы 4. Из предположений теоремы 5 следует, что решение уравнения (26) имеет вид (27) и $\phi(t,\mu,v)$ в силу теоремы о неявной функции имеет непрерывные частные производные по переменным (t,μ,v). Для любой точки $(t_0,\mu,\phi_0) \in G_\mu$ обозначим через $J^{(0)}(t_0,\mu,\phi_0)$ максимальный интервал, в котором существует неявная функция $\phi = \phi^*(t,\mu,t_0,\phi_0)$ с начальными данными $\phi^*(t_0) = \phi_0$.

Далее, ввиду теоремы 5.2.1 из [4] решение $C(t,t_0,C_0,\mu)$ из теоремы 4 имеет непрерывную производную по переменной μ. Поэтому решение $\xi(t,t_0,\xi(0),\mu)$ непрерывно и имеет в D_μ непрерывные производные $\eta_t^\mu = \frac{\partial}{\partial\mu}\xi_t$ и $\eta_t^{\xi(0)} = \frac{\partial}{\partial\xi(0)}\xi_t$. Воспользуемся тем фактом, что в силу теоремы 2 решение уравнения (26) удовлетворяет соотношениям типа (5) и (6). Дифференцируя полученные равенства по μ и снова применив теорему 2 для продифференцированных соотношений, приходим к формуле (30).

5. Линеаризация уравнений первого порядка с симметричным интегралом. Обратное преобразование

1. Рассмотрим уравнение с симметричным интегралом

$$d\xi_t = \sigma(t, X(t), \xi_t) * dX(t) + b(t, X(t), \xi_t)dt, \quad t \in [0, t_0], \tag{31}$$

где $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная почти нигде не дифференцируемая функция.

Цель – показать, как с помощью подходящей замены переменных вида $\eta(t) = g(t, \xi_t)$ уравнение (31) преобразовать в линейное уравнение

$$d\eta(t) = A(t)\eta(t) * dX(t) + B(t)\eta(t)dt. \tag{32}$$

В дальнейшем предполагается, что функции $\sigma(t, X, \xi)$, $b(t, X, \xi)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 1, $\sigma(t, X, \xi) \neq 0$ для всех t, X, ξ, а функции $A(t)$, $B(t)$ непрерывно дифференцируемы.

С помощью формулы для дифференциала для симметричного интеграла и соотношения (31) имеем:

$$dg(t, \xi_t) = [g'_t(t, \xi_t) + g'_\xi(t, \xi_t)b(t, X(t), \xi_t)]dt + [g'_\xi(t, \xi_t)\sigma(t, X(t), \xi_t)] * dX(t).$$

Сравнивая дифференциалы $d\eta(t)$, вычисленные по последней формуле и формуле (32), приходим к соотношению

$$0 \equiv \big[g'_t(t, \xi_t) + g'_\xi(t, \xi_t)b(t, X(t), \xi_t) - B(t)g(t, \xi_t)\big]\, dt +$$
$$+ \big[g'_\xi(t, \xi_t)\sigma(t, X(t), \xi_t) - A(t)g(t, \xi_t)\big] * dX(t).$$

В силу рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, отсюда получим

$$g'_\xi(t, \xi_t) = \left[\frac{A(t)}{\sigma(t, X(t), \xi_t)} g(t, \xi_t)\right],$$

$$g'_t(t, \xi_t) = B(t)g(t, \xi_t) - g'_\xi(t, \xi_t)b(t, X(t), \xi_t) = \left[B(t) - \frac{A(t)b(t, X(t), \xi_t)}{\sigma(t, X(t), \xi_t)}\right] g(t, \xi_t).$$

Далее можно воспользоваться формулой (31), но тогда мы получим решение уравнения в виде $\eta_t = \tilde{\eta}_t(t, X(t))$, а нам нужно $\eta_t = \eta^*_t(t, \xi_t)$. Поэтому в общем случае нужно выразить $X(t)$ через ξ_t; это можно сделать, решив уравнение (31): $\xi_t = \varphi(s, X(s))$, и выразив из последнего соотношения $X(t)$ через ξ_t.

При любом варианте мы приходим к случаю $\sigma(t, X(t), \xi_t) = \sigma(t, \xi_t)$, в силу той же теоремы 1 функция $\eta_t = g(t, \xi_t)$ есть решение линейного уравнения с симметричным интегралом

$$d\eta_t = \left[\frac{A(t)}{\sigma(t, \xi_t)}\right] \eta_t * d\xi_t + \left[B(t) - \frac{A(t)b(t, X(t), \xi_t)}{\sigma(t, \xi_t)}\right] \eta_t dt. \tag{33}$$

Решение уравнения (33) ищем в виде $\eta_t = g(t, \xi_t)$, получим цепочку из двух уравнений:

$$g'_\xi(t, \xi) = \frac{A(t)}{\sigma(t, \xi)} g(t, \xi), \quad g'_t(t, \xi)|_{\xi = \xi_t} = \left[B(t) - \frac{A(t)b(t, X(t), \xi_t)}{\sigma(t, \xi_t)}\right] g(t, \xi_t).$$

Первое уравнение определяет $g(t, \xi)$ с точностью до неизвестной фунции $C(t)$:

$$g(t, \xi) = C(t) \exp\left(A(t) \int \frac{d\xi}{\sigma(t, \xi)}\right). \tag{34}$$

Дифференцируя, имеем

$$g'_t(t, \xi) = \exp\left(A(t) \int \frac{d\xi}{\sigma(t, \xi)}\right) \left\{C'(t) - C(t) \left[A'(t) \int \frac{d\xi}{\sigma(t, \xi)} - A(t) \int \frac{\sigma'_t(t, \xi)}{\sigma^2(t, \xi)} d\xi\right]\right\}.$$

Подставляя найденное для $g(t,\xi)$ выражение (34) во второе уравнение, получим уравнение на неизвестное $C(t)$:

$$C'(t) = C(t)\left[B(t) - \frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)} + A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)} - A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi\right].$$

Следовательно,

$$\frac{C'(t)}{C(t)} = B(t) - \frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)} - A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)} - A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi. \tag{35}$$

или

$$C(t) = C^*\exp\left(B(t) - \frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)} - A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)} - A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi\right),$$

где C^* – произвольная постоянная. Подставляя найденное значение $C(t)$ в (34), находим искомое преобразование $g(t,\xi_t)$:

$$g(t,\xi_t) = C^*\exp\left(A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)} + B(t) - \frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)} - \right.$$

$$\left. - A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)} - A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi\right). \tag{36}$$

2. С помощью несложных преобразований убедимся, что функция $\eta_t = g(t,\xi_t)$ действительно есть решение линейного уравнения. Для этого найдем полную производную (формально, так как ξ_t недифференцируема – на самом деле надо брать дифференциалы) выражения

$$\left(A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}\right)_t' =$$

$$= A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)} + \frac{A(t)}{\sigma(t,\xi_t)}[\sigma(t,\xi_t)X'(t) + b(t,X(t),\xi_t)] + A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\left(\frac{1}{\sigma(t,\xi)}\right)_t' d\xi.$$

Воспользовавшись данной формулой, правую часть соотношения (35) можно после несложных алгебраических преобразований записать в виде:

$$B(t) + A(t)X'(t) - \left(A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}\right)_t'.$$

Значит, $\eta_t = g(t,\xi_t) = \tilde{C}\exp\left(\int_0^t B(s)ds + \int_0^t A(s) * dX(s)\right)$, а функция в правой части есть решение линейного уравнения (32).

3. Рассмотрим обратную задачу перехода с помощью подходящей замены переменных от линейного уравнения (32) к уравнению (31).

Конечно, обратное преобразование находится из формулы (36), однако можно построить прямой метод, который часто является более предпочтительным. Рассмотрим предполагаемую замену переменных $\xi_t = \Phi(t,\eta_t)$ и найдем дифференциал этой функции. Имеем

$$d\xi_t = \sigma(t,X(t),\xi_t) * dX(t) + b(t,X(t),\xi_t)dt = \left[\Phi_t'(t,\eta_t) + \Phi_\eta'(t,\eta_t)B(t)\eta_t\right]dt +$$

$$+\Phi_\eta'(t,\eta_t)A(t)\eta_t * dX(t).$$

Следовательно, в силу (6) при п. в. t справедливы равенства

$$\sigma(t,X(t),\xi_t) = \Phi_\eta'(t,\eta_t)A(t)\eta_t, \quad b(t,X(t),\xi_t) = \Phi_t'(t,\eta_t) + \Phi_\eta'(t,\eta_t)B(t)\eta_t.$$

Воспользовавшись первым соотношением, мы можем переписать второе в виде $b(t, X(t), \xi_t) = \Phi'_t(t, \eta_t) + \frac{B(t)}{A(t)}\sigma(t, X(t), \xi_t)$. Следовательно, функция $\xi_t = \Phi(t, \eta_t)$ есть решение уравнения с симметричным интегралом

$$d\xi_t = \frac{\sigma(t, X(t), \xi_t)}{A(t)\eta_t} * d\eta_t + \left[b(t, X(t), \xi_t) - \frac{B(t)}{A(t)}\sigma(t, X(t), \xi_t) \right] dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N.H. Ibragimov *Elementary Lie group analysis and ordinary equation.* John Wiley&Sons. Chichester. 1999. 347 p.
2. L.V. Ovsiannikov *Group analysis of differential equations.* Academic Press. New Jork. 1982. 416 p.
3. B. Srihirun, S.V. Meleshko, E. Schulz *On the definition of an admmited Lie group for stochastic differential equation* // Commun,Nonlinear Sci. Numer. Simul 12(8). 2007. P. 1379–1389.
4. Бибиков Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Высшая школа, 1991.
5. Ватанабе С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионнные процессы.* М.: Наука, 1986.
6. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и стохастический анализ* // Теория вероятностей и ее примен. 2006. Т. 51, вып. 3. С. 496–517.
7. Насыров Ф.С., Парамошина И.Г. *О структуре одномерного диффузионного процесса* // Уфа, Вестник УГАТУ, 2006. Т. 7, № 2(15). С. 127–130.
8. Насыров Ф.С. *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ.* М.: Физматлит. 2011.

Марат Айратович Абдуллин,
Уфимский государственный авиацонный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `79marat97@rambler.ru`

Нияз Салаватович Исмагилов,
Уфимский государственный авиацонный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `niyaz.ismagilov@gmail.com`

Фарит Сагитович Насыров,
Уфимский государственный авиацонный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `farsagit@yandex.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 17-30.

УДК 517.521+517.547.22

ТОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Аннотация. Установлены точные оценки, связывающие классические плотности последовательности комплексных чисел (обычные и усредненные) с ее относительными плотностями, а также с индексами лакунарности и разреженности.

Ключевые слова: нижняя и верхняя (усредненная, относительная) плотности, индексы лакунарности и разреженности последовательности.

Mathematics Subject Classification: 11B05, 11L07

Одним из центральных направлений теории целых функций является исследование зависимости роста функции от распределения ее нулей на плоскости. Большое количество работ, относящихся к этому разделу комплексного анализа, посвящено оценкам индикаторов и типов целой функции конечного порядка через такие устоявшиеся характеристики поведения ее нулей, как обычные, усредненные и другие плотности (см., например, [1]–[5] и обзор [6]), а в последнее время — и менее традиционные в этих вопросах индексы лакунарности и разреженности [7], [8]. Недавние исследования экстремальных задач для целых функций с нулями на луче [9], [10] отчетливо демонстрируют невозможность получения окончательных результатов без выяснения внутренних связей между плотностями последовательностей нулей. Как видно на примере работы [8], дальнейшее развитие теории экстремальных задач порождает также потребность в нахождении и изучении закономерностей, связывающих "количественные" плотностные характеристики стремления последовательности к бесконечности с "качественными", вроде индексов лакунарности и разреженности. К настоящему времени такие закономерности недостаточно изучены. Ликвидируя этот пробел, здесь мы находим точную взаимосвязь указанных выше характеристик роста последовательностей нулей целых функций конечного порядка.

Итак, предметом изучения в работе являются бесконечно большие последовательности комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые мы располагаем в порядке возрастания модулей:

$$0 < |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{n_1}| < |\lambda_{n_1+1}| = \ldots = |\lambda_{n_2}| < |\lambda_{n_2+1}| = \ldots = |\lambda_{n_3}| < \ldots .$$

Номера n_k, в которых модули членов последовательности имеют скачки, называются *центральными индексами* последовательности Λ.

Обозначим через $n_\Lambda(x) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant x} 1$ *считающую функцию* этой последовательности, а через $N_\Lambda(x) = \int\limits_0^x \dfrac{n_\Lambda(t)}{t}\, dt$ — ее *усредненную считающую функцию*.

Показатель сходимости последовательности Λ (см. [1]) вычисляется по формулам:

$$\rho_\Lambda = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln n_\Lambda(x)}{\ln x} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln N_\Lambda(x)}{\ln x}.$$

G.G. Braichev, Exact relationships between certain characteristics of growth for complex sequences.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00281).

Поступила 13 мая 2013 г.

Далее в работе через ρ обозначаем показатель сходимости ρ_Λ последовательности Λ, предполагая, что ρ — положительное число.

Величины

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{n_\Lambda(x)}{x^\rho} \quad \text{и} \quad \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{N_\Lambda(x)}{x^\rho}$$

называются *верхними ρ-плотностями* (обычной и усредненной) последовательности Λ. Замена в этих равенствах верхних пределов на нижние приводит к определениям *нижней* и *усредненной нижней ρ-плотностей* последовательности:

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{n_\Lambda(x)}{x^\rho}, \qquad \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \underline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{N_\Lambda(x)}{x^\rho}.$$

Для упрощения записей там, где это не приведет к недоразумениям, будем опускать символы ρ и Λ в обозначениях плотностей и других вводимых далее характеристик. Кроме того, ради экономии места будем использовать одновременно верхнее и нижнее подчеркивания, считая, что они соответствуют друг другу во всех частях равенств.

Введем еще *верхнюю* и *нижнюю относительные плотности* последовательности, полагая по определению

$$\overline{\underline{\nu}} = \overline{\underline{\lim}}_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{n(x)}.$$

Поскольку всегда выполняется

$$\overline{\underline{\Delta}} = \overline{\underline{\lim}}_{x\to+\infty} \frac{n(x)}{x^\rho} = \overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty} \frac{n(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho},$$

то естественно ввести *дискретные усредненные верхнюю* и *нижнюю плотности* последовательности по формулам:

$$\underset{\sim}{\widetilde{\Delta}} = \overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}\,.$$

Мы увидим ниже (см. теорему 1 и предложение 1), что всегда $\underline{\Delta}^* = \underset{\sim}{\Delta}$, а если $|\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |\lambda_{n+1}|$, то и $\overline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta}$.

Последовательности, удовлетворяюшие условию $\overline{\Delta}^* = \underline{\Delta}^*$, или, что эквивалентно, $\overline{\Delta} = \underline{\Delta}$, называются *измеримыми*. Аналогично этому, будем называть *дискретно измеримыми* последовательности, которые удовлетворяют условию $\widetilde{\Delta} = \underset{\sim}{\Delta}$, означающему существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}$. Точно так же, если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{N(x)}{n(x)}$, то говорим, что такая последовательность *внутренне измерима*. Полезно отметить, что, в отличие от обычной или дискретной измеримости, понятие внутренней измеримости не привязано к какому-либо показателю ρ.

Сразу укажем, что ни дискретная, ни внутренняя измеримость последовательности не влекут ее измеримости. В работе [10] показано, что класс дискретно измеримых последовательностей достаточно широк: для произвольных чисел $\rho > 0, \beta > 0$ и $\alpha \in [0, \beta]$ существуют дискретно измеримые последовательности с плотностями $\underline{\Delta} = \alpha$ и $\overline{\Delta} = \beta$. Здесь мы доказываем (см. ниже предложение 9), что такое же утверждение справедливо и для внутренне измеримых последовательностей.

Из определения считающей функции последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеем $n_\Lambda(x) = 0$ при $x \in [0, |\lambda_1|)$ и $n_\Lambda(x) \equiv n_k$ при $x \in [|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_k+1}|)$, $k = 1, 2, \ldots$. Для последовательности центральных индексов $N = \{n_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ определим характеристики

$$\mu_N = \mu = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_{k+1}}{n_k} \quad \text{и} \quad \delta_N = \delta = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_{k+1}}{n_k}.$$

Будем называть μ_N *индексом лакунарности*, а δ_N — *индексом разреженности* последовательности N. Аналогично определяются индексы лакунарности l_Λ и разреженности p_Λ последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ (точнее, последовательности $|\Lambda| = \{|\lambda_n|\} \subset \mathbb{R}_+$) :

$$l_\Lambda = l = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|} \quad \text{и} \quad p_\Lambda = p = \varliminf_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}.$$

Говорят, что последовательность Λ *лакунарна по Адамару*, если её индекс разреженности больше единицы, т. е. $p_\Lambda > 1$ (при $p_\Lambda = \infty$ имеем так называемые *лакуны Островского*). Если индекс лакунарности последовательности Λ равен единице, $l_\Lambda = 1$, то Λ называется *слабо лакунарной по Адамару* (коротко, *слабо лакунарной*). Например, последовательность всех простых чисел слабо лакунарна. Этим же свойством при $b > 1$ обладает и последовательность $\Lambda = \left\{b^{n^\alpha}\right\}$, когда $\alpha \in (0, 1)$. Если здесь $\alpha = 1$, то $p_\Lambda = l_\Lambda = b$, а при $\alpha > 1$ оказывается $p_\Lambda = \infty$.

Связи между обычными и усредненными плотностями последовательности Λ отражают классические неравенства (см. [1, гл. I, § 12], [2, гл. II, § 4, п. 4]):

$$\underline{\Delta} \leqslant \rho \underline{\Delta}^* \leqslant \rho \overline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta} \leqslant \rho\, e\, \overline{\Delta}^*. \tag{1}$$

В книге [3, p. 16] фактически идет речь об оценке, уточняющей последнее из этих неравенств в случае, когда известна не только верхняя, но и нижняя плотность последовательности. Именно,

$$\rho\, e\, \overline{\Delta}^* \geq \overline{\Delta}\, \exp\left\{\underline{\Delta} / \overline{\Delta}\right\}.$$

Из общих результатов о сравнительном росте выпуклых функций, установленных в монографии [7], можно извлечь следующие неравенства, уточняющие все предыдущие соотношения (см. также [11]):

$$\rho\, a_1 \overline{\Delta}^* \leqslant \underline{\Delta} \leqslant \rho\, \widetilde{a}_1 \overline{\Delta}^*, \qquad \rho\, \widetilde{a}_2 \overline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta} \leqslant \rho\, a_2 \overline{\Delta}^*. \tag{2}$$

Здесь a_1 и a_2 — корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \underline{\Delta}^* / \overline{\Delta}^*,$$

а $\widetilde{a}_1$ и $\widetilde{a}_2$ — корни подобного же уравнения с "подправленной" правой частью:

$$a \ln \frac{e}{a} = \widetilde{\Delta} / \overline{\Delta}^*.$$

Корни этих уравнений связаны неравенствами $0 \leqslant a_1 \leqslant \widetilde{a}_1 \leqslant 1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant a_2 \leqslant e$.

Как видно из (2), для дискретно измеримых последовательностей в силу условия $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$ (см. ниже теорему 1) выполняются точные равенства

$$\underline{\Delta} = \rho\, a_1 \overline{\Delta}^*, \qquad \overline{\Delta} = \rho\, a_2 \overline{\Delta}^*. \tag{3}$$

Таким образом, можно констатировать, что к настоящему моменту взаимоотошения между обычными и усредненными плотностями последовательностей достаточно хорошо изучены. К сожалению, так нельзя сказать об изучении связей между плотностями (обычными, усредненными, относительными) и индексами лакунарности и разреженности последовательностей Λ. В то же время, такое исследование имеет существенное значение при описании роста целых функций, нулями которых служат Λ.

Установлению точных соотношений между указанными характеристиками последовательностей и посвящена настоящая работа.

В дальнейшем считаем, что число $\rho > 0$ задано, а сответствующие величины вычисляются при этом показателе ρ. Кроме того, из неравенств (1) вытекает, что условия $\overline{\Delta} = 0$ и $\overline{\Delta}^* = 0$, равно как и условия $\overline{\Delta} = \infty$ и $\overline{\Delta}^* = \infty$, равносильны. Поэтому в дальнейшем предполагается, а иногда и явно оговаривается, что выполнено условие $0 < \overline{\Delta} < \infty$.

Предложение 1. *Справедливы следующие неравенства*

$$\underline{\Delta}\,\mu \leqslant \overline{\Delta}, \tag{4}$$

$$\underline{\Delta}\,l^\rho \leqslant \overline{\Delta}, \tag{5}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\,l^\rho, \tag{6}$$

$$\underline{\nu}\,\mu \leqslant \overline{\nu}, \tag{7}$$

$$\ln l \leqslant \overline{\nu} - \underline{\nu}. \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку для считающей функции последовательности Λ выполняются равенства $n_\Lambda(t) = n(t) \equiv n_k$ при $t \in I_k = [|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_k+1}|),\ k = 1, 2, \dots$, то

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{x\in I_k} \frac{n(x)}{x^\rho} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}, \quad \underline{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{x\in I_k} \frac{n(x)}{x^\rho} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \ \text{ и} \tag{9}$$

$$\overline{\nu} = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{x\in I_k} \frac{N(x)}{n(x)} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k}, \quad \underline{\nu} = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{x\in I_k} \frac{N(x)}{n(x)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}. \tag{10}$$

Из (9) легко получаем

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \underline{\Delta} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \underline{\Delta}\,\mu,$$

т. е. неравенство (4) выполняется. Точно так же

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \geq \underline{\Delta} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}{|\lambda_{n_k}|^\rho} = \underline{\Delta}\,l^\rho,$$

что подтверждает истинность и неравенства (5).

Аналогичным образом из (10) получаем (7):

$$\overline{\nu} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_{k+1}} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \underline{\nu}\,\mu.$$

Далее, для произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k при всех $x \in I_k$ в силу возрастания функции $N(x)$ имеем

$$\frac{N(x)}{x^\rho} \leqslant \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho} = \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \left(\frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}\right)^\rho < (\widetilde{\Delta} + \varepsilon)(l + \epsilon)^\rho.$$

Переход к верхнему пределу по $x \to +\infty$, а затем по $\varepsilon \to 0$ доказывает (6).

Для доказательства (8) и в дальнейшем нам понадобится формула:

$$N\big(|\lambda_{n_{k+1}}|\big) - N(|\lambda_{n_k}|) = n_k \ln \frac{\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|}{|\lambda_{n_k}|}, \tag{11}$$

которая непосредственно вытекает из определения функции $N(x)$:

$$N\big(|\lambda_{n_{k+1}}|\big) - N(|\lambda_{n_k}|) = \int\limits_{|\lambda_{n_k}|}^{|\lambda_{n_{k+1}}|} \frac{n(x)}{x}\,dx = n_k \int\limits_{|\lambda_{n_k}|}^{|\lambda_{n_{k+1}}|} \frac{dx}{x} = n_k \ln \frac{\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|}{|\lambda_{n_k}|}.$$

Чтобы получить (8), запишем (11) в удобном для этого виде:

$$\ln \frac{\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|}{|\lambda_{n_k}|} = \frac{N\big(|\lambda_{n_{k+1}}|\big)}{n_k} - \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \tag{12}$$

и перейдем к верхнему пределу, принимая во внимание формулы (10).

Все соотношения (4)–(8) установлены.

Из доказанного предложения вытекает следующий факт.

Следствие. *Если последовательность измерима* ($\underline{\Delta} = \overline{\Delta} = \Delta$) *с* $\Delta > 0$ *или только внутренне измерима* ($\underline{\nu} = \overline{\nu} = \nu$) *с* $\nu > 0$, *то она сама и последовательность её центральных индексов являются слабо лакунарными.*

Действительно, первое утверждение есть следствие формул (4) и (5), а второе вытекает из неравенств (7) и (8).

Следующее предложение устанавливает взаимоотношения между обычными, относительными и дискретными плотностями последовательностей.

Предложение 2. *Имеют место следующие неравенства*

$$\underset{\sim}{\Delta} \leqslant \min\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\ \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\} \leqslant \max\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\ \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\} \leqslant \widetilde{\Delta}. \tag{13}$$

Доказательство. Используя формулы (9) и (10), получаем

$$\underset{\sim}{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} = \underline{\Delta}\,\overline{\nu}$$

или

$$\underset{\sim}{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\varliminf_{k\to\infty}\frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \overline{\Delta}\,\underline{\nu}.$$

Тем самым, неравенство $\underset{\sim}{\Delta} \leqslant \min\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\ \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\}$ доказано.

Неравенство $\max\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\ \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\} \leqslant \widetilde{\Delta}$ проверяется аналогично:

$$\widetilde{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} = \underline{\Delta}\,\overline{\nu} \text{ и}$$

$$\widetilde{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\varliminf_{k\to\infty}\frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \overline{\Delta}\,\underline{\nu}.$$

Предложение 2 установлено.

В книге [12, отд. IV, гл. 1, задача 60]) указана связь между относительными плотностями последовательности и ее показателем сходимости:

$$\underline{\nu} \leqslant 1/\rho \leqslant \overline{\nu}.$$

Какими свойствами будет обладать последовательность, для которой реализуется равенство в одном из этих неравенств? В этой связи предложение 2 может предоставить любопытную, на наш взгляд, информацию.

Следствие. *Если верхняя относительная плотность последовательности принимает свое наименьшее возможное значение, т. е.* $\overline{\nu} = 1/\rho$, *то выполняются равенства* $\underline{\Delta}^* = \underset{\sim}{\Delta} = \underline{\Delta}/\rho$.

Если нижняя относительная плотность последовательности принимает свое наибольшее возможное значение, т. е. $\underline{\nu} = 1/\rho$, *то* $\overline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta} = \overline{\Delta}/\rho$.

В самом деле, из (1) извлекаем $\underline{\Delta}/\rho \leqslant \underline{\Delta}^*$. При условии $\overline{\nu} = 1/\rho$ левая оценка в (13) дает $\underset{\sim}{\Delta} \leqslant \underline{\Delta}/\rho$. Отсюда

$$\underline{\Delta}/\rho \leqslant \underline{\Delta}^* \leqslant \underset{\sim}{\Delta} \leqslant \underline{\Delta}/\rho,$$

что приводит к первому утверждению следствия. Второе вытекает из аналогичных рассуждений, приводящих в ситуации $\underline{\nu} = 1/\rho$ к неравенствам

$$\overline{\Delta}/\rho \leqslant \widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}^{*} \leqslant \overline{\Delta}/\rho.$$

Предложение 3. *Для любой последовательности комплепксных чисел с показателем сходимости $\rho > 0$ справедливы следующие утверждения.*
Если $0 < \overline{\Delta} < \infty$, то выполняется неравенство

$$l^{\rho} \geq \delta, \tag{14}$$

а если $0 < \underline{\Delta} < \infty$, то имеем

$$p^{\rho} \leqslant \mu. \tag{15}$$

Всегда справедливы оценки

$$\ln p \leqslant \underline{\nu}\,(\mu - 1), \tag{16}$$

$$\ln l \geq \overline{\nu}\,\frac{\delta - 1}{\delta}. \tag{17}$$

Доказательство. При условии $\overline{\Delta} \neq 0$ можно записать

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}\, \frac{1}{\displaystyle\varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k}}\, \varlimsup_{k\to\infty} \left(\frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}\right)^{\rho} = \overline{\Delta}\,\frac{l^{\rho}}{\delta}.$$

Сократив на $\overline{\Delta}$, получаем неравенство (14). Если же $\underline{\Delta} \neq 0$, то

$$\underline{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{|\lambda_{n_{k+2}}|^{\rho}}\, \frac{1}{\displaystyle\varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k}}\, \varliminf_{k\to\infty} \left(\frac{|\lambda_{n_{k+2}}|}{|\lambda_{n_{k+1}}|}\right)^{\rho} = \underline{\Delta}\,\frac{p^{\rho}}{\mu},$$

что приводит к неравенству (15).

Оценки (16), (17) доказываются с помощью обобщенной леммы Штольца (см., например, [7, с. 26]) и формул (12), (10): $\ln p = \varliminf\limits_{k\to\infty} \ln \dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|} =$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_{k+1} - n_k} \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_{k+1} - n_k}\, \varlimsup_{k\to\infty} \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}(\mu - 1) = \underline{\nu}(\mu - 1).$$

Опираясь на те же соображения, получаем, что $\ln l = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \ln \dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|} =$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k - n_{k-1}} \left(\frac{n_k - n_{k-1}}{n_k}\right) \geq$$

$$\geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k - n_{k-1}}\, \varliminf_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n_k/n_{k-1}}\right) \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right),$$

т. е. неравенство $\ln l \geq \overline{\nu}\,\dfrac{\delta - 1}{\delta}$. Предложение 3 установлено.

Нам понадобится ряд элементарно проверяемых фактов, которые удобно собрать в одно утверждение.

Лемма. I. *Функция* $q_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & x \neq 1\,, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ *строго убывает на* $(0, +\infty)$.

II. *Функция* $q_2(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ *имеет на* $(0, +\infty)$ *единственный минимум в точке* $x = 1$, *равный* 1.

III. *Функция* $q_3(x) = \dfrac{b + a \ln x}{x^\rho}$, $a > 0$, $b > 0$, *имеет на* $(0, +\infty)$ *единственный максимум в точке* $x = e^{\frac{1}{\rho} - \frac{b}{a}}$, *равный* $\dfrac{a}{\rho}\, e^{\rho \frac{b}{a} - 1}$.

Исследуем теперь зависимость между индексом разреженности последовательности и ее обычными и дискретными плотностями.

Предложение 4. *Индекс разреженности, плотности и дискретные плотности последовательности, имеющей показатель сходимости* $\rho > 0$, *связаны соотношениями*

$$(p^\rho - 1)\, \widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}\, \ln p, \qquad \underline{\Delta}\, p^\rho\, \ln p \leqslant (p^\rho - 1)\, \underset{\sim}{\Delta}\,. \tag{18}$$

Доказательство. При $p = 1$ оба неравенства превращаются в тривиальное равенство $0 = 0$. При $p > 1$ обозначим $c_k = \dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}$ и применим лемму Штольца, используя равенство (10) и пункт I предыдущей леммы:

$$\widetilde{\Delta} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho - |\lambda_{n_k}|^\rho} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \frac{\ln c_k}{c_k^\rho - 1} \leqslant \frac{1}{\rho} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln c_k^\rho}{c_k^\rho - 1} = \frac{\overline{\Delta}}{\rho} \cdot \frac{\ln p^\rho}{p^\rho - 1}.$$

Таким образом, $\widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta} \cdot \dfrac{\ln p}{p^\rho - 1}$. Точно так же

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \geq \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho - |\lambda_{n_k}|^\rho} =$$

$$= \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \frac{\ln c_k}{1 - c_k^{-\rho}} \geq \frac{1}{\rho} \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln c_k^{-\rho}}{c_k^{-\rho} - 1} = \frac{\underline{\Delta}}{\rho} \cdot \frac{p^\rho \ln p^\rho}{p^\rho - 1},$$

т. е. $\underset{\sim}{\Delta} \geq \underline{\Delta} \cdot \dfrac{p^\rho \ln p}{p^\rho - 1}$. Предложение полностью доказано.

В качестве следствия из предложений 2–4 можно получить

Предложение 5. *Если* $0 < \overline{\Delta} < \infty$, *причем последовательность* $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *имеет лакуны Адамара, то справедливы оценки*

$$\frac{\ln p}{\mu - 1} \leqslant \underline{\nu} \leqslant \frac{\ln p}{p^\rho - 1}. \tag{19}$$

Если $0 < \underline{\Delta} < \infty$, *и последовательность* $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ *имеет лакуны Адамара, то справедливы оценки*

$$\frac{p^\rho \ln p}{p^\rho - 1} \leqslant \overline{\nu} \leqslant \frac{\delta \ln l}{\delta - 1}. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ имеет лакуны Адамара, то $p > 1$. Поэтому, сопоставляя правую часть неравенств (13) с первым неравенством из формулы (18), получим $\underline{\nu}\, \overline{\Delta} \leqslant \widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}\, \dfrac{\ln p}{p^\rho - 1}$. Это дает правую часть соотношения (19). Левая часть этого соотношения вытекает из (16), так как согласно (15) имеем $\mu \geq p^\rho > 1$.

При доказательстве оценок (20) действуем схожим образом, только теперь сочетаем левую часть (13) и второе неравенство из (18) с последующим привлечением (17). Обе части предложения 5 установлены.

Результат является точным в следующем смысле. Равенства всюду в (19), (20) заведомо достигаются, если реализуются равенства в (14), (15). А это имеет место, например, для любой последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, модули членов которой и центральные индексы образуют две согласованные "почти геометрические прогрессии" , т. е. с некоторым $q > 1$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_{n_{k+1}}| \sim q\,|\lambda_{n_k}|, \qquad n_{k+1} \sim q^{\rho}\, n_k, \qquad k \to \infty.$$

В этом случае $l = p = q$, $\mu = \delta = q^{\rho}$, и справедливы формулы

$$\underline{\nu} = \frac{\ln q}{q^{\rho} - 1}, \qquad \overline{\nu} = \frac{q^{\rho}\ln q}{q^{\rho} - 1}.$$

Теорема 1. *Нижняя дискретная усредненная плотность* $\underset{\sim}{\Delta}$ *и нижняя усредненная плотность* $\underline{\Delta}^*$ *произвольной бесконечно большой последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *совпадают:*

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underline{\Delta}^*.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\underset{\sim}{\Delta} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^{\rho}} \geq \varliminf_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x^{\rho}} = \underline{\Delta}^*.$$

Чтобы получить неравенство противоположного смысла, рассмотрим функцию $\Phi(x) = \dfrac{N(x)}{x^{\rho}}$, для изучения которой при $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\Phi_k(t) = \frac{N(|\lambda_{n_k}|) + n_k \ln t}{t^{\rho}}, \qquad t > 0.$$

Поскольку на промежутках $I_k = [|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_k+1}|)$ имеем $n_\Lambda(t) \equiv n_k$, то

$$\Phi(x) = \frac{N(|\lambda_{n_k}|) + n_k \ln \frac{x}{|\lambda_{n_k}|}}{x^{\rho}} = \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}}\, \Phi_k\left(\frac{x}{|\lambda_{n_k}|}\right), \qquad x \in I_k.$$

Согласно пункту III леммы $\Phi(x)$ либо монотонна на I_k, либо имеет на этом промежутке единственный максимум. В любом случае имеем

$$\inf_{x\in I_k} \{\Phi(x)\} = \min\left\{\Phi(|\lambda_{n_k}|),\, \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\right\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\underline{\Delta}^* = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{x\in I_k} \Phi(x) = \varliminf_{k\to\infty} \min\left\{\Phi(|\lambda_{n_k}|),\, \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\right\}$$
$$\geq \varliminf_{k\to\infty} \inf_{m\geq k} \Phi(|\lambda_m|) = \varliminf_{m\to\infty} \Phi(|\lambda_m|) = \underset{\sim}{\Delta}, \quad \text{т. е.} \quad \underline{\Delta}^* \geq \underset{\sim}{\Delta}\,.$$

Сопоставляя с предыдущим, получаем $\underset{\sim}{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, что и требовалось.

В формулировке следующего результата используем стандартное обозначение $a^{+} = \max\{a, 0\}$.

Теорема 2. *Для произвольной бесконечно большой последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *с усредненной верхней* ρ*-плотностью* $\overline{\Delta}^*_{\rho}(\Lambda) = \overline{\Delta}^* \in (0, +\infty)$ *выполняются неравенства*

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{e^{\rho\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}, \tag{21}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\,\frac{e^{\rho\,\overline{\nu}-1}}{\rho\,\overline{\nu}}, \tag{22}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\,\frac{l^{\rho}}{\ln l^{\rho}+1}, \tag{23}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\,\frac{l^{-\rho}}{(\ln l^{-\rho}+1)^{+}}. \tag{24}$$

Доказательство. Отметим сразу, что неравенство (23) уточняет неравенство (5) в случае $l > 1$. Теперь приступим непосредственно к доказательству.

Если $\widetilde{\Delta} = \overline{\Delta}^*$, то неравенства (21)–(24) выполняются очевидным образом, поскольку каждый из сомножителей величины $\widetilde{\Delta}$ в правых частях этих неравенств не меньше единицы.

Изучим теперь случай $\widetilde{\Delta} < \overline{\Delta}^*$. Выберем положительное число $\varepsilon < \overline{\Delta}^* - \widetilde{\Delta}$. Сохраняя обозначения теоремы 1 и используя определение верхней усредненной плотности, найдем последовательности индексов $\mathbb{K}$ и точек x_k так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\overline{\Delta}^* = \varlimsup_{k\to\infty}\,\sup_{x\in I_k}\Phi(x) = \lim_{k\in\mathbb{K}}\,\sup_{x\in I_k}\Phi(x),$$

$$\Phi(x_k) = \sup_{x\in I_k}\Phi(x) > \widetilde{\Delta}+\varepsilon, \qquad k\in\mathbb{K}.$$

При достаточно больших номерах k функция $\Phi(x)$ принимает на концах промежутков I_k значения

$$\Phi(|\lambda_{n_k}|) < \widetilde{\Delta}+\varepsilon < \Phi(x_k).$$

Поэтому (отбрасывая при необходимости конечное число индексов из $\mathbb{K}$) можем считать, что для каждого $k\in\mathbb{K}$ точка x_k лежит строго внутри I_k, т. е.

$$|\lambda_{n_k}| < x_k < |\lambda_{n_{k+1}}|, \qquad k\in\mathbb{K}.$$

Обозначим $c_k = \dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}$ и $\nu_k = \dfrac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}$. Применяя пункт III леммы к функции $\Phi_k(t)$, с учетом равенства

$$\Phi(x) = \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}}\,\Phi_k\left(\frac{x}{|\lambda_{n_k}|}\right), \qquad x\in I_k,$$

получаем

$$1 < \frac{x_k}{|\lambda_{n_k}|} = e^{\frac{1}{\rho}-\nu_k} < c_k, \tag{25}$$

$$\Phi(x_k) = \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}}\,e^{\rho\,\nu_k-1} = \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}}\,\frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k} = \Phi(|\lambda_{n_k}|)\,\frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k}. \tag{26}$$

Логарифмирование (25) приводит к неравенству

$$1-\ln c_k^{\rho} < \rho\,\nu_k < 1. \tag{27}$$

Теперь после проведенной подготовительной работы оценка (21) легко доказывается предельным переходом в равенстве (26):

$$\overline{\Delta}^* = \lim_{k\in\mathbb{K}}\Phi(x_k) = \lim_{k\in\mathbb{K}}\left\{\Phi(|\lambda_{n_k}|)\,\frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k}\right\} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty}\Phi(|\lambda_{n_k}|)\,\varlimsup_{k\to\infty}\frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k} \leqslant \widetilde{\Delta}\frac{e^{\rho\underline{\nu}-1}}{\rho\underline{\nu}}.$$

Здесь мы учли, что функция $q_2(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ убывает на интервале $(0,\,1)$, согласно пункту II леммы.

Неравенство (22) доказывается аналогичным образом. Запишем

$$\Phi(x) = \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)+n_k\ln\frac{x}{|\lambda_{n_{k+1}}|}}{x^{\rho}} = \frac{1}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}\,\Phi_k\left(\frac{x}{|\lambda_{n_{k+1}}|}\right), \qquad x\in I_k.$$

Обозначив $\nu_k' = \dfrac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k}$, получим $\dfrac{1}{c_k} < \dfrac{x}{|\lambda_{n_{k+1}}|} = e^{\frac{1}{\rho} - \nu_k'} < 1$, или, после логарифмирования,

$$1 < \rho\,\nu_k' < 1 + \ln c_k^{\rho}. \tag{28}$$

Следующее соотношение выводится так же, как и формула (25), и на этот раз приобретает вид

$$\Phi(x_k) = \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}\, e^{\rho\,\nu_k' - 1} = \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}\, \frac{e^{\rho\,\nu_k' - 1}}{\rho\,\nu_k'} = \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\, \frac{e^{\rho\,\nu_k' - 1}}{\rho\,\nu_k'}. \tag{29}$$

Снова используя пункт II леммы (теперь на промежутке $(1,\,+\infty)$, где функция $q_2(x)$ возрастает), предельным переходом из (28) получаем (22):

$$\overline{\Delta}^* = \lim_{k\in\mathbb{K}} \Phi(x_k) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\, \varlimsup_{k\to\infty} \frac{e^{\rho\,\nu_k' - 1}}{\rho\,\nu_k'} \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{e^{\rho\,\overline{\nu} - 1}}{\rho\,\overline{\nu}}.$$

Для доказательства неравенства (23) воспользуемся определением индекса лакунарности, согласно которому при любом $\varepsilon > 0$ и всех $k \geq k_0(\varepsilon)$ выполняется $c_k < l + \varepsilon$. Это позволяет для достаточно больших $k \in \mathbb{K}$ сначала из (28) вывести, что $1 < \rho\,\nu_k' < 1 + \ln(l+\epsilon)^{\rho}$, а затем из (29) и леммы II получить

$$\Phi(x_k) < \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\, \frac{e^{\ln(l+\varepsilon)^{\rho}}}{\ln(l+\varepsilon)+1} < (\widetilde{\Delta} + \varepsilon)\, \frac{(l+\varepsilon)^{\rho}}{\ln(l+\varepsilon)+1}.$$

Последовательный переход к пределу при $k \to \infty$, $k \in \mathbb{K}$, и $\varepsilon \to 0$ приводит к нужной оценке (23).

Неравенство (24) доказывается с использованием аналогичных соображений. Действительно, из (27) следуют неравенства

$$1 - \ln(l+\epsilon)^{\rho} < 1 - \ln c_k < \rho\,\nu_k < 1, \quad \rho\,\nu_k > 0,$$

откуда $\rho\,\nu_k > (1 + \ln(l+\epsilon)^{-\rho})^{+}$. Дальнейшее ясно.

Доказательство теоремы 2 завершено.

Отметим, что оценки (21) и (22) теоремы 2 можно записать в виде

$$\frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*} \geq \rho\,\underline{\nu} e^{1-\rho\underline{\nu}} = e^{1-\rho\underline{\nu}} \ln \frac{e}{e^{1-\rho\underline{\nu}}}, \qquad \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*} \geq e^{1-\rho\,\overline{\nu}} \ln \frac{e}{e^{1-\rho\,\overline{\nu}}}$$

соответственно. Поскольку функция $a \ln \dfrac{e}{a}$ строго возрастает на отрезке $[0,\,1]$ и строго убывает на промежутке $[1, \infty)$, то предыдущие неравенства эквивалентны неравенствам

$$e^{1-\rho\underline{\nu}} \geq \widetilde{a}_2, \quad e^{1-\rho\,\overline{\nu}} \leqslant \widetilde{a}_1, \tag{30}$$

где $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$ – корни уравнения $a \ln \dfrac{e}{a} = \dfrac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*}$, $0 \leqslant \widetilde{a}_1 \leqslant 1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant e$. Логарифмируя (30), приходим к соотношениям

$$\rho\,\underline{\nu}\,\widetilde{a}_2 \leqslant \widetilde{a}_2 \ln \frac{e}{\widetilde{a}_2} = \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*} \quad \text{и} \quad \rho\,\overline{\nu}\,\widetilde{a}_1 \geq \widetilde{a}_1 \ln \frac{e}{\widetilde{a}_1} = \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*}.$$

Таким образом, неравенства (21) и (22) теоремы 2 можно коротко записать в эквивалентном виде

$$\rho\,\underline{\nu}\,\widetilde{a}_2 \leqslant \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*} \leqslant \rho\,\overline{\nu}\,\widetilde{a}_1.$$

Действуя аналогичным образом, запишем неравенства (23) и (24) в виде

$$\frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^*} \geq l^{-\rho} \ln \frac{e}{l^{-\rho}} \quad \text{и} \quad \frac{\widetilde{\Delta}}{\underline{\Delta}^*} \geq l^{\rho} \ln \frac{e}{l^{\rho}}, \tag{31}$$

что эквивалентно

$$\widetilde{a_1} \geq l^{-\rho}, \quad \widetilde{a_2} \leqslant l^{\rho}. \tag{32}$$

Дополним теперь неравенство (21) оценкой снизу через нижние усредненную и относительную плотности.

Предложение 6. *Справедливы неравенства*

$$\underline{\Delta}^* \, \frac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} \, \frac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}. \tag{33}$$

Доказательство. В обосновании нуждается лишь левая часть оценки (33) в нетривиальном случае, когда $0 < \underline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}^* < +\infty$. Предположим, рассуждая от противного, что $\overline{\Delta}^* < \underline{\Delta}^* \frac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}$. Тогда $\rho\,\underline{\nu} e^{1-\rho\,\underline{\nu}} < \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$, или, что равносильно, $e^{1-\rho\,\underline{\nu}} \ln \frac{e}{e^{1-\rho\,\underline{\nu}}} < \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$. Следовательно, $e^{1-\rho\,\underline{\nu}} > a_2$, где, как и прежде, a_2 обозначает больший корень уравнения $a \ln \frac{e}{a} = \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$. Отсюда с учетом левой части (13) заключаем, что

$$\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} = a_2 \ln \frac{e}{a_2} > a_2 \rho\,\underline{\nu} \geq a_2 \rho \, \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}}.$$

Из полученного неравенства $\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} > a_2 \rho \, \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}}$ выводим оценку $\overline{\Delta} > a_2 \rho \, \overline{\Delta}^*$, которая противоречит последнему из соотношений (2). Предложение доказано.

Отметим в очередной раз, что в случае дискретно измеримой последовательности, определяемой условием $\underline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta}$, знаки неравенств в предложении 6 заменяются равенствами, подтверждая точность оценок (33).

В работе [11] для корней a_1 и a_2 уравнения $a \ln \frac{e}{a} = \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$ найдено представление

$$a_1 = e \, q^{\frac{q}{1-q}}, \quad a_2 = e \, q^{\frac{1}{1-q}}$$

через параметр $q = \frac{a_2}{a_1}$ и показано, что в случае дискретно измеримой последовательности комплексных чисел с индексом лакунарности l выполняется равенство $q = l^{\rho}$. Воспользуемся этими фактами для получения следующего результата, который интересно сравнить с оценками (23), (24) из теоремы 2.

Предложение 7. *Для произвольной последовательности комплексных чисел с конечными положительными усредненными плотностями* $\underline{\Delta}^*$, $\overline{\Delta}^*$ *и индексом лакунарности* l *справедливы неравенства*

$$\overline{\Delta}^* \geq \underline{\Delta}^* \, l^{\frac{\rho}{l^{\rho}-1}} \frac{l^{\rho}-1}{e \, \ln l^{\rho}}, \tag{34}$$

$$\underline{\Delta}^* \, \frac{l^{\rho}-1}{a_2 \, \ln l^{\rho}} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \underline{\Delta}^* \, \frac{l^{\rho}-1}{a_1 \, l^{\rho} \, \ln l^{\rho}}. \tag{35}$$

Как и ранее, a_1 *и* a_2 *– корни уравнения* $a \ln \frac{e}{a} = \frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$. *Наличие дискретной измеримости последовательности обеспечивает в (34), (35) знаки равенств.*

Доказательство. Из неравенств (5) и (1) следует, что $l^{\rho} \leqslant \frac{\overline{\Delta}}{\underline{\Delta}} \leqslant \frac{a_2}{a_1} = q$, т. е. $l^{\rho} \leqslant q$. Привлекая пункт I леммы, видим, что выражение $a_2(q) = e \, q^{\frac{1}{1-q}}$ возрастает с увеличением

q. Поэтому $a_2(q) \geq a_2(l^\rho)$. Поскольку функция $a \ln \dfrac{e}{a}$ убывает на промежутке $[1, +\infty)$, то

$$\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} = a_2(q) \ln \frac{e}{a_2(q)} \leqslant a_2(l^\rho) \ln \frac{e}{a_2(l^\rho)} = e\, l^{\frac{\rho}{1-l^\rho}} \, \frac{\ln l^\rho}{l^\rho - 1},$$

что дает (34). Неравенства (35) вытекают из аналогичных рассуждений, если заметить еще, что $a_1 = a_1(q) = e\, q^{\frac{q}{1-q}}$ убывает при возрастании q. Так, например, правая часть (35) следует из соотношений

$$\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} = a_1(q) \ln \frac{e}{a_1(q)} \geq a_1 \ln \frac{e}{a_1(l^\rho)} = a_1\, l^\rho \frac{\ln l^\rho}{l^\rho - 1}.$$

Предложение 7 установлено.

Как уже отмечалось, дискретная измеримость последовательности не влечет её измеримости. Интересно, какие дополнительные к дискретной измеримости условия на последовательность могут обеспечить её измеримость? Как видно из предложения 1, одним из таких условий является слабая лакунарность последовательности. Действительно, при $l = 1$ из (6) вытекает $\underline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, т. е. $\underline{\Delta}^* = \overline{\Delta}^*$. Другим условием служит внутренняя измеримость последовательности, которая, согласно неравенству (8) предложения 1, влечет её слабую лакунарность. Однако, из теоремы 2 можно вывести более сильное утверждение.

Предложение 8. *Пусть Λ — дискретно измеримая последовательность комплексных чисел. Тогда выполнение любого из условий $\underline{\nu} = \frac{1}{\rho}$ или $\overline{\nu} = \frac{1}{\rho}$ влечет измеримость этой последовательности.*

Доказательство. Дискретная измеримость означает, что $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$. Выполнение же любого из условий предложения приводит, согласно формулам (21) и (22), к неравенствам $\underline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} \leqslant \underline{\Delta}^*$, влекущим измеримость.

Возникают естественные вопросы: влечет ли только слабая лакунарность или только внутренняя измеримость последовательности (без дискретной) её измеримость? На оба вопроса мы дадим отрицательные ответы, используя понятие *уточненного порядка* (по Валирону). Напомним, что так называется дифференцируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $\rho(x)$, удовлетворяющая двум условиям $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho(x) = \rho > 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \rho'(x)\, x \ln x = 0$, которые эквивалентны одному условию $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\, h'(x)}{h(x)} = \rho$ для функции $h(x) = x^{\rho(x)}$, или, что наиболее удобно для наших целей, условию

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\, L'(x)}{L(x)} = 0 \tag{36}$$

для функции $L(x) = h(x)\, x^{-\rho}$.

Предложение 9. *Для наперед заданных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \in [0, \beta]$ существуют внутренне измеримые, слабо лакунарные последовательности с ρ-плотностями $\underline{\Delta} = \alpha$ и $\overline{\Delta} = \beta$.*

Доказательство. Пусть числа ρ, β и α удовлетворяют условиям предложения. Если $\alpha > 0$, то для построения заявленной последовательности возьмем функцию $\alpha(x) \equiv \alpha$. Если же $\alpha = 0$, то полагаем $\alpha(x) = \ln^{-\gamma} x$, где $\gamma \in (0, 1)$. Выберем затем в качестве $L(x)$ функцию

$$L(x) = \frac{1}{\rho} \sqrt{\alpha(x) \beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(x)}} \right)^{\sin \ln^\gamma x},$$

которая, как несложно проверить, удовлетворяет условию (36). Определим далее функцию $n(x) = [x\,h'(x)]$, а последовательность Λ возьмем так, чтобы ее считающая функция совпадала с $n(x)$. Здесь $h(x) = x^\rho\,L(x)$, а $[x]$ обозначает целую часть числа x. Из результатов монографии [7] следует, что при $x \to +\infty$ условия $N(x) \sim h(x)$ и $n(x) \sim x\,h'(x)$ на считающие функции Λ эквивалентны. Последовательность Λ является внутренне измеримой, так как для нее по построению выполнено

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{n(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x\,h'(x)} = \frac{1}{\rho}\,.$$

С другой стороны,

$$\rho\,\underline{\Delta}^* = \rho \varliminf_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x^\rho} = \rho \varliminf_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x^\rho} = \rho \varliminf_{x\to+\infty} L(x) =$$

$$= \varliminf_{x\to+\infty} \sqrt{\alpha(x)\beta}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(x)}}\right)^{\sin\ln^\gamma x} = \varliminf_{x\to+\infty} \sqrt{\alpha^2(x)} = \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \alpha$$

и

$$\rho\,\overline{\Delta}^* = \rho \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x^\rho} = \rho \varlimsup_{x\to+\infty} L(x) = \varlimsup_{x\to+\infty} \sqrt{\alpha(x)\beta}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(x)}}\right)^{\sin\ln^\gamma x} = \beta.$$

Применяя следствие из предложения 2, получаем

$$\underline{\Delta} = \rho\,\underline{\Delta}^* = \alpha \quad \text{и} \quad \overline{\Delta} = \rho\,\overline{\Delta}^* = \beta.$$

Итак, построенная последовательность имеет заданные ρ-плотности, внутренне измерима, а её слабая лакунарность вытекает из неравенства (8) предложения 1. Доказательство завершено.

Подытоживая предыдущие рассуждения, можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 10. *Произвольная последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ *комплексных чисел с показателем сходимости* $\rho > 0$ *и* $0 < \overline{\Delta} < \infty$ *измерима тогда и только тогда, когда она дискретно измерима и выполнено хотя бы одно из условий:*

a) последовательность Λ *слабо лакунарна, т. е.* $l_\Lambda = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} = 1$,

b) выполняется условие $\underline{\nu} = \varliminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{N(x)}{n(x)} = \dfrac{1}{\rho}$,

c) выполняется условие $\overline{\nu} = \varlimsup\limits_{x\to+\infty} \dfrac{N(x)}{n(x)} = \dfrac{1}{\rho}$,

d) последовательность Λ *внутренне измерима, т. е. существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{n(x)} \quad \left(= \frac{1}{\rho}\right).$$

Доказательство. Достаточность дискретной измеримости последовательности Λ с любым из условий *a*) или *d*) для её измеримости уже обсуждалась перед предложением 8, а с условиями *b*), *c*) — в самом предложении 8.

Пусть теперь последовательность Λ измерима, т. е. $\underline{\Delta} = \overline{\Delta} = \Delta$. Её дискретная измеримость следует прямо из определения. Слабая лакунарность вытекает из неравенства (5) предложения 1, а внутренняя измеримость – из неравенств (1) и того, что существует предел

$$\nu = \lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{n(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{N(x)/x^\rho}{n(x)/x^\rho} = \frac{\Delta/\rho}{\Delta} = \frac{1}{\rho}.$$

Все доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ. 1956. 632 с.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
3. Boas R.P. *Entire functions.* Acad. Press. New-York. 1954. 276 p.
4. Гольдберг А.А. *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, IV* // Матем. сб. Т. 66. 1965. С. 411–457.
5. Кондратюк А.А. *Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями* // Сиб. матем. журн. Т. 11. № 5. 1970. С. 1084–1092.
6. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Монография-обзор, РИЦ БашГУ, изд. четвертое, дополненное. Уфа. 2012. 176 с.
7. Брайчев Г.Г. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций* М.: Прометей. 2005. 232 с.
8. Брайчев Г.Г. *Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ нулями на луче* // Уфимск. матем. журн. Т. 4. № 1. 2012. С. 29–37.
9. Брайчев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей* // Матем. сб. Т. 203. № 7. 2012. С. 31–56.
10. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями* // Матем. заметки. Т. 91. в. 5. 2012. С. 674–690.
11. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка* // Математичні студії. Т. 30. № 2. 2008. С. 183–188.
12. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа. Часть II. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел.* М.: Наука. 1978. 432 с.

Георгий Генрихович Брайчев
Московский педагогический государственный университет,
ул. М.Пироговская, 1,
199296, Москва, Россия
E-mail: `braichev@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 31-37.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ

Б.В. ВИННИЦКИЙ, В.Н. ДИЛЬНЫЙ

Аннотация. В работе рассматривается пространство Харди $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ в полуплоскости с экспоненциальным весом. В этом пространстве изучается задача аналитического продолжения функции с границы. Ранее получено утверждение для случая $p \in (1;2]$ об аналитическом продолжении с мнимой оси, которое является обобщением одной теоремы Пэли-Винера. Но для многих приложений более интересным является случай $p = 1$. Для этого случая в статье получены оценки функции, удовлетворяющей некоторым стандартным условиям.

Ключевые слова: весовое пространство Харди, теорема Пэли-Винера, угловые граничные значения

Mathematics Subject Classification: 30H10, 30E20

1. Введение

Обозначим через $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, пространство функций, аналитических в $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, для которых

$$||f||_{H^p} := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

А.М. Седлецкий [1] показал, что это пространство совпадает с пространством Харди $\widetilde{H}^p(\mathbb{C}_+)$ аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых

$$||f||_{\widetilde{H}^p} = \sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty,$$

и нормы $||\cdot||_{H^p}$ и $||\cdot||_{\widetilde{H}^p}$ являются эквивалентными. Свойства пространств Харди достаточно полно изложены в [2], [3]. Функции из пространств Харди имеют почти всюду на $i\mathbb{R}$ угловые граничные значения, которые обозначаем через $f(iy)$ и $f(iy) \in L^p(\mathbb{R})$. Хорошо известной [3, с. 94] является следующая теорема Пэли-Винера.

Теорема 1. *Функция $f_0 \in L^p(i\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, является угловой граничной функцией некоторой функции $f \in H^p(\mathbb{C}_+)$ в том и только том случае, если*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_0(it)e^{i\tau t}dt = 0,$$

для почти всех отрицательных чисел τ.

B.V. Vinnitskii, V.N. Dilnyi, On generalization of Paley-Wiener Theorem for weighted Hardy spaces.

Поступила 28 сентября 2013 г.

Б.В. Винницкий рассмотрел [4] следующее обобщение пространства Харди. Обозначим через $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, пространство аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых

$$||f||_{H^p_\sigma} := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Функции из этого пространства имеют почти всюду на на $i\mathbb{R}$ угловые граничные значения, которые обозначаем через $f(iy)$ и $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$.

В [5] получено следующее обобщение теоремы Пэли-Винера.

Теорема 2. *Функция $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такая, что $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leqslant 2$, является угловой граничной функцией некоторой функции $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ в том и только том случае, если существует функция f_2 такая, что*

1) $f_2 \in H^p_{2\sigma}(\mathbb{C}_+)$;

2) $f_3(iv) := f_1(iv) + f_2(iv) \in L^p(-\infty; 0)$, $f_1(iv) := f_0(iv)e^{-\sigma v}$;

3) для почти всех $\tau < 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv + \frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du + \int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)e^{i\tau v}dv = 0.$$

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2 для случая $\sigma = 0$. При исследовании цикличности в некоторых пространствах и свойств уравнений свертки (см [6], [7]) возникает вопрос о справедливости теоремы 2 для случая $p = 1$. В [5] показано, что необходимая часть этой теоремы справедлива и для случая $p = 1$, но вопрос о достаточности условий остается открытым. Цель этой статьи – получить описание функций, угловые граничные функции которых удовлетворяют условиям 1)-3) предыдущей теоремы.

2. Основной результат

Получено следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $f_0 : i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_0(it)e^{-\sigma|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ и выполняются условия 1)–3) теоремы 2, то существует аналитическая в $\mathbb{C}_+$ функция f, для которой функция f_0 является угловой граничной функцией и*

$$\sup\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr : \varphi \in (-\pi/2; \pi/2)\backslash(-\delta; \delta) \right\} < +\infty \tag{1}$$

для всех $\delta \in (0; \pi/2)$.

Доказательство в существенном базируется на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 1. *Если выполняются условия теоремы 3 и*

$$\Xi(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_1(iv)}{iv - z}dv + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_3(iv)}{iv - z}dv + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f_2(u)}{u - z}du,$$

то $\Xi(z) = 0$ для всех $z \in \mathbb{C}_- := \{z : \mathrm{Re} z < 0\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\eta_1(\tau) = \int\limits_0^{+\infty} f_1(iv)e^{i\tau v}dv,\ \eta_2(\tau) = \frac{1}{i}\int\limits_0^{+\infty} f_2(u)e^{\tau u}du,\ \eta_3(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)e^{i\tau v}dv.$$

Тогда из условия 3) вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\left(\eta_1(\tau)+\eta_2(\tau)+\eta_3(\tau)\right)d\tau = 0, \quad \mathrm{Re} z < 0. \tag{2}$$

Но по теореме Фубини мы имеем для $\mathrm{Re} z < 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_1(\tau)d\tau = \int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau(iv-z)}d\tau dv = \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv-z}dv.$$

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_3(\tau)d\tau = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv-z}dv, \quad \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\tau z}\eta_2(\tau)d\tau = \frac{1}{i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u-z}du.$$

Поэтому из (2) получаем утверждение леммы. □

Введем обозначение $\mathbb{C}(\alpha;\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}$.

Лемма 2. *Если выполняются условия теоремы 3, то угловые граничные значения функции*

$$f(z)=\begin{cases} -e^{-i\sigma z}\Xi(z), z\in\mathbb{C}(0;\pi/2),\\ -e^{-i\sigma z}\left(\Xi(z)-f_2(z)\right), z\in\mathbb{C}(-\pi/2;0),\end{cases}$$

совпадают почти всюду на $i\mathbb{R}$ *с функцией* f_0.

Доказательство. По лемме 1 имеем $\Xi(-\bar z)=0$, $z\in\mathbb{C}_+$. Поэтому

$$\Xi(z)=\Xi(z)-\Xi(-\bar z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\left(\frac{1}{iv-z}-\frac{1}{iv+\bar z}\right)dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\left(\frac{1}{iv-z}-\frac{1}{iv+\bar z}\right)dv+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty} f_2(u)\left(\frac{1}{u-z}-\frac{1}{u+\bar z}\right)du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar z)}dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar z)}dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty} f_2(u)\frac{2x}{(u-z)(u+\bar z)}du.$$

Последний интеграл равен нулю [1] на мнимой оси за исключением, возможно, точки $z=0$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{2x}{(iv-z)(iv+\bar z)}dv = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f_1(iv)\frac{x}{(v-y)^2+x^2}dv$$

является интегралом Пуассона, поэтому для него существуют угловые граничные значения почти всюду на $\partial\mathbb{C}_+$ из $\mathbb{C}_+$ и эти значения равны $-f_1(iv)$ для $v>0$ и 0 для $v<0$. Аналогично можно показать, что угловые граничные значения на $\partial\mathbb{C}_+$ из $\mathbb{C}_+$ функции

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f_3(iv)\frac{2x}{(iv-z)\,(iv+\bar{z})}dv$$

равняются почти всюду $-f_3(iv)$ для $v<0$ и нулю для $v>0$. □

Лемма 3. *Если выполняются условия теоремы 3, то для функции f, определенной в лемме 2, справедливо условие (1).*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что для $\mathrm{Re}z>0$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv+z}dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv+z}dv+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u+z}du,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_1(iv)}{iv+\overline{z}}dv+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{f_3(iv)}{iv+\overline{z}}dv+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f_2(u)}{u+\overline{z}}du.$$

Из вышеприведенных равенств получим для $z=x+iy\in\mathbb{C}_+$, $y\neq 0$,

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}f_1(iv)\left(-\frac{1}{iv+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{iv+\bar{z}}-\frac{1}{iv+z}\right)\right)dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}f_3(iv)\left(-\frac{1}{iv+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{iv+\overline{z}}-\frac{1}{iv+z}\right)\right)dv+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{+\infty}f_2(u)\left(-\frac{1}{u+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{u+\overline{z}}-\frac{1}{u+z}\right)\right)du.$$

Поэтому, обозначив

$$\chi(w;z):=\frac{2}{\pi i}\frac{wx}{(w+\bar{z})(w-z)(w+z)}=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w+\bar{z}}+\frac{x}{iy}\left(\frac{1}{w+\overline{z}}-\frac{1}{w+z}\right)\right),$$

получим

$$\Xi(z)=i\int\limits_{0}^{+\infty}f_1(iv)\chi(iv;z)dv+i\int\limits_{-\infty}^{0}f_3(iv)\chi(iv;z)dv+\int\limits_{0}^{+\infty}f_2(u)\chi(u;z)du.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $0<\varphi<\pi/2$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\left|f(re^{i\varphi})\right|e^{-\sigma r|\sin\varphi|}dr=\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\Xi(re^{i\varphi})\right|dr\leqslant\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\int\limits_{0}^{+\infty}f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})dv\right|dr+$$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{0}f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})dv\right|dr+\int\limits_{0}^{+\infty}\left|\int\limits_{0}^{+\infty}f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})du\right|dr\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\left|f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv+\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{+\infty}\left|f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|drdv+$$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\left|f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})\right|drdu.$$

Очевидно,

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}dr.$$

Если $v>0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1-2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1+2s\sin\varphi+s^2}}.$$

Поскольку $\varphi\in(0;\pi/2)$, то использовав неравенство $s<\sqrt{s^2+1}$, имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1-2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1+2s\sin\varphi+s^2}}\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\varphi ds}{1-2s\sin\varphi+s^2}=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\varphi\le\pi.$$

Если же $v<0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{|v|\,r\cos\varphi dr}{(v^2-2vr\sin\varphi+r^2)\sqrt{v^2+2vr\sin\varphi+r^2}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1+2s\sin\varphi+s^2)\sqrt{1-2s\sin\varphi+s^2}}\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi ds}{(1+s^2)\sqrt{2s(1-\sin\varphi)}}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)ds}{(1+s^2)\sqrt{4s\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}}\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)ds}{1+s^2}\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{s}ds}{1+s^2}=\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поэтому по теореме Фубини при $\varphi\in(0;\pi/2)$ имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}dr\int\limits_0^{+\infty}\left|f_1(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dv\le c<+\infty,\qquad\int\limits_0^{+\infty}dr\int\limits_0^{+\infty}\left|f_3(iv)\chi(iv;re^{i\varphi})\right|dv\le c<+\infty,$$

Также для $u>0$ получим

$$\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left|\chi(u;re^{i\varphi})\right|dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{ux}{|(u+\bar{z})(u-z)(u+z)|}dr=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur\cos\varphi}{(u^2+2ur\cos\varphi+r^2)\sqrt{u^2-2ur\cos\varphi+r^2}}dr=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{s\cos\varphi}{(s^2+2s\cos\varphi+1)\sqrt{s^2-2s\cos\varphi+1}}dr=\int\limits_0^{2}\frac{2}{\sqrt{s^2-2s\cos\varphi+1}}dr+$$

$$+\int\limits_2^{+\infty}\frac{s}{(s^2+1)\sqrt{(s-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}}dr\leqslant2\int\limits_0^{2}\frac{1}{\sqrt{(s-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}}dr+$$

$$+\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{s\sqrt{2(s-\cos\varphi)\sin\varphi}}dr\leqslant2\int\limits_0^{2}\frac{1}{|\sin\varphi|}dr+\frac{1}{\sqrt{2}\sin\varphi}\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{(s-\cos\varphi)^{3/2}}dr<c_2.$$

Поэтому также

$$\int\limits_0^{+\infty} dr \int\limits_0^{+\infty} \left|f_2(u)\chi(u;re^{i\varphi})\right| du \le c_1 < +\infty, \quad \varphi \in (-\pi/2+\delta;\pi/2-\delta)\,. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь случай $-\pi/2 < \varphi < 0$. Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-\sigma r|\sin\varphi|} dr \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \left|\Xi(re^{i\varphi})\right| dr + \int\limits_0^{+\infty} \left|f_2(re^{i\varphi})\right| e^{-2\sigma r|\sin\varphi|} dr \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{+\infty} |f_1(iv)| \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right| drdv + \int\limits_{-\infty}^{0} |f_3(iv)| \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(iv;re^{i\varphi})\right| drdv +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} |f_2(u)| \int\limits_0^{+\infty} \left|\chi(u;re^{i\varphi})\right| drdu + c.$$

Аналогично случаю $0 < \varphi < \pi/2$ можно показать, что если $v > 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|v|\, r\cos\varphi dr}{(v^2 - 2vr\sin\varphi + r^2)\sqrt{v^2 + 2vr\sin\varphi + r^2}} \le \pi\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а если $v > 0$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|v|\, r\cos\varphi dr}{(v^2 + 2vr\sin\varphi + r^2)\sqrt{v^2 - 2vr\sin\varphi + r^2}} \le \pi.$$

Учитывая также (3), получим справедливость (1) и для $\varphi \in (-\pi/2;-\delta)$. □

Доказательство теоремы 3 вытекает из лемм 1–3, если учесть, что функция f, определенная в лемме 2, является аналитической в $\mathbb{C}_+$. Действительно, функция

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f_1(iv)}{iv - z} dv + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f_3(iv)}{iv - z} dv$$

очевидно аналитическая в $\mathbb{C}_+$. Функция

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{+\infty} \frac{f_2(u)}{u - z} du - f_2(z)$$

аналитическая в углах $\mathbb{C}(0;\pi/2)$ и $\mathbb{C}(-\pi/2;0)$. На положительной действительной полупрямой по теореме Сохоцкого предельные значения из верхнего и нижнего угла совпадают. Поэтому, как и при доказательстве леммы 8 из [7], легко получим, что f – аналитическая в $\mathbb{C}_+$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седлецкий А.М. *Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения* // Матем. сб. 1975. **96**. № 1. С. 75–82.
2. Кусис П. *Введение в теорию пространств H^p.* М.: Наука. 1984. 368 с.
3. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир. 1984. 469 с.
4. Винницкий Б.В. *О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент* // Укр. мат. журн. 1994. **46**. № 5. С. 484–500.
5. Винницкий Б.В. *Об обобщении теоремы Пэли-Винера* // Мат. студ. 1995. **4**. С. 37–44.
6. B. Vinnitskii, V. Dil'nyi *On extension of Beurling-Lax theorem* // Math. Notes, **79**. 2006. P. 362–368.
7. V. Dilnyi *On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces* // Журн. матем. фiз., анал., геом. 2011. **7**. С. 19–33.

Богдан Васильевич Винницкий,
Дрогобычский государственный педагогический университет имени Ивана Франко,
ул. Стрыйская, 3,
82100, г. Дрогобыч, Украина
Владимир Николаевич Дильный,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1,
82000, г. Львов, Украина
E-mail: `dilnyi@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 38-50.

УДК 517.918

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВЫРОЖДЕННО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.Г. ГАДОЕВ, С.А. ИСХОКОВ

Аннотация. В работе исследуются некоторые спектральные свойства несамосопряженного эллиптического оператора A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированного с некоэрцитивной полуторалинейной формой.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-функций оператора A в $\mathcal{H}^l$, описание области определения оператора A, оценка резольвенты оператора A, асимптотическое распределение собственных значений оператора A.

Ключевые слова: Эллиптические дифференциальные операторы, резольвента оператора, распределение собственных значений, система корневых вектор-функций.

Mathematics Subject Classification: 34L20, 34L10, 47E05, 47A10, 46E35

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней исследуются некоторые спектральные свойства одного класса несамосопряженных вырожденно-эллиптических операторов A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-фукций оператора A в $\mathcal{H}^l$, описание области определения оператора A, оценки резольвенты оператора A, асимптотическое распределение собственных значений оператора A.

Спектральные асимптотики вырождающихся эллиптических операторов, далеких от самосопряженных, изучались в работах [2–7] в ситуации, когда собственные значения оператора делятся на две серии, одна из которых лежит вне угла $|\,arg\, z| \leqslant \varphi$, $\varphi < \pi$, а другая локализуется к лучу $R_+ = (0, +\infty)$. Эта статья, как и [1], примыкает к работам [2, 3, 7], в которых наиболее общие результаты получены в [7], где предполагается, что старший коэффициент оператора A

$$a(t) \equiv a_{mm}(t) \in C^m([0,1]; End\mathbf{C}^l) \tag{0.1}$$

и имеет простые различные собственные значения (с.з.) при каждом $t \in [0,1]$.

Вместо (0.1) мы требуем лишь, чтобы $a(t) \in C([0,1]; End\mathbf{C}^l)$.

M.G. Gadoev, S.A. Iskhokov, Spectral properties of degenerate elliptic operators with matrix coefficients.

Поступила 15 июня 2013 г.

§1. Формулировка основных результатов

1. Оператор A, заданный в гильбертовом пространстве H, мы назовем далеким от самосопряженного, если он не приводится к виду

$$A = B(E + D), \quad B = B^*, \quad D \in \sigma_\infty(H). \tag{1.1}$$

Здесь и далее, символ $\sigma_\infty(H)$, обозначает класс линейных вполне непрерывных операторов в H; B^* — оператор, сопряженный к B.

Спектральные свойства эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, близких к самосопряженным, т.е. приводящихся к виду (1.1), в литературе достаточно подробно изучены (см. [8, 9]). Также подробно исследованы спектральные свойства эллиптических дифференциальных операторов (д.о.) и псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), далеких от самосопряженных в случае, если они заданы на компактном многообразии без края (см. [7, 10–12], где имеется библиография). В случае областей с краями, д.о. и п.д.о., далекие от самосопряженных, изучались в [3, 4, 13–18]; из них вырожденно-эллиптическим задачам посвящены [3, 4, 13].

2. В данной статье изучаются спектральные свойства несамосопряженного оператора в $L_2(0,1)^l$, порожденного полуторалинейной формой

$$\mathcal{A}[u,v] = \sum_{i,j=0}^{m} \int_0^1 < p_i(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t), p_j(t)v^{(j)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt. \tag{1.2}$$

Здесь

$$p_i(t) = \{t(1-t)\}^{\theta+i-m} \quad (i = \overline{0,m}),\ \theta < m,\ u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i},$$

$$a_{ij} \in L_\infty(J;\ End\,\mathbf{C}^l) \quad (i,j = \overline{0,m}),$$

где $J = (0,1)$. Символ $<\,,\,>_{\mathbf{C}^l}$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$.

Обозначим через $\mathcal{H}_+$ замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(J)$ по норме

$$|\varphi|_+ = \left(\int_J p_m^2(t)|\varphi^{(m)}(t)|^2 dt + \int_J |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Положим

$$\mathcal{H} = L_2(J), \quad \mathcal{H}^l = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H} \quad (l - \text{раз}),$$
$$\mathcal{H}_+^l = \mathcal{H}_+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_+ \quad (l - \text{раз}).$$

В дальнейшем скалярное произведение в пространствах $\mathcal{H}, \mathcal{H}^l$ будет обозначаться одним и тем же символом $(\,,\,)$. Аналогично, нормы в пространствах $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_+^l$ и $\mathcal{H}, \mathcal{H}^l, \mathbf{C}^l$ будут обозначаться соответственно через $|\ |_+, |\ |$. Символом $\|T\|$ обозначим норму ограниченного оператора T, заданного в $\mathcal{H}$ или $\mathcal{H}^l$.

За область определения полуторалинейной формы $\mathcal{A}[u,v]$ (1.2) примем пространство $\mathcal{H}_+^l$.

Предположим, что $a_{mm}(t) \in C^m(\overline{J};\ End\,\mathbf{C}^l)$, и матрица $a(t) = a_{mm}(t)$ при каждом $t \in \overline{J}$ имеет l различных ненулевых собственных значений $\mu_1(t), ..., \mu_l(t)$. Тогда собственные значения матрицы $a(t)$ можно так перенумеровать, что $\mu_j(t), \mu_j^{-1}(t) \in C^m(\overline{J}), j = \overline{1,l}$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$|a_{ij}(t)| \leqslant Mt^\delta(1-t)^\delta \quad (i+j < 2m), \quad \delta > 0, \tag{1.3}$$

$$\mu_j(t) \notin S \qquad (j = \overline{1,l},\ t \in \bar{J}), \tag{1.3'}$$

где $S \subset \mathbf{C}$ — некоторый замкнутый угол с началом в нуле, а $\mu_j(t)$ с.з. матрицы $a(t)$.

При выполнении перечисленных выше условий имеют место следующие теоремы (см. [1]):

Теорема 1.1. *Существует единственный замкнутый оператор* A *в* $\mathcal{H}^l$, *обладающий следующими свойствами:*

(i) $\quad D(A)\subset\mathcal{H}^l_+,\ (Au,v)=\mathcal{A}[u,v]\quad(\forall u\in D(A),\ v\in\mathcal{H}^l_+)$,

(ii) *при некотором* $z_0\in\mathbf{C}$ *существует непрерывный обратный*

$$(A-z_0E)^{-1}\,:\,\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l.$$

Пусть A такой же оператор, как в условиях $(i),(ii)$.

Теорема 1.2. *Оператор* A *имеет дискретный спектр. Система корневых вектор-функций оператора* A *полна в* $\mathcal{H}^l$, *т.е. их конечные линейные комбинации плотны в* $\mathcal{H}^l$. *Порядок резольвенты оператора* A *не превосходит число* $\frac{1}{2m}$. *Для числа* $N(\lambda)$ *собственных значений оператора* A, *не превосходящих по модулю* λ, *с учетом их корневых кратностей, справедлива оценка* $N(\lambda)\leqslant M\lambda^{1/2m}$, $(\lambda\geq 1)$.

Отметим, что сформулированные выше результаты в случае симметрической формы (1.2) хорошо известны.

3. Обозначим через $\mathcal{H}_-$ пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме

$$|u|_-=\sup_{0\neq\varphi\in\mathcal{H}_+}\frac{|(u,\varphi)|}{|\varphi|_+}.$$

Положим $\mathcal{H}^l_-=\mathcal{H}_-\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_-\quad(l$ - раз). Элемент $F=(F_1,\ldots,F_l)\in\mathcal{H}^l_-$ порождает антилинейный непрерывный функционал над $\mathcal{H}^l_+$ по формуле:

$$<F,v>=\lim_{i\to+\infty}(u_i,v),\qquad v\in\mathcal{H}^l_+,$$

где последовательность вектор-функций $u_1,u_2,\ldots\in\mathcal{H}^l$ выбирается так, что $u_i\to F\,(i\to+\infty)$ в $\mathcal{H}^l_-$.

Заметим, что если $v=(v_1,\ldots,v_l)\in\mathcal{H}^l_+$, то

$$<F,v>=\sum_{i=1}^{l}<F_i,v_i>,\quad |F|_-=(\sum_{i=1}^{l}|F_i|^2_-)^{1/2}.$$

Здесь и далее, как при $l=1$, так и в случае произвольного $l\in N$ приняты одни и те же обозначения: $|\ |_-,<,>$.

Обратно, для любого антилинейного непрерывного функционала $g(v)\,(v\in\mathcal{H}^l_+)$ существует единственный элемент $F\in\mathcal{H}^l_-$ такой, что $g(v)=<F,v>$, $\forall v\in\mathcal{H}^l_+$. При этом норма функционала g равна $|F|_-$.

В дальнейшем антилинейные непрерывные функционалы над $\mathcal{H}^l_+$ отождествляются с элементами пространства $\mathcal{H}^l_-$.

4. При выполнении условия (1.3) согласно неравенству Харди имеем

$$|\mathcal{A}[u,v]|\leqslant M|u|_+|v|_+\quad(\forall u,v\in\mathcal{H}^l_+).$$

Поэтому можно ввести в рассмотрение оператор $\mathcal{A}\,:\,\mathcal{H}^l_+\to\mathcal{H}^l_-$, действующий по формуле

$$<\mathcal{A}u,v>=\mathcal{A}[u,v]\qquad(\forall u,v\in\mathcal{H}^l_+).$$

Пусть A такой же оператор, как в теоремах 1.1, 1.2. Имеет место следующая

Теорема 1.3. *Для достаточно больших по модулю* $\lambda\in S$ *существуют непрерывные обратные*

$$(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}\,:\,\mathcal{H}^l_-\to\mathcal{H}^l_-,\quad(A-\lambda E)^{-1}\,:\,\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l,$$

и выполняется равенство

$$(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}u=(A-\lambda E)^{-1}u\qquad(\forall u\in\mathcal{H}^l).$$

При этом $Au = \mathcal{A}u\,(\forall u \in D(A))$, *и*

$$D(A) = \{u \in \mathcal{H}^l_+ \,:\, \mathcal{A}u \in \mathcal{H}^l\}.$$

Аналогичный результат для д.о. в частных производных, имеющих скалярные коэффициенты, получен в работе [19]. Отметим, что первая часть утверждения теоремы 1.3 может быть установлена по схеме статьи [19] лишь в том случае, если дополнительно предположить, что при некоторой непрерывной в $\bar{J}$ функции $\gamma(t)$, которая не обращается в нуль, и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$|\,arg\,\{\gamma(t) < a(t)h, h >_{\mathbf{C}^l}\}| < \frac{\pi-\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in \bar{J},\, 0 \neq h \in \mathbf{C}^l). \tag{1.4}$$

Здесь и далее, мы считаем, что функция $arg\,z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Из (1.4), в частности, следует, что

$$|\,arg\,\gamma(t)\mu_j(t)| \leqslant \frac{\pi-\varepsilon}{2} \quad (\forall t \in \bar{J},\, j = \overline{1,l}).$$

5. Доказательства теоремы 1.2 приведена в §2. Отметим, что в §2 получена также следующая оценка резольвенты оператора A в секторе S:

$$\|(A-\lambda E)^{-1}\| \leqslant M|\lambda|^{-1}, \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq c(S)),$$

где $c(S) > 0$. Суммируемость рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A методом Абеля со скобками установлена в [1]. В данной работе доказана полнота системы корневых вектор-функций оператора A в $\mathcal{H}^l$.

В §3 работы дано описание области определения оператора A. В §4 исследуется асимптотическое поведение собственных значений оператора A.

Результаты данной работы частично анонсированы в [20].

§2. Оценка резольвенты оператора A

1. Пусть P – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, ассоциированный с полуторалинейной формой

$$P^{'}[u,v] = (\rho^\theta u^{(m)}, \rho^\theta v^{(m)}), D[P^{'}] = \mathcal{H}_+,$$

где $\rho(t) = t(1-t), t \in [0,1]$, θ — такое же, как в (1.2).

Обозначим (см.[1, стр. 32]) через $\mathcal{H}^r_\nu, \nu > 0$ пространство функций $u \in \mathcal{H}^r_+$ с нормой

$$|u|_\nu = \left(\int\limits_J \rho^{2\theta}(t)|u^{(m)}(t)|^2dt + \nu\int\limits_J |u(t)|^2dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, обозначает пространство элементов $F \in \mathcal{H}^r_-$ с нормой

$$|F|_{-\nu,r} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{H}^r_+\\ |v|_\nu \leqslant 1}} |< F, v >|.$$

При $\nu_1, \nu_2 > 0$ множества $\mathcal{H}^r_{\pm\nu_1}, \mathcal{H}^r_{\pm\nu_2}$ совпадают, а как нормированные пространства отличаются друг от друга только эквивалентными нормами. Для $\nu = 1$ имеем $\mathcal{H}^r_\nu = \mathcal{H}^r_+, \mathcal{H}^r_{-\nu} = \mathcal{H}^r_-$. Пространство $\mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, является негативным пространством в тройке $\mathcal{H}^r_\nu \subset \mathcal{H}^r \subset \mathcal{H}^r_{-\nu}$ по отношению к позитивному пространству $\mathcal{H}^r_\nu$. (см., например, [21, стр. 51]).

В дальнейшем нам понадобится следующая (см. [1, стр.36])

Лемма 2.1. *Существует непрерывный обратный оператор* $T_\omega : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}, \omega \geq 1$, *такой, что* $T_\omega u = (P+\omega E)^{-\frac{1}{2}}u$, $\forall u \in \mathcal{H}$, причем

$$|T_\omega F| \leqslant M|F|_{-\nu} \;\; (\forall\omega \geq 1, \nu \in [1, 2\omega)), \forall F \in \mathcal{H}_{-\nu}),$$

где число $M>0$ не зависит от ω,ν.

2. Пусть T_ω – такой же оператор, как в лемме 2.1, $\mathcal{T}_\omega:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_-$ – оператор, обратный к оператору $T_\omega:\mathcal{H}_-\to\mathcal{H}$. Так же, как в лемме 2.1, доказывается, что

$$|\mathcal{T}_\omega u|_{-\nu}\leqslant M|u| \quad (\forall\omega\geq 1,\nu\in[1,2\omega),\forall u\in\mathcal{H}),$$

где число $M>0$ не зависит от ω,ν. При этом, если $u\in\mathcal{H}_\nu$, то

$$\mathcal{T}_\omega u=(P+\omega E)^{\frac{1}{2}}u.$$

Введем операторы $T^l_\omega:\mathcal{H}^l_-\to\mathcal{H}^l,\mathcal{T}^l_\omega:\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l_-$ по формулам:

$$T^l_\omega=diag\{T_\omega,...,T_\omega\},\quad \mathcal{T}^l_\omega=diag\{\mathcal{T}_\omega,...,\mathcal{T}_\omega\}.$$

Положим $P_l=diag\{P,...,P\}$. Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Для $\lambda\in S$, $|\lambda|\geq\sigma$, где $\sigma>0$ – достаточно большое число, справедливы представления*

$$(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}=(P_l+|\lambda|E)^{-1}\Phi(\lambda)T_\lambda \tag{2.1}$$

$$(A-\lambda E)^{-1}=(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.1$'$}$$

где $\Phi(\lambda):\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l$ – ограниченный оператор

$$\sup_{\lambda\in S,\ |\lambda|\geq\sigma}||\Phi(\lambda)||<+\infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. Докажем, что если $\nu=|\lambda|$, то для достаточно больших по модулю $\lambda\in S$,

$$|(P_l+|\lambda|E)^{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}_\nu-\lambda E)^{-1}\mathcal{T}^l_{|\lambda|}u|\leqslant M|u| \ \ (\forall u\in\mathcal{H}^l).$$

Для этого используем равенство (см. [1], §4, (4.6), (4.7))

$$(\mathcal{A}_\nu-\lambda E)^{-1}=X_\nu(\lambda)\Gamma'_\nu(\lambda).$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_\nu:\mathcal{H}^l_\nu\to\mathcal{H}^l_{-\nu}$ определен по формуле

$$<\mathcal{A}_\nu u,v>=\mathcal{A}[u,v],\quad (\forall u,v\in\mathcal{H}^l_\nu).$$

Ясно, что

$$|T^l_{|\lambda|}\Gamma^{(\lambda)}_{|\lambda|}\mathcal{T}^l_{|\lambda|}u|\leqslant|\Gamma^{(\lambda)}_{|\lambda|}\mathcal{T}^l_{|\lambda|}u|_{-|\lambda|}\leqslant M_1|\mathcal{T}^l_{|\lambda|}u|_{-|\lambda|}\leqslant M_2|u|,\ (\lambda\in S,|\lambda|\geq\sigma_1).$$

Остается показать (см. [1], §4, (4.6), (4.7)), что

$$|(P_l+|\lambda|E)^{\frac{1}{2}}X_{|\lambda|}(\lambda)\mathcal{T}^l_{|\lambda|}u|\leqslant M_3|u|,\quad (u\in\mathcal{H}^l). \tag{2.3}$$

Используя (4.3), (3.13) из [1], сведем доказательство оценки (2.3), так же, как выше, к доказательству следующего неравенства:

$$|(P_l+|\lambda|E)^{\frac{1}{2}}R_{k,|\lambda|}(\lambda)\mathcal{T}_{|\lambda|}v|\leqslant M_4|v|,\quad (v\in\mathcal{H}).$$

Справедливость этого неравенства для достаточно больших по модулю $\lambda\in S$ вытекает из представления (3.12) работы [1]. Таким образом, имеем

$$(\mathcal{A}_\nu-\lambda E)^{-1}=(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)T^l_{|\lambda|},\quad (\lambda\in S,|\lambda|\geq\sigma) \tag{2.4}$$

где где $\Phi(\lambda):\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l$ – ограниченный оператор, удовлетворяющий оценке (2.2).

Заметим, что

$$(\mathcal{A}_\nu-\lambda E)^{-1}F=(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}F.\ \ (\forall\ \nu\geq 1,F\in\mathcal{H}^l_-). \tag{2.5}$$

Для $u\in\mathcal{H}^l$ имеем

$$T^l_{|\lambda|}u=(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}u,\ (\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}u=(A-\lambda E)^{-1}u,$$

что вместе с (2.4), (2.5) доказывает (2.1), (2.1′). Теорема доказана.

3. Из представления (2.1$'$) следует оценка

$$||(A-\lambda E)^{-1}|| \leqslant M|\lambda|^{-1}. \ \ (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma). \tag{2.6}$$

Так как порядок резольвенты оператора P_l равен $\frac{1}{2m}$, то из (2.1$'$) вытекает, что порядок резольвенты оператора A не превосходит числа $\frac{1}{2m}$. Отсюда и из (2.6), применяя теорему 6.4.1 из [10], устанавливаем, что система корневых вектор-функций оператора A полна в $\mathcal{H}^l$.

Отметим, что суммируемость методом Абеля со скобками рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A установлена в [1].

4. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\sigma_\tau(H)$, $\tau \geq 1$ класс операторов $L \in \sigma_\infty(H)$, сумма s-чисел которых в степени τ сходится ([22]):

$$||L||_\tau = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^\tau(L) \right)^{\frac{1}{\tau}} < +\infty.$$

(Нижняя грань чисел τ, таких, что $L \in \sigma_\tau(H)$, называется порядком оператора L.)

Обозначим через $\nu_1(t), \nu_2(t), ...$ последовательность с.з. оператора $L \in \sigma_\infty(H)$, занумерованных в порядке невозрастания их модулей, с учетом их корневых кратностей. Отметим, что

$$\nu_j\left((L^*L)^{\frac{1}{2}}\right) = s_j(L), \ j = 1, 2, ... \ .$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие, хорошо известные (см., например, [22]) неравенства

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\mu_j(t)| \leqslant ||L||_1, \quad (\forall L \in \sigma_1(H)) \tag{2.7}$$

$$||LL'||_p \leqslant ||L||_p ||L'||, \quad ||L'L||_p \leqslant ||L'|| ||L||_p, \tag{2.8}$$

если $L \in \sigma_p(H), p \geq 1, L'$ – ограниченный оператор;

$$||L_1...L_r||_p \leqslant ||L_1||_{\kappa_1}...||L_r||_{\kappa_r}, \tag{2.9}$$

если $L_j \in \sigma_{\kappa_j}(H)$, $1 \leqslant p \leqslant \kappa_j$ $(j = \overline{1,r})$, $\sum\limits_{j=1}^{r} \kappa_j^{-1} = \frac{1}{p}$. Из (2.9) при $L_1 = ... = L_r = L \in \sigma_1(H)$, $\kappa_j = r$ $(j = \overline{1,r})$ следует неравенство

$$||L^r||_1 \leqslant ||L||_r^r. \tag{2.10}$$

Из (2.7) следует сходимость ряда

$$spL \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} \nu_j(t), \quad \forall L \in \sigma_1(H).$$

5. В заключении этого параграфа докажем утверждение теоремы 1.2 об оценке спектра оператора A.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ...$ последовательность с.з. оператора A, занумерованных в порядке неубывания их модулей, с учетом корневых кратностей.

Используя (2.1$'$), (2.8) - (2.10), находим

$$||(A-\lambda E)^{-r}||_1 \leqslant ||(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}||_r^r \leqslant M||(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}||_{2r}^{2r},$$
$$(\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma) \tag{2.11}$$

где $r = 4m, \sigma > 0$ – достаточно большое число. Известно, что

$$N_0(t) \overset{def}{=} \sum_{\omega_j \leqslant t} 1 \sim const \cdot t^{\frac{1}{2m}} \quad (t \to +\infty),$$

где $\omega_1, \omega_2, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора P. Поэтому

$$||(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}||_{8m}^{8m}=\sum_{j=1}^{+\infty}(\omega_j+|\lambda|)^{-4m}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dN_0(t)}{(t+|\lambda|)^{4m}}\leqslant M|\lambda|^{\frac{1}{2m}-4m}\ \ (|\lambda|\geq 1).$$

Отсюда и из (2.7), (2.11) заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{+\infty}|(\lambda_j-\lambda)^{-4m}|\leqslant M|\lambda|^{\frac{1}{2m}-4m}\ \ (\lambda\in S, |\lambda|\geq\sigma).$$

Выберем число $\varphi\in(-\pi;\pi]$ так, что луч $\Gamma=\{\lambda=te^{i\varphi}: t\geq 0\}$ будет биссектрисой угла S. Тогда

$$|z|+|\lambda|\leqslant c'|z-\lambda|\ \ (\forall z\notin S, \lambda\in\Gamma), \tag{2.12}$$

где число $c'>0$ зависит только от раствора угла S. Для достаточно больших $j\geq j_0$ имеем $\lambda_j\notin S$. Очевидно, что

$$N(t)=\int\limits_0^t dN(\tau)\leqslant(2t)^{4m}\int\limits_0^t\frac{dN(\tau)}{(t+\tau)^{4m}}\leqslant(2t)^{4m}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dN(\tau)}{(t+\tau)^{4m}}=$$

$$=(2t)^{4m}\sum_{j=1}^{+\infty}(|\lambda_j|+t)^{-4m},$$

где $N(t)=card\{j:|\lambda_j|\leqslant t\}$. Следовательно, (см. (2.12))

$$N(t)\leqslant M_1+M_2t^{4m}\sum_{j=j_0}^{+\infty}|\lambda_j-te^{i\varphi}|^{-4m}\leqslant M_2t^{\frac{1}{2m}}\ \ (t\geq 1).$$

Тем самым, нами полностью завершено доказательство теоремы 1.2.

§3. Описание области определения оператора A

1. Пусть A – такой же оператор, как в теореме 1.1; коэффициенты

$$a_{ij}(t)\in C^j(J;\, End\,\mathbf{C}^l)\ \ (i,j=\overline{0,m}). \tag{3.1}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1. *Область определения $D(A)$ оператора A описывается как класс вектор-функций $u\in W_{2,loc}^{2m}(J)^l\cap\mathcal{H}_+^l$ таких, что*

$$f=\sum_{i,j=0}^m(-1)^j(p_i(t)p_j(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t))^{(j)}\in\mathcal{H}^l.$$

При этом $f=Au$.

Доказательство. Пусть $u\in W_{2,loc}^{2m}(J)^l\cap\mathcal{H}_+^l$ и вектор-функция $f(t)\in\mathcal{H}^l$. Тогда для произвольной вектор-функции $v(t)\in C_0^\infty(J)^l$ путем интегрирования по частям получим

$$(f,v)=\sum_{i,j=0}^m(p_i(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t),p_j(t)v^{(j)}(t))=\mathcal{A}[u,v].$$

Эти равенства по непрерывности справедливы для всех $v\in\mathcal{H}_+^l$. Поэтому, согласно теореме 1.1, $u\in D(A), f=Au$.

Обратно, пусть $u \in D(A), f_1 = Au$. Тогда

$$(f_1, v) = \sum_{i,j=0}^{m} (p_i a_{ij} u^{(i)}, p_j v^{(j)}), \quad \forall v \in C_0^\infty(J)^l,$$

так что элемент

$$f_2 = \sum_{i,j=0}^{m} (-1)^j (p_i(t) p_j(t) a_{ij}(t) u^{(j)}(t))^{(j)},$$

понимаемый в смысле распределений, принадлежит $\mathcal{H}^l$. При этом имеем $f_1 = f_2$. Далее из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u \in W_{2,loc}^{2m}(J)^l$.

2. В связи с теоремой 3.1, отметим, что пространство $\mathcal{H}_+^l$ при $-\frac{1}{2} < \theta < m - \frac{1}{2}$ описывается (см. [23]) как класс вектор-функций $u(t) \in \mathcal{H}^l$ с конечной нормой

$$|u|_+ = \left(\int_J |\rho^{2\theta}(t) u(t)|^2 dt + \int_J |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, \tag{3.2}$$

которые имеют нулевые следы

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, ..., s_0 - 1;$$

здесь s_0 – целое число, такое, что $m - \theta - \frac{1}{2} \leqslant s_0 < m - \theta + \frac{1}{2}$. Если $\theta \leqslant -\frac{1}{2}$ или $m - \frac{1}{2} \leqslant \theta < m$, то пространство $\mathcal{H}_+^l$ состоит из вектор-функций $u(t) \in \mathcal{H}^l$ (см. [23]) с конечной нормой $|u|_+$ (3.2).

3. Наряду с теоремой 3.1 имеет место следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполнено (3.1) и*

$$|a_{ij}^{(k)}(t)| \leqslant M\{t(1-t)\}^{-k}, \quad (k = 0, 1, ..., j).$$

Пусть, кроме того, $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, ..., m\}$. Тогда область определения оператора A описывается как класс вектор-функций $u \in W_{2,loc}^{2m}(J)^l \cap \mathcal{H}_+^l$ таких, что

$$p_0(t) u(t), \quad \sum_{i,j=0}^{m} (-1)^j (p_i(t) p_j(t) a_{ij}(t) u^{(j)}(t))^{(j)} \in \mathcal{H}^l.$$

§4. Асимптотическое распределение собственных значений оператора A

1. Пусть A такой же оператор, как в теореме 1.1. Предположим, что собственные значения $\mu_1(t), ..., \mu_l(t)$ матрицы $a(t)$ расположены в комплексной плоскости следующим образом:

$$\mu_1(t), ..., \mu_n(t) \in R_+ \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0, Imz = 0\}, \quad \mu_{n+1}(t), ..., \mu_l(t) \notin \overline{\Phi},$$

где $1 \leqslant n \leqslant l$, $\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \varphi\}, \varphi \in (0, \pi)$. Тогда, согласно теореме 1.3, в любом замкнутом секторе $S \subset \overline{\Phi} \backslash R_+$, с началом в нуле, содержится конечное число с.з. оператора A. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\lim_{j \to +\infty} arg \lambda_j = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора A, расположенных в углу Φ и занумерованных в порядке неубывания их модулей, с учетом корневых кратностей.

Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Для функции*

$$N(t) = card\{j : |\lambda_j| \leqslant t\},$$

при $t \to +\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$N(t) \sim ct^{\frac{1}{2m}}, \quad c = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{1} \rho^{-\frac{\theta}{m}}(t)\mu_j^{-\frac{1}{2m}}(t)dt.$$

Аналогичный результат для дифференциальных операторов второго порядка установлен в [4, 13]. Отметим, однако, что схема работ [4, 13] не может непосредственно применяться в случае $m > 1$, даже если выполнено условие (1.4). Существенным моментом методики данной работы является то, что мы "выделяем" в явном виде главный член "обобщенной резольвенты" как оператор, действующий из $\mathcal{H}^l_{-\nu}$ в $\mathcal{H}^l_{\nu}$.

Отметим, также, что аналогичный результат для одного класса несамосопряженных эллиптических систем второго порядка установлен в [24].

В сочетании с применением некоторых других аналитических приемов, это позволяет вычислить главный член асимптотики функции $sp(A - zE)^{-1}$ при $z \to +\infty$ по некоторым лучам $\Gamma \subset \overline{\Phi}\backslash R_+$, с началом в нуле. Установленные на этом пути асимптотические формулы даже в случае $m = 1$ относятся к более широким классам операторов, нежели в работах [4, 13].

2. Для доказательства теоремы 4.1 используем (4.6), (4.7) из [1], при $\nu = |\lambda|$. Пусть P_l, T^l_ω, $\mathcal{T}^l_\omega$ такие же операторы, как в п.1, §2.

Обозначим через $u_1, u_2, ...$ ортонормированную последовательность собственных вектор-функций оператора P_l. Пусть $P_l u_j = \omega_j u_j$, $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant ...$. Так как $u_1, u_2, ...$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}^l$ и $(A - \lambda E)^{-1}u_j = (\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1}u_j \ \ \forall \nu \geq 1$, то

$$sp(A - \lambda E)^{-1} = \sum_{j=1}^{+\infty}((A - \lambda E)^{-1}u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}((\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1}u_j, u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)u_j, u_j) + \sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)\Gamma_\nu(\lambda)u_j, u_j), \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma = \sigma(S)), \tag{4.1}$$

где $S \subset \overline{\Phi}\backslash R_+$ – произвольный замкнутый угол с началом в нуле. Учитывая, что

$$(P_l + |\lambda|E)^{\pm\frac{1}{2}}u_j = (\omega_j + |\lambda|)^{\pm\frac{1}{2}}u_j,$$

получим

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)\Gamma_\nu(\lambda)u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)\Gamma_\nu(\lambda)(P_l + |\lambda|E)^{\frac{1}{2}}u_j, (P_l + |\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty}((P_l + |\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}X_\nu(\lambda)\mathcal{T}_{|\lambda|}T_{|\lambda|}\Gamma_\nu(\lambda)\mathcal{T}_{|\lambda|}u_j, u_j). \tag{4.2}$$

Имеем при $\nu = |\lambda|, u \in \mathcal{H}^l$, согласно (4.6) (см. [1], §4),

$$|\mathcal{T}_{|\lambda|}\Gamma_\nu(\lambda)T_{|\lambda|}u| \leqslant M|\Gamma_\nu(\lambda)T_{|\lambda|}u|_{-|\lambda|} \leqslant M_1|\lambda|^{-\varepsilon'}|T_{|\lambda|}u|_{-|\lambda|} = M_2|\lambda|^{-\varepsilon'}|u|.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{T}_{|\lambda|}\Gamma_\nu(\lambda)T_{|\lambda|}$ индуцирует ограниченный оператор в $\mathcal{H}^l$, норма которого не превосходит $M_2|\lambda|^{-\varepsilon'}$. Отсюда, согласно (4.1), (4.2), находим

$$Z(\lambda) \overset{def}{=} |sp(A - \lambda E)^{-1} - \sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)u_j, u_j)| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}||(P_l + |\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}X_\nu(\lambda)\mathcal{T}_{|\lambda|}||_1.$$

Здесь, хотя $\mathcal{T}_{|\lambda|}$ – неограниченный оператор в $\mathcal{H}^l$, оператор $X_\nu(\lambda)\mathcal{T}_{|\lambda|}$ индуцирует в $\mathcal{H}^l$ ограниченный оператор. Применяя (2.3), находим

$$Z(\lambda) \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}|(P_l + |\lambda|E)^{-1}|_1 \leqslant M_1|\lambda|^{\frac{1}{2m}-1-\varepsilon'}.$$

Далее имеем (см. [1], §4, (4.3)),

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}(U(\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1}U^{-1}u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}((\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1}u_j, u_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} sp(\widetilde{Q}_k - \lambda E)^{-1}.$$

Здесь операторы $\widetilde{Q}_k,\ k = \overline{1, l}$ определены в пространстве $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$D(\widetilde{Q}_k) = \{v \in \mathcal{H}_+ : Q_{\nu,k}v \in \mathcal{H}\}, \forall \nu \geq 1,$$

$$\widetilde{Q}_k v = Q_{\nu,k}v, \quad \forall v \in D(\widetilde{Q}_k).$$

Операторы $Q_{\nu,k}$ введены в [1, §4, п. 1]. Напомним, что

$$(\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} = diag\{(Q_{\nu,1} - \lambda E)^{-1}, ..., (Q_{\nu,\ l} - \lambda E)^{-1}\}.$$

Определенные выше операторы $\widetilde{Q}_1, ..., \widetilde{Q}_l$ не зависят от числа $\nu \geq 1$.

Воспользуемся теоремой 1.3 применительно к такой ситуации, когда $l = 1, A = \widetilde{Q}_j, j = \overline{1, l}$. Тогда мы получим, что оператор $\widetilde{Q}_j, j = \overline{n+1, l}$ в угле Φ имеет конечное число с.з. Так как $\mu_j(t) \in R_+ (j = \overline{1, n})$, то $\widetilde{Q}_j = \widetilde{Q}_j^* \geq 0, (j = \overline{1, n})$. Таким образом, имеем

$$sp(A - \lambda E)^{-1} = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{l}(\lambda_{i,k} - \lambda)^{-1} + O(|\lambda|^{\frac{1}{2m}-1-\varepsilon'}), \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma(S)), \tag{4.3}$$

где $\varepsilon' > 0, S \subset \overline{\Phi}\backslash R_+$ – замкнутый угол с началом в нуле, а $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора $\widetilde{Q}_k$, занумерованных в порядке неубывания их модулей.

Пусть $\psi \in (0, \varphi)$,

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : argz = \pm\psi\} \cup \{0\}$$

– контур, огибающий R_+ слева. Выберем числа $c, \delta > 0$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) $|(arg\lambda'_j) \pm \varphi| \geq \delta, |(arg\lambda_{j,k}) \pm \varphi| \geq \delta$, если, соответственно, $|\lambda'_j| \geq c$ или $|\lambda_{j,k}| \geq c$, $(j = 1, 2, ..., k = \overline{1, l})$,

(ii) $\lambda_{j,k} \notin \Phi$, $(k = \overline{n+1, l})$, если $|\lambda_{j,k}| \geq c$.

Здесь $\lambda'_1, \lambda'_2, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора A, занумерованных в порядке неубывания модулей.

Тогда, в случае $|\lambda'_j| \geq c, |\lambda_{j,k}| \geq c$, для $\lambda \in \mathcal{L}$ имеем $|\lambda - \lambda'_j|^{-1} \leqslant M|\lambda'_j|^{-\tau}|\lambda|^{\tau-1}$, $|\lambda - \lambda_{j,k}|^{-1} \leqslant M|\lambda_{j,k}|^{-\tau}|\lambda|^{\tau-1}$, где $\tau \in \left(\frac{1}{2m}, 1\right)$. Поэтому

$$\sum_{q\leqslant|\lambda'_j|} |\lambda'_j - \lambda|^{-1} \leqslant M_1 r(q)|\lambda|^{\tau-1}, \tag{4.4}$$

$$r(q) \overset{def}{=} \sum_{q\leqslant|\lambda'_j|} |\lambda'_j|^{-\tau} \to 0, \quad (q \to +\infty). \tag{4.5}$$

Здесь мы использовали утверждение теоремы 1.2 об оценке спектра оператора A.

Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\left(\sum_{a<|\lambda'_j|\leqslant q}(t+\lambda)^{-1}(\lambda-\lambda'_j)^{-1}\right)d\lambda=\sum_{a<|\lambda'_j|\leqslant q}{}'(t+\lambda'_j)^{-1}, \tag{4.6}$$

где символ $\sum'$ обозначает, что при суммировании берутся только такие j, для которых $|arg\lambda'_j|<\psi$.

Учитывая, что (см. (4.4), (4.5))

$$\lim_{q\to+\infty}r(q)\int\limits_{\mathcal{L}}|\lambda|^{\tau-1}|t+\lambda|^{-1}d\lambda=0,$$

и, переходя в (4.6) к пределу при $q\to+\infty$, находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}(t+\lambda)^{-1}\left(\sum_{a<|\lambda'_j|}(\lambda-\lambda'_j)^{-1}\right)d\lambda=\sum_{a<|\lambda'_j|}{}'(t+\lambda'_j)^{-1}. \tag{4.7}$$

Аналогично имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}(t+\lambda)^{-1}\left(\sum_{a<|\lambda_{j,k}|}(\lambda-\lambda_{j,k})^{-1}\right)d\lambda=\sum_{a<|\lambda_{j,k}|}{}''(t+\lambda_{j,k})^{-1},\quad k=\overline{1,l}, \tag{4.8}$$

где символ $\sum''$ обозначает, что при суммировании берутся только те индексы j, для которых $|arg\lambda_{j,k}|\leqslant\psi$.

Операторы $\widetilde{Q}_{n+1},...,\widetilde{Q}_l$ имеют конечное число с.з. в углу Φ. Отсюда и из (4.3), (4.7), (4.8) заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(t+\lambda_j)^{-1}=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(t+\lambda_{j,k})^{-1}+O(t^{\frac{1}{2m}-1-\varepsilon'}),\quad t\to+\infty.$$

Так как $arg\lambda_j\to0$ $(j\to+\infty)$, то $\lambda_j|\lambda_j|^{-1}\to1$ $(j\to+\infty)$. Поэтому для $q=1,2,...$ имеем

$$\sum_{j=q}^{+\infty}|(t+\lambda_j)^{-1}-(t+|\lambda_j|)^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant2\sum_{j=q}^{+\infty}\left\{\frac{|\lambda_j-|\lambda_j||}{(t+|\lambda_j|)^2}\right\}\leqslant c_q\sum_{j=q}^{+\infty}\frac{|\lambda_j|}{(t+|\lambda_j|)^2}\leqslant c'_q\sum_{j=q}^{+\infty}(t+|\lambda_j|)^{-1},$$

где $c_q,c'_q\to0$ $(q\to+\infty)$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(t+\lambda_j)^{-1}\sim\sum_{j=1}^{+\infty}(t+|\lambda_j|)^{-1}\quad(t\to+\infty).$$

Для с.з. оператора $Q_k,\ k=\overline{1,n}$ известна оценка

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(t+\lambda_{j,k})^{-1}\sim\int\limits_0^{+\infty}\frac{dN_j(\tau)}{\tau+t},\quad(t\to+\infty),$$

где

$$N_j(\tau)=\frac{1}{\pi}\tau^{\frac{1}{2m}}\int\limits_0^{+\infty}\rho^{-\frac{\theta}{m}}(t)\mu_j^{-\frac{1}{2m}}(t)dt.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dN(\tau)}{\tau + t} \sim \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\widetilde{N}(\tau)}{\tau + t}, \quad (t \to +\infty),$$

где

$$\widetilde{N}(\tau) = \sum_{j=1}^{n} N_j(\tau).$$

Применяя соответствующую тауберову теорему, получим формулу

$$N(t) \sim \sum_{j=1}^{n} N_j(t), \quad (t \to +\infty),$$

что и доказывает теорему 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гадоев М.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов с сингулярными матричными коэффициентами на отрезке* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 3. 2011. С. 26–54.
2. Бойматов К.Х. *Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряжённых операторов* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 11, № 4. 1977. С. 74–75.
3. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем* // Математический сборник. Т. 181 , № 12. 1990. С. 1678–1693.
4. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка* // Вестник МГУ. № 3. 1990. С. 24–31.
5. Розенблюм Г.В. *Спектральная асимптотика нормальных операторов* // Функц. анализ и его приложения. Т. 16. 1982. С. 82–83.
6. Розенблюм Г.В. *Условная асимптотика спектра операторов, близких к нормальным* // Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1986. С. 180–195.
7. M.S. Agranovich and A.S. Markus *On spectral properties of elliptic pseudo-differential operators far from self-adjoint ones* // Zeitshrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1989. Bd., 8(3). P. 237–260.
8. Бирман М.Ш. Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве* // Л. Издательство ЛГУ. 1980. 264 с.
9. Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А. *Спектральная теория дифференциальных операторов* // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. Т. 64. 1988. С. 5–248.
10. Агранович М.С. *Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНИТИ, М. Т. 63. 1990. С. 5–129.
11. Агранович М.С. *Некоторые асимптотические формулы для эллиптических псевдодифференциальных операторов* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 21. № 1. 1987. С. 63–65.
12. Кожевников А.Н. *Об асимптотике собственных значений эллиптических систем* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 11. № 4. 1977. С. 82–83.
13. Бойматов К.Х. *Асимптотика спектра несамосопряженных систем дифференциальных операторов второго порядка* // Математические заметки. Т. 51. № 4. 1992. С. 8–16.
14. Бойматов К.Х. *Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов далеких от самосопряженных* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 29. № 3. 1995. С. 55–58.
15. M. Faierman *An elliptic boundary problem involving an indefinite weight* // Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh. 130A. № 2. 2000. P. 287–305.
16. A.N. Kozhevnikov *Asymptotics of the spectrum of Douglis-Nirenberg elliptic operators on a compact manifold* // Math. Nachr. Bd. 182. 1996. P. 261–293.

17. S.G. Pyatkov *Riesz's bases from the eigenvectors and associated vectors of elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function* // Siberian Journal of Differential Equations. 1995. V. 1. No. 2, P. 179–196.
18. M. Sango *A spectral problem with an indefinite weight for an elliptic system* // Electronic Journal of Diff. Equations. № 21. 1997. P. 1–14.
19. Бойматов К.Х. *Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой* // Доклады РАН. Т. 330, № 3,1993. С. 285–290.
20. M.G. Gadoev, S.A. Iskhokov *Spectral properties of degenerate elliptic operators with matrix coefficients. // Centre de Recerca Matematica (Barcelona).* Preprint series number 1078, December, 2011. – 14 pages.
21. Бойматов К.Х. *О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами* // Сибирский математический журнал. Т. 47, № 1, 2006. С. 46–57.
22. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965.
23. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия вузов. Математика. № 8. 1988. С.4–30.
24. Гадоев М.Г. *Об асимптотике спектра одного класса несамосопряженных систем* // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН. 2007. С. 78–84.

Махмадрахим Гафурович Гадоев,
Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Респ. Саха (Якутия), Россия
E-mail: `gadoev@rambler.ru`

Сулаймон Абунасрович Исхоков,
Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Респ. Саха (Якутия), Россия
E-mail: `sulaimon@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 51-59.

УДК 517.53

МИНИМУМ МОДУЛЯ РЯДА ДИРИХЛЕ, СХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.М. ГАЙСИН

Аннотация. В терминах минимума модуля на континуумах, близких к вертикальным отрезкам, изучается поведение суммы ряда Дирихле вблизи прямой сходимости вне некоторого множества исключительных кружков. Этот результат обобщает известную теорему о минимуме модуля на вертикальных отрезках из полуплоскости сходимости.

Ключевые слова: ряды Дирихле, полуплоскость сходимости, теорема о минимуме модуля.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Методы получения асимптотических оценок суммы целого ряда Дирихле на вертикальных отрезках в терминах максимума или минимума модуля, а также на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность, к настоящему времени хорошо известны (по этому поводу см., например, [1] – [3]). Оказывается, поведение суммы ряда Дирихле на кривых — не что иное, как ее глобальное поведение вне некоторого множества исключительных кружков. Об этом и пойдет речь в настоящей статье в случае, когда область сходимости ряда Дирихле — полуплоскость.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, а $D_c(\Lambda)$ — класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : \operatorname{Re} s < c\}$ $(-\infty < c \leqslant +\infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{1}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Для удобства термином "максимум модуля" в дальнейшем будем называть величину

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|, \quad \sigma < c.$$

Вкратце остановимся на общей схеме рассуждений, позволяющей получать оценки максимума модуля $M_F(\sigma)$ через минимум модуля F на вертикальных отрезках.

Асимптотическая оценка величины $M_F(\sigma)$ для суммы F целого ряда Дирихле (1) через максимум $|F|$ на вертикальном отрезке $I = \{s = \sigma + it : |t - t_o| \leqslant H\}$ определенной длины получена в [1]. При этом длина $|I|$ отрезка I должна быть не меньше некоторой характеристики, близкой к аналогичным характеристикам, позволяющим определять радиус полноты системы экспонент $\left\{e^{i\lambda_k x}\right\}$ в пространстве $C[a, b]$ (или $L^2[a, b]$) (по этому поводу

A.M. Gaisin, Minimum of modulus of the sum of Dirichlet series converging in a half-plane.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-97004-р_поволжье_а).

Поступила 28 апреля 2013 г.

см. в [1, 4, 5, 6]). Естественно ожидать, что при оценке $M_F(\sigma)$ через минимум модуля, длина отрезка I в общей ситуации не может быть слишком большой. Ясно, что в этом случае чем больше $|I|$, тем лучше оценка. При естественных ограничениях на последовательность центральных показателей целого ряда (1) в [3] показано, что при $\sigma \to +\infty$ длина отрезка $|I|$ может расти как величина $O(\sigma^q)$ $(0 < q < 1)$.

Поясним общую схему и суть идеи, при помощи которых реализуются следующие асимптотические оценки для любой функции $F \in D_\infty(\Lambda)$, (аналогичая схема при соответствующей ее модификации, как увидим, применима и для случая $D_o(\Lambda)$):

а) для всякой кривой γ, уходящей в бесконечность должным образом, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такая, что при $\xi_n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln |F(\xi_n)|\,, \quad \sigma_n = \operatorname{Re} \xi_n\,;$$

б) при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma),$$

где $m_F(\sigma) = \min\limits_{it \in I} |F(\sigma + it)|$, $I = I(\sigma)$ — отрезок мнимой оси, вообще говоря, переменной длины.

Пусть Λ — последовательность, подчиненная естественным условиям [2]:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \qquad 2)\ \int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty, \tag{2}$$

где $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n$, $\quad q_n = -\ln |Q'(\lambda_n)|$, $\quad Q(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$.

Общая схема метода, позволяющего получать оценки типа а), б), следующая. Сначала находится отрезок ряда $F_v(s) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant v} a_n e^{\lambda_n s}$ $(v = v(\sigma))$, такой, что

$$|F(s) - F_v(s)| < 1 \tag{3}$$

для всех $\sigma \geqslant \sigma_0$ вне E, $\operatorname{mes} E < \infty$. На следующем шаге показывается, что вне E

$$M_F(\sigma) \leqslant e^{w(v)} \max_{|z-\alpha| \leqslant \delta} |F_v(z)|, \tag{4}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Re} \alpha = \sigma)$ — любое, $\delta = \dfrac{w^*(v)}{v}$; w, w^* — некоторые непрерывные монотонно возрастающие функции из класса сходимости W, т.е. $x^{-2}w(x)$, $x^{-2}w^*(x)$ из $L^1[1, \infty)$, $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \to \infty$, $w(v) \geqslant N(v) + c(v)$, $w(v) = o(\ln M_F(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ [2]. Здесь c — функция из (2), $N(x) = \int\limits_0^x \frac{n(t)}{t} dt$, $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Из (3) видно, что оценка типа (4) верна и для F.

Утверждение а) получается из (4) путем применения теоремы о двух константах (при этом предполагается, что $\alpha \in \gamma$) и некоторой леммы типа теоремы Бореля—Неванлинны (см. в [2]).

Чтобы из (4) получить утверждение б), возникает необходимость перейти к подобной оценке для круга $\{z\colon |z-\alpha| \leqslant \delta^2\}$. Поэтому поступаем следующим образом (см., например, в [7]). Применяя теорему о двух константах и учитывая асимптотическую оценку (она является следствием леммы типа Бореля—Неванлинны [2])

$$\ln M_F(\sigma + \delta) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma), \quad \sigma \to \infty, \quad \sigma \notin E,$$

можно считать, что оценка (4) имеет место для вертикального отрезка I длины 2δ (с центром в точке α) [7]. Теперь задача сводится к тому, чтобы отрезок I заменить на меньший отрезок $J \subset I$, длина которого $2\delta^2$. А эта задача обычно решается при помощи следующей леммы П. Турана [8]: если $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ и

$$p(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{it\mu_j},$$

то

$$\|p\|_I \leqslant \Big(2e\frac{|I|}{|J|}\Big)^n \|p\|_J. \tag{5}$$

Здесь I, J — отрезки мнимой оси, $J \subset I$, $\|p\|_I = \max\limits_{it\in I} |p(t)|$.

Если I, J — прежние отрезки, учитывая оценку (5), остается перейти из отрезка J на круг $\{z\colon |z-\alpha| \leqslant \delta^2\}$.

Лемма Турана иногда заменяется на другое утверждение, основанное на свойствах преобразования Фурье (см. в [1], [3]).

Имеется и другой подход, основанный на применении известных формул А.Ф. Леонтьева для коэффициентов квазиполинома F_v [9, гл. I, § 2, п. 1]. В этом случае вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры

$$M_F(\sigma) \leqslant e^{w(v)} H_v(\delta^2) \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F_v(z)|, \tag{6}$$

где $H_v(\delta) = \int\limits_0^\infty M(r, q_v) e^{-r\delta}\, dr$, $q_v(z) = \prod\limits_{\lambda_n\leqslant v} \Big(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\Big)$. С учетом оценки $N(v) \leqslant w(v)$ из (6) получается, что

$$M_F(\sigma) \leqslant 2e^{3w(v)} \exp\Big(\max_{r\geqslant 0} \varphi(r)\Big) \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F_v(z)|,$$

где $\varphi(r) = n(v) \ln\Big(1 + \dfrac{r^2}{v^2}\Big) - r\delta^2$. Но максимум функции φ достигается в точке $r_0 \leqslant \dfrac{2n(v)}{\delta^2}$, и потому

$$\varphi(r_0) \leqslant n(v) \ln\Big(1 + 4\frac{v^2}{n^2(v)}\Big) = O\Big(n(v) \ln \frac{v}{n(v)}\Big)$$

при $\sigma \to \infty$. Значит,

$$M_F(\sigma) \leqslant e^{3w(v) + An(v)\ln\frac{v}{n(v)}} \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F_v(z)|. \tag{7}$$

С другой стороны, для $p = F_v$ первый сомножитель в (5) при $\sigma \to \infty$ тоже есть величина

$$\exp\Big(O\Big(n(v) \ln\frac{1}{\delta}\Big)\Big) \leqslant \exp\Big(O\Big(n(v) \ln \frac{v}{n(v)}\Big)\Big),$$

так как $\ln\frac{1}{\delta} \leqslant \ln\frac{v}{n(v)}$. А для получения из (7) требуемой оценки б) для минимума модуля $m_F(\sigma)$ важно [7], чтобы для функции $n(t)\ln\frac{t}{n(t)}$ существовала мажоранта w из класса W, что равносильно тому, что [3]

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{n(t)\ln\frac{t}{n(t)}}{t^2}\, dt < \infty. \tag{8}$$

Но тогда во всех случаях при $\sigma \to \infty$ вне E, $\operatorname{mes} E < \infty$,

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F(z)| = |F(\xi)|.$$

Это — основная оценка для максимума модуля, откуда тем же способом, что и в статье [7], можно получить требуемый результат, если для круга $D(\xi, 2\delta)$ к F применить следующую лемму об оценке аналитической и ограниченной в единичном круге функции снизу.

Лемма 1. [10] *Пусть функция* g *аналитична и ограничена в круге* $\{z\colon |z|<R\}$, $|g(0)|\geqslant 1$. *Если* $0<r<1-N^{-1}$ $(N>1)$, *то существует не более чем счетное множество кружков*

$$V_n=\bigl\{z\colon |z-z_n|\leqslant \rho_n\bigr\},\quad \sum_n \rho_n\leqslant Rr^N(1-r),$$

таких, что для всех z *из круга* $\{z\colon |z|\leqslant Rr\}$, *но вне* $\bigcup\limits_n V_n$ *справедлива оценка*

$$\ln|g(z)|\geqslant \frac{R-|z|}{R+|z|}\ln|g(0)|-5NL, \tag{9}$$

где

$$L=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|g(Re^{i\theta})|\,d\theta-\ln|g(0)|.$$

Условие (8) является естественным и, скорее всего, оптимальным при рассмотрении задач типа б). Это в какой-то мере подтверждается тем, что отказ от данного условия ведет к деформации отрезка I (см. ниже, а также [3]).

Для функций $F\in D_\infty(\Lambda)$ проблема о минимуме модуля в достаточно полной мере изучена в работе [3], где получены законченные результаты. Важно отметить, что в данной работе функция F может иметь сколь угодно быстрый рост. Некоторые важные теоремы о минимуме модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося лишь в полуплоскости Π_o, установлены в [11]. Соответствующие результаты о менее регулярном поведении функций $F\in D_o(\Lambda)$, а именно на кривых, примыкающих к мнимой оси, доказаны в статье [12].

Цель статьи — перенести результаты работы [3] о минимуме модуля функций из $D_\infty(\Lambda)$ на случай функций из класса $D_o(\Lambda)$ и тем самым усилить и обобщить соответствующие утверждения из [11], [12]. В этой связи отметим, что в случае, если $F\in D_o(\Lambda)$, возникают специфические трудности, связанные с оценкой размеров исключительных множеств $e\subset[-1,0)$. Поэтому в случае полуплоскости Π_o (или единичного круга для лакунарных степенных рядов $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^{p_n}$, $p_n\in\mathbb{N}$) поступают следующим образом. Фиксируется некоторая монотонно возрастающая непрерывная функция Φ и выделяется некоторый подкласс функций $F\in D_o(\Lambda)$, удовлетворяющих, например, условию

$$\varliminf_{\sigma\to 0-}\frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)}>0,$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1). Тогда переменная относительная плотность

$$\Delta(\sigma)=\frac{\mathrm{mes}(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}$$

исключительного множества $e\subset[-1,0)$, вне которого для функции F справедливы требуемые оценки, обычно зависит только от поведения величины

$$\varphi(t)\int\limits_t^{\infty}\frac{w(x)}{x^2}dx,$$

где φ — функция, обратная к Φ, а $w=w(x)$ — некоторая функция распределения последовательности Λ [11]. Если, например, $w\in \underline{W}_\varphi$ (определение см. ниже) и $\varphi(x)w(x)=o(x)$ при $x\to\infty$, то, оказывается, нижняя плотность de множества e равна нулю. В остальном общие методы доказательства те же, что и в случае $D_\infty(\Lambda)$. Поэтому основной смысл данной работы заключается в том, чтобы более точно указать расположение и размеры исключительных кружков, вне которых верна требуемая оценка для функции $\ln|F(s)|$ в терминах минимума модуля в полуплоскости Π_0.

2. Определения и необходимые сведения

Пусть L — класс всех непрерывных, неограниченных и возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть

$$W=\{w\in L:\int\limits_1^\infty\frac{w(x)}{x^2}dx<\infty\}$$

— класс сходимости, а

$$\underline{W}_\varphi=\{w\in W:\ \varliminf_{t\to\infty}\varphi(t)J(t;w)=\ 0\},$$

где $\varphi\in L,\quad J(t;w)=\int\limits_t^\infty\frac{w(x)}{x^2}dx$. Введем также множество $W_\varphi\subset\underline{W}_\varphi$:

$$W_\varphi=\{w\in W:\ \lim_{t\to\infty}\varphi(t)J(t;w)=\ 0\}.$$

Будем говорить, что две функции φ и w из класса L согласованы, если $\varphi(x)w(x)=o(x)$ при $x\to\infty$.

Пусть $e\subset[-1,0)$ — измеримое по Лебегу множество. Верхней De и нижней de плотностями называются величины [11]:

$$De=\varlimsup_{\sigma\to0-}\frac{\mathrm{mes}(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|},\qquad de=\varliminf_{\sigma\to0-}\frac{\mathrm{mes}(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}.$$

Если $De=de$, то говорят, что множество e имеет плотность.

Теоремы типа минимума модуля основаны на утверждениях, связанных с оценкой логарифма модуля аналитической и ограниченной в круге функции вне некоторого множества кружков снизу. Как было отмечено, для получения подобных оценок полезной является лемма 1. Сделаем одно замечание об исключительных кружках из этой леммы. При $L=0$ оценка (9) следует из неравенства Гарнака, и она верна всюду в круге $\{z\colon|z|<R\}$ (см. в [10]). Пусть теперь $L>0$. Оценка (9) справедлива в каждой так называемой легкой точке круга $\overline{D}=\{z\colon|z|\leqslant Rr\}$ [10]. Остальные точки круга $\overline{D}$ называются тяжелыми. С каждой тяжелой точкой z связан некоторый круг (см. в [10], [13]) $K_z=\{\xi\colon|\xi-z|\leqslant\rho_z\}$. Как известно, из покрытия множества тяжелых точек кружками K_z ограниченного радиуса ρ_z можно выделить не более чем счетное, при котором каждая тяжелая точка будет покрыта не более чем шестью кружками [14]. В круге $\overline{D}$ функция g имеет лишь конечное число нулей a_1, a_2, …, a_n. Очевидно, они все являются тяжелыми точками.

Несколько увеличивая радиусы исключительных кружков, можно считать, что оценка (9) верна вне объединения открытых кружков $V_n=\{z\colon|z-z_n|<\rho_n\}$ с общей суммой радиусов

$$\sum_n\rho_n\leqslant Rr^N,\qquad r<1-\tfrac{1}{N},\quad N>1.$$

Тогда для всех $z\in\overline{D}$ вне $V=\bigcup\limits_n V_n$ подавно верна оценка

$$G(z)>-6NL,\quad G(z)=\ln|g(z)|-\frac{R-|z|}{R+|z|}\ln|g(0)|. \tag{10}$$

Далее, выкидывая из $\overline{D}$ все открытые кружки из V, содержащие a_1, a_2, …, a_n (их не более $6n$ штук), получим замкнутое множество, которое обозначим через C. Пусть

$$B=\bigl\{z\in C\colon G(z)\leqslant-6NL\bigr\}.$$

Множество B замкнуто, и $B \subset V$. Следовательно, по лемме Гейне—Бореля, существует конечное число кружков из V, покрывающих B. Значит, для любого z из $C \setminus B$ вне указанных кружков верна оценка (10). Таким образом, имеет место

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда имеется конечное число кружков* $V_n = \{z\colon |z - z_n| < \rho_n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$ *с общей суммой радиусов*

$$\sum_{n=1}^{m} \rho_n \leqslant Rr^N, \quad r < 1 - \tfrac{1}{N} \ (N \geqslant 1), \tag{11}$$

вне которых в круге $\{z\colon |z| \leqslant Rr\}$ *верна оценка:*

$$G(z) > -6NL,$$

где G *— функция, определенная в формулах (10).*

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty$,

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{12}$$

Ясно,что Q — целая функция экспоненциального типа. Обозначим $M(r;Q) = \max\limits_{|z|=r} |Q(z)|$. Предположим, что последовательность Λ распределена так, что для некоторой функции $\psi \in W_\varphi$ выполняются оценки

$$-\ln |Q'(\lambda_n)| \leqslant \psi(\lambda_n) \qquad (n \geq 1). \tag{13}$$

Отметим,что в случае, если $F \in D_\infty(\Lambda)$, то требуется, чтобы оценка (13) выполнялась для $\psi \in W$, причем это требование существенно для выполнения оценок а),б) (см.Введение) [2].

Сформулируем основной результат. В указанных предположениях для Λ верна

Теорема 1. *Пусть* φ *— некоторая фиксированная функция из* L, $p \in \underline{W}_\varphi$, *где* $p(x) = \ln M(x;Q)$, *причем* φ *и* p *согласованы. Предположим, что максимальный член* $\mu(\sigma)$ *ряда (1) удовлетворяет условию*

$$\underline{\lim}_{\sigma\to 0-} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0 \tag{14}$$

(Φ *— функция, обратная к* φ). *Тогда для любой функции* $F \in D_o(\Lambda)$ *существует измеримое множество* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой нижней плотности, что для любого вертикального отрезка*

$$I_H = I_H(\sigma) = \{s = \sigma + it : |t - t_o| \leqslant H,\ \sigma < 0\}\ (H = \mathrm{const}),$$

для всех σ, $-1 < \sigma_o \leqslant \sigma < 0$ *вне* e *найдется деформированный отрезок* $I_H^* = I_H^*(\sigma)$, *обладающий свойствами:*

1) $\mathrm{mes}[I_H(\sigma) \cap I_H^*(\sigma)] \to |I_H| = 2H$ *при* $\sigma \to 0-$;

2) $\ln M_F(\sigma + d(\sigma)) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma)$ *при* $\sigma \to 0-$ *вне* e,
где $d(\sigma) = \max\limits_{\tau\in I_H^*} |Re\tau - \sigma)|$;

3) $\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma)$ *при* $\sigma \to 0-$ *вне* e,
где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{\tau\in I_H^*} |F(\tau)|$.

Доказательство. Пусть $w_1(x) = N(ex)$, $\psi \in W_\varphi$ — функция из условия (13). Так как $p \in \underline{W}_\varphi$, то $w_1 \in \underline{W}_\varphi$. Следовательно, функция $w(x) = w_1(x) + \psi(x)$ принадлежит классу $\underline{W}_\varphi$. Далее, поскольку $\psi \in W_\varphi$, то $\varphi(x)\psi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Но из условий теоремы, очевидно, следует, что $\varphi(x)w_1(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Тогда найдется функция $w^*(x) = \beta(x)w(x)$ $(0 < \beta(x) \uparrow \infty,\ x \to \infty)$, также принадлежащая $\underline{W}_\varphi$, $\varphi(x)w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Обозначим $w_1^*(x) = \sqrt{\beta(x)}w(x)$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma). \tag{15}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Поскольку $w^* \in \underline{W}_\varphi$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$, такая, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi(v_j)J(v_j; w^*) = 0, \tag{16}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$ $(\tau_j \to 0-)$,

$$J(v_j; w^*) = \int\limits_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2}dx.$$

Из условий (14) — (16) и условий согласованности функций φ и w^* следует, что [12]

$$\lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w^*) = 0, \quad v_j = v(\tau_j), \tag{17}$$

$$\lim_{\sigma \to 0-} \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)} = 0. \tag{18}$$

Но при выполнении условий (15), (17), (18) применима лемма типа Бореля-Неванлинны, согласно которой при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$, $\mathrm{mes}(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$, верны оценки [12]: $\sigma + 3\delta^* < 0$, и

$$\mu(\sigma + 3\delta^*) \le \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad \delta^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \tag{19}$$

Применяя оценки (10), (19) и другие рассуждения, о которых было сказано в п.1 (см., например, в [12]), при $\sigma \to 0-$ вне исключительного множества e_1 получаем, что:

$$\begin{aligned} &1) \quad \ln M_F(\sigma + \delta^*) < (1 + o(1))\ln M_F(\sigma);\\ &2) \quad M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\alpha|\leqslant\delta} |F(\xi)|, \end{aligned} \tag{20}$$

где α $(Re\alpha = \sigma)$ — любое комплексное число из полуплоскости Π_o,

$$\delta = \delta(v) = \frac{w_1^*(v)}{v}, \qquad \delta^* = \delta^*(v) = \frac{w^*(v)}{v}, \qquad v = v(\sigma).$$

Пусть $D_a = [-1, 0) \setminus e_1$. Тогда для $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to 0-$ из (20), очевидно, имеем

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{\xi \in K} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{21}$$

где $\xi^* \in \partial K$, K — описанный вокруг круга $\bar{D}(\alpha, \delta) = \{\xi\colon |\xi - \alpha| \leqslant \delta\} \subset \Pi_o$ квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

Применим теперь лемму 2 к функции $g(z) = F(z+\xi^*)$, полагая $N = 4$, $R = \delta^*$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(v)}}$. Так как $Rr = 2\sqrt{2}\,\delta$ — длина диагонали квадрата K, то $K \subset \bar{D}(\xi^*, Rr)$. Если $r < 1 - \frac{1}{N}$, то согласно лемме 2 для всех z из круга $\bar{D}(\xi^*, Rr)$ вне конечного числа исключительных кружков V_n, радиусы которых удовлетворяют условию (11), при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to 0-$ верна оценка

$$F(\xi^*)| \leqslant |F(z)|^{1+o(1)} \leqslant M_F^{1+o(1)}(\sigma + \delta^*). \tag{22}$$

Количество исключительных кружков для каждого квадрата свое. Обозначая это число через $m(K)$, имеем

$$\sum_{n=1}^{m(K)} \rho_n \leqslant Rr^4 \leqslant \frac{64\,\delta}{\beta^{3/2}(v)}. \tag{23}$$

Таким образом, из (21), (22) получаем, что при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(z)|, \tag{24}$$

если $z \in K \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{m(K)} V_n$ (K — рассмотренный выше квадрат с центром в точке $\alpha = \sigma + it$).

Для любого $\sigma \in D_a$ рассмотрим прямоугольник

$$P = \{z = x + iy\colon |\sigma - x| \leqslant \delta,\ |y - t_0| \leqslant H\} \quad (H = \mathrm{const}).$$

Ясно, что $P \subset \Pi_0$ при $\sigma' < \sigma < 0$.

Рассмотрим минимальное число квадратов типа K, не имеющих попарно общих внутренних точек и покрывающих P. Исключительное множество $e = \{e_i\}$ прямоугольника P состоит из исключительных кружков квадратов покрытия и их конечное число. Кружки e_i могут пересекаться и образовывать так называемые гроздья $d_K = \bigcup\limits_{i=1}^{m_K} e_i$ — связные компоненты e.

Пусть Π — проекция множеств d_K, имеющих непустое пересечение с отрезком $I_H(\sigma)$, на этот отрезок. Тогда $\Pi = \bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j$, где I_j — некоторые попарно непересекающиеся отрезки, $I_j \subset I_H(\sigma)$, причем в силу (23)

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} \rho_j \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\beta^{3/2}(v)}$$

при $\sigma' < \sigma'' < \sigma < 0$.

Измененный отрезок I_H^* строится следующим образом. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ находим наименьший прямоугольник P_j со стороной I_j и охватывающий соответствующие множества d_K. Участок I_j отрезка I_H заменим на ломаную $\gamma_j = \partial P_j \backslash I_j$. Если P_j примыкает к какой-то горизонтальной стороне P, то из γ_j исключаем и отрезок, целиком лежащий на этой стороне P. Проделав эту процедуру с каждым отрезком I_j, получим требуемый “отрезок” I_H^*.

Из непрерывности функции F следует справедливость оценки (24) и на границах гроздей d_K. Следовательно, оценка (24) имеет место на всем “отрезке” I_H^*, и при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to 0-$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma),$$

где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H^*(\sigma)} |F(\tau)|$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. *В условиях теоремы 1 в [12] доказано более слабое асимптотическое соотношение* $d(F;\gamma) = 1$, *где*

$$d(F;\gamma) = \overline{\lim_{s\in\gamma,\ \mathrm{Re}\, s \to 0-}} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M_F(\mathrm{Re}\, s)},$$

γ *— произвольная кривая из* Π_o, *оканчивающаяся на мнимой оси.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а функция* l,

$$l(r) = N(r)\ln\frac{r}{N(r)}, \qquad N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}dx, \qquad n(t) = \sum_{\lambda_j \le t} 1,$$

принадлежит классу W_φ. *Тогда при* $\sigma \to 0-$ *вне некоторого множества* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой плотности*

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma), \tag{25}$$

где $m_F(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H} |F(\tau)|$, $I_H = I_H(\sigma)$ $(\sigma < 0-)$ *— вертикальный отрезок длины* $2H$.

Если $l \in \underline{W}_\varphi$, *то асимптотическое равенство (25) верно при* $\sigma \to 0-$ *вне множества* $e \subset [-1, 0)$ *нулевой нижней плотности.*

Теорема 2 доказывается тем же методом, использованным в [11], если учесть способ оценки мер исключительных множеств типа e_1 из доказательства теоремы 1.

Отметим, что в статье [11] функция φ удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. В теоремах 1, 2 требуется лишь, что $\varphi \in L$. Доказательство теоремы 2 будет приведено в другой статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле, показатели которого — нули целой функции с нерегулярным поведением* // Матем. сб. 1994. Т.185, №2. С. 33–56.
2. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Мат. сб. 2003. Т.194, №8. С.55–82.
3. Гайсин А.М., Рахматуллина Ж.Г. *Оценка суммы ряда Дирихле через минимум модуля на вертикальном отрезке* // Матем. сб. 2011. Т.202. №12. С. 23–56.
4. K.G. Binmore *A density theorem with an application to gap power series* // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V.148. №2. P. 367–384.
5. R.M. Redheffer *Completeness of sets of complex exponentials.* // Advances in Mathematics. 1977. V.24. P. 1–62.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Интерпретация теоремы Берлинга-Мальявена о радиусе полноты* //Матем.сб.1989. Т.180. №3. С. 397–423.
7. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. 1998. Т.39, №3. С. 501–516.
8. P. Turan *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen.* Budapest: Akademiai Kiado, 1953.
9. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
10. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН Сер. матем. 1994. Т. 58, №2. С. 73–92.
11. Гайсин А.М. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 53, № 4. С. 173–185.
12. Гайсин А.М., Белоус Т.И. *Оценка на кривых функций, представленных в полуплоскости рядами Дирихле* // Сиб. матем. журн. 2003. Т.44, № 1. С. 27–43.
13. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во ХГУ, 1968. № 6. С. 130–150.
14. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука, 1996.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г.Уфа, Россия
E-mail: `gaisinam@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 60-76.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

И.И. ГОЛИЧЕВ

Аннотация. Вводится регуляризация системы Навье-Стокса, решение которой совпадает с решением системы Навье-Стокса, если последнее существует. Регуляризованная нелинейная система сводится к решению последовательности линеаризованных систем. Для решения последней системы используется градиентный метод. Построен и обоснован модифицированный метод наискорейшего спуска, который возможно применять при наличии ограничений на управление и неограниченности множества Лебега.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, градиентный метод, регуляризация, априорные оценки

Mathematics Subject Classification: 49M20, 35Q30, 93C05

1. Введение.

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщенной системы уравнений Навье-Стокса

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + v_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f}(x,t), \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{2}$$

$$div\ \mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

в области $Q_T = \Omega \times [0,T]$, $S_T = S \times [0,T]$, S — граница области Ω, $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, $\mathbf{L}_2(Q_T) = \mathbf{G}(Q_T) \oplus \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$ — ортогональное разложение на градиентную и соленоидальную составляющие части пространства $\mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

$$div\ \mathbf{a} = 0, \ \ \mathbf{a}|_S = 0. \tag{4}$$

Здесь и далее, в основном, применяются обозначения, используемые в работе [3]. Для однозначной определенности давления будем считать, что $\int\limits_\Omega p(x,t)dx = 0$ почти всюду по t на [0,T].

Как отмечалось в работе [1], основная трудность при изучении задач (1) – (3) связана с вопросом – имеет ли место однозначная разрешимость в "целом" (т.е. при любом $t \in [0,T]$) начально-краевой задачи (1), (2). Обоснование того, что она имеет решение "в целом" упирается в доказательство априорной оценки одной из норм $\|\mathbf{v}_x(x,t)\|_2$, $\|\mathbf{v}\|_{q,r,Q_T}$, где параметры q и r удовлетворяют определенным условиям. Наличие оценки на $\|\mathbf{v}\|_{q,r,Q_T}$ влечет существование оценки на $\|\mathbf{v}_x(x,t)\|_2$ и наоборот. Ввиду такого положения, в литературе (см., например, [1], [2] и ссылки в этих книгах) рассматриваются многочисленные

I.I. Golichev, Modified gradient fastest descent method for solving linearized non-stationary Navier-Stokes equations.

Поступила 3 декабря 2013 г.

варианты регуляризации уравнений Навье-Стокса. Регуляризация, как правило, связана с введением в уравнение (1) дополнительных членов, содержащих малый параметр. При этом решение регуляризованной задачи должно стремиться к решению исходной задачи Навье-Стокса при $\varepsilon \to 0$, если это решение существует. При таком подходе возникает вопрос о физической обоснованности регуляризованной задачи, о выборе параметра ε и степени близости решений регуляризованной и исходной задачи.

Предлагаемый в работе [3] подход к решению задачи (1) – (3) также можно рассматривать как регуляризацию системы Навье-Стокса, состоящую в том, что в уравнении (1) в произведении $v_i \mathbf{v}_{x_i}$ почти всюду по t на [0,T] $\mathbf{v}$ заменяется его проекцией на шар $K_R(t) = \{\mathbf{v}(t) : \|\mathbf{v}_x(t)\| \leqslant R(t)\}$, где $R(t)$ — неубывающая, положительная функция. Здесь и далее $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$.

Проекция на шар K_R вычисляется по формуле $P_{K_R}\mathbf{v} = \alpha_R(t, \mathbf{v})\mathbf{v}$, где $\alpha_R(t, \mathbf{v}(t)) = min[1, R(t)/\,\|\mathbf{v}_x(t)\|]$. Таким образом, от уравнения (1) переходим к уравнению

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \alpha_R(t, \mathbf{v})v_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f}. \qquad (\acute{1})$$

Для решения регуляризованной задачи $(\acute{1})$, (2), (3) строится итерационный процесс

$$\tag{5}$$

$$\mathbf{v}^{k+1}\big|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}^{k+1}\big|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{6}$$

$$div\ \mathbf{v}^{k+1} = 0, \tag{7}$$

где $\alpha_k = \alpha_k(t) = \alpha_R(t, \mathbf{v}^k)$.

Обозначим через $\mathbf{V}_2$ пространство $\mathbf{W}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbf{L}_\infty(0, T; \mathbf{W}_2^1(\Omega))$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{2,1}(Q)} + \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\,\|\mathbf{v}_x\| \tag{8}$$

В работе [3] доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, Ω — ограниченная область с границей $S \in C^2$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условиям (4); тогда задача $(\acute{1})$, (2), (3) имеет единственное решение $\mathbf{v}$, p с $\mathbf{v}_{xx}$, $\mathbf{v}_t$, p_x из $\mathbf{L}_2(Q_T)$, последовательности $\left\{\mathbf{v}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{p^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, определенные итерационным процессом (5) – (7), где $\alpha_k = min\left[1, R(t)\left\|\mathbf{v}_x^k\right\|^{-1}\right]$, $R(t)$ — ограниченная, неубывающая функция, сходятся к решению задачи $(\acute{1})$, (2), (3) при любом $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{V}_2$ и справедливы оценки:

$$\left\|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2} \leqslant c(q)q^k\left\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2}, \tag{9}$$

$$\|p_k - p\|_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant c(q)q^k\left\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2} \tag{10}$$

при любом $q \in (0, 1)$, где $c(q)$ ограничена на отрезке $[\alpha, 1]$ при любом $\alpha > 0$.

В работе [3] показано также, что утверждения теоремы 1 остаются в силе, если в нелинейном члене уравнения (1) $v_i\mathbf{v}_{x_i}$ вектор $\mathbf{v}(t)$ заменить его проекцией на шар $\{\mathbf{v}(t) \in \mathbf{L}_4(\Omega) : \|\mathbf{v}(t)\|_4 \leqslant R(t)\}$, или покоординатной проекцией вектора $\mathbf{v}(t)$ на отрезок $[R_1(t), R_2(t)]$, где $R_1(t), R_2(t)$ — ограниченные на интервале [0,T] функции.

Замечание 1. Обратим внимание, что доказанная теорема гарантирует сходимость итерационного процесса (5) - (7) на любом интервале $[0, T]$, на котором $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, а также существование и единственность решения задачи $(\acute{1})$, (2), (3).

Замечание 2. Если на интервале $[0, T_1]$ $(T_1 \leqslant T)$ решение $\mathbf{v}^*$, p_* задачи $(\acute{1})$, (2), (3) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{v}_x^*(t)\| \leqslant R(t) \qquad \forall t \in [0, T_1], \tag{11}$$

то решение задачи (1) - (3) на этом интервале существует и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*, p = p_*$.

Действительно, если выполнено неравенство (11), то $\alpha\left(t, \mathbf{v}_x^*\right) = 1$, поэтому уравнения (1) и $(\acute{1})$ совпадают.

Замечание 3. Если на интервале $[0, T_1]$ $(T_1 \leqslant T)$ решение задачи (1)–(3) существует и выполняется оценка

$$\|\mathbf{v}_x(t)\| \leqslant M(t) \qquad \forall t \in [0, T_1], \tag{12}$$

где $M(t) \leqslant R(t)$, то на этом интервале оно совпадает с решением регуляризованной задачи $(\acute{1})$, (2), (3) .

Действительно, поскольку $\mathbf{v}(\mathrm{t})$ лежит внутри шара $K_R(t)$, то $\mathbf{v}(\mathrm{t})$ совпадает со своей проекцией на этот шар и, поэтому, $\mathbf{v}$ удовлетворяет уравнению $(\acute{1})$. Учитывая единственность решения задачи $(\acute{1})$, (2), (3) (в силу теоремы 1) и единственность решения задачи (1)–(3) при выполнении условия (12) (см. теорему $\acute{1}2$, гл. VI, работы [1]), убеждаемся в справедливости утверждения замечания.

Замечание 4. Учитывая замечание 2, нетрудно построить итерационный процесс, сходящийся к решению задачи (1)–(3) в случае, когда правая часть оценки (12) неизвестна, при условии, что решение задачи (1)–(3) существует и удовлетворяет ограничению (12) при некоторой неизвестной, но заведомо ограниченной на $[0, T_1]$ функции $M(t)$. Действительно, задаем некоторую положительную, ограниченную, неубывающую функцию $R_1(t)$ и решаем задачу $(\acute{1})$, (2), (3) при $R(t) = R_1(t)$, далее проверяем условие (12) при $M(t) = R_1(t)$. Если это условие выполнено, то задача (1)–(3) решена. Если это условие не выполнено, то полагаем $R_2(t) = R_1(t) + K$ (К — параметр метода) и повторяем итерационный процесс. Ясно, что после конечного числа шагов условие (12) будет выполнено и, следовательно, решена задача (1)–(3).

При реализации предлагаемого подхода возникает вопрос о выборе интегрального ограничения $R(t)$ или равномерных ограничений на скорость $R_1(t)$, $R_2(t)$. Оценки $\|\mathbf{v}_x(t)\|$ и $\|\mathbf{v})\|_4$ можно найти явно при $n = 2$ глобально и при $n = 3$ локально. Эти оценки на интервале $[t_0, t]$ зависят от начального условия $\|\mathbf{u}_x(t_0)\|(\|\mathbf{u}(t_0)\|_4)$, $\|f\|_{\mathbf{L}_2(Q^t_{t_0})}$, ν и констант из теорем вложения функций.

Во многих случаях такие оценки найти затруднительно, кроме того, в применении к конкретной задаче полученные оценки могут оказаться сильно загрубленными. В связи с этим в замечании 4 предлагается итерационный процесс, который позволяет найти априорную оценку, если ее решение с соответствующей оценкой на заданном интервале времени существует.

Априорную оценку вида $|\mathbf{v}| \leqslant N$ можно задать исходя из физических соображений, если нам заведомо известно, что скорость вязкой жидкости не превосходит заданной величины, то есть $|\mathbf{v}(t, x)| \leqslant N$, тогда можно положить $R_1(t) = -N$, $R_2(t) = N$. Далее заметим, что если решение таким образом регуляризованной задачи удовлетворяет выбранной априорной оценке, то ее решение совпадает с решением исходной задачи. Если полученное решение не удовлетворяет выбранной оценке, то либо неправильно оценена величина возможной скорости, либо исходная модель (1) – (3) неадекватна изучаемому физическому процессу.

Из сказанного выше следует, что во многих случаях решение нелинейной системы Навье-Стокса можно свести к решению последовательности линейных задач.

К решению линейных задач имеются различные подходы, среди них отметим подход, основанный на градиентных методах минимизации функционала $J(\mathbf{v}) = \int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}|^2 \, dxdt$, в котором давление p рассматривается как управление (см., например, [5]–[7]). Однако, построение обоснованного градиентного метода наталкивается на трудность, связанную с тем, что в рассматриваемых задачах (как и в большинстве реальных задач, где состояние системы описывается дифференциальными уравнениями) множества Лебега $\mathbf{M}_i(C) = \{u \in U_i : J_i(u) < C,\ i = 1, 2\}$ неограничены. В работе [5] эта трудность преодолевалась с помощью итеративной регуляризации метода проекции градиента. К сожалению, этот метод слишком медленно сходится.

В настоящей работе построен и обоснован модифицированный метод наискорейшего спуска, который можно применять при некоторых ограничениях на управление и неограниченность множества Лебега.

2. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ.

В предыдущем разделе показано, что при определенных условиях решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к решению последовательности задач (1.5)–(1.7). Опуская индекс k, запишем эту задачу в виде

$$L\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - grad\ p, \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{2}$$

$$div\ \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, $g_i \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условию (1.4). Здесь и далее при ссылке на формулы из другого раздела будет использована двойная нумерация, где первое число указывает номер раздела, а вторая – номер формулы внутри раздела.

Задачу (1)–(3) рассматриваем как обратную задачу определения $\mathbf{v}$ и p по дополнительным данным (3).

Основным способом решения обратных задач является сведение их к задачам оптимального управления. Рассмотрим два варианта таких задач.

Задача I. Найти минимум функционала $J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(\nabla u)|^2\, dxdt$ на множестве $U_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) = \left\{u \in W_2^{1,0}(Q_T) : \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, dx = 0,\ t \in [0,T]\right\}$, где $\nabla u = grad\ u$, $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение задачи $L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla u$ с условиями (2).

Задача II. Найти минимум функционала $J_2(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(\nabla u)|^2\, dxdt$ на множестве $U_2 = \overset{\circ}{L}_2(Q_T) = \left\{u \in L_2(Q_T) : \int\limits_{\Omega} u(x,t)\, dx = 0, ; t \in [0,T]\right\}$, где $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение задачи $L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla u$ с условиями (2).

Отличие задачи II от задачи I состоит в том, что производные ∇u при $u \in L_2(Q_T)$ понимаются в обобщенном смысле и решение задачи (1) – (3) будем понимать также в обобщенном смысле.

Далее обозначим через H_l $(l = 1, 2)$ гильбертовы пространства

$$H_1 = W_2^{1,0}(Q_T),\ H_2 = \mathbf{L}_2(Q_T);$$

тогда U_l — подпространство пространства H_l $(l = 1, 2)$.

Решение задач I, II будем искать методом проекции градиента

$$u_{k+1} = P_{U_l}(u_k - \alpha_{k+1}J_l'(u_k)), \tag{4}$$

где P_{U_l} — оператор проектирования на множество U_l, $J_l'(u_k)$ — градиент функционала $J_l(u_k)$ в точке u_k $(l = 1, 2)$.

В следующем пункте будет показано, что имеют место формулы для вычисления градиентов:

$$J_1'(u) = -p(u), \tag{5_1}$$

где $p(u)$ определяется из разложения вектора $\mathbf{w}(u)$ на градиентную и соленоидальную части: $\mathbf{w}(u) = grad\ p(u) + \varphi$,

$$J_2'(u) = div\ \mathbf{w}(u). \tag{5_2}$$

Здесь $\mathbf{w}(u)$ — сопряженное состояние, определяемое для обеих задач как решение задачи

$$L^*\mathbf{w}(u) = -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - \frac{\partial}{\partial x_i}(g_i\mathbf{w}) = grad\ div\ \mathbf{v}(\nabla u), \tag{6}$$

$$\mathbf{w}|_{S_T} = 0,\ \mathbf{w}(x,T) = 0. \tag{7}$$

2.1. Дифференцируемость функционала $J_1(u)$. Рассмотрим сначала задачу I. Она записывается в виде

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}(\nabla u)|^2\, dxdt \to inf;\ u \in U_1, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение уравнения

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - \nabla u \tag{9}$$

с начальными и краевыми условиями (2).

Доказательство существования решения задачи (1), (2) в пространстве $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$ и необходимые для обоснования формулы (5_1) оценки основываются на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{F}(x,t) \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} = (g_1,\ldots,g_n) \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $r \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$; тогда решение уравнения

$$L(\mathbf{v}) + r\mathbf{v} = \mathbf{F}, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{10}$$

с краевыми и начальными условиями (2) существует, единственно, принадлежит пространству $\mathbf{W}_2^{2,1}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_\lambda^2 \equiv \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x(t)\|^2 + \nu\int\limits_0^T\|\Delta\mathbf{v}\|^2dt + \lambda\int\limits_0^T\|\mathbf{v}_x(t)\|^2dt \leqslant \\ \leqslant 4e^{\lambda T}\left(\nu^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|\mathbf{a}(x)\|^2\right),\end{aligned} \tag{11}$$

где λ — константа, зависящая лишь от ν, констант c_2, c_3, c_4, c_7 из теорем вложения и второго энергетического неравенства (см. неравенства (13)–(15), (20) работы [3]), $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}$, $\|r\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}$.

Доказательство. Выбираем последовательность ограниченных на Q_T функций $\{\mathbf{F}^n\}$, $\{\mathbf{g}^n\}$, $\{r^n\}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{F}^n - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \lim_{n\to\infty}\|\mathbf{g}^n - \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)} = \\ = \lim_{n\to\infty}\|r^n - r\|_{L_{4,\infty}(Q_T)} = 0\end{aligned} \tag{12}$$

и рассмотрим последовательность задач

$$\mathbf{v}_t^n - \nu\Delta\mathbf{v}^n + g_i^n\mathbf{v}_{x_i}^n + r^n\mathbf{v} = \mathbf{F}^n, \tag{13}$$

$$\mathbf{v}^n|_{S_T} = 0,\ \ \mathbf{v}^n|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{14}$$

Заметим, что последняя задача распадается на отдельные задачи по координатам вектора $\mathbf{v}^n$. Пользуясь известными результатами (см., например, [4], гл. III, §6) убеждаемся, что $\|\mathbf{v}^n\|_\lambda$ ограничена. Покажем, что имеется равномерная оценка $\|\mathbf{v}^n\|_\lambda \leqslant c_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Далее через C_i будем обозначать константы, зависящие от тех же величин, что и константа λ.

Обозначим $\widetilde{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n e^{-\lambda t}$; $\widetilde{\mathbf{F}}^n = \mathbf{F}^n e^{-\lambda t}$, тогда $\widetilde{\mathbf{v}}^n$ является решением задачи

$$\widetilde{\mathbf{v}}_t^n - \nu\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n + g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n + r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n + \lambda\widetilde{\mathbf{v}}^n = \widetilde{F}^n, \tag{13'}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}^n|_{S_T} = 0,\ \ \widetilde{\mathbf{v}}^n|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{14'}$$

Умножим уравнение (13′) на $\Delta\widetilde{\mathbf{v}}$ и, интегрируя по частям по области Q_t, получим

$$\tfrac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\right\|^2+\nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\left(\left(g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}+r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n\right),\,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\,|||_{0,t}^2=$$

$$=\left(\widetilde{\mathbf{F}}^n,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\left\|\mathbf{a}_x\right\|^2. \qquad (15)$$

Здесь использовано обозначение $|||\cdot|||_{0,t}=\|\cdot\|_{L_2(Q_t)}$.

Из соотношений (12) следует, что существуют постоянные C_1, C_2, C_3 такие, что справедливы оценки

$$|||\mathbf{F}^n|||_{0,t}\leqslant C_1,\ \left\|\mathbf{g}^n(t)\right\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}\leqslant C_2,\ \left\|r^n(t)\right\|_{L_4(\Omega)}\leqslant C_3\ \ \forall t\in[0,T]. \qquad (16)$$

Для оценки интегралов в левой части равенства (15) воспользуемся следующими соотношениями

$$|||g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n|||_{0,t}\leqslant\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left|\mathbf{g}^n\right|^2\left|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\right|^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int\limits_0^t\left\|\mathbf{g}^n\right\|_4^2\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\right\|_4^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\left(\int\limits_0^t\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\right\|_4^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon\|\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}+c(\varepsilon)\|\Delta\widetilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}$$

Здесь использовано неравенство

$$\left(\int\limits_0^t\left\|\mathbf{w}_x\right\|_4^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\varepsilon|||\Delta\mathbf{w}|||_{0,t}+c(\varepsilon)|||\mathbf{w}_x|||_{0,t}, \qquad (17)$$

которое справедливо для любого $w\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$.

Последнее неравенство, например, при $n=3$ можно получить следующим образом: $\int\limits_0^t\left\|\mathbf{w}_x\right\|_2^4d\tau\leqslant c_3c_7\left(\int\limits_0^t\left\|\mathbf{w}_x\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\mathbf{w}\right\|^{\frac{3}{4}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant c_3c_7\,|||\mathbf{w}_x\|\,|_{0,t}^{\frac{1}{4}}\,|||\Delta\mathbf{w}\|\,|_{0,t}^{\frac{3}{4}}$.

Здесь использовалась оценка из теоремы вложения $\|v\|_4\leqslant c_3\left\|v_x\right\|^{\frac{3}{4}}\left\|v\right\|^{\frac{1}{4}}$ (при $n=3$) и вторая энергетическая оценка $\|v_{xx}\|\leqslant c_7\left\|\Delta v\right\|$, справедливая для $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)\cap\mathbf{W}_2^2(\Omega)$. Далее, используя неравенство Юнга: $\left(ab\leqslant\frac{1}{m}\varepsilon_1^m a^m+\frac{m-1}{m}\varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}}b^{\frac{m}{m-1}}\right)$, где $m=\frac{4}{3}$, получаем неравенство (17).

Учитывая оценки (16) и оценку $\|\mathbf{v}\|_4\leqslant\bar{c}\|\mathbf{v}_x\|$ при $n=2,3$, легко убедиться в справедливости следующих неравенств

$$|||r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}\leqslant\left(\int\limits_0^t\left\|r^n\right\|_4^2\left\|\widetilde{\mathbf{v}}^n\right\|_4^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_3\bar{c}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}. \qquad (18)$$

Из последних оценок следует, что

$$A_1=\left|\left(\left(g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n+r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n\right),\,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_t)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\varepsilon|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}+\left(c(\varepsilon)+C_3\bar{c}\right)|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}\right)|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\tfrac{1}{4\varepsilon}\left(c(\varepsilon)+C_3\bar{c}\right)^2|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}^2.$$

Полагая $\varepsilon=\frac{1}{8}\nu$, а $\lambda=4\nu^{-1}\left(c\left(\frac{\nu}{8}\right)+C_3\bar{c}\right)^2$, получаем

$$A_1\leqslant\tfrac{1}{4}\nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\tfrac{1}{2}\lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}.$$

Учитывая последнее неравенство, соотношение (15) и неравенство

$$A_2=\left|\left(\widetilde{\mathbf{F}}^n,\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\right|\leqslant\tfrac{1}{4}\nu|||\widetilde{\Delta\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\nu^{-1}|||\widetilde{\mathbf{F}}^n|||_{0,t},$$

получаем

$$\tfrac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\right\|^2+\tfrac{1}{2}\nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2+\tfrac{1}{2}\lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}^2\leqslant c_t^2,$$

где $c_t^2 = \nu^{-1}|||\widetilde{\mathbf{F}}^n|||_{0,t}^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathbf{a}_x\right\|^2$. Из последнего неравенства находим, что

$$[\widetilde{\mathbf{v}}^n]_{\lambda,t}^2 = \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\left\|\widetilde{\mathbf{v}}^n(\tau)\right\|^2 + \nu|||\Delta\widetilde{\mathbf{v}}^n|||_{0,t}^2 + \lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}_x^n|||_{0,t}^2 \leqslant 4c_t^2. \tag{19}$$

Далее покажем, что последовательность $\{\widetilde{\mathbf{v}}^n\}$ фундаментальна в метрике $[\cdot]_{\lambda,T} = \|\cdot\|_{\lambda}$.

Обозначим $\mathbf{z}^{n,l} = \widetilde{\mathbf{v}}^n - \widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}$ и заметим, что $\mathbf{z}^{n,l}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{z}_t^{n,l} - \nu\Delta\mathbf{z}^{n,l} + g_i^n\mathbf{z}_{x_i}^{n,l} + r^n\mathbf{z}^{n,l} + \lambda\mathbf{z}^{n,l} =$$

$$= \left(\widetilde{\mathbf{F}}^n - \widetilde{\mathbf{F}}^{n+l}\right) + \left(g_i^{n+l} - g_i^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{n+l} + \left(r^{n+l} - r^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l} \tag{20}$$

и условиям

$$\mathbf{z}^{n,l}\Big|_{S_T} = 0,\ \mathbf{z}^{n,l}\Big|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

К задаче (20), (21) можно применить неравенство (19), в котором

$$c_t^2 = c_t^2\,(n,l) = \nu^{-1}\left(|||\left(\widetilde{\mathbf{F}}^n - \widetilde{\mathbf{F}}^{n+l}\right) + \left(g_i^{n+l} - g_i^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{n+l} + \left(r^{n+l} - r^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}|||_{0,t}^2\right).$$

Учитывая условие (12), ограниченность последовательности $\{\widetilde{\mathbf{v}}^n\}$ в метрике $[\cdot]_{\lambda,T}$ и неравенство (17), получаем оценки

$$|||\left(\mathbf{g}^{n+l} - \mathbf{g}^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}|||_{0,T} \leqslant C_5\left\|\mathbf{g}^{n+l} - \mathbf{g}^n\right\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)},$$

$$|||\left(r^{n+l} - r^n\right)\widetilde{\mathbf{v}}^{n+l}|||_{0,T} \leqslant C_6\left\|r^{n+l} - r^n\right\|_{L_{4,\infty}(Q_T)}.$$

Из условий (12), оценки (19) и последних двух неравенств следует сходимость последовательности $\{\widetilde{\mathbf{v}}^n\}$ в метрике $[\cdot]_{\lambda,T}$.

Легко показать, что $\underset{n\to\infty}{lim}g_i^n\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n = g_i\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}$, $\underset{n\to\infty}{lim}r^n\widetilde{\mathbf{v}}^n = r\widetilde{\mathbf{v}}$. Тогда из уравнения (13) следует, что $\{\widetilde{\mathbf{v}}_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится в метрике $\mathbf{L}_2\,(Q_T)$ к $\widetilde{\mathbf{v}}_t$. Таким образом, $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}_2^{2,1}\,(Q_T)$.

Переходя в неравенстве (19) к пределу при $n \to \infty$ и учитывая очевидные неравенства: $\left\|\widetilde{\mathbf{v}}\,(t)\right\| \geq e^{-\lambda t}\left\|\mathbf{v}\,(t)\right\|$, $\left\|\widetilde{\mathbf{v}}_x\,(t)\right\| \geq e^{-\lambda t}\left\|\mathbf{v}_x\,(t)\right\|$, $\left\|\Delta\widetilde{\mathbf{v}}\,(t)\right\| \geq e^{-\lambda t}\left\|\Delta\mathbf{v}\,(t)\right\|$, $\left\|\widetilde{\mathbf{F}}\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \left\|\mathbf{F}\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}$, убеждаемся в справедливости неравенства (11). Из неравенства (11) вытекает единственность решения уравнения (10).

Следствие 1. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2\,(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}\,(Q_T)$, $\mathbf{a}\,(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1\,(\Omega)$, $S \in C^2$; тогда уравнение:

$$L\mathbf{v} = \mathbf{f} - grad\ u$$

с краевыми и начальными условиями (2) при любом $u \in W_2^{1,0}\,(Q_T)$ имеет единственное решение из $\mathbf{W}_2^{2,1}\,(Q_T)$ и справедлива оценка:

$$\left\|\mathbf{v}\right\|_{\lambda} \leqslant C_7e^{\lambda T}\left(\left\|\mathbf{f}\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \left\|grad\ u\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \left\|\mathbf{a}_x\right\|\right). \tag{22}$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1 и, кроме того, $div\ \mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}\,(Q_T)$, тогда задача (6), (7) при любом $u \in W_2^{1,0}\,(Q_T)$ имеет решение из $\mathbf{W}_2^{2,1}\,(\Omega)$ и справедлива оценка:

$$\left\|\mathbf{w}\right\|_{\lambda} \leqslant C_8e^{\lambda T}\left\|grad\ div\ \mathbf{v}\,(\nabla u)\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим сначала, что в лемме 1 $\mathbf{g}$ — любая функция из $\mathbf{L}_{4,\infty}\,(Q_T)$. Записав левую часть уравнения (6) в виде

$$L^*\mathbf{w} \equiv -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - \mathbf{g}_i\mathbf{w}_{x_i} - div\ \mathbf{gw}$$

и, сделав замену $t = T - \tau$, перейдем к уравнению вида (10) с произвольной правой частью $F \in \mathbf{L}_2\,(Q_T)$, а также однородными начальными и краевыми условиями. Воспользовавшись неравенством (11), получаем оценку (23).

Следствие 3. Пусть линейный оператор L определен дифференциальным выражением $L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}_i\mathbf{v}_{x_i}$ $(g \in \mathbf{L}_{4,\infty}\,(Q_T))$ на множестве функций из $D(L) \subset \mathbf{W}_2^{2,1}\,(Q_T)$, удовлетворяющих однородным начальным и краевым условиям (2), тогда оператор L имеет ограниченный обратный, область его значений $R(L) = \mathbf{L}_2(Q_T)$ и является замкнутым. Первые два утверждения сразу следуют из леммы 1, замкнутость следует из первых двух свойств оператора L. Аналогичные утверждения справедливы для оператора L^*, определенного дифференциальным выражением в правой части уравнения (6) на множестве функций $\mathbf{w} \in D(L^*) \subset \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (7). Дифференцированием по частям легко убедиться, что L^* содержится в операторе $\tilde{L}^*$, сопряженном к L. То, что области определения операторов L^* и $\tilde{L}^*$ совпадают, легко показать. Действительно, пусть $z \in D\left(\tilde{L}^*\right)$, тогда, полагая $f = \tilde{L}^* z$, получаем соотношения $(Lx, z) = (x, f)\ \forall x \in D(L)$. С другой стороны, найдется такой элемент $w \in D\left(\tilde{L}^*\right)$, что $\tilde{L}^* w = f$, поэтому $(Lx, z-w) = 0\ \forall x \in D(L)$. Полагая $x = L^{-1}(z-w)$, получаем равенство $z = w$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия следствия 2 леммы 1; тогда функционал $J_1(u)$ дифференцируем в $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T) = U_1$ и его градиент удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Для доказательства формулы (5_1) на множестве $U_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ вводим метрику, эквивалентную метрике пространства $W_2^{1,0}(Q_T)$ по скалярному произведению

$$(v,z)_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}} = \int\limits_{Q_T} v_{x_i} z_{x_i}\,dxdt = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z})_{\mathbf{L}_2(Q_T)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_1(u+h) - J_1(u) &= \tfrac12 \|div\ \mathbf{v}(\nabla u + \nabla h)\|^2_{L_2(Q_T)} - \tfrac12 \|div\ \mathbf{v}(\nabla u)\|^2_{L_2(Q_T)} = \\ &= \left(div\ \mathbf{v}(\nabla u), div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right)_{L_2(Q_T)} + \frac12 \|div\ \mathbf{v}(\nabla h)\|^2_{L_2(Q_T)}. \end{aligned}\tag{24}$$

В силу следствия 1, оператор L имеет обратный L^{-1}, в частности, $L^{-1}\mathbf{h} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}(h)$. Учитывая следствие 2 леммы 1, убеждаемся, что оператор L^* имеет обратный и $(L^*)^{-1}\, grad\ div\ u = \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — решение задачи (6), (7). В силу следствия 3 к лемме 1 L^* — оператор, сопряженный к L.

Используя введенный выше оператор L, преобразуем первое слагаемое правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} \left(div\ \mathbf{v}(\nabla u), div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right)_{L_2(Q_T)} &= -\left((L^*)^{-1}\nabla div\ \mathbf{v}(\nabla u), \nabla h\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \\ = -\left(P_{G(Q_T)}\mathbf{w}(u), \nabla u\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} &= -(\nabla p(u), \nabla h)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = (-p(u), h)_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}}. \end{aligned}\tag{25}$$

Учитывая неравенство (22), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\|div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant 2\left\|\overset{\circ}{\mathbf{v}}_x(\nabla h)\right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant 2\lambda^{-1}\left\|\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|^2_\lambda \leqslant \\ \leqslant 2\lambda^{-1}C_7 e^{\lambda T}\|\nabla h\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = 2\lambda^{-1}C_7 e^{\lambda T}\|h\|^2_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения и соотношений (24), (25) следует равенство (5_1).

Покажем, что $J_1'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть u^1 и u^2 принадлежат $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, а $\mathbf{w}^1$ и $\mathbf{w}^2$ — соответствующие им решения задачи (6), (7). Тогда

$$\begin{aligned} \left\|J_1'(u^1) - J_1'(u^2)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)} = \|p(u^1) - p(u^2)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)} = \\ = \|\nabla p(u^1) - \nabla p(u^2)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \left\|P_{G(Q_T)}\mathbf{w}^1 - P_{G(Q_T)}\mathbf{w}^2\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\ \leqslant \left\|\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \end{aligned}\tag{26}$$

Заметим, что $\mathbf{w} = \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2$ является решением задачи (6), (7), где $u = u^1 - u^2$.

Используя неравенства (23), (22) и неравенства $\|\mathbf{v}\| \leqslant c_4\|\mathbf{v}_x\|$, $\|\mathbf{v}_{xx}\| \leqslant c_7\|\Delta\mathbf{v}\|$, справедливые для любого $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1}(\Omega)$, находим

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant c_4\,\|\mathbf{w}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\
\leqslant c_4\lambda^{-1}\,\|\mathbf{w}\|_\lambda \leqslant c_4\lambda^{-1}C_8e^{\lambda T}\,\|\nabla div\ \mathbf{v}\,(\nabla\,(u^1-u^2))\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{n}c_4\lambda^{-1}c_7C_8e^{\lambda T}\,\|\Delta\mathbf{v}\,(u^1-u^2)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{n}c_4c_7C_8\lambda^{-1}\nu^{-\frac{1}{2}}e^{\lambda T}\,\|\mathbf{v}\,(\nabla\,(u^1-u^2))\|_\lambda \leqslant \\
\leqslant \sqrt{n}c_4c_7C_8\nu^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}C_7e^{\lambda T}\,\|\nabla\,(u^1-u^2)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \\
= L_1\,\|u^1-u^2\|_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}}\,.
\end{gathered}$$

Из последнего неравенства и неравенства (26) следует, что градиент $J_1'\,(u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 = \sqrt{n}c_4c_7C_8\nu^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-1}C_7e^{\lambda T}$.

2.2. Дифференцируемость функционала $J_2(u)$. При рассмотрении задачи II нам потребуется использовать обобщенные решения задачи (1)–(3) в банаховом пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, полученное в результате замыкания множества гладких, равных нулю вблизи S_T функций по норме

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{v}\,(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{v}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}\,.$$

Назовем обобщенным решением задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ функцию $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0} \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$, для которой справедливо тождество

$$\begin{gathered}
\int\limits_{Q_T}(-\mathbf{v}\Phi_t + \nu\mathbf{v}_x\Phi_x)\,dxd\tau + \int\limits_\Omega \mathbf{v}\,(x,t)\,\Phi\,(x,t)\,dx + \int\limits_{Q_T} q_i\mathbf{v}_{x_i}\Phi\,dxd\tau = \\
= \int\limits_\Omega \mathbf{a}\,(x)\,\Phi\,(x,0)\,dx + \int\limits_{Q_T} f\Phi\,dxd\tau, \qquad t \in (0,T)
\end{gathered} \tag{27}$$

при всех $\Phi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$ и равенство

$$\frac{1}{2}\,\|\mathbf{v}\,(x,t)\|^2 + \nu\int\limits_0^t\|\mathbf{v}_x\|^2\,d\tau = \int\limits_0^t(f,\mathbf{v})\,d\tau + \frac{1}{2}\,\|\mathbf{a}\|^2 + \int\limits_{Q_T} div g\|\mathbf{v}\|^2\,dxd\tau. \tag{28}$$

Если выполнены условия теоремы 2, то решение задачи (1)–(3), очевидно, удовлетворяет соотношениям (27), (28) и, поэтому, решение обобщенной задачи существует.

Заметим, что если $S \in C^2$, то нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) из $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ при условии, что $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)\,, f \in \mathbf{L}_2\,(Q_T)$.

Это можно сделать с помощью предельного перехода в последовательности задач, в которых $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ заменяется последовательностью гладких функций $\mathbf{a}_n$ из $H\,(\Omega)$, сходящейся по норме $L_2\,(\Omega)$ (см., например, теорема 3, гл. IV, работа [1]).

Для доказательства формулы (5_2) и проверки условия Липшица для градиента $J_2'\,(u)$ функционала $J_2\,(u)$ потребуются оценки, аналогичные оценкам (22), (23), но в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_T)$. При этом константы в полученных неравенствах можно получить явно, что дает возможность явно найти константу Липшица для градиента $J_2'\,(u)$, важную при исследовании сходимости градиентных методов решения экстремальных задач.

Существование и единственность решения задачи

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - grad\ u, \tag{29}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}. \tag{30}$$

при любом $u \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,1}(Q_T)$, $\mathbf{a} \in L_2(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$ в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}{}_2^{1,0}(Q_t)$ следует из теоремы (4.1) (гл.III, работа [3]).

Умножая уравнение (29) на $\mathbf{v}e^{-2\lambda t}$ и дифференцируя по частям в области Q_t, получим равенство

$$\tfrac{1}{2}\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \nu|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 + \lambda|||\widetilde{\mathbf{v}}|||_{0,t}^2 + \int\limits_0^t (g_i\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}, \widetilde{\mathbf{v}})\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 + \int\limits_0^t \left[\left(\widetilde{f}, \widetilde{\mathbf{v}}\right) + (\widetilde{u}, div\ \widetilde{\mathbf{v}})\right] d\tau, \tag{31}$$

где $\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}e^{-\lambda t}$, $\widetilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}e^{-\lambda t}$, $\widetilde{u} = ue^{-\lambda t}$.

Рассмотрим два случая: случай ограниченных функций g_i и случай, когда $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$.

Пусть выполнено условие

$$\max_i |g_i(x,t)| \leqslant G \qquad \forall (x,t) \in Q_T, \tag{32}$$

тогда

$$I_1 = \left|\int\limits_0^t (g_i\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}, \widetilde{\mathbf{v}})\,d\tau\right| \leqslant G|||\widetilde{\mathbf{v}}_{x_i}|||_{0,t}|||\widetilde{\mathbf{v}}|||_{0,t} \leqslant \frac{\nu}{4}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 + G^2\nu^{-1}|||\widetilde{\mathbf{v}}|||_{0,t}^2. \tag{33}$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$I_2 = \left|\int\limits_0^t (\widetilde{u}, div\ \widetilde{\mathbf{v}})\,d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^t \|\widetilde{u}\|\,\|\widetilde{\mathbf{v}}_x\|\,d\tau \leqslant \frac{\nu}{4}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 + \nu^{-1}|||\widetilde{u}|||_{0,t}^2; \tag{34}$$

$$I_3 = \left|\int\limits_0^t \left(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{v}}\right) d\tau\right| \leqslant \frac{1}{2}\left\|\widetilde{\mathbf{f}}\right\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2}\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2. \tag{35}$$

Из соотношений (31), (33)–(35) следует неравенство

$$\tfrac{1}{2}\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \tfrac{\nu}{2}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 + \left[\lambda - \left(G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \tfrac{1}{2}\right)\right]|||\widetilde{\mathbf{v}}|||_{0,t}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\|\mathbf{a}\|^2 + \tfrac{1}{2}|||\widetilde{\mathbf{f}}|||_{0,t}^2 + \nu^{-1}|||u|||_{0,t}^2.$$

Полагая $\lambda = G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$, получаем

$$\|\widetilde{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \nu|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|^2 + |||\widetilde{\mathbf{f}}|||_{0,t}^2 + 2\nu^{-1}|||u|||_{0,t}.$$

Откуда находим оценку

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} \leqslant \left(1 + \nu^{-\frac{1}{2}}\right)e^{\lambda T}\left(\|\mathbf{a}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 + 2\nu^{-1}\|u\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{36}$$

где $\lambda = G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$.

Если выполнены условия $\|g\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}} \leqslant G$, то для оценки интеграла I_1 воспользуемся неравенствами $\|v\|_4 \leqslant 2^{\frac{1}{4}}\|v_x\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}$, $n = 2$ и $\|v\|_4 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\|v_x\|^{\frac{3}{4}}\|v\|^{\frac{1}{4}}$, $n = 3$, справедливыми для $\forall v \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)$, и неравенством Юнга $\left(ab \leqslant \frac{1}{m}\varepsilon_1^m a^m + \frac{m-1}{m}\varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}} b^{\frac{m}{m-1}}\right)$.

При $n = 2$, полагая $m = \frac{4}{3}$, $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{3}\nu\right)^{\frac{3}{4}}$, получим

$$I_1 \leqslant 2^{\frac{1}{4}}G|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^{\frac{3}{2}}|||\mathbf{v}|||_{0,t}^{\frac{1}{2}} \leqslant \tfrac{\nu}{4}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\nu}{3}\right)^{-\frac{3}{16}}G^4|||\widetilde{\mathbf{v}}|||_{0,t}^2,$$

а при $n = 3$, полагая $m = 7$, $\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{7}\nu\right)^{\frac{7}{8}}$, получим

$$I_1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}}G|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^{\frac{7}{4}}|||\mathbf{v}|||_{0,t}^{\frac{1}{4}} \leqslant \tfrac{\nu}{4}|||\widetilde{\mathbf{v}}_x|||_{0,t}^2 + 2\left(\tfrac{2}{7}\nu\right)^{-\frac{7}{64}}G^8|||\widetilde{\mathbf{v}}|||_{0,t}^2.$$

Располагая этими оценками, получаем неравенство вида (36), где

$$\lambda=\lambda_2=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\nu}{3}\right)^{-\frac{3}{16}}G^4+\nu^{-1}+\tfrac{1}{2}\qquad \text{при } n=2,$$

$$\lambda=\lambda_3=2\left(\frac{2}{7}\nu\right)^{-\frac{7}{64}}G^8+\nu^{-1}+\frac{1}{2}\qquad \text{при } n=3. \tag{37}$$

Для оценки сопряженного состояния $\mathbf{w}$ умножим уравнение (6) на $\mathbf{w}e^{-2\lambda(T-t)}$ и проинтегрируем по области $Q_t^T=\Omega\times[t,T]$. Обозначив $\widetilde{\mathbf{w}}=\mathbf{w}e^{-\lambda(T-t)}$, получим

$$\tfrac{1}{2}|||\widetilde{\mathbf{w}}|||^2+\nu|||\widetilde{\mathbf{w}}_x|||^2+\lambda|||\widetilde{\mathbf{w}}|||_{0,t}^2+\int\limits_t^T\left(g_i\widetilde{\mathbf{w}},\widetilde{\mathbf{w}}_{x_i}\right)d\tau=$$

$$=-\int\limits_t^T\Big(div\ v\left(\nabla u\ e^{-\lambda(T-t)},div\ \widetilde{\mathbf{w}}\right)\Big)\,d\tau.$$

Получили соотношение вида (31), если в последнем положить $\widetilde{\mathbf{v}}=\widetilde{\mathbf{w}}$, $\mathbf{a}=0$, $\widetilde{\mathbf{f}}=0$, $\widetilde{u}=div\ v\,(\nabla u)$. Таким образом, получаем оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{Q_T}\leqslant\left(1+\nu^{-\frac{1}{2}}\right)e^{\lambda T}\left\|div\ v\,(\nabla u)\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}, \tag{38}$$

где $\lambda=G^2\nu^{-1}+\nu^{-1}+\frac{1}{2}$, если g — ограниченная функция и λ определяется по формулам (37), если $g\in\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$.

Для доказательства формулы (5_2) воспользоваться непосредственно дифференцированием по частям здесь невозможно, поскольку не гарантирована принадлежность функций v и w пространству $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$. Воспользуемся предельным переходом, выбираем последовательности u_n,h_n, содержащиеся в U_1, таких, что $u_n\longrightarrow u$, $h_n\longrightarrow h$ в $L_2(Q_T)$. На последовательностях u_n,h_n справедливы равенства (24) и первое из равенств (25), из которых следует, что

$$J_2\left(u_n+h_n\right)-J_2\left(u_n\right)=$$

$$=-\left(\left(L^*\right)^{-1}\nabla div\ \mathbf{v}\left(\nabla u_n\right),\nabla h_n\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)}+\tfrac{1}{2}\left\|div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(\nabla h_n\right)\right\|_{L_2(Q_T)}^2=$$

$$=\left(div\ \mathbf{w}\left(u_n\right),h_n\right)_{L_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\left\|div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(\nabla h_n\right)\right\|_{L_2(Q_T)}^2. \tag{39}$$

Обозначим $\delta h_n=h-h_n$, $\delta u_n=u-u_n$, $\delta\mathbf{v}_n=\mathbf{v}-\mathbf{v}_n$, тогда $\delta\mathbf{v}_n$ является решением задачи (1), (2), где $\mathbf{a}=0$, $\mathbf{f}=0$, $u=\delta u_n$. Используя оценки (36), (37), получаем, что

$$\left\|div\ \delta\mathbf{v}_n\right\|_{L_2(Q_T)}\leqslant c\left\|\delta u_n\right\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\left\|div\ \mathbf{w}\left(\delta u_n\right)\right\|_{L_2(Q_T)}\leqslant c\left\|\delta u_n\right\|_{L_2(Q_T)}.$$

Переходя к пределу в соотношениях (39), получаем равенство

$$J_2(u+h)-J_2(u)=\left(div\ \mathbf{w}\left(u\right),h\right)_{L_2(Q)}+\frac{1}{2}\left\|div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h)\right\|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Из оценки (36) следует, что $\left\|div\ \overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(\nabla h\right)\right\|_{L_2(Q_T)}^2=O\left(\|h\|_{L_2(Q_T)}^2\right)$. Таким образом, формула (5_2) доказана.

Покажем, что $J_2'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Для этого воспользуемся неравенствами (38), (36), в результате получим

$$\left\|J_2'\left(u^1\right)-J_2'\left(u^2\right)\right\|_{L_2(Q_T)}=\left\|div\ \mathbf{w}\left(u^1\right)-div\ \mathbf{w}\left(u^2\right)\right\|_{L_2(Q_T)}=$$

$$=\left\|div\ \mathbf{w}\left(u^1-u^2\right)\right\|_{L_2(Q_T)}\leqslant\sqrt{n}\left\|\mathbf{w}\left(u^1-u^2\right)\right\|_{Q_T}\leqslant$$

$$\leqslant C_9\left\|div\ \mathbf{v}\left(\nabla\left(u^1-u^2\right)\right)\right\|_{L_2(Q_T)}\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\left\|\mathbf{v}\left(\nabla\left(u^1-u^2\right)\right)\right\|_{Q_T}\leqslant C_{11}\left\|u^1-u^2\right\|_{L_2(Q_T)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 3. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $div\ \mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(Q_T)$, $S \in C^2$, тогда функционал $J_2(u)$ дифференцируем в $L_2(Q_T)$ и его градиент удовлетворяет условию Липшица.

2.3. Сходимость модифицированного метода наискорейшего спуска. Решение задач I, II будем искать методом проекции градиента (4), где параметр α_{k+1} выбирается модифицированным методом наискорейшего спуска:

$$\alpha_{k+1} = min\left[\alpha'_{k+1}, \gamma\right]. \qquad (40_1)$$

Здесь γ — достаточно большая величина (параметр метода), а α'_{k+1} определяется как в методе наискорейшего спуска:

$$f_k\left(\alpha'_{k+1}\right) = \underset{\alpha>0}{min}\ f_k(\alpha), f_k(\alpha) = J\left(P_U\left(u_k - \alpha J'(u_k)\right)\right). \qquad (40_2)$$

Поскольку предлагаемый метод может быть использован и в других задачах оптимизации, в которых множество U — всё пространство или подпространство, сформулируем утверждение в виде теоремы в абстрактном гильбертовом пространстве H.

Введем обозначения: $J_* = \underset{U}{inf}\ J(u)$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$, $C^{1,1}(U)$ — множество дифференцируемых функционалов, градиент которых удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 4. Пусть U — выпуклое, замкнутое множество из гильбертового пространства H, $J(u) \in C^{1,1}(U)$ — выпуклый функционал, множество U_* непусто и ограничено, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ определена по формуле (4) и выполнены условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|J'(u_k)\right\|^2 \leqslant b_1, \qquad (41)$$

$$0 < \alpha_k < b_2, \qquad (42)$$

тогда последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и слабо в H сходится к множеству U_*.

Доказательство. Обозначим $\rho(u, U_*) = \underset{v\in U_*}{min}\ \|u - v\|$; тогда по определению оператора проектирования

$$\begin{gathered}\rho^2(u_{k+1}, U_*) = \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_{k+1})\|^2 \leqslant \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_k)\|^2 = \\ = \left\|P_U\left(u_k - \alpha_{k+1}J'(u_k)\right) - P_U\left(P_{U_*}(u_k)\right)\right\|^2 \leqslant \\ \leqslant \left\|u_k - \alpha_{k+1}J'(u_k) - P_{U_*}(u_k)\right\|^2 = \\ = \rho^2(u_k, U_*) + \alpha_{k+1}^2\left\|J'(u_k)\right\|^2 - 2\alpha_{k+1}\left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right). \qquad (43)\end{gathered}$$

Воспользовавшись необходимым и достаточным условием выпуклости дифференцируемого функционала на выпуклом множестве U

$$J(u) - J(v) \geq \left(J'(v), u - v\right) \qquad \forall u, v \in U,$$

полагая $v = u_k$, $u = P_{U_*}(u_k)$, получаем

$$0 \leqslant J(u_k) - J(P_{U_*}(u_k)) = J(u_k) - J_* \leqslant \left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right).$$

Таким образом, получаем

$$\left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right) \geq J(u_k) - J_* \geq 0. \qquad (44)$$

Учитывая неравенства (43), (44), получаем, что

$$\rho^2(u_{k+1}, U_*) - \rho^2(u_k, U_*) \leqslant \alpha_{k+1}^2\left\|J'(u_k)\right\|^2. \qquad (45)$$

Суммируя последнее неравенство от 0 до $m > 0$, и, учитывая условие (41), получаем

$$\rho^2(u_m, U_*) \leqslant \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1}^2 \left\| J'(u_k) \right\|^2 + \rho^2(u_0, U_*) \leqslant b_2^2 b_1 + \rho^2(u_0, U_*) = b_3. \tag{46}$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ ограничена в H, а из условия (41) следует, что $\underset{k\to\infty}{lim} \left\|J'(u_k)\right\| = 0$; тогда из неравенства (44) следует, что последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функционал $J(u)$. Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ограниченная и минимизирующая $J(u)$ на U.

Обозначим через W множество выпуклых комбинаций последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$, то есть множество точек u, представимых в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k, \quad \alpha_k \geq 0\,(k = 0, 1, \ldots), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1.$$

Используя теорему 5, раб.[8](гл. 4, §8), легко показать, что $W \subset U$ и, поскольку U — замкнутое множество, замыкание $\overline{W}$ множества W также принадлежит U.

Последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и, следовательно, минимизирует $J(u)$ на $\overline{W}$. Из доказанного следует, что $J_*\left(\overline{W}\right) = \underset{u\in\overline{W}}{inf}\; J(u) = J_* = \underset{u\in U}{inf}\; J(u)$, $\overline{W}_* = \left\{u \in \overline{W} : J(u) = J_*\right\} \in U_*$. Из ограниченности последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ следует ограниченность множества $\overline{W}$. Согласно теореме 6 (гл. 1, §3, раб. [8]), выпуклый, полуограниченный снизу функционал $J(u)$ на ограниченном, выпуклом, замкнутом множестве U из рефлексивного банахового пространства имеет непустое множество точек минимума U_*, и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ слабо сходится к U_*. Из слабой сходимости последовательности $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ к $\overline{W}_*$ следует ее слабая сходимость к U_*, теорема доказана.

Замечание 1. Если множество $\overline{W}$ компактно, то имеет место сильная сходимостью. Здесь можно воспользоваться теоремой 1 (гл. 1, §3, раб. [8]).

Замечание 2. Если U — подпространство гильбертового пространства H, P_U — оператор ортогонального проектирования на это подпространство, то
$u_{k+1} = u_k - P_U J'(u_k)$. В этом случае соотношение (43) можно записать в виде:

$$\rho^2(u_{k+1}, U_*) =$$
$$= \rho^2(u_k, U_*) + \alpha_{k+1}^2 \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2 - 2\alpha_{k+1}\left(P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right).$$

Учитывая, что $\left(P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right) = \left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)\right)$, легко видеть, что утверждения теоремы справедливы, если вместо условия (41) выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|P_U J'(u_k)\right\|^2 < b_1. \tag{41$'$}$$

Пользуясь тем, что множества $U_l (l = 1, 2)$ являются подпространствами соответствующих пространств и, следовательно, операции проектирования P_l на эти множества линейны, найдем явные формулы для параметров α'_{k+1}, α_{k+1}.

Действительно,

$$f_{l,k}(\alpha) = J_l\left(\mathbf{v}\left(P_l\left(u_k - \alpha J_l'(u_k)\right)\right)\right) = \tfrac{1}{2}|||div\ \mathbf{v}\left(u_k - \alpha P_l J_l'(u_k)\right)|||_{0,T}^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}|||div\ \mathbf{v}(u_k)|||_{0,T}^2 - 2\alpha\left(div\ \mathbf{v}(u_k), div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J_l'(u_k)\right)\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} +$$
$$+\alpha^2|||div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J_l'(u_k)\right)|||_{0,T}^2.$$

Откуда следует, что

$$\alpha_k' = \left(div\ \mathbf{v}(u_k), div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J_l'(u_k)\right)\right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} |||div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l J_l'(u_k)\right)|||_{0,T}^{-2}. \tag{47}$$

Здесь под выражениями $\mathbf{v}\left(u_k\right)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right)$ следует понимать $\mathbf{v}\left(\nabla u_k\right)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}\left(\nabla P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right)$, где $\overset{\circ}{\mathbf{v}}(u)$ — решение уравнения (1) при $f=0$ и $\mathbf{a}=0$.

Ясно, что последовательности $\left\{J_l\left(u_k\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывают и ограничены снизу.

В предыдущем пункте было показано, что $J_l\left(u\right) \in C^{1,1}\left(U_l\right)$. Далее воспользуемся известным неравенством, справедливым для функций из $C^{1,1}\left(U\right)$(см. 2.3.7, раб. [8]).

$$\left|J\left(u\right)-J\left(v\right)-\left(J^{'}\left(v\right),u-v\right)\right| \leqslant L\left\|u-v\right\|^2/2 \ \ \forall u,v\in U,$$

где L — константа Липшица.

Полагая в нем $v=u_k$, $u=u_{k+1}^{\alpha}=u_k-\alpha P_l J_l^{'}\left(u_k\right)$, получим

$$\begin{gathered} J_l\left(u_k\right)-J_l\left(u_{k+1}^{\alpha}\right)=J_l\left(u_k\right)-J_l\left(u_k-\alpha P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right)\geq \\ \geq \alpha\left(J_l^{'}\left(u_k\right),P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right)_{H_l}-\frac{L_l}{2}\alpha^2\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right\|^2, \end{gathered} \tag{48}$$

где L_l — константа Липшица для градиента $J_l^{'}\left(u\right)$ функционала $J_l\left(u\right)$. Учитывая, что оператор P_l — оператор ортогонального проектирования на подпространство, получаем, что $\left(J_l^{'}\left(u_k\right),P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right)_{H_l}=\left\|P_l J^{'}\left(u_k\right)\right\|_{H_l}$.

Тогда из неравенства (48) следует, что

$$J_l\left(u_k\right)-J_l\left(u_{k+1}^{\alpha}\right)\geq \alpha\left(1-\alpha\frac{L_l}{2}\right)\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right\|_{H_l}^2. \tag{49}$$

Полагая $\alpha=1/L_l$, получаем

$$J_l\left(u_k\right)-J_l\left(u_{k+1}^{\alpha}\right)\geq 1/2L_l\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right\|_{H_l}^2.$$

Предположим, что $\alpha_{k+1}^{'}\leqslant\gamma$, тогда $\alpha_{k+1}=\alpha_{k+1}^{'}$ и, поэтому при $\alpha=1/L_l$ справедливы неравенства

$$J_l\left(u_k\right)-J_l\left(u_{k+1}\right)\geq J_l\left(u_k\right)-J\left(u_{k+1}^{\alpha}\right)\geq 1/2L_l\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right\|_{H_l}^2. \tag{50}$$

Предположим теперь, что $\alpha_{k+1}^{'}>\gamma$, тогда $\alpha_{k+1}=\gamma$. Рассмотрим два случая: $\gamma\geq 1/L_l$ и $\gamma<1/L_l$. Учитывая, что на интервале $\left(0,\alpha_k^{'}\right)$ функция $f_{l,k}\left(\alpha\right)$ убывает, в первом случае вновь получаем неравенства (50). Во втором случае $\left(\gamma<1/L_l\right)$

$$\gamma\left(1-\gamma L_l/2\right)\geq\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Таким образом, учитывая неравенства (49), (50), в любом случае получаем оценку

$$J_l\left(u_k\right)-J_l\left(u_{k+1}\right)\geq c_l\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right\|_{H_l}^2, \tag{51}$$

где $c_l=min\left[\frac{1}{2}\gamma,\frac{1}{2}/L_l\right]$.

Из последней оценки следует, что последовательность $\left\{J_l\left(u_k^l\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывает, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k\right)\right\|_{H_l}^2$ сходится и имеет место оценка

$$\sum_{j=k}^{\infty}\left\|P_l J_l^{'}\left(u_k^l\right)\right\|_{H_l}^2\leqslant c_l^{-1}\left(J_l\left(u_k\right)-J_{l,*}\right), \tag{52}$$

где $J_{l,*}=\underset{u\in U_l}{inf}\ J_l\left(u\right)$.

Таким образом, для градиентов $J_l^{'}\left(u\right)$ функционалов $J_l\left(u\right)\left(l=1,2\right)$ имеет место неравенство $\left(41^{'}\right)$.

Нетрудно убедиться, что функционалы $J_l(u)\left(l=1,2\right)$ выпуклы. Действительно, при любом $\alpha\in[0,1]$

$$J_l(\alpha u+(1-\alpha)w)=\|\alpha div\,\mathbf{v}(u)+(1-\alpha)div\,\mathbf{v}(w)\|_{0,T}^2=$$

$$= \alpha^2\|div\,\mathbf{v}(u)\|^2_{0,T} + (1-\alpha)^2\|div\,\mathbf{v}(w)\|^2_{0,T} + 2\alpha(1-\alpha)\,(div\,\mathbf{v}(u), div\,\mathbf{v}(w))_{\mathbf{L}_2(Q_T)}$$
$$= \alpha\|div\,\mathbf{v}(u)\|^2_{0,T} + (1-\alpha)\|div\,\mathbf{v}(w)\|^2_{0,T} - \alpha(1-\alpha)\|div\,\mathbf{v}(u) - div\,\mathbf{v}(w)\|^2_{0,T} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha J_l(u) + (1-\alpha)J_l(w).$$

Учитывая замечание 2 к теореме 4, теоремы 2 и 3 о дифференцируемости функционалов $J_l\,(u)\,(l=1,2)$, а также известные теоремы о существовании и единственности решения задачи (1) – (3) (см. теоремы $1'$, 2 из работы [1] гл. 4, §1), нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2\,(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}\,(Q_T)$, $div\ \mathbf{g} \in L_{4,\infty}\,(Q_T)$, $\mathbf{a}\,(x)$ удовлетворяет условию (1.4), $S \in C^2$. Тогда последовательность $\left\{u_k^l\right\}_{k=0}^{\infty}$, определенная равенствами (4), $(5_l)\,(l=1,2)$, где параметр α_{k+1} определен по формулам (40), (47), минимизирует функционал $J_l\,(u)$ на U_l и слабо в H_l сходится к $U_{l,*}$ с любого начального приближения.

Замечание. При $l=1$ утверждения теоремы 5 прямо следуют из теоремы 4, поскольку выполнены все условия этой теоремы. При $l=2$ существование и единственность обобщенного решения задачи (1) – (3) не гарантирует выполнение одного из условий теоремы 4 - U_* непусто и ограничено. Однако при выполнении условий теоремы 5 существует единственное решение задачи (1) – (3) в классе функций $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{2,1}\,(Q_T)$, $p \in \mathbf{W}_2^{1,0}\,(Q_T)$. Ясно, что это решение будет также решением обобщенной задачи, а решение обобщенной задачи единственно. Таким образом, функционал $J_2\,(u)$ в условиях теоремы 5 удовлетворяет всем условиям теоремы 4, кроме того, в этом случае условие $divg \in L_{4,\infty}(Q_T)$ можно отбросить.

2.4. Регуляризация итерационного процесса по методу Тихонова.

В предыдущем пункте доказана слабая сходимость модифицированного метода наискорейшего спуска для функционалов $J_l\,(u)\,(l=1,2)$.

Для построения сильно сходящейся последовательности можно воспользоваться методом регуляризации Тихонова [8], суть которого состоит в последовательном решении задач минимизации функционалов $T_j\,(u) = J\,(u) + \beta_j\Omega\,(u)$ на U как задачи первого типа (то есть задачи минимизации по функционалу), где $\Omega\,(u)$ — стабилизатор или неотрицательная сильно выпуклая функция. При фиксированном j находится точка u_j, удовлетворяющая условиям

$$T_j^* = \underset{U}{inf}\ T_j\,(u) \leqslant T_j\,(u_j) < T_j^* + \varepsilon_j. \tag{53}$$

Из теоремы Тихонова (см., например, теорема 1, гл. 2, §5, работа [8]) следует: если $J\,(u) \in C^{1,1}\,(U)\,, U_*$ непусто, $J_* > -\infty$,

$$\underset{j\to\infty}{lim}\ \beta_j = \underset{j\to\infty}{lim}\ \varepsilon_j = 0;\ \ \underset{j>1}{sup}\ \varepsilon_j\beta_j^{-1} < \infty, \tag{54}$$

то последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенная условиями (53), минимизирует функционал $J\,(u)$ на U и $\underset{j\to\infty}{lim}\ \rho\,(u_j, U_*) = 0$.

Возвращаясь к исходной задаче (1) – (3), введем обозначения

$$T_{l,j}\,(u) = J_l\,(u) + \beta_j\,\|u\|^2_{H_l}\,, u \in U_l, \beta_j > 0, \underset{j\to\infty}{lim}\ \beta_j = 0. \tag{55}$$

Поскольку при $\beta_j > 0$ функционал $T_{l,j}\,(u)\,(l=1,2)$ является сильно выпуклым, то он имеет единственную точку минимума $u^*_{l,j}$.

Далее, там, где выкладки имеют одинаковую форму, индекс l будем опускать, при этом $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_l}$.

Для приближенного решения задачи минимизации функционала $T_{l,j}\,(u)$ воспользуемся обычным методом наискорейшего спуска

$$u_{j,k+1} = P_{U_l}\left(u_{j,k} - \alpha_{j,k+1}T'_{l,j}\,(u_{j,k})\right), j = 1,2,\ldots; k = 0,1,\ldots,n_j. \tag{56}$$

Параметр $\alpha_{j,k+1}$ вычисляется явно по формуле

$$\alpha_{j,k+1} = \left[\left(div\ \mathbf{v}\left(u_{j,k}\right), div\ \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right) \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \beta_j \left(u_{j,k}, P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right)_{H_1} \right] \times$$

$$\times \left[\left\| div\ \mathring{\mathbf{v}} \left(P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right) \right\|^2_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \beta_j \left\| P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right) \right\|^2_{H_1} \right]^{-1}. \qquad (57)$$

Здесь, как и в формуле (47), при $l = 1, 2$

$$\mathbf{v}\left(u_{j,k}\right) = \mathbf{v}\left(\nabla u_{j,k}\right); \mathring{\mathbf{v}}\left(P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right) = \mathring{\mathbf{v}}\left(\nabla P_l T'_{l,j}\left(u_{j,k}\right)\right).$$

Пусть $\beta_j \to 0$ при $j \to \infty$ и $\beta_j > 0$. При каждом фиксированном j по схеме (56), (57) проводим n_j итераций и за начальное приближение при минимизации функционала $T_{l,j+1}$ принимаем $u_{j+1,0} = u_j = u_{j,n_j}$. Выбираем n_j из условия

$$T'_{l,j}\left(u_{j,n_j}\right) \leqslant \beta_j. \qquad (58)$$

Покажем, что в этом случае последовательность $\{u_j\}$ удовлетворяет условиям (53), (54) теоремы Тихонова. Учитывая известное неравенство для сильно выпуклых функционалов:

$$J\left(u\right) - J\left(u_*\right) \leqslant \left\| J'\left(u\right) \right\|^2 / 2\mu, \qquad (59)$$

где μ — константа из необходимого и достаточного условия сильной выпуклости функционала

$$\left(J'\left(u\right) - J'\left(v\right), u - v\right) \geq \mu \left\|u - v\right\| \quad \forall u, v \in U.$$

В рассматриваемом случае $\mu \geq \beta_j$. Из неравенств (58), (59) следует, что

$$T_{l,j}\left(u_j\right) - T_{l,j}\left(u^*_{l,j}\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\beta_j = \varepsilon_j.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы Тихонова. Учитывая еще, что минимум функционалов $J_l\left(u\right)$ $(l = 1, 2)$ в условиях теоремы 5 равен нулю и он достигается в единственной точке, равной решению задачи (1) – (3), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенная соотношениями (56) – (58), минимизирует функционал $J_l\left(u\right)$ на U_l и

$$\lim_{j\to\infty} \left\|u_j - u_*\right\|_{H_l} = 0. \qquad (60)$$

Замечание. Пусть $\mathbf{v}, p$ — решение задачи (1) – (3); тогда $u_* = p$. Учитывая, что норма $\left\|\cdot\right\|_\lambda$ эквивалентна норме

$$\left\|\mathbf{v}\right\| = \underset{t\in[0,T]}{vraimax} \left\|\mathbf{v}_x\right\| + \left\|\Delta\mathbf{v}\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \left\|\mathbf{v}_x\right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)},$$

а также выполняются оценки (22) и (36), убеждаемся в справедливости соотношений:

$$\lim_{j\to\infty} \left\|\mathbf{v}^1_j - \mathbf{v}\right\| = 0, \ \lim_{j\to\infty} \left\|\mathbf{v}^2_j - \mathbf{v}\right\|_{Q_T} = 0, \qquad (61)$$

где $\left\{\mathbf{v}^1_j\right\}$ — последовательность, определенная при решении задачи I, а $\left\{\mathbf{v}^2_j\right\}$ — последовательность, определенная при решении задачи II.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для решения задачи (1.1) – (1.3) предлагается подход, состоящий в последовательном решении линеаризованных задач градиентным методом. Заметим, что в данном случае минимизируемый функционал является выпуклым. Возможен другой подход, в котором непосредственно задача (1.1) – (1.3) рассматривается как обратная задача, где соотношения (1.1), (1.2) описывают состояние системы при неизвестном давлении p, а равенство (1.3) задает дополнтительные данные о состоянии системы. Такая задача легко формулируется как задача оптимального управления:

$$J\,(p) = \int\limits_{Q_T} \left|div\ \mathbf{v}(p)\right|^2\, dxdt \to inf;\ p \in U_l,\ l = 1, 2,$$

где $\mathbf{v}(p)$ — решение задачи (1.1) – (1.2) при заданном $p \in U_l$.

Используя полученные или введенные априорные ограничения на вектор скорости $\mathbf{v}$, уравнение (1.1) можно заменить на уравнение (1.1′) и обосновать существование и единственность решения задачи (1.1′), (1.2), а также сходимость итерационного процесса (1.5), (1.6) при любом фиксированном $p \in U_l\,(l = 1, 2)$. Построение и обоснование градиентного метода для решения задачи (1.1) – (1.3) в такой постановке, а также сравнение различных приемов вычислительной реализации предлагаемых методов будет дано в следующей работе. Один из вариантов был опробован на модельном примере, где решение задачи (1.1)–(1.3), а следовательно и априорная оценка вектора скорости, были известны. Расчеты проводились последовательно по временным слоям. В этом случае для достижения заданной точности потребовалось 3-4 шага итеративной линеаризации и 5-6 шагов градиентного спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
2. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* М.: Мир, 1981. 408 с.
3. Голичев И.И. *Итеративная линеаризация эволюционных уравнений Навье-Стокса* // Уфимский математический журнал. Т. 4. 2012. №4. С. 69-78.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.
5. Агошков В.И., Ботвиновский Е.А. *Численное решение системы Стокса методами сопряженных уравнений и оптимального управления* // ЖВМиМФ. Т. 47. 2007. №7. С. 1192–1207.
6. Голичев И.И., Шарипов Т.Р. *Разработка методов, алгоритмов и программ для решения уравнений Навье-Стокса как задачи оптимального управления.* // Вестник УГАТУ. Математика. Т. 9. 2007. № 3(21). С. 51–57.
7. Голичев И.И. *Градиентные методы решения уравнений Навье-Стокса.* // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 18, в. 3. 2011. С. 423–425.
8. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1981. 400 с.
9. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* М.: Наука, 1988. 552 с.

Голичев Иосиф Иосифович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `Golichev ii@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 77-83.

УДК 517.9

О НЕРАВЕНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ВЕКТОРОВ ИЗ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е.Е. ДИКАРЕВ

Аннотация. Для векторов из банахова пространства изометрического представления однопараметрической группы операторов получено неравенство Бернштейна. Вводится понятие целой функции на бесконечности. Для таких функций и для норм операторов коммутирования получено неравенство Бернштейна.

Ключевые слова: банахов модуль, изометрическое представление, спектр Бёрлинга, неравенство Бернштейна, целая функция, оператор коммутирования.

Mathematics Subject Classification: 47A10, 47L10

Введение

Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ непрерывных 2π — периодических комплекснозначных функций, определённых на $\mathbb{R}$, а также тригонометрические многочлены $x \in \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ вида

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad |\alpha_{-n}| + |\alpha_n| > 0. \tag{1}$$

С.Н. Бернштейном было получено следующее неравенство:

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \left|x'(t)\right| \leqslant n \cdot \max_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|.$$

Это неравенство обобщалось в разных направлениях. Так, неравенство Бернштейна было получено для целой функции экспоненциального типа σ, ограниченной на вещественной оси (см. [1]):

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|x'(t)\right| \leqslant \sigma \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Через $\operatorname{End}\mathscr{X}$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$.

Замкнутый линейный оператор $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ назовём *корректным* (см. [2]) (или *самосопряжённым* [3, 4]), если оператор $\mathrm{i}A$ является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной группы изометрических операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$.

В частности, в классической теореме Бернштейна оператор A определяется следующим образом: $A = \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действует в пространстве равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ и является генератором группы сдвигов. Заметим, что спектр оператора $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (см. [3]). В статье А. Г. Баскакова [5] для ограниченного корректного оператора в банаховом пространстве доказано, что $\|A\| = r(A)$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

В данной статье неравенство Бернштейна получено для векторов банахова пространства, где действует изометрическая группа операторов с генератором $\mathrm{i}A$, который может являться неограниченным оператором. Получены приложения неравенства Бернштейна для функций экспоненциального типа на бесконечности и для оценки оператора коммутирования. В статье для такого оператора получена оценка

$$\|Ax\| \leqslant r(x) \cdot \|x\|, \qquad x \in \mathscr{X}, \tag{2}$$

E.E. Dikarev, On the Bernstein inequality for vectors in Banach spaces.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00378).

Поступила 21 сентября 2013г.

где $r(x)$ — спектральный радиус вектора x, который определяется ниже.

В частности, для $x \in \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, являющегося тригонометрическим многочленом вида (1), $r(x) = n$. Таким образом, оценка (2) является непосредственным обобщением неравенства Бернштейна.

1. Свойства спектра Бёрлинга

Пусть $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра всех суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со свёрткой функций в качестве умножения с нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),$$

и пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ (где $\mathscr{X}$ — банахово пространство) — сильно непрерывное изометрическое представление. Тогда $\mathscr{X}$ наделяется структурой $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ \ x \in \mathscr{X}. \tag{3}$$

Модульная структура на $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$ определяется формулой (3) с помощью представления $\big(T(t)\varphi\big)(s) = \varphi(s+t)$, $\varphi \in \mathrm{C_b}(\mathbb{R})$, $t, s \in \mathbb{R}$, т.е. с помощью обычной операции свертки функций. С учётом формулы (3) банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуль $\mathscr{X}$ иногда будет обозначаться через $(\mathscr{X}, T)$.

Определение 1 (См. [3, 4, 5])**.** *Спектром Бёрлинга вектора x из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$.*

Пример 1. *Спектром Бёрлинга тригонометрического многочлена вида (1) является множество тех k, для которых $\alpha_k \neq 0$.*

Определение 2. *Пусть M — произвольное подмножество из банахова модуля $\mathscr{X}$. Спектром Бёрлинга множества M называется множество $\Lambda(M)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0$ для всех $x \in M\}$.*

Лемма 1. *Имеют место следующие свойства спектра Бёрлинга векторов из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$:*

1. *$\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$ и $\Lambda(x) = \varnothing \Leftrightarrow x = 0$;*
2. *$\Lambda(fx) \subset \big(\operatorname{supp}\widehat{f}\big) \cap \Lambda(x)$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), x \in \mathscr{X}$. В частности, если x имеет компактный спектр Бёрлинга, то вектор fx также имеет компактный спектр Бёрлинга;*
3. *$fx = 0$, если $\widehat{f} = 0$ на множестве $\Lambda(x)$ и $\big(\operatorname{supp}\widehat{f}\,\big) \cap \Lambda(x)$ не более чем счётно;*
4. *$fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$.*

Замечание 1 (См. [3])**.** *Из свойства $fx = 0$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$.*

Определение 3. *Линейное подпространство E из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$ называется подмодулем, если оно инвариантно относительно всех операторов вида $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и $T(f)$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*

Пусть Δ — замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Подмодуль

$$\mathscr{X}(\Delta) = \big\{x \in \mathscr{X} \mid \Lambda(x) \subset \Delta\big\}$$

называется *спектральным подмодулем.*

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуль, Δ — замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Тогда $\mathscr{X}(\Delta)$ — замкнутый подмодуль, и $\Lambda\big(\mathscr{X}(\Delta)\big) \subset \Delta$.*

Лемма 3. *Пусть* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *такова, что* $\operatorname{supp}\widehat{f}$ *— компакт, и* $[-a,a]$, $a > 0$ *— наименьший отрезок, содержащий* $\operatorname{supp}\widehat{f}$. *Тогда* f *бесконечно дифференцируема. Более того, она допускает расширение на* $\mathbb{C}$ *до целой функции* $\widetilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *экспоненциального типа* $\leqslant a$, *т.е. справедлива оценка*

$$\bigl|\widetilde{f}(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max\bigl|\widehat{f}(\lambda)\bigr| \cdot \mathrm{e}^{a|z|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\widehat{f} \equiv 1$ *в некоторой окрестности множества* $\Lambda(x)$, *где* x *— элемент банахова* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *— модуля* $\mathscr{X}$. *Тогда верны следующие равенства:*

$$T(t)x = T(t)(fx) = f_t x, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ где } f_t(s) = \bigl(S(t)f\bigr)(s) = f(t+s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathscr{X}.$$

Доказательство. Первое равенство следует из свойства 4 леммы 1. Далее,

$$T(t)(fx) = T(t)\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(t)T(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(t-\tau)x\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(S(t)f\bigr)(s)T(-s)x\,\mathrm{d}s = f_t x.$$

□

Далее используются степени $A^n\colon \mathrm{D}(A^n) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ оператора A, которые определим согласно книге [6].

Определение 4. *Для* $n = 0, 1, \ldots$ *оператор* A^n *определяется по индукции соотношениями* $A^0 = I$, $A^1 = A$ *и*

$$\mathrm{D}(A^n) = \bigl\{x \in \mathscr{X} \bigm| x \in \mathrm{D}(A^{n-1}),\ A^{n-1}x \in \mathrm{D}(A)\bigr\},$$
$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad x \in \mathrm{D}(A^n).$$

Лемма 5. *Пусть вектор* x *из* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *— модуля* $(\mathscr{X}, T)$ *имеет компактный спектр Бёрлинга* $\Lambda(x)$, *и функция* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ *такова, что* $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ *в некоторой окрестности* U *множества* $\Lambda(x)$. *Тогда* $x \in \mathrm{D}(A^n)$ *при любом* $n \geqslant 1$ *и* $fx = Ax$.

Доказательство. Выберем функцию$\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{\varphi} \equiv 1$ в окрестности V множества $\Lambda(x)$ и $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}$ — компактное множество. В силу леммы 1, $\varphi x = x$. Кроме того, φ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства: φ — бесконечно дифференцируема, $\varphi' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и $\widehat{\varphi'}(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\widehat{\varphi}(\lambda)$. Рассмотрим функцию $\psi = -\mathrm{i}\varphi$, $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Следовательно, $\widehat{\psi'}(\lambda) = \lambda\widehat{\varphi'}(\lambda)$. Кроме того, $f - \psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и $\widehat{f} - \widehat{\psi'} = 0$ в окрестности $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ множества $\Lambda(x)$. Следовательно, по свойству 2 леммы 1, $(f - \psi')x = 0$, откуда $fx = \psi' x$. Таким образом, утверждение леммы достаточно доказать для функции ψ'.

Поскольку функция φ удовлетворяет условиям леммы 4, то имеют место равенства

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)(\varphi x) - \varphi x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t x - \varphi x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t - \varphi)x}{t} = \varphi' x = \mathrm{i}\psi' x = \mathrm{i}Ax.$$

Таким образом, $x \in \mathrm{D}(A)$. Кроме того, из равенства $\varphi' x = \mathrm{i}Ax$ следует, что $\psi' x = Ax$, или $fx = Ax$.

Из полученного представления $Ax = fx$ и свойства 2 леммы 1 следует, что вектор fx имеет компактный спектр Бёрлинга, и поэтому по доказанному $fx = Ax \in \mathrm{D}(A)$, причём $A^2x = fAx$. Из определения оператора A^n следует, что $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$. □

Теорема 1. *Если* $x \in \mathscr{X}$ *имеет компактный спектр Бёрлинга, то* $x \in \mathrm{D}(A^m)$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$ *и справедливы оценки*

$$\|A^m x\| \leqslant r(x)^m \cdot \|x\|$$

при $m \geqslant 1$.

Доказательство. Тот факт что $x \in \mathrm{D}(A^m)$ следует из леммы 5.
Покажем, что $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$. Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Тогда по определению существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0$. Тогда $f_0(Ax) = Af_0 x = 0$, откуда

$$\Lambda(Ax) \subset \Lambda(x), \qquad \Lambda(A^n x) \subset \Lambda(x). \tag{4}$$

Рассмотрим вектор y вида

$$y = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi - \pi}{r(x)}\right) x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}. \tag{5}$$

Пусть функция $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{\psi}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$. Тогда в силу леммы 5 выполнено равенство $Ax = \psi x$. Для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ из леммы 4 получим следующие равенства:

$$f(y - Ax) = f(y - \psi x) =$$

$$= r(x) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_{\frac{k\pi-\pi}{r(x)}}}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \right) x - (\psi * f)x = gx - (\psi * f)x = \varphi x,$$

где $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье вида

$$\widehat{g}(\lambda) = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{i\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\lambda}}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}$$

и $\varphi = g - \psi * f$. Поскольку x имеет компактный спектр Бёрлинга, то $r(x) < \infty$. Ряд в правой части равенства (5) сходится абсолютно. Функция φ удовлетворяет условиям свойства 3 леммы 1. Таким образом, $f(y - Ax) = 0$ для каждой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и поэтому $y - Ax = 0$ в силу замечания 1. Имеют место оценки

$$\|Ax\| = r(x) \cdot \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\right) x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \right\| \leqslant r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \cdot \|x\| = r(x) \cdot \|x\|.$$

Из включения (4) и доказанного получаем, что

$$\left\|A^n x\right\| = \left\|A^{n-1} Ax\right\| \leqslant r(x)^n \|x\|, \qquad n \geqslant 2.$$

□

2. НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Через $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$. Через $\mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство $\left\{x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{|t| \to \infty} \left|x(t)\right| = 0\right\}$.

Определение 5. *Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ назовём* ***целой*** *на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_0 \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{x_0}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ такая, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, где $y_0 \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$.*

Лемма 6. *Любая функция $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством $\operatorname{supp} \widehat{f} \in [-\sigma, \sigma]$ допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа a. Более того, функция $f_z(s) = f(s + z)$, $s \in \mathbb{R}$, для каждого $z \in \mathbb{C}$ принадлежит алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и функция $F\colon \mathbb{C} \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $F(z) = f_z$ является целой функцией экспоненциального типа σ.*

Доказательство. Покажем, что f допускает расширение до функции экспоненциального типа σ. Запишем функцию f в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} \, \mathrm{d}\lambda,$$

и положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}\lambda, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Справедлива оценка

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi}2\sigma \cdot \max_{\lambda\in[-\sigma,\sigma]}\bigl|\widehat{f}(\lambda)\bigr| \cdot \mathrm{e}^{\sigma|z|}.$$

Таким образом, получено расширение функции f на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа σ.

Поскольку $\bigl(\frac{\mathrm{d}f_z}{\mathrm{d}z}\bigr)(s) = \frac{\mathrm{d}f(z-s)}{\mathrm{d}z}$, $z \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$, то функция F является целой функцией экспоненциального типа σ. □

Лемма 7. *Функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ допускает расширение до функции экспоненциального типа σ тогда и только тогда, когда $\Lambda(x) \subset [-\sigma,\sigma]$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть найдётся $\lambda_0 > \sigma + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Выберем $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ так, чтобы $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$, и пусть $x_0 = f_0 * x$, тогда $\Lambda(x_0) \subset [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$. Рассмотрим функцию $y_0(t) = (f_0 * x)(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 t}$, $\Lambda(y_0) \subset [-\delta,\delta]$. Таким образом, построена функция $(f_0 * x)(z) = y_0(z)\mathrm{e}^{i\lambda_0 z}$ экспоненциального типа $\geqslant \sigma+\delta$. *Достаточность.* Пусть $\Lambda(x) \subset [-\sigma,\sigma]$. Выберем $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f} = 1$ в окрестности спектра, и $\mathrm{supp}\widehat{f} \subset [-\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $f * x = x$, f — целая функция со свойствами из леммы 6. Тем же символом x будем обозначать продолжение x на $\mathbb{C}$. Положим $x(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z-s)x(s)\,\mathrm{d}s$. Имеет место оценка

$$x(z) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(z-s)|x(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \|f_z\|_1 \cdot \|x\|, \qquad z \in \mathbb{C},\ \ s \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\|f_z\|_1 \leqslant \mathrm{Const}\cdot\mathrm{e}^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$, $z \in \mathbb{C}$ $s \in \mathbb{R}$, то x — функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma+\varepsilon$. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что x — функция экспоненциального типа σ. □

Лемма 8. *Функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $(x - f * x) \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ для каждой суммируемой функции f со свойством $\widehat{f} \equiv 1$ на $[-\sigma,\sigma]$.*

Определение 6. *Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ назовём медленно меняющейся на бесконечности функцией, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено свойство $S(\alpha)x \ - x \ \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ или, другими словами, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\lim_{|t|\to\infty}\bigl|x(t+\alpha) - x(t)\bigr| = 0.$$

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathrm{C_{sl}}(\mathbb{R})$.

Отметим, что каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция эквивалентна целой функции на бесконечности экспоненциального типа 0 (см. [7]).

Рассмотрим сильно непрерывную группу сдвигов $S\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$, действующую по правилу: $\bigl(S(t)x\bigr)(s) = x(s+t)$, $s,t \in \mathbb{R}$. Через $\widetilde{S}\colon \mathbb{R} \to$ End $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})/\mathrm{C_0}$ обозначим представление, определённое по правилу: $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}$. Модульная структура определяется формулой

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{S}(-t)\widetilde{x}\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ \widetilde{x} \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}).$$

Пусть $x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$, и $y \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ — представитель класса $\widetilde{y}$. Введём норму класса $\widetilde{y}$ по правилу:

$$\bigl\|\widetilde{y}\bigr\| = \inf_{x\in\mathrm{C_0}(\mathbb{R})}\|y+x\|.$$

Теорема 2. *Функция x является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа порядка $\sigma \geqslant 0$, если $\Lambda(\widetilde{x}) \subset [-\sigma,\sigma]$, или, что эквивалентно, если в классе $\widetilde{x}$ существует дифференцируемая функция x_0, для которой справедлива оценка $\|x_0'\| \leqslant \sigma\bigl\|\widetilde{x}\bigr\|$.*

Доказательство. следует из приведённых выше результатов и теоремы 1. □

Здесь используется терминология и результаты из статей [8, 9, 10]. Пусть $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ — банаховы пространства и пусть $\mathrm{i}A_1$, $\mathrm{i}A_2$, $A_k \in \operatorname{End}\mathscr{X}_k$, $k = 1, 2$ — генераторы изометрических групп $T_1(t)$ и $T_2(t)$ соответственно:

$$T_1\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_1, \qquad T_2\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_2.$$

Банахово пространство $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ наделяется структурой банахова модуля по представлению $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ вида $T(t)X = T_2(t)XT_1(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$. Модульная структура определяется с помощью формулы

$$(fX)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\bigl(T(t)X\bigr)x\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\bigl(T_2(t)XT_1(-t)\bigr)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Отметим, что представление T является непрерывным в сильной операторной топологии.

Обозначим символом ad_{A_1,A_2} оператор вида $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = A_2X - XA_1$. В случае, когда $A_1 = A_2 = A$, $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = \mathrm{ad}_A X = AX - XA$ — коммутатор. Оператор X принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$, если $X\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2)$, и оператор $A_2X - XA_1$ допускает ограниченное расширение на $\mathscr{X}_1$. В дальнейшем это расширение будет обозначаться тем же символом $A_2X - XA_1$. Отметим, что спектром оператора ad_{A_1,A_2} является множество

$$\sigma(\mathrm{ad}_{A_1,A_2}) = \overline{\bigl\{\lambda_2 - \lambda_1\colon \lambda_1 \in \sigma(A_1), \lambda_2 \in \sigma(A_2)\bigr\}},$$

где $\sigma(A_1)$, $\sigma(A_2)$ — соответственно спектры операторов A_1, A_2.

Лемма 9. *Если $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ имеет компактный спектр Бёрлинга, то $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$ $\bigl($т.е. корректно определен оператор $A_2X - -XA_1 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)\bigr)$.*

Теорема 3. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(X, T)$ оператора $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ является компактным множеством, то справедливо следующее неравенство:*

$$\bigl\|A_2X - XA_1\bigr\| \leqslant r(X) \cdot \|X\|.$$

Доказательство. следует из теоремы 1 и приведённых выше результатов. ☐

Пусть $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ — сепарабельные бесконечномерные банаховы пространства с безусловными базисами $\bigl(e_k^{'}\bigr)$ и $\bigl(e_k^{''}\bigr)$ соответственно. Матрица (x_{mn}) оператора $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$ определяется из равенств

$$Xe_n^{'} = \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}e_m^{''}.$$

Пусть определены сильно непрерывные изометрические представления $T_k\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_k$, $k = 1, 2$, определённые равенствами:

$$T_1(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\alpha_n e_n^{'}, \qquad T_2(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\beta_n e_n^{''}.$$

Рассмотрим ограниченное представление

$$T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2), \qquad T(t)X = T_2(t)XT_1(-t),$$

где $x \in \mathscr{X}_1$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2)$, и оператор вида

$$(fX)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)XT_1(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

При $x = e_n^{'}$ получаем равенства:

$$(fX)e_n^{'} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)XT_1(-\tau)e_n^{'}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}e_n^{'}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}Xe_n^{'}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}e_m^{''}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\tau}x_{mn}e_m^{''}\,\mathrm{d}\tau = \sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(n-m)x_{mn}e_m^{''}.$$

Таким образом, матрица оператора X имеет вид $\big(\widehat{f}(n-m)x_{mn}\big)$. Следовательно, $fX = 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(n-m) = 0, \ \ m,n \in \mathbb{N}$, для которых $x_{mn} \neq 0$, то есть спектр Бёрлинга оператора X имеет вид:

$$\Lambda(X) = \big\{m,n \in \mathbb{N} \mid \text{существует } f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \widehat{f}(n-m) = 0 \text{ и } x_{mn} \neq 0\big\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Наука. 1965.
2. Любич Ю.И. *Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора* // УМН, Т.18:1(109). 1963. С. 165–171.
3. Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов* // Функциональный анализ. СМФН. № 9. МАИ. М. 2004. С. 3—151.
4. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов.* Воронеж. ВГУ. 1987.
5. Баскаков А.Г. *Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе* // Сиб. матем. журн. Т. 20, № 5. 1979. С. 942–952.
6. Данфорд Н. *Линейные операторы: Общая теория.* М.: Едиториал УРСС. 2010. 896 с.
7. Калужина Н.С. *Медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства* // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 2. 2010. С. 97–102.
8. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58:4 1994. С. 3—320.
9. Баскаков А.Г., Криштал И.А. *Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 69:3. 2005. С. 3—54.
10. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. *Теорема Бёрлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений* // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643—661.

Егор Евгеньевич Дикарев,
Воронежский государственный университет,
Университетская площадь, 1,
394006, г. Воронеж, Россия
E-mail: `heiligenkreuz@gmail.com`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 84-90.

УДК 517.5

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости рядов экспоненциальных многочленов, которые построены по почти экспоненциальным последовательностям таких многочленов. Частными случаями этих рядов являются ряды экспоненциальных мономов, ряды экспонент, ряды Дирихле и степенные ряды. Получен аналог теоремы Абеля для таких рядов, из которого, в частности, вытекают результаты о продолжении их сходимости. Получен также аналог теоремы Коши-Адамара. Приводится формула, позволяющая восстанавливать область сходимости указанных рядов по их коэффициентам. Полученные результаты включают в себя результаты, связанные с теоремами Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов, рядов экспонент, рядов Дирихле и степенных рядов.

Ключевые слова: экспоненциальный многочлен, выпуклая область, ряд экспонент, инвариантное подпространство, область сходимости.

Mathematics Subject Classification: 41A05, 4130

1. Введение

В работе изучается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k(z), \tag{1.1}$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность.

Для каждой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ зафиксируем последовательность выпуклых компактов $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset intK_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$, (int – внутренность множества) и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, и e_m — целая функция, $m = 1, 2, \ldots$ Будем говорить (см. [1]), что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}$, если для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ выполнены два условия:
1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_k(w)| \leqslant a \exp\left(H_{K_s}(\lambda_k)\right), \quad k = 1, 2, \ldots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp\big(H_{K_p}(\lambda_k)\big) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_k(w)|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

O.A. Krivosheyeva, Convergence domain for series of exponential polynomials.

Поступила 7 апреля 2013 г.

Здесь $H_M(\lambda)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(\lambda) = \sup_{w \in M} Re(\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Условия 1) и 2) означают, что последовательность $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в некотором смысле схожа с последовательностью экспонент $\{\exp(\lambda_m z)\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, из условия 1) с учетом определения опорной функции получаем соотношения:

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) = a \sup_{w \in K_s} \exp(Re(\lambda_m w)) = a \sup_{w \in K_s} |\exp(\lambda_m w)|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Условие 2) дает аналогичную оценку снизу на модуль функции $e_m(w)$. Очевидно, что указанная последовательность экспонент является почти экспоненциальной последовательностью. В качестве примера последней рассмотрим еще семейство функций $\{z^n \exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=0}^{\infty,k_m}$. В предложении 2.3 работы [2] по существу показано, что при условии $k_m/|\lambda_m| \to 0$ это семейство является почти экспоненциальной последовательностью. Сходимость рядов экспоненциальных мономов, т.е. рядов по элементам такой системы изучалась в работе [3]. В ней получены аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов. Почти экспоненциальные последовательности более общего вида рассматривались в работе [4]. Они состоят из линейных комбинаций экспоненциальных многочленов, показатели которых образуют так называемые "относительно малые" группы. Подобные последовательности используются в теории представления элементов инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств функций, аналитических в выпуклой области (см. [5]), и, в частности, пространств решений однородных уравнений свертки и их систем. В этой связи возникает задача исследования сходимости рядов экспоненциальных многочленов, построенных по почти экспоненциальным последовательностям таких многочленов. В настоящей работе изучаются области сходимости указанных рядов. Для них получены аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара.

2. Предварительные результаты

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $p = 1, 2, \ldots$

Рассмотрим банахово пространство комплексных последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_k\} : ||d_p|| = \sup_{k \geq 1} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty\}.$$

Символом $Q(\Lambda, D)$ обозначим проективный предел пространств Q_p, $p \geq 1$. Пространство $Q(\Lambda, D)$ является пересечением Q_p, $p \geq 1$. Топология в $Q(\Lambda, D)$ эквивалентна топологии, определяемой метрикой

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{||d - d'||_p}{1 + ||d - d'||_p}.$$

С этой метрикой $Q(\Lambda, D)$ становится, очевидно, пространством Фреше.

Покажем, что последовательность коэффициентов сходящегося ряда (1.1) принадлежит пространству $Q(D)$ для некоторой специальной выпуклой области D.

Символом $\mathbb{S}$ будем обозначать окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Θ-выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi), \xi \in \Theta\}.$$

Отметим, что внутренность E лежит в $E(\Theta)$. В самом деле, если z — внутренняя точка E, то из определения опорной функции следуют неравенства $Re(z\xi) < H_E(\xi), \forall\xi \in \Theta$. Это означает, что $z \in E(\Theta)$. В частном случае, когда $\Theta = \mathbb{S}$, Θ-выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки) и, таким образом, является выпуклой областью. Последнее имеет место и в общем случае, что и подтверждает

Лемма 2.1. *Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Тогда множество $E(\Theta)$* является выпуклой областью.

Доказательство. По определению, множество $E(\Theta)$ есть пересечение полуплоскостей, а потому выпукло. Выпуклость влечет за собой связность $E(\Theta)$. Остается показать, что $E(\Theta)$ — открытое множество. Предположим, что это не так. Тогда существует точка $z_0 \in E(\Theta)$ и последовательность $\{z_k\}$ такие, что $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$ и $z_k \notin E(\Theta)$ для всех $k \geq 1$, то есть $Re(z_k\xi_k) \geq H_E(\xi_k)$ для некоторого $\xi_k \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$ Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\xi_k\}$ сходится к точке $\xi_0 \in \Theta$. Тогда из последнего неравенства с учетом полунепрерывности снизу опорной функции получаем

$$Re(z_0\xi_0) = \lim_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) = \varliminf_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) \geq \varliminf_{k\to\infty} H_E(\xi_k) \geq H_E(\xi_0).$$

Это противоречит определению $E(\Theta)$, так как $z_0 \in E(\Theta)$, а $\xi_0 \in \Theta$. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество всех частичных пределов последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$ (исключая точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Символом $B(x, \delta)$ будем обозначать открытый круг с центром в точке x и радиусом δ.

Лемма 2.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что общий член ряда (1.1) ограничен на каждом компакте K открытого множества $E \subset \mathbb{C}$, т.е. $|d_k e_k(z)| \leqslant A$, $k = 1, 2, \ldots$, $z \in K$. Тогда имеет место включение $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$.*

Доказательство. Предположим, что $d \notin Q(\Lambda, D)$. Тогда $d \notin Q_p(\Lambda)$ для некоторого номера $p = 1, 2, \ldots$ Это означает, что найдется подпоследовательность $\{d_{k_l}\}$ такая, что

$$|d_{k_l}| \exp H_{K_p}(\lambda_{k_l}) \to +\infty, \quad l \to \infty. \tag{2.1}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_l}/|\lambda_{k_l}|\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \Theta(\Lambda)$. Поскольку K_p — компакт в области $D = E(\Theta(\lambda))$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка: $Re(z_0x_0) > H_{K_p}(x_0)$. Тогда с учетом непрерывности опорной функции компакта найдется $\delta > 0$ такое, что

$$Re(z_0x) > H_{K_p}(x), \quad x \in B(x_0, \delta). \tag{2.2}$$

По условию E — открытое множество. Поэтому оно содержит некоторый круг $\tilde{D}$ с центром в точке z_0. Пусть $K(\tilde{D}) = \{\tilde{K}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Выберем номер s, для которого компакт $\tilde{K}_s$ содержит z_0. Тогда верно неравенство

$$H_{\tilde{K}_s}(x) \geq Re(z_0x), \quad x \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Поскольку $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, то существуют постоянная $b > 0$ и номер n такие, что

$$b \exp(H_{\tilde{K}_s}(\lambda_k)) \leqslant \sup_{w \in \tilde{K}_n} |e_k(w)|, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Выберем номер l_0 так, что $\lambda_{k_l}/|\lambda_{k_l}| \in B(x_0,\delta)$, $l \geq l_0$. Тогда из неравенств (2.2)–(2.4) и положительной однородности опорной функции для всех $l \geq l_0$ получаем:

$$\sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_{k_l}(w)| \geq b\exp(H_{K_p}(\lambda_{k_l})).$$

Таким образом, в силу (2.1) имеем:

$$|d_{k_l}| \sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_{k_l}(w)| \to +\infty, \quad l\to\infty.$$

С другой стороны, согласно условию верно неравенство

$$|d_{k_l}| \sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_{k_l}(w)| \leqslant A, \quad l = 1,2,\ldots$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Из леммы 2.2 вытекает один из результатов работы [1] (лемма 1).

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$, $k\to\infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что ряд (1.1) сходится равномерно на каждом компакте области D. Тогда верно включение $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $D \subset D(\Theta(\Lambda))$, а потому имеет место вложение $Q(\Lambda, D(\Theta(\Lambda))) \subset Q(\Lambda, D)$.

В работе [1] доказывается, что при условии $\sigma(\Lambda) = \lim\limits_{k\to\infty} \ln k/|\lambda_k| = 0$ имеет место утверждение обратное к этому следствию и даже более сильное утверждение:

Лемма 2.3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$, $k\to\infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, такими, что $\sigma(\Lambda) = 0$, и $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$. Тогда для каждого номера $p \geq 1$ существуют номер s и постоянная $C_p > 0$, не зависящие от $d = \{d_k\}$, для которых выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \sup_{z\in K_p} |e_k(z)| \leqslant C_p||d||_s. \tag{2.5}$$

В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте области D.

3. Аналог теоремы Абеля

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля для ряда (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$, $k\to\infty$, такая, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что общий член ряда (1.1) ограничен на каждом компакте K открытого множества $E \subset \mathbb{C}$. Тогда для каждого номера $p = 1,2,\ldots$ найдутся номер s и число $C_p > 0$ (не зависящие от последовательности d) такие, что выполнено (2.5), где нормы $||d_p||$ построены по последовательности $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ и $D = E(\Theta(\Lambda))$. В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте области D.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2.2 имеет место включение $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$. Отсюда по лемме 2.3 для каждого $p = 1,2,\ldots$ найдутся номер s и число $C_p > 0$ (не зависящие от последовательности d) такие, что выполнено (2.5). Теорема доказана.

Замечания. 1. Из теоремы 3.1 следует, что при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ внутренность множества равномерной сходимости ряда (1.1) всегда является выпуклой и даже Θ – выпуклой областью (т.е. областью, которая представляет из себя пересечение полуплоскостей $\{z : Re(z\xi) < h(\xi), \xi \in \Theta\}$).

2. Если из теоремы 3.1 изъять условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ее утверждение становится неверным. В лемме 4 работы [1] доказывается, что из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \sup_{z \in K_p} |e_k(z)|$$

при любой последовательности $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$, где D — ограниченная область, вытекает равенство $\sigma(\lambda) = 0$.

4. Аналог теоремы Коши-Адамара

Приведем результат, который является аналогом теоремы Коши-Адамара для степенных рядов. Прежде чем его сформулировать, введем еще обозначения. Пусть $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Для последовательности коэффициентов $d = \{d_k\}$ ряда (1.1) положим

$$h(d, \xi) = \inf \varliminf_{j \to \infty} \frac{\ln(1/|d_{k(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к ξ, когда $j \to \infty$. Таким образом, мы получили функцию $h(d, \xi)$, $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Она является полунепрерывной снизу. Действительно, пусть $\xi, \xi_p \in \Theta(\Lambda)$, $p \geq 1$, $\xi_p \to \xi$ и последовательность $\{\xi_p\}$ такая, что

$$\varlimsup_{\zeta \to \xi} h(d, \zeta) = \lim_{p \to \infty} h(d, \xi_p) = a.$$

По определению функции $h(d, \zeta)$ для каждого $p \geq 1$ найдем точку $\lambda_{k(p)}$, удовлетворяющую условиям: $|\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| - \xi_p| < 1/p$ и $\ln(1/|d_{k(p)}|)/|\lambda_{k(p)}| < a + 1/p$. Тогда последовательность $\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|$ сходится к ξ и

$$\varlimsup_{p \to \infty} \frac{\ln(1/|d_{k(p)}|)}{|\lambda_{k(p)}|} \leqslant a.$$

Это означает, что

$$\varlimsup_{\zeta \to \xi} h(d, \zeta) \geq h(d, \xi),$$

т.е. $h(d, \zeta)$ полунепрерывна снизу. Тогда, как и в лемме 2.1, показывается, что множество

$$D(d, \Lambda) = \{z : Re(z\xi) < h(d, \xi), \xi \in \Theta(\Lambda)\}$$

является $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью. Символом $\tilde{D}(d, \Lambda)$ обозначим множество точек плоскости, в окрестности каждой из которых ряд (1.1) сходится равномерно.

Теорема 4.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$, такая, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда области $\tilde{D}(d, \Lambda)$ и $D(d, \Lambda)$ совпадают.*

Доказательство. Покажем, что $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D(d, \Lambda))$. Пусть K_p — произвольный элемент множества $K(D(d, \Lambda))$. Достаточно доказать, что

$$\varlimsup_{k \to \infty} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < +\infty. \tag{4.1}$$

Предположим, что это не так. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{k(j)\}$ имеем:

$$\varlimsup_{k \to \infty} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) = +\infty,$$

или, что эквивалентно

$$\lim_{j\to\infty}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) = +\infty.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) \geq 0. \tag{4.2}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к некоторой точке $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Тогда с учетом непрерывности, положительной однородности опорной функции компакта и определения величины $h(d,\xi)$ получаем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}\ln|d_{k(j)}| + \overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}H_{K_p}(\lambda_{k(j)}) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\xi) \leqslant -h(d,\xi) + H_{K_p}(\xi).$$

Поскольку K_p — компакт в области $D(d,\Lambda)$, то верно неравенство $H_{K_p}(\xi) < H_{D(d,\Lambda)}(\xi)$. Кроме того, в силу определения области $D(d,\Lambda)$ и ее опорной функции $H_D(d,\Lambda)$ верно также неравенство $H_{D(d,\Lambda)}(\xi) \leqslant h(d,\xi)$. Таким образом, с учетом предыдущего получаем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) \leqslant -h(d,\xi) + H_{K_p}(\xi) < -h(d,\xi) + H_{D(d,\lambda)}(\xi) \leqslant 0.$$

Это противоречит (4.2). Следовательно, (4.1) верно, т.е. $d \in Q(\Lambda, D(d,\Lambda))$. Тогда, согласно лемме 2.3, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте области $D(d,\Lambda)$. Это означает, что верно вложение $D(d,\Lambda) \subset \tilde{D}(d,\Lambda)$.

Покажем, что имеет место и обратное вложение. Пусть $z \in \tilde{D}(d,\Lambda)$. По определению области $\tilde{D}(d,\Lambda)$, в некоторой окрестности E точки z ряд (1.1) сходится равномерно. Поэтому общий член этого ряда ограничен на множестве E. Тогда по лемме 2.2 последовательность $d = \{d_k\}$ является элементом пространства $Q(\Lambda, E(\Theta(\Lambda))$. Выше отмечалось, что множество E лежит в области $E(\Theta(\Lambda))$. Поэтому один из компактов $\tilde{K}_p$ последовательности $K(E(\Theta(\Lambda))$ содержит точку z в своей внутренности. Согласно определению пространства $Q(\Lambda, E(\Theta(\Lambda))$ для некоторого $C > 0$ верно неравенство

$$|d_k| \leqslant C\exp(-H_{\tilde{K}_p}(\lambda_k)), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Фиксируем произвольную точку $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Согласно определению величины $h(d,\xi)$ найдем подпоследовательность $\{k(j)\}$ такую, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к точке ξ и

$$h(d,\xi) = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(1/|d_{k(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|}.$$

Отсюда, с учетом (4.3), положительной однородности и непрерывности опорной функции компакта получаем

$$h(d,\xi) \geq \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(1/C\exp(-H_{\tilde{K}_p}(\lambda_{k(j)})))}{|\lambda_{k(j)}|} = \lim_{j\to\infty}\frac{(ln(1/C) + H_{\tilde{K}_p}(\lambda_{k(j)}))}{|\lambda_{k(j)}|} =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{H_{\tilde{K}_p}\lambda_{k(j)})}{|\lambda_{k(j)}|} = \lim_{j\to\infty}H_{\tilde{K}_p}\left(\frac{\lambda_{k(j)}}{|\lambda_{k(j)}|}\right) = H_{\tilde{K}_p}(\xi).$$

Поскольку точка z лежит внутри компакта $\tilde{K}_p$, то верно неравенство $Re(z\xi) < H_{\tilde{K}_p}(\xi)$. Следовательно, в силу предыдущего неравенства имеем: $Re(z\xi) < h(d,\Lambda)$. Напомним, что ξ — произвольная точка множества $\Theta(\Lambda)$. Поэтому согласно своему определению область $D(d,\Lambda)$ содержит z. Теорема доказана.

Замечание. Формула, определяющая величину $h(d,\Lambda)$ как частные случаи содержит в себе соответствующие формулы для рядов экспоненциальных мономов, рядов экспонент и формулу Коши-Адамара для степенных рядов. В частном случае для ряда $\sum d_k \exp(kz)$ имеем формулу

$$h(d,1)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln(1/|d_k|)}{k}=\overline{\lim_{k\to\infty}}(-\ln\sqrt[k]{|d_k|}).$$

Делая преобразование $w=\exp z$, переводящее этот ряд в степенной ряд, получаем следующую формулу для радиуса сходимости последнего

$$R=\exp h(d,1)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}.$$

Таким образом, мы получили формулу Коши-Адамара для степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальный базис* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 1. С. 87–96.
2. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
3. Кривошеева О.А.*Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 2. С. 43–56.
4. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 1. С. 88–106.
5. Кривошеев А.С. *Базисы „по относительно малым группам“* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 2. С. 67–89.

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 91-104.

УДК 517.5

ОРТОПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ

В.В. НАПАЛКОВ (МЛ.)

Аннотация. В работе изучаются системы разложения, подобные ортогональным (ортоподобные системы), в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром. Установлена эквивалентность двух определений ортоподобной системы. Указана связь ортоподобных систем с задачей об описании сопряженного пространства к некоторому гильбертову пространству в терминах специальной системы функций.

Ключевые слова: пространство Бергмана, гильбертовы пространства, воспроизводящее ядро, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, теорема Пэли-Винера.

Mathematics Subject Classification: 30H20, 30E10, 30E20, 32A26, 46E22, 47B32

Системы разложения, подобные ортогональным (ортоподобные системы разложения) в гильбертовом пространстве, были введены Т.П. Лукашенко в работе [1] и находят применение, например, в вейвлет-анализе. В этой работе мы изучаем ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром. Необходимость исследования случая пространств с воспроизводящим ядром мотивирована задачами комплексного анализа.

Определение 1 (см., например, [3]). *Пусть H гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек M. H называется гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, если для любой точки $z_0 \in M$ функционал*

$$\delta_{z_0} : H \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \delta_{z_0} f \longrightarrow f(z_0),\ f \in H$$

является линейным и непрерывным функционалом над H.

По теореме Рисса-Фишера линейный и непрерывный функционал над гильбертовым пространством H порождается некоторым элементом из H. Равенство

$$f(\xi) = \delta_\xi f = (f(z), K_H(z,\xi))_H, \quad \xi \in M \tag{1}$$

определяет воспроизводящее ядро пространства H, как функцию $K_H(z,\xi)$ от двух переменных $z, \xi \in M$. Основные свойства гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром изложены, например, в [3]. Наиболее важным фактом теории пространств с воспроизводящим ядром является следующая теорема Мура-Ароншайна (см., например, [5]).

Замечание *Мы предполагаем для определенности, что H – гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Для гильбертовых пространств над полем вещественных чисел все сказанное ниже также верно с соответствующими изменениями.*

Теорема А. *Пусть M – произвольное множество точек, и $K(z,\xi) : M \times M \to \mathbb{C}$ комплекснозначная функция. Для того чтобы эта функция была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства H, состоящего из комплекснозначных функций,*

V.V. Napalkov(Jr.), Orthosimilar expansion systems in space with reproducing kernel.

Поступила 19 июня 2013г.

заданных на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора точек $z_1, z_2, \ldots, z_n \in M$ и для любого конечного набора комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ выполнялось условие:

$$\sum_{l,m=1}^{n} c_l \cdot \overline{c_m} \cdot K(z_l, z_m) \geq 0.$$

При этом H – это единственное пространство с воспроизводящим ядром, имеющее в качестве ядра функцию $K(z, \xi)$.

В работах Т.П. Лукашенко [1], [2] приводится следующее определение ортоподобной системы разложения.

Замечание. *В определении ортоподобной системы разложения используется понятие интеграла Лебега со значениями в гильбертовом пространстве. Теория таких интегралов изложена в* [4]. *Чтобы различать случай, когда интеграл понимается как обычный интеграл Лебега, мы вводим следующее обозначение: знак $\int_{\Omega}^{(H)}$ означает интеграл от функции со значениями в гильбертовом пространстве H (см. ниже).*

Определение 2. *(см.* [1]*) Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω – пространство со счетно-аддитивной мерой μ. Система элементов $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ, если любой элемент $y \in H$ представляется в виде:*

$$y = \int_{\Omega}^{(H)} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega),$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае есть такое исчерпание $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства Ω (все Ω_k измеримы по мере μ, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_K = \Omega$, быть может, зависящее от y и называемое подходящим для y, что функция $(y, e_\omega)_H \cdot e_\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_{\Omega}^{(H)} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Omega_k}^{(H)} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega).$$

В этой работе мы рассматриваем счетно-конечное пространство Ω с некоторой счетно-аддитивной мерой μ. Если мера μ неотрицательна, то ортоподобная система $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется неотрицательной.

Определение 3. *Пространство Ω с мерой μ называется счетно-конечным, если Ω представляется в виде счетного объединения подмножеств $\Omega_k \subset \Omega$: $\bigcup_{k\geq 1} \Omega_k = \Omega$, $k = 1, 2, \ldots$, при этом $\mu(\Omega_k) < \infty$ для любого k.*

В этой работе мы используем теорему, доказанную Т.П. Лукашенко в работе [1].

Теорема B. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, пространство Ω со счетно-аддитивной мерой μ счетно-конечно, $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ – система элементов из H, и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля*

$$\|y\|_H^2 = \int_{\Omega} |(y, e_\omega)_H|^2 \, d\mu(\omega).$$

Тогда $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ – ортоподобная система разложения в H (в смысле определения 2).

Мы докажем, что если H сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром над полем $\mathbb{C}$, состоящее из функций $f(z)$, $z \in M$, где M некоторое множество, то можно дать следующее эквивалентное исходному определение ортоподобной системы разложения:

Определение 4. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром над полем $\mathbb{C}$, а Ω – пространство со счетно-аддитивной мерой μ (см.* [4]*, с.109–116). Система элементов $\{e_\omega(z), z \in M\}_{\omega\in\Omega}$ называется ортоподобной*

(подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ, если любая функция $f \in H$ представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega),\ z \in M.$$

Последнее равенство понимается "поточечно"при любом $z \in M$, а интеграл понимается как обычный интеграл Лебега.

Как отмечено в работе [2], функция $f_\omega = (f(\tau), e_\omega(z))_H$ от переменной $\omega \in \Omega$ не обязана быть μ-измеримой. В связи с этим в работе [2] введено понятие измеримой ортоподобной системы разложения.

Определение 5. *Пусть в гильбертовом пространстве H имеется ортоподобная (в смысле определения 2) система разложения $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ с мерой μ. Эта система называется измеримой, если для любого $f \in H$ функция $f_e(\omega) \overset{def}{=} (f(z), e_\omega(z))_H$ μ-измерима на Ω.*

Как доказывается в работе [2], для любой рассматриваемой нами ортоподобной системы разложения $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ существует функция $\theta(\omega)$, $|\theta(\omega)| = 1$ такая, что система $\{\theta(\omega) \cdot e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ является измеримой.

Теорема C ([2]). *Если $\{e_\omega\} \subset H$ неотрицательная ортоподобная система разложения в H, а пространство с мерой Ω счетно-конечно, то существует такая функция $\theta(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H, $|\theta(\omega)| = 1$ на Ω, что $\{\theta(\omega) \cdot e_\omega\}$ – измеримая ортоподобная система разложения в H.*

Пусть Ω –счетно-конечное пространство с неотрицательной счетно-аддитивной мерой μ. Рассмотрим систему функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ от переменной $\omega \in \Omega$. Без ограничения общности будем считать, что эта система обладает свойством: для любого $z \in M$ функция $e_\omega(z)$, $\omega \in \Omega$ μ-измерима на Ω. Если это не так, то существует комплекснозначная функция $\theta(\omega)$, $|\theta(\omega)| = 1$ такая, что все функции системы $\{\theta(\omega) \cdot e_\omega(z)\}_{z\in M}$ μ-измеримы (см. [2], стр. 60). Предположим также, что для любого $z \in M$

$$\int_\Omega |e_\omega(z)|^2\, d\mu(\omega) < \infty.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского – Шварца любая конечная линейная комбинация элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ суммируема с квадратом модуля на Ω по мере μ. Через $R(\Omega, \mu)$ обозначим пополнение относительно нормы

$$\|h\|_R \overset{def}{=} \sqrt{\int_\Omega |h(\omega)|^2\, d\mu(\omega)}$$

линейной оболочки системы функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$. $R(\Omega, \mu)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(h, g)_R = \int_\Omega h(\omega) \cdot \overline{q(\omega)}\, d\mu(\omega).$$

По теореме Рисса-Фишера, любой линейный непрерывный функционал S над $R(\Omega, \mu)$ порождается некоторым элементом h по правилу:

$$S(f) = (f, h)_R, \quad f \in R(\Omega, \mu).$$

Каждому линейному непрерывному функционалу, порожденному функцией $h \in R(\Omega, \mu)$, поставим в соответствие функцию

$$\widehat{h}(z) \overset{def}{=} (e_\omega(z), h(\omega))_R = \int_\Omega \overline{h(\omega)} \cdot e_\omega(z)\, d\mu(\omega), \quad z \in M.$$

Будем называть эту функцию преобразованием функционала, порожденного функцией $h \in R(\Omega,\mu)$. Совокупность таких функций, образует гильбертово пространство

$$\widehat{R}(\Omega,\mu) \overset{def}{=} \{\widehat{h} : h \in R(\Omega,\mu)\}$$

со скалярным произведением

$$(\widehat{h},\widehat{q})_{\widehat{R}} \overset{def}{=} (q,h)_R,\ \|\widehat{h}\|_{\widehat{R}} = \sqrt{(\widehat{h},\widehat{h})_{\widehat{R}}} = \|h\|_R,\ h,q \in R(\Omega,\mu).$$

Заметим, что пространство $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Действительно, любой элемент $\widehat{h} \in \widehat{R}(\Omega,\mu)$ представляется в виде:

$$\widehat{h}(z) = (e_\omega(z), h(\omega))_R, \quad z \in M.$$

Для произвольного $z_0 \in M$ справедлива оценка

$$|\widehat{h}(z_0)| = |(e_\omega(z_0), h(\omega))_R| \leq$$
$$\leq \|e_\omega(z_0)\|_R \|h\|_R = \|e_\omega(z_0)\|_R \|\widehat{h}\|_{\widehat{R}}.$$

Значит, для любого $z_0 \in M$ функционал $\widehat{h} \to \widehat{h}(z_0)$ является линейным непрерывным функционалом над пространством $\widehat{R}(\Omega,\mu)$, поэтому пространство $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром H над полем $\mathbb{C}$ имеется система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$, пространство Ω со счетно-аддитивной мерой μ счетно-конечно. Пусть при любом $z \in M$ функция $e_\omega(z)$ измерима по переменной $\omega \in \Omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2, т.е любая функция f из H представляется в виде:*
$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega). \tag{2}$$
Здесь интеграл понимается, как интеграл от функции со значениями в гильбертовом пространстве ([4], глава III). Равенство понимается как равенство двух элементов гильбертова пространства.
2. *Система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 4, т.е. любая функция f из пространства H представляется в виде:*
$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega),\ z \in M. \tag{3}$$
Равенство (3) понимается "поточечно"при любом фиксированном $z \in M$, интеграл понимается как обычный интеграл Лебега.
3. *Система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ принадлежит пространству H. Воспроизводящее ядро пространства H имеет вид:*
$$K_H(z,\xi) = \int_\Omega e_\omega(z) \cdot \overline{e_\omega(\xi)}\, d\mu(\omega), \quad z,\xi \in M. \tag{4}$$
Интеграл здесь понимается как обычный интеграл Лебега. Равенство понимается "поточечно".
4. *Пространство H совпадает с пространством $\widehat{R}(\Omega,\mu)$. Пространства H и $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ состоят из одних и тех же элементов, и для любых функций $h, r \in H$ выполнено равенство*
$$(h,r)_H = (h,r)_{\widehat{R}}.$$

Доказательство. Докажем, что из условия 1 вытекает условие 2.

Пусть система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2. Воспользуемся следующей теоремой, являющейся частным случаем доказанной в книге [4], стр. 128 теоремы:

Теорема D. *Пусть H – гильбертово пространство и Ω – пространство с мерой μ. Пусть S – линейный непрерывный оператор, отображающий H в другое гильбертово пространство Y. Если функция $f : \Omega \to H$ со значениями в гильбертовом пространстве μ -интегрируема в смысле (*[4]*, глава III), то функция $Sf : \Omega \to Y$ также μ – интегрируема и*

$$\int_\Omega Sf(\omega)\,d\mu(\omega) = S\int_\Omega f(\omega)\,d\mu(\omega).$$

Пусть z_0 произвольная фиксированная точка, принадлежащая множеству M. Применим эту теорему. В качестве оператора S возьмем дельта-функционал, действующий из пространства H в пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$.

$$\delta_{z_0} : f \longrightarrow f(z_0).$$

Получим равенство

$$f(z_0) = \delta_{z_0} f(z) = \delta_{z_0}\int_\Omega^{(H)} (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\,d\mu(\omega) =$$

$$= \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H \delta_{z_0} e_\omega(z)\,d\mu(\omega) = \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z_0)\,d\mu(\omega).$$

Левая и правая части этого равенства суть комплексные числа. Интеграл понимается как обычный интеграл Лебега со значениями в $\mathbb{C}$. Поскольку точка $z_0 \in M$ произвольная, то система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — ортоподобная система разложения в смысле определения 4. Таким образом доказано, что из условия 1 вытекает условие 2.

Покажем, что из условия 2 вытекает условие 3.

Очевидно, что система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ принадлежит пространству H. Поскольку при фиксированном параметре $\xi \in M$ функция $K_H(z,\xi)$, $z \in M$ принадлежит пространству H, то мы можем подставить эту функцию в равенство (3), и получить

$$K_H(z,\xi) = \int_\Omega (K_H(\tau,\xi), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\,d\mu(\omega) =$$

$$= \int_\Omega \overline{(e_\omega(\tau), K_H(\tau,\xi))_H} e_\omega(z)\,d\mu(\omega) = \int_\Omega e_\omega(z)\cdot\overline{e_\omega(\xi)}\,d\mu(\omega),\ z,\xi \in M. \tag{5}$$

Равенство в (5) понимается "поточечно". Интеграл понимается как обычный интеграл Лебега. Таким образом, из условия 2 следует условие 3.

Покажем, что из условия 3 теоремы 1 следует условие 4. Сначала докажем, что если выполняется условие 3, то пространство $R(\Omega,\mu)$ (определение см. выше) является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. В равенстве (4) положим $\xi = z$. Получим

$$K_H(z,z) = \int_\Omega |e_\omega(z)|^2\,d\mu(\omega) < \infty,\ z \in M.$$

Таким образом, все функции из системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ μ-измеримы и интегрируемы с квадратом модуля по мере μ на Ω. В силу известного неравенства Коши-Буняковского-Шварца любая конечная линейная комбинация функций системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ также является измеримой, интегрируемой с квадратом модуля по мере μ на Ω функцией. Как описано выше, пространство $R(\Omega,\mu)$ является пополнением по норме

$$\|h\|_R = \sqrt{\int_\Omega |h(\omega)|^2\,d\mu(\omega)}$$

линейной оболочки системы функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$.

По условию 3 система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ принадлежит пространству H. Обозначим через Q пополнение по норме пространства H линейной оболочки системы функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$. Таким образом, Q замкнутое подпространство пространства H. Если $g\in Q$, то $\|g\|_Q=\|g\|_H$. Поскольку H гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, то и Q гильбертово пространство с воспроизводящим ядром. Действительно, если $g\in Q$, $z\in M$, то $g\in H$

$$\begin{aligned}|g(z)|=|(g(\tau),K_H(\tau,z))_H|\le\|K_H(\tau,z)\|_H\cdot\|g\|_H=\\=\|K_H(\tau,z)\|_H\cdot\|g\|_Q,\quad z\in M.\end{aligned}\tag{6}$$

Поэтому пространство Q есть гильбертово пространство с воспроизводящим ядром.

В пространстве Q очевидно полна система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$. Каждому линейному непрерывному функционалу над Q, порождаемому функцией $g\in Q$, поставим в соответствие функцию

$$\widetilde{g}(\omega)=(e_\omega(z),g(z))_Q.$$

Совокупность таких функций образует гильбертово пространство

$$\widetilde{Q}\overset{def}{=}\{\widetilde{g}:g\in Q\}$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{g},\widetilde{u})_{\widetilde{Q}}\overset{def}{=}(u,g)_Q,\ \|\widetilde{g}\|^2_{\widetilde{Q}}=(\widetilde{g},\widetilde{g})_{\widetilde{Q}}=\|g\|^2_Q,\quad g,u\in Q.\tag{7}$$

Покажем, что $\widetilde{Q}$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Действительно, возьмем произвольную точку $\omega_0\in\Omega$. Справедлива оценка

$$|\widetilde{g}(\omega_0)|=|(e_{\omega_0}(z),g(z))_Q|\le\|e_{\omega_0}(z)\|_Q\cdot\|g\|_Q=\|e_{\omega_0}(z)\|_Q\cdot\|\widetilde{g}\|_{\widetilde{Q}}.$$

Поэтому $\widetilde{Q}$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Поскольку для любого $z_0\in M$

$$e_\omega(z_0)=(e_\omega(z),K_Q(z,z_0))_Q,\tag{8}$$

то функция $e_\omega(z_0)$, $\omega\in\Omega$, а также любая конечная линейная комбинация элементов системы функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ от переменной $\omega\in\Omega$ принадлежат пространству $\widetilde{Q}$.

Лемма 1. *Пространство $R(\Omega,\mu)$ совпадает с пространством $\widetilde{Q}$ и представляет собой гильбертово пространство с воспроизводящим ядром.*

Доказательство. Система функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ принадлежит пространству $\widetilde{Q}$ и полна в нем. Эта же система функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ принадлежит пространству $R(\Omega,\mu)$ и полна в нем. Поэтому достаточно доказать, что в пространстве $\widetilde{Q}$ норма имеет интегральный вид:

$$\|f\|_{\widetilde{Q}}=\sqrt{\int_\Omega|f(\omega)|^2\,d\mu(\omega)},\quad f\in\widetilde{Q}.$$

В наших обозначениях

$$\widetilde{K_Q(\cdot,z)}(\omega)=(e_\omega(\eta),K(\eta,z))_Q=e_\omega(z),\quad z\in M.$$

Заметим, что для любой $g\in Q$

$$\begin{aligned}g(z)=(g(\eta),K_Q(\eta,z))_Q=(\widetilde{K_Q(\cdot,z)}(\omega),\widetilde{g}(\omega))_{\widetilde{Q}}=\\=(e_\omega(z),\widetilde{g}(\omega))_{\widetilde{Q}},\quad z\in M.\end{aligned}\tag{9}$$

Система воспроизводящих ядер $\{K_Q(z,w)\}_{w\in M}$ полна в пространстве Q (см. [3]). Любой элемент $f\in Q$ можно приблизить по норме пространства Q конечными линейными комбинациями элементов системы $\{K_Q(z,w)\}_{w\in M}$: существует последовательность функций

$$p_n(z)\overset{def}{=}\sum_{j=1}^{k_n}a_{j,n}K_Q(z,w_{j,n}),n=1,2,\ldots,\tag{10}$$

где $\{a_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}}$ – последовательность комплексных чисел, а $\{w_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}}$ – последовательность точек из M, обладающая свойством:

$$\|f(z)-p_n(z)\|_Q\to 0,\ n\to\infty. \tag{11}$$

Заметим, что в силу равенства (8), выполнено

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_n(\omega)=(e_\omega(z),p_n(z))_Q=\\ =\left(e_\omega(z),\sum_{j=1}^{k_n}a_{j,n}K_Q(z,w_{j,n})\right)_Q=\sum_{j=1}^{k_n}\overline{a_{j,n}}(e_\omega(z),K_Q(z,w_{j,n}))_Q=\\ =\sum_{j=1}^{k_n}\overline{a_{j,n}}e_\omega(w_{j,n}).\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, функция $\widetilde{p}_n(\omega)$, $n=1,2,\ldots$ представляет собой конечную линейную комбинацию элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$. Очевидное равенство

$$\|\widetilde{f}(\omega)-\widetilde{p}_n(\omega)\|_{\widetilde{Q}}=\|f(z)-p_n(z)\|_Q$$

показывает, что система $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ полна в пространстве $\widetilde{Q}$. Заметим, что из равенства (4) вытекает

$$\begin{aligned}K_Q(z,\xi_0)=\int_\Omega\overline{e_\omega(\xi_0)}e_\omega(z)\,d\mu(\omega)=\\ =\int_\Omega(K_Q(\tau,\xi_0),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega).\end{aligned} \tag{13}$$

Докажем по индукции, что для любой функции вида

$$r_n(z)\overset{def}{=}\sum_{j=1}^{n}a_jK_Q(z,\xi_j),\quad z\in M,\ \{\xi_j\}_{j=1}^n\in M$$

справедливо равенство

$$r_n(z)=\int_\Omega(r_n(\tau),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega). \tag{14}$$

Для $n=1$ это вытекает из (13) и линейности по первому аргументу скалярного произведения. Пусть равенство (14) справедливо для $n=n_0$. Покажем, что равенство (14) справедливо для $n=n_0+1$. Легко видеть, что

$$r_{n_0+1}(z)=r_{n_0}(z)+a_{n_0+1}K_Q(z,\xi_{n_0+1}).$$

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned}r_{n_0+1}(z)=r_{n_0}(z)+a_{n_0+1}K_Q(z,\xi_{n_0+1})=\\ =\int_\Omega(r_{n_0}(\tau),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega)+a_{n_0+1}\int_\Omega(K_Q(\tau,\xi_{n_0+1}),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega)=\\ =\int_\Omega(r_{n_0}(\tau),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega)+\int_\Omega(a_{n_0+1}K_Q(\tau,\xi_{n_0+1}),e_\omega(\tau))_He_\omega(z)\,d\mu(\omega)=\\ =\int_\Omega(r_{n_0}(\tau)+a_{n_0+1}K_Q(\tau,\xi_{n_0+1}),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega)=\\ =\int_\Omega(r_{n_0+1}(\tau),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega).\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, мы доказали, что равенство (14) справедливо, следовательно для любой функции $p_n(z)$ (см. (10)) справедливо представление:

$$p_n(z)=\int_\Omega(p_n(\tau),e_\omega(\tau))_Qe_\omega(z)\,d\mu(\omega). \tag{16}$$

Из равенства (15) следует, что для любого $\xi_0 \in M$ справедливо равенство

$$(p_n(\eta), K_Q(\eta, \xi_0))_Q = \int_\Omega (p_n(\tau), e_\omega(\tau))_Q (e_\omega(\eta), K_Q(\eta, \xi_0))_Q \, d\mu(\omega). \tag{17}$$

Так как функция $p_n(z)$ является конечной линейной комбинацией элементов системы $\{K_Q(z,\xi)\}_{\xi \in M}$, то из (17), используя линейность интеграла и скалярного произведения, нетрудно показать, что

$$\|p_n\|_Q^2 = (p_n(z), p_n(z))_Q = \int_\Omega (p_n(z), e_\omega(z))_Q (e_\omega(z), p_n(z))_Q \, d\mu(\omega). \tag{18}$$

Как было отмечено выше (см. (12)),

$$\widetilde{p}_n(\omega) = (e_\omega(z), p_n(z))_Q.$$

При этом $\|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}} = \|p_n\|_Q$. Поэтому из (18) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}}^2 = \|p_n\|_Q^2 = \int_\Omega (p_n(z), e_\omega(z))_Q (e_\omega(z), p_n(z))_Q \, d\mu(\omega) = \\ = \int_\Omega \widetilde{p}_n(\omega) \cdot \overline{\widetilde{p}_n(\omega)} \, d\mu(\omega) = \int_\Omega |\widetilde{p}_n(\omega)|^2 \, d\mu(\omega).\end{aligned} \tag{19}$$

Воспользуемся теоремой Фату (см., например, [6], стр. 305).

Теорема E. *Если последовательность измеримых неотрицательных функций* $\{y_n\}$ *сходится почти всюду на* Ω *к функции* y *и*

$$\int_\Omega y_n(\omega) \, d\mu(\omega) \le K,$$

где K *— некоторая постоянная, то* y *интегрируема на* Ω *и*

$$\int_\Omega y(\omega) \, d\mu(\omega) \le K.$$

Применим эту теорему. Положим $y_n(\omega) = |\widetilde{p}_n(\omega)|^2$. Последовательность функций $\{|\widetilde{p}_n(\omega)|^2\}_{n \ge 0}$ сходится поточечно всюду на Ω к функции $y(\omega) = |\widetilde{f}(\omega)|^2$. Действительно, последовательность функций $\{p_n\}_{n \ge 0}$ сходится по норме пространства Q к функции f (см. (11)), поэтому для любого $\omega_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned}||\widetilde{p}_n(\omega_0)| - |\widetilde{f}(\omega_0)|| \le |\widetilde{p}_n(\omega_0) - \widetilde{f}(\omega_0)| = |(e_{\omega_0}(z), p_n(z) - f(z))_Q| \le \\ \le \|e_{\omega_0}(z)\|_Q \cdot \|p_n(z) - f(z)\|_Q \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.\end{aligned} \tag{20}$$

Функция $u = x^2$, $x \ge 0$ непрерывна, поэтому из (20) вытекает, что

$$||\widetilde{p}_n(\omega_0)|^2 - |\widetilde{f}(\omega_0)|^2| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Так как

$$\|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}}^2 \to \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}^2, \, n \to \infty, \tag{21}$$

то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\int_\Omega |\widetilde{p}_n(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) = \|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}}^2 \le \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}^2 + \varepsilon, \, n = 1, 2, \ldots.$$

По теореме Фату функция $|\widetilde{f}(\omega)|^2$ интегрируема на Ω по мере μ и справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) \le \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}^2 + \varepsilon. \tag{22}$$

Рассмотрим последовательность $\{p_n\}_{n=N}^{\infty}$, где N — некоторое натуральное число. В силу (21), за счет увеличения N, число $\varepsilon > 0$ можно сделать сколь угодно малым. В неравенстве (22) левая часть не зависит от ε. Поэтому

$$\int_{\Omega} |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) \leq \|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{Q}}, \quad \widetilde{f} \in \widetilde{Q}. \tag{23}$$

Докажем, что

$$\int_{\Omega} |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) = \|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{Q}}, \quad \widetilde{f} \in \widetilde{Q}. \tag{24}$$

Рассмотрим две функции

$$u : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(\widetilde{f}) = \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}, \tag{25}$$

$$v : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\widetilde{f}) = \sqrt{\int_{\Omega} |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, d\mu(\omega)}. \tag{26}$$

В силу неравенства треугольника выполняется неравенство

$$u(\widetilde{f}) \leq u(\widetilde{f} - \widetilde{g}) + u(\widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{Q},$$

откуда следует, что

$$|u(\widetilde{f}) - u(\widetilde{g})| \leq u(\widetilde{f} - \widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in Q.$$

Поэтому функция $u : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. В силу неравенства (23) функция v определена на $\widetilde{Q}$. В силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$v(\widetilde{f}) \leq v(\widetilde{f} - \widetilde{g}) + v(\widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{Q},$$

поэтому, используя (23), получаем

$$|v(\widetilde{f}) - v(\widetilde{g})| \leq v(\widetilde{f} - \widetilde{g}) \leq u(\widetilde{f} - \widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{Q}.$$

Таким образом, функция $v : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Равенство (19) означает, что на всюду плотном подмножестве $\widetilde{Q}$ (линейной оболочке системы $\{e_\omega(z)\}_{z \in M}$) непрерывные функции u и v совпадают. Если последовательность $\{\widetilde{p}_n\}_{n \geq 0}$ конечных линейных комбинаций элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z \in M}$ приближает некоторый элемент $\widetilde{f} \in \widetilde{Q}$, то

$$u(\widetilde{p}_n) = v(\widetilde{p}_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, пользуясь непрерывностью функций u и v, мы получаем

$$u(\widetilde{f}) = v(\widetilde{f}), \quad \widetilde{f} \in \widetilde{Q}.$$

Таким образом, для любой $\widetilde{f} \in \widetilde{Q}$ выполнено равенство (24).

Как отмечалось выше, функции $\widetilde{p}_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ представляют собой конечные линейные комбинации элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z \in M}$. Теперь заметим, что пространство $\widetilde{Q}$ можно рассматривать как пополнение линейной оболочки системы $\{e_\omega(z)\}_{z \in M}$ относительно нормы $\| \cdot \|_{\widetilde{Q}}$. Как указано выше, пространство $R(\Omega, \mu)$ есть пополнение линейной оболочки системы $\{e_\omega(z)\}_{z \in M}$ относительно нормы

$$\|h\|_{R(\Omega,\mu)} \overset{def}{=} \sqrt{\int_{\Omega} |h(\omega)|^2 \, d\mu(\omega)}.$$

Поэтому пространства $\widetilde{Q}$ и $R(\Omega, \mu)$ совпадают. Следовательно, пространство $R(\Omega, \mu)$ есть пространство с воспроизводящим ядром. Лемма 1 доказана.

Справедлива теорема

Теорема 2. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на счетно-конечном пространстве Ω с счетно-аддитивной мерой μ. Норма в пространстве H имеет интегральный вид:*

$$\|f\|_H = \sqrt{\int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi)} \tag{27}$$

тогда и только тогда, когда система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2. Это означает, что любая функция $f \in H$ представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H K_H(z, \xi) \, d\mu(\xi).$$

Тогда справедлив аналог равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения (теорема 1 работы [1]), т.е. для любой $f \in H$ выполнено равенство:

$$\|f\|_H^2 = \int_\Omega |(f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H|^2 \, d\mu(\xi) = \int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi).$$

Значит выполнено равенство (27). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть норма в пространстве H имеет вид (27). Это значит, что

$$\|f\|_H^2 = \int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) = \int_\Omega |(f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H|^2 \, d\mu(\xi).$$

Таким образом, для системы функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t\in\Omega}$ выполнен аналог равенства Парсеваля ([1]). По теореме В (см. выше) система функций $\{K_H(\xi, t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2. Теорема 2 доказана.

Норма в пространстве $R(\Omega, \mu)$ имеет интегральный вид; поскольку $R(\Omega, \mu)$ есть гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, то в силу теоремы 2, система воспроизводящих ядер $\{K_R(\omega, t)\}_{t\in\Omega}$ пространства $R(\Omega, \mu)$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $R(\Omega, \mu)$ в смысле определения 2. Как мы уже доказали, отсюда следует, что система $\{K_R(\omega, t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 4.

Лемма 2. *Предположим, что имеется пространство Ω с некоторой счетно-конечной мерой μ. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H, состоящем из функций, определенных на пространстве Ω, система воспроизводящих ядер $\{K_H(z, \xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 4, т.е. любой элемент f из пространства H может быть представлен в виде:*

$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H K_H(z, \xi) \, d\mu(\xi), \quad z \in \Omega.$$

Тогда система $\{K_H(z, \xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2, т.е любой элемент f из пространства H представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), K_H(\tau, \xi))_H K_H(z, \xi) \, d\mu(\xi).$$

Доказательство. Система воспроизводящих ядер $\{K_H(z, \xi)\}_{\xi\in\Omega}$ полна в пространстве H(см. [3]). Как это было сделано при доказательстве леммы 1, можно показать, что если $\{p_n(z)\}_{n\geq 0}$ – последовательность конечных линейных комбинаций элементов системы

$\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$, приближающая некоторый элемент $f \in H$, то

$$\|p_n\|_H^2 = \int_\Omega (p_n(\tau), K_H(\tau,\xi))_H (K_H(\tau,\xi), p_n(\tau))_H \, d\mu(\xi) =$$

$$= \int_\Omega |p_n(\xi)|^2 \, d\mu(\xi), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Воспользуемся теоремой Фату (см. выше).

Положим $y_n(\xi) = |p_n(\xi)|^2$. Последовательность функций $\{|p_n(\xi)|^2\}_{n\geq 0}$ сходится поточечно всюду на Ω к функции $y(\xi) = |f(\xi)|^2$, причем

$$\int_\Omega |p_n(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) = \|p_n\|_H^2 \leq \|f\|_H^2 + \varepsilon, \, n = 1, 2, \ldots,$$

где ε — некоторое положительное число, не зависящее от n. По теореме Фату, функция $f(\xi)$ интегрируема на Ω по мере μ, и справедливо неравенство

$$\int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) \leq \|f\|_H^2 + \varepsilon. \tag{29}$$

Рассматривая последовательность $\{p_n\}_{n\geq N}$ при N достаточно большом, число ε можно сделать сколь угодно малым. В неравенстве (29) левая часть не зависит от ε. Поэтому

$$\int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) \leq \|f\|_H^2, \quad f \in H. \tag{30}$$

Докажем, что

$$\int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) = \|f\|_H^2, \quad f \in H. \tag{31}$$

Рассмотрим две функции

$$u : H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(f) = \|f\|_H, \tag{32}$$

$$v : H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(f) = \sqrt{\int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi)}. \tag{33}$$

В силу неравенства треугольника выполняется неравенство

$$u(f) \leq u(f-g) + u(g), \quad f, g \in H,$$

откуда следует, что

$$|u(f) - u(g)| \leq u(f-g), \quad f, g \in H.$$

Поэтому функция $u : H \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. В силу неравенства (30) функция v определена на H. В силу неравенства Коши– Буняковского–Шварца

$$v(f) \leq v(f-g) + v(g), \quad f, g \in H,$$

поэтому, используя (30),

$$|v(f) - v(g)| \leq v(f-g) \leq u(f-g), \quad f, g \in H.$$

Таким образом, функция $v : H \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Равенство (28) означает, что на всюду плотном подмножестве H (линейной оболочке системы $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$) непрерывные функции u и v совпадают. Если последовательность p_n конечных линейных комбинаций системы $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ приближает некоторый элемент $f \in H$, то

$$u(p_n) = v(p_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, пользуясь непрерывностью функций u и v, мы получаем

$$u(f) = v(f), \quad f \in H.$$

Таким образом, для любой $f \in H$ выполнено равенство (31). Равенство (31) означает, что выполнен аналог равенства Парсеваля для системы $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$:

$$\|f\|_H^2 = \int_\Omega |f(\xi)|^2\,d\mu(\xi) = \int_\Omega |(f(\tau),K_H(\tau,\xi))_H|^2\,d\mu(\xi),\ f \in H.$$

Так как мера μ счетно-конечна, то из последнего равенства по теореме В следует, что система воспроизводящих ядер ортоподобна в смысле определения 2, т.е. любой элемент представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau),K_H(\tau,\xi))_H K_H(z,\xi)\,d\mu(\xi).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим пространство

$$\overline{R(\Omega,\mu)} \overset{def}{=} \{\overline{h} :\ h \in R(\Omega,\mu),\ (\overline{h},\overline{r})_{\overline{R}} \overset{def}{=} (r,h)_R\}.$$

Любая функция $h \in R(\Omega,\mu)$ может быть представлена в виде:

$$h(\omega) = \int_\Omega^{(R)} (h(\tau),K_R(\tau,t))_H K_R(\omega,t)\,d\mu(t). \tag{34}$$

Отсюда вытекает, что

$$h(\omega) = \int_\Omega (h(\tau),K_R(\tau,t))_H K_R(\omega,t)\,d\mu(t), \quad \omega \in \Omega. \tag{35}$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор комплексного сопряжения. Получим

$$\begin{aligned}\overline{h(\omega)} &= \int_\Omega \overline{(h(\tau),K_R(\tau,t))_R K_R(\omega,t)}\,d\mu(t) = \\ &= \int_\Omega (\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}}\overline{K_R(\omega,t)}\,d\mu(t),\ \omega \in \Omega.\end{aligned} \tag{36}$$

В силу леммы 2

$$\overline{h(\omega)} = \int_\Omega^{(\overline{R})} (\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}}\overline{K_R(\omega,t)}\,d\mu(t). \tag{37}$$

Равенство (37) означает, что в пространстве $\overline{R(\Omega,\mu)}$ система функций $\{\overline{K_R(\omega,t)}\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2.

Оператор $\mathbb{T}$, действующий из пространства $\overline{R(\Omega,\mu)}$ в пространство $\widehat{R}(\Omega,\mu)$, по правилу

$$\mathbb{T} : \overline{h} \longrightarrow \widehat{h}(z) \overset{def}{=} \int_\Omega \overline{h(\omega)} \cdot e_\omega(z)\,d\mu(\omega),\ z \in M$$

является линейным и непрерывным оператором (см. выше определение пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$). К обеим частям равенства (37) применим оператор $\mathbb{T}$ и воспользуемся теоремой С. Получим

$$\begin{aligned}\widehat{h}(z) &= \mathbb{T}\int_\Omega^{(\overline{R})} (\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}}\overline{K_R(\omega,t)}\,d\mu(t) = \\ &= \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}}\mathbb{T}\,\overline{K_R(\omega,t)}\,d\mu(t) = \\ &= \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}}\widehat{K}_R(z,t)\,d\mu(t) = \\ &= \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \cdot e_t(z)\,d\mu(t).\end{aligned} \tag{38}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем фактом, что

$$\widehat{K}_R(z,t) = \int_\Omega \overline{K_R(\omega,t)} \cdot e_\omega(z)\, d\mu(\omega) = e_t(z),\ z \in M.$$

Заметим, что, как отмечалось выше (см. определение пространства $R(\Omega,\mu)$)

$$\begin{aligned}(\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} &= \overline{(h(\tau), K_R(\tau,t))_R} = \\ &= (K_R(\tau,t), h(\tau))_R = (\widehat{h}(z), e_t(z))_{\widehat{R}}.\end{aligned} \qquad (39)$$

Подставив соотношение (39) в равенство (38), получим

$$\widehat{h}(z) = \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\widehat{h}(z), e_t(z))_{\widehat{R}} \cdot e_t(z)\, d\mu(t). \qquad (40)$$

Последнее означает, что в пространстве $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2. Как отмечалось выше (см. определение пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$), пространство $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром.

Вычислим воспроизводящее ядро пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$.

Для этого в равенство (40) в качестве $\widehat{h}$ подставим элемент $K_{\widehat{R}}(z,\xi)$ при фиксированном $\xi \in M$. Отсюда, нетрудно показать, что воспроизводящее ядро пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ имеет вид:

$$K_{\widehat{R}}(z,\xi) = \int_\Omega e_\omega(z) \cdot \overline{e_\omega(\xi)}\, d\mu(\omega), \quad z,\xi \in M.$$

Но, с другой стороны, справедливо равенство (4):

$$K_H(z,\xi) = \int_\Omega e_t(z) \cdot \overline{e_t(\xi)}\, d\mu(t), \quad z,\xi \in M.$$

Отсюда, по теореме Мура-Ароншайна, пространство H совпадает с пространством $\widehat{R}(\Omega,\mu)$, т.е. эти пространства состоят из одних и тех же элементов, и выполняется равенство

$$(f,g)_H = (f,g)_{\widehat{R}}, \quad f,g \in H.$$

Таким образом, из условия 3 вытекает условие 4 теоремы 1.

Пусть выполнено условие 4 теоремы 1, т.е. пространство H совпадает с пространством $\widehat{R}(\Omega,\mu)$. По построению в пространстве $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ — ортоподобная система разложения в смысле определения 2. Это означает, что в пространстве H система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2, т.е. выполняется условие 1. Теорема 1 доказана.

2. Примеры

2.1. Весовое преобразование Гильберта в пространстве Бергмана. Пусть G — односвязная жорданова область в $\mathbb{C}$. В качестве системы $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ возьмем систему функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ определенных на множестве $M = \mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Здесь в качестве Ω берется область G; в области G имеется счетно конечная мера μ. Мера μ выбрана так, что пространство

$$B_2(G,\mu) \overset{def}{=} \{f \in H(G) : \|f\|_{B_2}^2 = \int_G |f(z)|^2\, d\mu(z) < \infty\},$$

состоящее из функций аналитических в области G, суммируемых с квадратом модуля по мере μ, является сепарабельным гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, в котором система функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ полна. Пространство $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ определяется как совокупность функций

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(\xi))_{B_2(G,\mu)}, \quad f\in B_2(G,\mu).$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \overset{def}{=} (g,f)_{B_2(G,\mu)}, \quad \widetilde{g},\widetilde{f}\in \widetilde{B}_2(G,\mu).$$

При этих условиях справедлива теорема 1.

В качестве пространства $R(\Omega,\mu)$ здесь выступает пространство $B_2(G,\mu)$. В качестве пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ берется пространство $\widetilde{B}_2(G,\mu)$. Ортоподобная система $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ и задача об описании сопряженного пространства к пространству $B_2(G,\mu)$ рассмотрены в работе [7].

2.2. Весовое преобразование Фурье – Лапласа в пространстве Бергмана. Пространством Ω здесь служит выпуклая область в комплексной плоскости G с некоторой мерой μ, удовлетворяющей условиям теоремы 1. В качестве системы $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ возьмем систему функций $\{e^{\xi z}\}_{\xi\in G}$, $M=\mathbb{C}$. В качестве пространства $R(\Omega,\mu)$ выступает пространство $B_2(G,\mu)$. В роли пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ выступает пространство $\widehat{B}_2(G,\mu)$, которое состоит из функций

$$\widehat{f}(z) = (e^{z\cdot\xi}, f(\xi))_{B_2} = \int_G \overline{f(\xi)}\cdot e^{z\cdot\xi}\, d\mu(\xi),\ z\in\mathbb{C}, \quad f\in B_2(G,\mu).$$

При этом

$$(\widehat{f},\widehat{h})_{\widehat{B}_2} \overset{def}{=} (h,f)_{B_2}, \quad \widehat{h},\widehat{f}\in \widehat{B}_2(G,\mu).$$

Тогда справедлива теорема 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашенко Т.П. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным* // Известия РАН, сер.матем. Т. 62, № 5. 1998. С. 187–206.
2. Лукашенко Т.П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сб. Т. 188, № 12. 1997. С. 57–72.
3. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the AMS V. 68. № 3. P. 337–404.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: ИЛ. 1962. 896 с.
5. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu *Theory of Bergman spaces.* Springer-Verlag. New York. Inc. 2000. 289 p.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. 1976. 543 с.
7. Напалков В.В. (мл.) *Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 1. 2011. С.31–42.

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `vnap@mail.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 105-115.

УДК 517.9

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.В. ПАНОВ

Аннотация. В работе осуществлена групповая классификация псевдопараболического уравнения в частных производных с двумя параметрами. Найдены группы преобразований эквивалентности, с их помощью проклассифицированы параметры системы. Найдены ядра основных групп симметрий уравнений. Для спецификаций параметров, расширяющих ядро групп преобразований, найдены основные группы симметрий. Полученные подмодели собраны в таблице в конце работы.

Ключевые слова: алгебра Ли, групповая классификация, программа ПОДМОДЕЛИ.

Mathematics Subject Classification: 35B06, 35K58, 35K70

1. Введение

Рассматривается полулинейное уравнение

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u) \tag{1.1}$$

псевдопараболического типа (терминологию см. в [1, стр. 186], [2, стр. 12, 573]), где α и $f = f(z)$ — постоянный и функциональный параметры, $u = u(t, x)$ — неизвестная функция. Данное уравнение при $f(z) = e^z$ или $f(z) = ze^{z^2}$ описывает физические явления в полупроводниках при учёте дебаевской экранировки и источников свободных зарядов [2]. В случае $f(z) = z^3$ уравнение описывает квазистационарные процессы в полупроводниках при наличии стационарного распределения источников тока свободных зарядов [2], а при $f(z) = z$ получается уравнение стратификации объёмного заряда в полупроводнике [2]. Теорией полупроводников не ограничивается область применения уравнений такого класса. Например, при $f(z) = z - az^3$ получается известное уравнение Хоффа, описывающее выпучивание двутавровой балки [3].

Следуя программе ПОДМОДЕЛИ [4], уравнение (1.1) с параметрами будем называть «большой моделью». Первым шагом программы ПОДМОДЕЛИ является групповая классификация. Задача групповой классификации состоит в вычислении преобразований, допускаемых уравнением при любом значении параметров – ядра основных групп симметрий [5, стр. 80], и нахождении таких спецификаций параметров, основные группы симметрий которых расширяют ядро.

В разделе 2 осуществляется поиск группы преобразований эквивалентности уравнения (1.1) с использованием подхода, предложенного в [6, 7]. В разделе 3 осуществляется поиск спецификаций и соответствующих им основных групп симметрий уравнения, расширяющих ядро основных групп преобразований. При этом вид спецификаций преобразованиями эквивалентности, найденными во втором разделе, приводится к наиболее простому.

A.V. Panov, Group classification of a class of semilinear pseudoparabolic equations.

Поступила 4 октября 2013 г.

В результате групповой классификации найдены ядра основных групп симметрий: для $\alpha \neq 0$ ядро состоит из сдвигов по независимым переменным, а для $\alpha = 0$ к сдвигам добавляется растяжение, порождаемое генератором $X_3 = x\partial_x - 2t\partial_t$. Найдены все спецификации параметров, приводящие к дополнительным симметриям уравнения. Все нелинейные спецификации, расширяющие ядро, находятся в классах эквивалентности функций e^u, u^β, u^{-3}, $e^u \pm 1$. Среди них при $\alpha \neq 0$ самой большой алгеброй симметрий обладает уравнение с функцией $f = u^{-3}$, его алгебра Ли является пятимерной. Полученные подмодели собраны в таблице в конце работы.

2. ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

При выполнении групповой классификации важно знать такие преобразования, которые изменяют параметры, содержащиеся в уравнении, сохраняя при этом дифференциальную структуру самого уравнения. Данные преобразования определяют отношение эквивалентности на множестве параметров уравнения. Группы симметрий двух дифференциальных уравнений, соответствующих двум разным, но эквивалентным параметрам, изоморфны.

Запишем исходное уравнение в виде

$$\alpha u_t - u_{txx} - f = 0, \tag{2.1}$$

подразумевая, что α, f — это дополнительные переменные, зависящие от независимых переменных t, x, u. Генераторы непрерывных групп преобразований эквивалентности будем искать в виде

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial f} + \nu\frac{\partial}{\partial \alpha},$$

где функции τ, ξ, η, μ, ν зависят от t, x, u, f, α (см. [6, 7, 8]). Дополним уравнение (2.1) уравнениями

$$f_t = 0, \quad f_x = 0, \tag{2.2}$$

$$\alpha_t = 0, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_u = 0, \tag{2.3}$$

означающими, что в исходной постановке задачи f зависит только от u, а α является постоянной величиной.

Будем рассматривать систему (2.1)–(2.3) как многообразие $\mathfrak{N}$ в расширенном пространстве соответствующих переменных. Для нахождения допускаемых групп многообразия $\mathfrak{N}$ воспользуемся инфинитезимальным критерием [5], подействовав продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}} + \mu^t\frac{\partial}{\partial f_t} + \mu^x\frac{\partial}{\partial f_x} + \mu^u\frac{\partial}{\partial f_u} + \nu^t\frac{\partial}{\partial \alpha_t} + \nu^x\frac{\partial}{\partial \alpha_x} + \nu^u\frac{\partial}{\partial \alpha_u}$$

на уравнения (2.1)–(2.3), сузим результат действия на многообразие $\mathfrak{N}$ и получим определяющие уравнения

$$\nu u_t + \alpha\varphi^t - \varphi^{txx} - \mu|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{2.4}$$

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \mu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \tag{2.5}$$

$$\nu^t|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \nu^x|_{\mathfrak{N}} = 0, \quad \nu^u|_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{2.6}$$

Коэффициенты оператора $\widetilde{Y}$ могут быть вычислены по формулам продолжения, использующим операторы дифференцирования

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + (f_t + f_u u_t)\frac{\partial}{\partial f} + (\alpha_t + \alpha_u u_t)\frac{\partial}{\partial \alpha} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + f_u u_x)\frac{\partial}{\partial f} + (\alpha_x + \alpha_u u_x)\frac{\partial}{\partial \alpha} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + f_t\frac{\partial}{\partial f} + \alpha_t\frac{\partial}{\partial \alpha} + \ldots, \ \widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + f_x\frac{\partial}{\partial f} + \alpha_x\frac{\partial}{\partial \alpha} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + f_u \frac{\partial}{\partial f} + \alpha_u \frac{\partial}{\partial \alpha} + \ldots$$

С учетом уравнений (2.2), (2.3), операторы примут вид

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + f_u u_t \frac{\partial}{\partial f} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + f_{uu} u_t \frac{\partial}{\partial f_u} + u_{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + u_{ttx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \ldots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + f_u u_x \frac{\partial}{\partial f} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + f_{uu} u_x \frac{\partial}{\partial f_u} + \ldots,$$

$$\widetilde{D}_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \widetilde{D}_x = \frac{\partial}{\partial x},\ \widetilde{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + f_u \frac{\partial}{\partial f} + \ldots$$

Согласно формулам продолжения

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi), \quad \varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),$$

$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \quad \varphi^{txx} = D_t(\varphi^{xx}) - u_{txx} D_t(\tau) - u_{xxx} D_t(\xi),$$

поэтому

$$\varphi^t = \eta_t + u_t \eta_u + u_t f_u \eta_f - u_t \tau_t - u_t^2 \tau_u - u_t^2 f_u \tau_f - u_x \xi_t - u_t u_x \xi_u - u_t u_x f_u \xi_f,$$

$$\varphi^x = \eta_x + u_x \eta_u + u_x f_u \eta_f - u_t \tau_x - u_t u_x \tau_u - u_t u_x f_u \tau_f - u_x \xi_x - u_x^2 \xi_u - u_x^2 f_u \xi_f.$$

Распишем сначала уравнения (2.5), (2.6), это сократит вычисление коэффициентов φ^{xx}, φ^{txx}. Получим

$$\mu^t|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_t(\mu) - f_t \widetilde{D}_t(\tau) - f_x \widetilde{D}_t(\xi) - f_u \widetilde{D}_t(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \mu_t - f_u \eta_t = 0,$$

$$\mu^x|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_x(\mu) - f_t \widetilde{D}_x(\tau) - f_x \widetilde{D}_x(\xi) - f_u \widetilde{D}_x(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \mu_x - f_u \eta_x = 0,$$

$$\nu^t|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_t(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_t(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_t(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_t(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \nu_t = 0,$$

$$\nu^x|_{\mathfrak{N}} = (\widetilde{D}_x(\nu) - \alpha_t \widetilde{D}_x(\tau) - \alpha_x \widetilde{D}_x(\xi) - \alpha_u \widetilde{D}_x(\eta))|_{\mathfrak{N}} = \nu_x = 0,$$

$$\nu^u|_{\mathfrak{N}} = \nu_u + f_u \nu_f = 0.$$

Из этих уравнений следует в силу произвольности f_u, что $\eta_t = \eta_x = 0$, $\mu_t = \mu_x = 0$, $\nu_t = \nu_x = \nu_u = \nu_f = 0$. Поэтому $\eta = \eta(u, \alpha, f), \mu = \mu(u, \alpha, f), \nu = \nu(\alpha)$.

Расщепим по дифференциальным переменным уравнение (2.4). При f_{uuu} стоит множитель $u_x^2 u_t \eta_f - u_t^2 u_x^2 \tau_f - u_x^3 u_t \xi_f$, приравняв его к нулю, получим равенства $\eta_f = \xi_f = \tau_f = 0$. Проделав аналогичные действия с множителем при f_{uu}, получим $\xi_{xu} = 0$. Продифференцируем по f уравнение (2.4) и, учитывая равенства $\nu_f = \xi_f = \tau_f = \eta_f = 0$, придем к уравнению $\eta_u - 2u_t \tau_u - 2\xi_x - 3u_x \xi_u - \tau_t - \mu_f = 0$. Тогда $\xi_u = \tau_u = 0$ и $\mu_f = \eta_u - 2\xi_x - \tau_t$. Продолжая приравнивать к нулю коэффициенты при различных дифференциальных переменных, получим равенства

$$u_{ttx} : \tau_x = 0,$$

$$u_{xxx} : \xi_t = 0,$$

$$u_{xx} : 2\xi_{xt} - u_t \eta_{uu} = 0.$$

Таким образом, $\tau = \tau(t, \alpha), \xi = \xi(x, \alpha), \eta_{uu} = 0, \eta = \eta(u, \alpha)$. Перепишем теперь уравнение (2.4):

$$\nu u_t + u_{tx} \xi_{xx} + f \eta_u + 2\alpha u_t \xi_x - 2f \xi_x - f \tau_t - \mu = 0.$$

Видно, что $\xi_{xx} = 0, \nu + 2\alpha \xi_x = 0, f \eta_u - 2f \xi_x - f \tau_t - \mu = 0$. Если последнее равенство продифференцировать по t и учесть, что $\mu_t = \xi_t = \eta_t = 0$, то получим $\tau_{tt} = 0$. Таким образом, решение системы определяющих уравнений образуют функции $\tau = c_1(\alpha) + c_2(\alpha)t$, $\xi = c_3(\alpha) + c_4(\alpha)x$, $\eta = c_5(\alpha) + c_6(\alpha)u$, $\mu = f(c_6(\alpha) - c_2(\alpha) - 2c_4(\alpha))$, $\nu = -2\alpha c_4(\alpha)$. Здесь $c_i(\alpha)$ — произвольные функции от α. Базисные операторы можно выбрать в таком виде

$$X_1 = c_1(\alpha)\partial_t,\ X_2 = c_3(\alpha)\partial_x,\ X_3 = c_5(\alpha)\partial_u,$$

$$X_4 = c_2(\alpha)t\partial_t - c_2(\alpha)f\partial_f,\ X_5 = c_6(\alpha)u\partial_u + c_6(\alpha)f\partial_f,$$

$$X_6 = c_4(\alpha)x\partial_x - 2c_4(\alpha)f\partial_f - 2c_4(\alpha)\alpha\partial_\alpha.$$

Оператором X_6, например, при $c_4 = 1$ можно перевести константу α в любую другую того же знака. Получаем 3 случая: $\alpha = 1$, $\alpha = -1$, $\alpha = 0$. После этого оператор X_6 не используем, чтобы α не менялось. Тогда остальные операторы преобразования эквивалентности образуют пятимерную алгебру Ли с базисом

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = \partial_u,\ X_4 = t\partial_t - f\partial_f,\ X_5 = u\partial_u + f\partial_f.$$

Рассмотрим действие проекций этих операторов на пространстве $\mathbb{R}^2(u,f)$. Оператор X_3 даёт сдвиг переменного u. Проекция $\mathrm{pr}_{(u,f)}\ (-X_4) = f\partial_f$, даёт растяжение по f. Растяжение по u получим как проекцию $\mathrm{pr}_{(u,f)}(X_4 + X_5) = u\partial_u$. Непосредственно из уравнения видны 2 дискретные симметрии $\bar{t} = -t, \bar{f} = -f$ и $\bar{u} = -u, \bar{f} = -f$, из которых получаются отражения по переменным u и f.

3. Спецификации параметров

Найдем спецификации параметров α, f, при которых появляются дополнительные симметрии уравнения

$$\alpha u_t - u_{txx} = f(u). \tag{3.1}$$

Генераторы непрерывных групп преобразований будем искать в виде

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

где функции τ, ξ, η, зависят от t, x, u.

Подействуем на функцию $F(t,x,u,u_t,u_{txx}) = \alpha u_t - u_{txx} - f(u)$, задающую систему (3.1) в виде $F = 0$, продолженным оператором

$$\widetilde{Y} = Y + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{txx}\frac{\partial}{\partial u_{txx}}.$$

По критерию инвариантности получим

$$(\alpha\varphi^t - \varphi^{txx} - f'(u)\eta)|_{F=0} = 0. \tag{3.2}$$

С помощью операторов полных производных

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \ldots,\ D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \ldots$$

согласно формулам продолжения

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_tD_t(\tau) - u_xD_t(\xi), \quad \varphi^x = D_x(\eta) - u_tD_x(\tau) - u_xD_x(\xi),$$
$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx}D_x(\tau) - u_{xx}D_x(\xi), \quad \varphi^{txx} = D_t(\varphi^{xx}) - u_{txx}D_t(\tau) - u_{xxx}D_t(\xi)$$

распишем уравнение (3.2). Приравняем коэффициенты при третьих производных к нулю:

$$u_{ttx} : \tau_x + u_x\tau_u = 0,$$
$$u_{xxx} : \xi_t + u_t\xi_u = 0.$$

Аналогичным образом получим уравнения для коэффициентов при вторых производных:

$$u_{tx} : -2\eta_{ux} + \xi_{xx} - 2u_x\eta_{uu} = 0,$$
$$u_{xx} : -\eta_{tu} - u_t\eta_{uu} = 0.$$

Тогда $\eta_{uu} = 0, \eta_{tu} = 0, \xi_{xx} = 2\eta_{xu}$. Оставшееся уравнение после расщепления по переменной u_t приводит к равенствам

$$-\eta_{xxu} + 2\alpha\xi_x = 0,$$
$$\alpha\eta_t - \eta_{txx} + f(u)\eta_u - 2f(u)\xi'(x) - f(u)\tau'(t) - f'(u)\eta = 0. \tag{3.3}$$

Отсюда легко получить следующие утверждения.

Теорема 1. (i) *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* $-u_{txx} = f(u)$ *состоит из операторов* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = 2t\partial_t - x\partial_x$.

(ii) *Базис ядра основных алгебр Ли уравнения* (3.1) *в случае* $\alpha \neq 0$ *состоит из операторов* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$.

Дальнейшее вычисление спецификаций разбивается на 3 случая: $\alpha = 0$, $\alpha > 0$, $\alpha < 0$. Результаты классификации выписаны в таблицу 1. Далее, номер спецификации указывает номера столбца и строки в таблице.

Первый случай $\alpha = 0$. Тогда, так как $\eta_{uu} = 0, \eta_{tu} = 0, \eta_{xxu} = 0$, то $\eta = (c_1x+c_2)u+b(t,x)$. Так как $\xi_{xx} = 2\eta_{xu}$, то $\xi = c_1x^2 + c_3x + c_4$. Подставив эти выражения в уравнение (3.3), получим

$$-b_{txx}(t,x) + f(u)(c_1x + c_2 - 4c_1x - 2c_3 - \tau'(t)) - f'(u)((c_1x + c_2)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.4}$$

Случай $f'(u) = 0$ разбивается на два.

1.1. Если $f = 0$, получим уравнение $b_{txx} = 0$, которое дает решение определяющей системы уравнений

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1x^2 + c_3x + c_4,\ \eta = (c_1x + c_2)u + c(t)x + d(t) + e(x).$$

Ему соответствует бесконечномерная алгебра Ли.

1.2. Если же $f = \mathrm{const} \neq 0$, растяжением по переменной f можно получить $f = 1$. Тогда решение имеет вид

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1x^2 + c_3x + c_4,$$
$$\eta = (c_1x + c_2)u + \left(\frac{c_2}{2} - c_3\right)x^2t - \frac{c_1}{2}x^3t - \tau(t)\frac{x^2}{2} + c(t)x + d(t) + e(x).$$

При $f'(u) \neq 0$ рассмотрим два различных случая.

1.3. Пусть $f''(u) = 0$, тогда $f = \sigma u+\delta$, $\sigma \neq 0$. Применяя сдвиг и растяжение по u, можно преобразовать спецификацию к виду $f = u$. Тогда уравнение (3.4) после расщепления по переменным x, u влечет равенства

$$c_1 = 0,\ \tau = -2c_3t + c_5,$$
$$b_{txx}(t,x) + b(t,x) = 0. \tag{3.5}$$

Итак, в данном случае коэффициенты генераторов группы симметрий имеют вид

$$\tau = -2c_3t + c_5,\ \xi = c_3x + c_4,\ \eta = c_2u + b(t,x),$$

где $b(t,x)$ — решение уравнения (3.5).

Пусть теперь $f''(u) \neq 0$. Тогда, продифференцировав по u уравнение (3.4), получим

$$f'(u)(4c_1x + 2c_3 + \tau'(t)) + f''(u)((c_1x + c_2)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.6}$$

Двойное дифференцирование по t, x последнего уравнения дает равенство $b_{tx}(t,x) = 0$, поэтому $b(t,x) = b_1(t)+b_2(x)$. Продифференцируем (3.6) один раз по t и x соответственно:

$$f'(u)\tau''(t) + f''(u)b_1'(t) = 0, \tag{3.7}$$
$$4c_1f'(u) + c_1uf''(u) + b_2'(x)f''(u) = 0. \tag{3.8}$$

Из уравнения (3.7) видно, что возможны два случая: $\tau = c_5t + c_6$, b_1 — константа; или $b_1'(t) \neq 0$, $\tau''(t) \neq 0$. Во втором случае, используя растяжение и, если надо, отражение по u, получим уравнение

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{\tau''(t)}{b_1'(t)} = 1.$$

Отсюда $b_1(t) = -\tau'(t)+c_7$, $f = \sigma e^u+\omega$ или $f = e^u+\omega$ после растяжения по f. Из уравнения (3.8) теперь видно, что $c_1 = 0$ и $b_2(x) = c_8$ — константа. Переобозначим $c_7 + c_8$ на c_7 и подставим найденное в (3.4):

$$(e^u + \omega)(c_2 - 2c_3 - \tau'(t)) - e^u(c_2u - \tau'(t) + c_7) = 0.$$

Случай $\omega \neq 0$ не даёт расширения ядра алгебр. Если же $\omega = 0$, то

$$\tau = \tau(t),\ \tau''(t) \neq 0,\ \xi = c_3x + c_4,\ \eta = -(\tau'(t) + 2c_3).$$

Вернемся к случаю, когда $\tau = c_5t + c_6$, $b = b_1 + b_2(x)$. Рассмотрим уравнение (3.8). Пусть $c_1 = 0$, тогда $b_2'(x) = 0$ и уравнение (3.4) примет вид

$$f(u)(c_2 - 2c_3 - c_5) - f'(u)(c_2u + b) = 0, \tag{3.9}$$

где b — константа. Здесь также возможны два случая.

1.4. Пусть $c_2 = 0$, тогда условие $b \neq 0$ необходимо для расширения ядра алгебр Ли. Растяжением и отражением по u уравнение (3.9) можно привести к виду $f'(u) = f(u)$. Решением уравнения в этом случае будет $f = \sigma e^u$, после растяжения по f получим $f = e^u$. Подставляя это значение f в (3.4), найдем решение

$$\tau = c_5t + c_6,\ \xi = c_3x + c_4,\ \eta = -(2c_3 + c_5).$$

Объединяя его с ранее найденным для функции $f = e^u$, получим

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_3x + c_4,\ \eta = -(\tau'(t) + 2c_3).$$

1.5. Если $c_2 \neq 0$, то сдвигом по u можно занулить b и получить уравнение $uf'(u) = \beta f(u)$, где $\beta = \frac{c_2 - 2c_3 - c_5}{c_2}$. Нелинейным решением при $2c_3 + c_5 \neq 0$, $2c_3 + c_5 \neq c_2$ будет $f = \sigma u^\beta$ или $f = u^\beta$ после растяжения по f. При этом исключаются из рассмотрения линейные случаи $\beta = 0$, $\beta = 1$. Подставив в (3.4), получим $b = 0$ и решение для этой спецификации

$$\tau = ((1 - \beta)c_2 - 2c_3)t + c_6,\ \xi = c_3x + c_4,\ \eta = c_2u.$$

Остался случай $c_1 \neq 0$. Уравнение (3.8) можно представить в виде

$$\frac{4f'(u) + uf''(u)}{f''(u)} = \frac{-b'(x)}{c_1}.$$

Слева от знака равенства стоит функция от u, справа — от x. Значит, эти функции постоянны. Пусть $\dfrac{-b'(x)}{c_1} = c_7$, тогда $b = -c_1c_7x + c_8$. После сдвига по u на c_7 осталось уравнение

$$4f'(u) + f''(u)u = 0.$$

Его решение $f = \sigma u^{-3} + \delta$ или после растяжения $f = u^{-3} + \delta$. Подставим такие функции f, b в (3.4) и домножим на u^4. Получим уравнение

$$u(c_2 - 2c_3 - \tau'(t)) + 3(c_2u - c_1c_7x + c_8) + \delta u^4(c_2 - 3c_1x - 2c_3 - \tau'(t)) = 0.$$

Случай $\delta \neq 0$ не дает расширения ядра алгебр. Рассмотрим случай $\delta = 0$. Тогда, расщепляя последнее уравнение по x, u, получим

$$4c_2 - 2c_3 - \tau'(t) = 0,\ c_7 = c_8 = 0.$$

Отсюда видно, что $\tau = (4c_2 - 2c_3)t + c_6$, $b = 0$, тогда $\eta = (c_1x + c_2)u$.

1.6. Итак, для функции $f = u^{-3}$ получено решение

$$\tau = (4c_2 - 2c_3)t + c_6,\ \xi = c_1x^2 + c_3x + c_4,\ \eta = (c_1x + c_2)u.$$

Этот случай расширяет алгебру, полученную для произвольной степенной функции.

Таким образом, случай $\alpha = 0$ полностью рассмотрен.

При $\alpha > 0$ любое уравнение можно привести к эквивалентному уравнению с $\alpha = 1$, а при $\alpha < 0$ — к уравнению с $\alpha = -1$.

Возвратимся к уравнению (3.3) определяющей системы, считая, что $\alpha = 1$. Тогда, используя равенство $\xi_{xx} = 2\eta_{xu}$, получим

$$\eta_{xxu} = \frac{\xi_{xxx}}{2},\ -\xi_{xxx} + 4\xi_x = 0.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,$$

тогда

$$\eta = (c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b(t, x).$$

Подстановкой в уравнение (3.3) получим

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + f(u)(c_4 - 3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} - \tau'(t)) -$$
$$-f'(u)((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b(t,x)) = 0. \qquad (3.10)$$

2.1. Случай $f = 0$ дает уравнение $b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) = 0$, откуда $b = \sigma(t)e^x + \delta(t)e^{-x} + \gamma(x)$. Таким образом,

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,$$
$$\eta = (c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + \sigma(t)e^x + \delta(t)e^{-x} + \gamma(x).$$

2.2. При $f = 1$ имеем уравнение

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) = 3c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-2x} - c_4 + \tau'(t).$$

Это уравнение интегрируется сначала для функции b_t, потом интегрируется по t. Общее решение имеет вид

$$b = d_1(t)e^x + d_2(t)e^{-x} + (-c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - c_4)t + \tau(t) + d_3(x).$$
$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,$$
$$\eta = (c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)(u - t) + d_1(t)e^x + d_2(t)e^{-x} + \tau(t) + d_3(x).$$

2.3. Пусть $f = u$, тогда после подстановки в (3.10) получим

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + u(-4c_1 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} - \tau'(t)) - b(t,x) = 0,$$

поэтому $4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-2x} + \tau'(t) = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\tau = c_5$. Получили коэффициенты генераторов

$$\tau = c_5,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u + b(t,x),$$

где b — решение уравнения

$$b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) - b(t,x) = 0. \qquad (3.11)$$

Пусть теперь f — нелинейная функция. Продифференцируем по u уравнение (3.10)

$$f'(u)(4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{-2x} + \tau'(t)) + f''(u)((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b(t,x)) = 0, \qquad (3.12)$$

Дифференцированием по t уравнения (3.12) получим

$$f'(u)\tau''(t) + f''(u)b_t(t,x) = 0. \qquad (3.13)$$

Если $b_t = 0$, то $\tau = c_5 t + c_6$. Рассмотрим еще одно дифференциальное следствие уравнения (3.12), продифференцировав его по x:

$$(8f'(u) + 2uf''(u))(c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}) + f''(u)b'(x) = 0. \qquad (3.14)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то b — константа. Подставив найденное в (3.10), получим

$$f(u)(c_4 - c_5) - f'(u)(c_4 u + b) = 0.$$

При $c_4 = c_5 = 0$ получим $b = 0$ и отсутствие дополнительных к ядру симметрий.

2.4. Если $c_4 = 0$, то, применив растяжение по u, получим уравнение $f'(u) = f(u)$ с решением $f = e^u$ (после растяжения по f). Коэффициенты генератора принимают вид

$$\tau = c_5 t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = -c_5.$$

2.5. Если $c_4 \neq 0$, то сдвигом по u можно обнулить b. Решением оставшегося уравнения после растяжения по f будет функция $f = u^\beta$, где $\beta = \frac{c_4 - c_5}{c_4}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. И коэффициенты оператора симметрий примут вид

$$\tau = (1-\beta)c_4 t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u.$$

Второй случай $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (3.14) примет вид

$$-\frac{8f'(u) + 2uf''(u)}{f''(u)} = \frac{b'(x)}{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}} = \gamma,\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0,\ \gamma = \mathrm{const}.$$

На функцию f после сдвига по u останется уравнение $4f'(u) + uf''(u) = 0$.

2.6. Отсюда видно, что $f = u^{-3} + \delta$. Подставим эту функцию в (3.10)

$$(u^{-3} + \delta)(-3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} + c_4 - c_5) + 3u^{-4}((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u + b) = 0$$

или

$$u^{-3}(4c_4 - c_5) + \delta(-3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} + c_4 - c_5) + 3bu^{-4} = 0.$$

Случай $\delta \neq 0$ не даст дополнительных симметрий. Пусть $\delta = 0$. Тогда $b = 0$, $c_5 = 4c_4$. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\tau = 4c_4 t + c_6,\ \xi = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3,\ \eta = \left(c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4\right) u.$$

Пусть теперь $b_t \neq 0$, тогда уравнение (3.13) можно преобразовать к виду

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{\tau''(t)}{b_t(t,x)} = \gamma = \mathrm{const} \neq 0.$$

Можно добиться $\gamma = 1$ растяжением по u. Тогда $b(t,x) = -\tau'(t) + \psi(x)$, $f = \sigma e^u + \delta$. Используя сдвиг по u и растяжение по f, можно получить $f = e^u + \delta$, где $\delta = 0$ или $\delta = \pm 1$. Подставим эти функции в (3.10) и получим уравнение

$$-\tau''(t) + (e^u + \delta)(-3c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{-2x} + c_4 - \tau'(t)) -$$
$$-e^u((c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_4)u - \tau'(t) + \psi(x)) = 0.$$

Отсюда $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $\psi(x) = 0$, $\tau''(t) + \delta\tau'(t) = 0$. Случай $\delta = 0$ приводит к тому же решению, что было получено в п. 2.4.

2.7. Пусть $\delta \neq 0$, тогда $\tau = c_5 e^{-\delta t} + c_6$, $b = c_5 \delta e^{-\delta t}$. Коэффициенты оператора для случая $f = e^u + \delta$, $\delta \neq 0$, примут вид

$$\tau = c_5 e^{-\delta t} + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = c_5 \delta e^{-\delta t}.$$

Остался случай $\alpha = -1$. Рассуждая, как при $\alpha = 1$, получим уравнение на ξ

$$\xi_{xxx} + 4\xi_x = 0.$$

Его решение $\xi = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3$, тогда $\eta_{xu} = \frac{1}{2}\xi_{xx} = -2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$. Отсюда $\eta_u = -c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4$, так как $\eta_{uu} = \eta_{tu} = 0$. Поэтому $\eta = (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u + b(t,x)$. Рассуждая так же, как в случае $\alpha = 1$, можно получить аналогичные спецификации с группами симметрий, приведенными в таблице.

Подстановкой найденного в уравнение (3.3) получим

$$-b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + f(u)(3c_1 \sin 2x - 3c_2 \cos 2x + c_4 - \tau'(t)) -$$
$$-f'(u)((-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.15}$$

3.1. При $f = 0$ уравнение (3.15) имеет вид $b_t(t,x) + b_{txx}(t,x) = 0$, тогда $b = c_5(t)\sin x + c_6(t)\cos x + c_7(x)$. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3,$$
$$\eta = (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u + c_5(t)\sin x + c_6(t)\cos x + c_7(x).$$

3.2. Пусть $f = 1$, получим уравнение

$$b_t(t,x) + b_{txx}(t,x) = 3c_1 \sin 2x - 3c_2 \cos 2x + c_4 - \tau'(t)).$$

Общее решение этого уравнения

$$b(t,x) = d(t)\sin x + e(t)\cos x + (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)t - \tau(t) + h(x).$$

Коэффициенты генераторов примут вид

$$\tau = \tau(t),\ \xi = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3,$$

$$\eta = (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)(u + t) + d(t)\sin x + e(t)\cos x - \tau(t) + h(x).$$

3.3. Пусть $f = u$. Подставив эту функцию в (3.15), получим

$$-b_t(t,x) - b_{txx}(t,x) + u(4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x - \tau'(t)) - b(t,x) = 0.$$

Следовательно, $c_1 = c_2 = 0$, $\tau = c_5$. Коэффициенты генераторов имеют вид

$$\tau = c_5,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u + b(t,x),$$

где b — решение уравнения

$$b_t(t,x) + b_{txx}(t,x) + b(t,x) = 0. \tag{3.16}$$

Рассмотрим случай нелинейной функции f. Дифференцируя (3.15) по u, получим

$$f'(u)(4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x - \tau'(t))-$$

$$-f''(u)((c_4 - c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x)u + b(t,x)) = 0. \tag{3.17}$$

Продифференцировав (3.17) по t, получим

$$f'(u)\tau''(t) + f''(u)b_t(t,x) = 0. \tag{3.18}$$

Если $b_t = 0$, то $\tau = c_5 t + c_6$. Если же уравнение (3.17) продифференцировать по x, то получится дифференциальное следствие

$$(8f'(u) + 2uf''(u))(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) - f''(u)b'(x) = 0. \tag{3.19}$$

Пусть $c_1 = c_2 = 0$, тогда b — константа, и уравнение (3.15) запишется в виде

$$f(u)(c_4 - c_5) - f'(u)(c_4 u + b) = 0.$$

3.4. Если $c_4 = 0$, то, используя растяжение по u и по f, получим решение $f = e^u$. Тогда $b = -c_5$ и решение определяющей системы уравнений имеет вид

$$\tau = c_5 t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = -c_5.$$

3.5. В случае $c_4 \neq 0$, рассуждая так же, как и для $\alpha = 1$, получим спецификацию $f = u^\beta$, где $\beta = \frac{c_4 - c_5}{c_4}$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. Коэффициенты генератора группы симметрий примут вид

$$\tau = c_4(1 - \beta)t + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = c_4 u.$$

Пусть теперь $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Тогда уравнение (3.19) можно записать в виде

$$\frac{8f'(u) + 2uf''(u)}{f''(u)} = \frac{b'(x)}{c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x} = \gamma = \mathrm{const}.$$

После сдвига по u для функции f получаем уравнение $4f'u + uf''(u) = 0$.

3.6. Из последнего уравнения получим $f = u^{-3} + \delta$. Подставим такую функцию в (3.15) и получим

$$u^{-3}(4c_4 - c_5) + \delta(3c_1 \sin 2x - 3c_2 \cos 2x + c_4 - c_5) + 3b(x)u^{-4} = 0.$$

Случай $\delta \neq 0$ не даст дополнительных симметрий. Пусть $\delta = 0$. Тогда $b = 0, c_5 = 4c_4$. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$\tau = 4c_4 t + c_6,\ \xi = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3,\ \eta = (-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)\, u.$$

Пусть теперь $b_t \neq 0$, тогда уравнение (3.18) можно преобразовать к виду

$$\frac{f''(u)}{f'(u)} = -\frac{\tau''(t)}{b_t(t,x)} = \gamma = \mathrm{const} \neq 0.$$

Можно получить $\gamma = 1$, используя растяжение по u. Тогда $b(t,x) = -\tau'(t)+\psi(x)$, $f = e^u+\delta$, $\delta = 0$ или $\delta = \pm 1$. Подставим эту функцию в (3.15):

$$\tau''(t) + (e^u + \delta)(3c_1 \sin 2x - 3c_2 \cos 2x + c_4 - \tau'(t)) -$$

$$-e^u((-c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_4)u - \tau'(t) + \psi(x)) = 0.$$

Отсюда следует, что $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $\psi(x) = 0$, $\tau''(t) - \delta\tau'(t) = 0$. Случай $\delta = 0$ рассмотрен выше.

3.7. Пусть $\delta \neq 0$, тогда последнее уравнение имеет решение $\tau = c_5 e^{\delta t} + c_6$, отсюда $b = -c_5 \delta e^{\delta t}$. Коэффициенты оператора примут вид

$$\tau = c_5 e^{\delta t} + c_6,\ \xi = c_3,\ \eta = -c_5 \delta e^{\delta t},$$

где $f = e^u + \delta$, $\delta = \pm 1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты групповой классификации можно выписать в следующую таблицу. Функция $b_{(i.j)}(t,x)$ является решением уравнения с номером $(i.j)$. Все остальные функции считаются произвольными.

Таблица 1

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = -1$
$f = 0$	$\tau(t)\partial_t,\ \partial_x,\ x\partial_x,\ u\partial_u,\ x^2\partial_x + xu\partial_u,\ d(t)\partial_u,\ e(x)\partial_u,\ c(t)x\partial_u$	$\tau(t)\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ e^{2x}(\partial_x + u\partial_u),\ e^{-2x}(\partial_x - u\partial_u),\ \gamma(x)\partial_u,\ \sigma(t)e^x\partial_u,\ \delta(t)e^{-x}\partial_u$	$\tau(t)\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ \cos 2x\partial_x - u\sin 2x\partial_u,\ \sin 2x\partial_x + u\cos 2x\partial_u,\ c_5(t)\sin x\partial_u,\ c_6(t)\cos x\partial_u,\ c_7(x)\partial_u$
$f = 1$	$2\tau(t)\partial_t - \tau(t)x^2\partial_u,\ \partial_x,\ x\partial_x - tx^2\partial_u,\ 2x^2\partial_x + (2xu - tx^3)\partial_u,\ (2u + tx^2)\partial_u,\ d(t)\partial_u,\ e(x)\partial_u,\ c(t)x\partial_u$	$\tau(t)(\partial_t + \partial_u),\ \partial_x,\ e^{2x}(\partial_x + (u-t)\partial_u),\ e^{-2x}(\partial_x - (u-t)\partial_u),\ e^x d_1(t)\partial_u,\ e^{-x}d_2(t)\partial_u,\ d_3(x)\partial_u$	$\tau(t)(\partial_t - \partial_u),\ \partial_x,\ \cos 2x\partial_x - (u + +t)\sin 2x\partial_u,\ \sin 2x\partial_x + (u + +t)\cos 2x\partial_u,\ d(t)\sin x\partial_u,\ e(t)\cos x\partial_u,\ h(x)\partial_u$
$f = u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ 2t\partial_t - x\partial_x,\ b_{(3.5)}(t,x)\partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ b_{(3.11)}(t,x)\partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ b_{(3.16)}(t,x)\partial_u$
$f = e^u$	$\tau(t)\partial_t - \tau'(t)\partial_u,\ \partial_x,\ x\partial_x - 2\partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t - \partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t - \partial_u$
$f = u^\beta$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t - x\partial_x,\ (1-\beta)t\partial_t + u\partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ (1-\beta)t\partial_t + u\partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ (1-\beta)t\partial_t + u\partial_u$
$f = u^{-3}$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t - x\partial_x,\ 4t\partial_t + u\partial_u,\ x^2\partial_x + xu\partial_u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 4t\partial_t + u\partial_u,\ e^{2x}(\partial_x + u\partial_u),\ e^{-2x}(\partial_x - u\partial_u)$	$\partial_t,\ \partial_x,\ 4t\partial_t + u\partial_u,\ \cos 2x\partial_x - u\sin 2x\partial_u,\ \sin 2x\partial_x + u\cos 2x\partial_u$
$f = e^u + \delta$, $\delta = \pm 1$		$\partial_t,\ \partial_x,\ e^{-\delta t}(\partial_t + \delta\partial_u)$	$\partial_t,\ \partial_x,\ e^{\delta t}(\partial_t - \delta\partial_u)$

Результаты проведенной работы будут использованы для поиска инвариантных и частично инвариантных решений уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978. 336 с.
2. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.* М.: Физматлит, 2007. 736 с.
3. N.J. Hoff *Creep buckling* // Aeron. Quarterly. 1956. Vol. 7, № 1. P. 1–20.
4. Овсянников Л.В. *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 29–55.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978. 400 с.
6. Мелешко С.В. *Групповая классификация уравнений двумерных движений газа* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 56–62.
7. Хабиров С.В. *Групповая классификация систем Гамильтона* // Динамика сплошной среды. Новосибирск. 1980. Вып. 44. С. 139–146.
8. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды.* Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2012. 659 с.

Александр Васильевич Панов,
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: `gjd@bk.ru`

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 116-129.

УДК 517.927

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ УЗЛОВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.Ю. ТРЫНИН

Аннотация. В работе предложено решение некоторой обратной задачи Штурма-Лиувилля, позволяющее определять потенциал и краевые условия дифференциального оператора по значениям дифференциалов Гато одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0, \pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ при приращении w из множества $\mathbb{W}$. В качестве $\mathbb{W}$ рассмотрены некоторые множества классических и обобщённых функций.

Ключевые слова: собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, узловые точки задачи Штурма-Лиувилля, дифференциал Гато, обратная задача Штурма-Лиувилля, обратная узловая задача, узловые точки.

Mathematics Subject Classification: 34A55

1. Введение

Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля с негладкими потенциалами являются предметом исследований ведущих научных школ спектральной теории дифференциальных операторов уже довольно длительный промежуток времени. Круг этих задач на данный момент достаточно полно изучен. Не претендуя на полноту обзора публикаций по данной тематике, приведём ряд известных работ этого научного направления, опубликованных относительно недавно.

В [1] для фиксированного суммируемого потенциала получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений классической задачи Штурма-Лиувилля с помощью современной трактовки метода Лиувилля-Стеклова.

Работы [2], [3] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщённой функцией первого порядка, $q(x) = u'(x)$, где $u \in L_2[0, \pi]$.

К исследованиям, в которых оценки изучаемых параметров операторов Штурма-Лиувилля равномерны по потенциалу q в шаре пространства Соболева, следует отнести работы [4], [5].

Статья [6] посвящена доказательству того факта, что система собственных и присоединённых функций оператора Штурма-Лиувилля с суммируемым с квадратом потенциалом и периодическими или антипериодическими краевыми условиями образует базис Рисса.

В [7] рассматривается класс дискретных операторов Штурма-Лиувилля, для которых в существенной части носителя меры имеется конечное число лакун.

Исследованию свойств спектров различных видов периодических самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка на оси, имеющих важные приложения, посвящена серия интересных публикаций [8], [9], [10]. В этих работах построены также асимптотические разложения для собственных значений и соответствующих собственных функций возмущённых операторов.

A.Yu. Trynin, On inverse nodal problem for Sturm-Liouville operator.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Поступила 15 апреля 2013 г.

В фундаментальных работах [11], [12], [13] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети или графах.

В [14] получены некоторые асимптотические формулы для значений дифференциальных операторов, ассоциированных с задачей Коши, с дифференциальным выражением в виде линейного уравнения второго порядка $y'' + [\lambda - q_\lambda(x)]y = 0$, где потенциал q_λ может меняться в зависимости от λ, т.е. является функцией двух переменных x и λ. Характер зависимости потенциала от λ обусловлен лишь тем, что при каждом λ функция q_λ принадлежит шару с центром в нулевом элементе и радиусом, растущим медленнее $\sqrt{\lambda}$, в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле. В [14] приводится также асимптотика узловых точек рассматриваемых дифференциальных операторов, правда, при условии, что функция q_λ принадлежит шару с центром в нулевом элементе и радиусом, растущим медленнее $\sqrt{\lambda}/\ln\lambda$. В работе [15] построен пример потенциала, показывающий, что, если отказаться от ограниченности изменения q, то полученный порядок аппроксимации аситптотики не может быть достигнут, не только на классе функций q из $C[0,\pi]$, например в шарах, но даже для конкретного представителя пространства непрерывных потенциалов.

Начиная с широко известных классических работ [16] – [24] и по сей день (смотрите, например, статьи [4], [25]), обратным задачам Штурма-Лиувилля, т.е. задачам построения оператора Штурма-Лиувилля по тем или иным исходным данным, посвящено большое количество интересных исследований. В [16] установлена эквивалентность представления собственных значений в виде $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ равенству нулю непрерывного потенциала задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Неймана.

Работа [17] содержит исследование обратной задачи Штурма-Лиувилля восстановления параметров задачи по спектрам. Показано, что в общем случае по одному спектру $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператор Штурма-Лиувилля восстановить нельзя, а знание двух спектров задач с одним потенциалом и различными краевыми условиями достаточно для определения как потенциала, так и граничных условий обеих задач.

Автор [18] доказал, что в случае неотрицательности всех собственных значений фаза рассеяния, заданная для всех положительных энергий и любого фиксированного углового момента, определяет потенциал однозначно.

В [21] приводятся методы восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции. Эта задача сводится к некоторому линейному интегральному уравнению. Выясняется также, какие монотонные функции могут служить спектральными функциями дифференциального уравнения второго порядка.

В работе [22] показано, что по спектральной функции оператора Штурма-Лиувилля можно однозначно его восстановить.

В интересных статьях [4], [25] получена точная и равномерная асимптотика спектральных данных для задач Штурма-Лиувилля в предположении, что потенциал изменяется в шаре фиксированного радиуса в пространстве Соболева $W_2^{\alpha}[0,1]$ при некотором $\alpha > -1$. Эти исследования позволяют гарантировать равномерную устойчивость при восстановлении потенциала по спектральным данным.

Актуальная задача восстановления плотности струны по оператору реакции, отображающему граничное управление в величину силы, приложенной к концу струны, рассматривается в работе [26].

Начиная с пионерской работы [27], в статьях [28], [29], [30], [31], [32] приведены теоремы единственности решения обратных узловых задач для различных дифференциальных операторов второго порядка.

Достаточно полный обзор результатов, полученных в области изучения обратных задач Штурма-Лиувилля, можно найти в известных монографиях [33], [34], [35].

Пусть $q \in L[0,\pi]$, и $\lambda_n = \lambda_n[q]$ — n-е собственное значение регулярной задачи Штурма-Лиувилля (определение смотрите в [35])

$$\begin{cases} \hat{y}'' + [\lambda - q]\hat{y} = 0, \\ \sin\alpha \hat{y}'(0) + \cos\alpha \hat{y}(0) = 0, \\ \sin\beta \hat{y}'(\pi) + \cos\beta \hat{y}(\pi) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}$, а $\hat{y}(x,q,\lambda_n) \equiv \hat{y}_n(x)$ есть соответствующая ему ортонормированная собственная функция этой задачи $\|\hat{y}(\cdot,q,\lambda_n)\|_{L_2[0,\pi]} = 1$. Будем нумеровать нули функции $\hat{y}_n$, таким образом $0 \le x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n} \le \pi$. Зафиксируем некоторые $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $x_{k,n}[q]$ функционал, ставящий в соответствие потенциалу q $k+1$-й слева нуль n-й собственной функции $\hat{y}(x,q,\lambda_n[q])$. Договоримся обозначать через

$$D\phi[q,w] = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(q+tw) - \phi(q)}{t}$$

дифференциал Гато функционала $\phi : L[0,\pi] \to \mathbb{R}$ при приращении $w \in L[0,\pi]$.

В случае граничных условий первого рода в [27] получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек задачи Штурма-Лиувилля, правда, содержащие производные собственных функций как по переменной x, так и по спектральному параметру.

Теорема 1 ([27]). *Пусть q, $w \in L_2[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$ при $\alpha = \beta = 0$ в (1)) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\big[y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2} \int_0^{x_{k,n}} w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau$$
$$-\frac{\dot{y}(x_{k,n},q,\lambda_n)}{\dot{y}(\pi,q,\lambda_n) y'(x_{k,n},q,\lambda_n) y'(\pi,q,\lambda_n)} \int_0^{\pi} w(\tau) y^2(\tau,q,\lambda_n)\,d\tau,$$

где

$$y'(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} y(x,q,\lambda), \quad \dot{y}(x,q,\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} y(x,q,\lambda).$$

Это соотношение использовалось автором для исследования свойств обратной узловой задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом из пространства $L_2[0,\pi]$. В [27] установлена теорема единственности восстановления потенциала по произвольному плотному в отрезке $[0,\pi]$ множеству нулей собственных функций.

В работе [36] приведены дифференциальные соотношения, аналогичные соотношениям, установленным в статье [27], в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма-Лиувилля с суммируемым потенциалом и краевыми условиями третьего рода, из которых обязательно следовало удалять условия первого рода ($\alpha \ne \pi l$ и $\beta \ne \pi m$, $l, m \in \mathbb{Z}$). С их помощью, в частности, удалось показать отсутствие устойчивости задачи представления непрерывной на отрезке $[0,\pi]$ функции с помощью интерполяционных процессов Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

В работе [37] получены некоторые дифференциальные соотношения в терминах дифференциалов Гато для узловых точек регулярной задачи Штурма-Лиувилля с произвольными краевыми условиями третьего рода.

Теорема 2 ([37]). *Пусть q, $w \in L[0,\pi]$, тогда дифференциал Гато функционала $x_{k,n}[q]$ ($n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$) при приращении w удовлетворяет соотношению*

$$Dx_{k,n}[q,w] = \frac{1}{\big[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2} \int_0^{\pi} w(\tau) \hat{y}^2(\tau,q,\lambda_n) \beta_{k,n}(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$\beta_{k,n}(\tau) = \begin{cases} 1 - \alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in [0, x_{k,n}], \\ -\alpha_{k,n}, & \text{если } \tau \in (x_{k,n}, \pi], \end{cases} \qquad \alpha_{k,n} = \int_0^{x_{k,n}} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n)\, d\tau.$$

Замечание. В случае, когда хотя бы одно краевое условие принимает вид условий Дирихле: $\alpha = 2\pi l$, *или* $\beta = 2\pi l$, $l \in \mathbf{Z}$, *т.е.* $x_{0,n}[q] \equiv 0$, *или* $x_{n,n}[q] \equiv \pi$ *соответствующий дифференциал Гато для любых* q, $w \in L[0,\pi]$

$$Dx_{0,n}[q, w] = 0 \text{ или } Dx_{n,n}[q, w] = 0.$$

В настоящей работе предложено решение некоторой обратной задачи Штурма-Лиувилля, позволяющее определять потенциал и краевые условия дифференциального оператора по значениям дифференциалов Гато одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0,\pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ при приращении w из множества $\mathbb{W}$. В случае, когда $\mathbb{W} = \{\delta[1](x),\ x \in \mathbb{M}\}$, ($\delta[1](x)$ — дельта функция Дирака), и $\mathbb{M}$ плотно в $[0,\pi]$, однозначно, с точностью до нормировки $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$, определяется потенциал задачи Штурма-Лиувилля $q \in L[0,\pi]$ или $q \in C[0,\pi]$. Для любого фиксированного $q \in L[0,\pi]$ значения дифференциалов Гато и их производных по x одного из нулей $x_{k,n}[q] \in (0,\pi)$ некоторой собственной функции $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ на концах отрезка $[0,\pi]$: $Dx_{k,n}[q, \delta[1](0)]$, $\left.\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\right|_{x=0}$ и $Dx_{k,n}[q, \delta[1](\pi)]$, $\left.\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\right|_{x=\pi}$, позволяют однозначно определить параметры краевых условий задачи (1) α и β соответственно. В случае, когда $\mathbb{W}$ представляет собой множество непрерывно дифференцируемых, имеющих абсолютно непрерывную производную, функций на $[0,\pi]$ получена теорема единственности решения обратной задачи при условии нормировки потенциала $\int_0^\pi q(x)\,dx = 0$. Эти исследования опираются на изучение дифференциального соотношения, полученного в работе [37].

Обоснование актуальности предложенных в настоящей работе исследований может быть проиллюстрировано с точки зрения математической физики следующим образом. Возьмём неоднородную струну, неизвестная линейная плотность которой может не только непрерывно меняться от точки к точке, но и допускает разрывы первого рода. Считаем, что натяжение струны в состоянии покоя известно. Если начальные условия таковы, что колебания струны будут организованы в виде стоячей волны с одной из собственных частот, то узлы этой стоячей волны будут находиться в нулях собственной функции, соответствующей этой частоте. Результаты работы позволяют найти линейную плотность струны в точке, где находится масса **m**, из наблюдений за динамикой движения одного из внутренних узлов стоячей волны при перемещении с постоянной скоростью вдоль струны точечной массы **m**. Знание дифференциала Гато и его производной по независимой переменной некоторого внутреннего узла задачи Штурма-Лиувилля при возмущении суммируемого потенциала с помощью функции Дирака на концах отрезка даёт возможность определить константы α и β в краевых условиях третьего рода задачи (1). Это, в свою очередь, позволяет полностью определить силы сопротивления перемещению концов струны.

2. Основные результаты

Изменение потенциала $q \in L[0,\pi]$ задачи (1) на аддитивную константу $q + C$ приводит к сдвигу спектра $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ на ту же константу $\{\lambda_n + C\}_{n=1}^\infty$. Поэтому, за исключением специально оговорённых случаев, считаем, что выполнено условие нормировки

$$\int_0^\pi q(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Определим $\delta[f](x)$-дельта функцию Дирака (строгое обоснование определения можно найти, например, в [38, Гл.2, §5], [39, §16.7]) как функционал, ставящий в соответствие всякой суммируемой на отрезке $[0,\pi]$ функции f действительное число по правилу

$$\delta[f](x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi} f(\tau)\Psi(\tau,x,\varepsilon)\,d\tau,$$

где

$$E(x,\varepsilon)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\cap[0,\pi],$$

$$\Psi(\tau,x,\varepsilon)=\begin{cases}\frac{1}{mesE(x,\varepsilon)}, & \text{при } \tau\in E(x,\varepsilon),\\ 0, & \text{при } \tau\in[0,\pi]\setminus E(x,\varepsilon).\end{cases}$$

Будем обозначать дифференциал Гато функционала ϕ на элементе $q\in L[0,\pi]$ при приращении $\delta[1](x)$

$$D\phi[q,\delta[1](x)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+t\Psi(\cdot,x,\varepsilon))-\phi(q)}{t}.$$

А через

$$\frac{d^kD\phi[q,\delta[1](x)]}{dx^k}=\frac{d^k}{dx^k}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+t\Psi(\cdot,x,\varepsilon))-\phi(q)}{t}\right\}$$

его k-ю производную по x. Эта производная, вообще говоря, может пониматься как обобщённая производная [38, Гл.2, §6, п.1]. Но в случае, когда функция $\frac{d^k}{dx^k}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{\phi(q+t\Psi(\cdot,x,\varepsilon))-\phi(q)}{t}\right\}$, как функция переменного x, непрерывна, считаем, что обобщённая производная совпадает с классической производной в смысле определений [38, Гл.2, §5, п.5,6].

Знание дифференциала Гато некоторого внутреннего узла задачи Штурма-Лиувилля при возмущении потенциала с помощью функции Дирака на плотном в $[0,\pi]$ множестве даёт возможность определить любой суммируемый потенциал изучаемой задачи.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbb{M}$ *произвольное плотное в отрезке* $[0,\pi]$ *множество,*

$$x_{k,n}\in(0,\pi) \tag{4}$$

некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (1), *и дифференциал Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q\in L[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *принимает в каждой точке* x *множества* $\mathbb{M}$ *значение* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$.

Тогда потенциал задачи Штурма-Лиувилля (1), *удовлетворяющий условию нормировки* (3), *может быть почти всюду представлен следующим образом*

$$q(x)\overset{п.в.}{=}\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1}\right\}dx, \tag{5}$$

где $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ — *любая, стремящаяся к* x *вдоль множества* $\mathbb{M}$ *последовательность, т.е.* $x_p\in\mathbb{M}$, $x_p\to x$.

Предложение 1. *Пусть* (4) *некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1), *и дифференциал Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q\in L[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *принимает в почти каждой точке* x *отрезка* $[0,\pi]$ *значение* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$.

Тогда потенциал задачи Штурма-Лиувилля (1), *удовлетворяющий условию нормировки* (3), *имеет вид*

$$q(x)\overset{п.в.}{=}\frac{d^2\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}\right)^{-1}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{d^2\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}\right)^{-1}\right\}dx. \qquad (6)$$

Знание дифференциала Гато и его производной по независимой переменной некоторого внутреннего узла задачи Штурма-Лиувилля при возмущении суммируемого потенциала с помощью функции Дирака на концах отрезка даёт возможность определить константы α и β в краевых условиях третьего рода задачи (1). Это позволяет полностью определить силы сопротивления перемещению концов струны.

Предложение 2. *Пусть* (4) *— некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1), *и дифференциал Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q \in L[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *вместе с его производной по* x *принимают на концах отрезка* $[0,\pi]$ *значения* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]$, $Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]$, $\left.\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\right|_{x=0}$ *и* $\left.\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\right|_{x=\pi}$.

Тогда параметры краевых условий задачи Штурма-Лиувилля (1) *могут быть найдены из соотношений*

$$\alpha=\begin{cases}-\operatorname{arcctg}\left\{\left(\left.\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\right|_{x=0}\right)\left(Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]\right)^{-1}\right\}+\pi p, \quad p\in\mathbb{Z},\\ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]\neq 0,\\ \pi p, \quad p\in\mathbb{Z}, \ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](0)]=0,\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}-\operatorname{arcctg}\left\{\left(\left.\frac{dDx_{k,n}[q,\delta[1](x)]}{dx}\right|_{x=\pi}\right)\left(Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]\right)^{-1}\right\}+\pi r, \quad r\in\mathbb{Z},\\ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]\neq 0,\\ \pi r, \quad r\in\mathbb{Z}, \ \textit{если } Dx_{k,n}[q,\delta[1](\pi)]=0.\end{cases} \qquad (7)$$

Для определения непрерывности потенциала задачи Штурма-Лиувилля (1) и его нахождения всюду на $[0,\pi]$ можно предложить следующее уточнение теоремы 3.

Предложение 3. *Пусть* (4) *некоторый нуль одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1), *и дифференциал Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q \in L[0,\pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *принимает в каждой точке* x *плотного в отрезке* $[0,\pi]$ *множества* $\mathbb{M}$ *значение* $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$. *Тогда, условие непрерывности на* $[0,\pi]$ *функции переменного* x

$$\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\left|\lim_{x_p\overset{\mathbb{M}}{\to}x}Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1}$$

необходимо и достаточно для непрерывности потенциала задачи Штурма-Лиувилля (1) *на* $[0,\pi]$. *И функция* (5) *представляет собой потенциал задачи Штурма-Лиувилля* (1), *удовлетворяющий условию нормировки* (3), *всюду на* $[0,\pi]$.

Теорема 4. *Пусть некоторые собственные функции* $\hat{y}_n$ *и* $\hat{\tilde{y}}_m$ $n,m\in\mathbb{N}$ *двух задач Штурма-Лиувилля с суммируемыми потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки* (3), *вида* (1) *и*

$$\begin{cases}\hat{\tilde{y}}''+[\tilde{\lambda}-\tilde{q}]\hat{\tilde{y}}=0,\\ \sin\tilde{\alpha}\hat{\tilde{y}}'(0)+\cos\tilde{\alpha}\hat{\tilde{y}}(0)=0,\\ \sin\tilde{\beta}\hat{\tilde{y}}'(\pi)+\cos\tilde{\beta}\hat{\tilde{y}}(\pi)=0\end{cases} \qquad (8)$$

имеют общий нуль x^*, *т.е. найдутся такие* $0\le k\le n, 0\le l\le m, n,m\in\mathbb{N}$, *что* $x^*=x_{k,n}=\tilde{x}_{l,m}\in(0,\pi)$, *и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для приращения* $\delta[1](x)$ *в каждой точке* x *плотного в отрезке* $[0,\pi]$ *множества* $\mathbb{M}$, *т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]=D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},\delta[1](x)], \ \textit{для любого } x\in\mathbb{M}. \qquad (9)$$

Тогда $\tilde{q}=q$ *почти всюду на* $[0,\pi]$, $\lambda_n=\tilde{\lambda}_m$ *и* $\tilde{\alpha}=\alpha$, $\tilde{\beta}=\beta$.

Через $\mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]$ обозначим множество определённых на отрезке $[0,\pi]$ функций, непрерывно дифференцируемых и имеющих абсолютно непрерывную производную на $[0,\pi]$.

Теорема 5. *Пусть некоторые собственные функции* $\hat y_n$ *и* $\hat{\tilde y}_m$ $n,m\in\mathbb{N}$ *двух задач Штурма-Лиувилля с суммируемыми потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки* (3), *вида* (1) *и* (8) *имеют общий нуль* x^*, *т.е. найдутся такие* $0\le k\le n$, $0\le l\le m, n,m\in\mathbb{N}$, *что* $x^*=x_{k,n}=\tilde x_{l,m}\in(0,\pi)$, *и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для любого приращения* $w\in\mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]$, *т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,w]=D\tilde x_{l,m}[\tilde q,w],\ \text{для любого } w\in\mathbb{W}^1_\infty[0,\pi]. \tag{10}$$

Тогда $\tilde q=q$ *почти всюду на* $[0,\pi]$, $\lambda_n=\tilde\lambda_m$ *и* $\tilde\alpha=\alpha$, $\tilde\beta=\beta$.

Обозначим через $C^2_t[0,\pi]$ множество функций пространства $C^1[0,\pi]$ дважды непрерывно дифференцируемых на каждом из сегментов $[0,t]$ и $(t,\pi]$. В точке $t\in[0,\pi]$ вторые производные элементов множества $C^2_t[0,\pi]$ могут иметь разрыв первого рода. Для классических решений уравнения задачи Штурма-Лиувилля (1) справедливо следующее

Предложение 4. *Пусть некоторые собственные функции* $\hat y_n$ *и* $\hat{\tilde y}_m$ $n,m\in\mathbb{N}$ *двух задач Штурма-Лиувилля с непрерывными потенциалами, удовлетворяющими условиям нормировки* (3), *вида* (1) *и* (8) *имеют общий нуль* x^*, *т.е. найдутся такие* $0\le k\le n$, $0\le l\le m, n,m\in\mathbb{N}$, *что* $x^*=x_{k,n}=\tilde x_{l,m}\in(0,\pi)$, *и дифференциалы Гато этого нуля совпадают для любого приращения* $w\in C^2_{x^*}[0,\pi]$, *т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,w]=D\tilde x_{l,m}[\tilde q,w],\ \text{для любого } w\in C^2_{x^*}[0,\pi].$$

Тогда $\tilde q=q$ *всюду на* $[0,\pi]$, $\lambda_n=\tilde\lambda_m$ *и* $\tilde\alpha=\alpha$, $\tilde\beta=\beta$.

Условие предложения 1, являющееся следствием теоремы 3, удобно, но использует избыточную информацию, т.к. для восстановления потенциала задачи Штурма-Лиувилля требуется знание значения $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]$ в почти каждой точке x отрезка $[0,\pi]$. Утверждение теоремы 3 окончательно в том смысле, что отказаться от плотности множества $\mathbb{M}$ в отрезке $[0,\pi]$ нельзя, т.к. верно следующее предложение.

Предложение 5. *Для произвольного интервала* $(a,b)\subset[0,\pi]$ *найдутся два нормированных соотношением* (3) *потенциала ограниченной вариации*

$$q\overset{\text{п.в.}}{\neq}\tilde q \tag{11}$$

такие, что существует $n\in\mathbb{N}$, *для которого собственные функции* $\hat y_n$ *и* $\hat{\tilde y}_n$ *двух задач Штурма-Лиувилля вида* (1) *и* (8) *(с* $\alpha=\tilde\alpha$, $\beta=\tilde\beta$ *и потенциалами* q *и* $\tilde q$ *соответственно) имеют одинаковые нули* $x_{k,n}[q]=\tilde x_{k,n}[\tilde q]\in[0,\pi], 0\le k\le n$ *и дифференциалы Гато любого из этих нулей совпадают для любого приращения* $\delta[1](x)$ *в каждой точке* x *множества* $[0,\pi]\setminus(a,b)$, *т.е.*

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]=D\tilde x_{k,n}[\tilde q,\delta[1](x)], \tag{12}$$
$$\text{для любых } x\in[0,\pi]\setminus(a,b),\quad x_{k,n}[q]=\tilde x_{k,n}[\tilde q]\in[0,\pi], 0\le k\le n.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 3. Возьмём произвольный узел (4) задачи Штурма-Лиувилля (1). В силу теоремы 2 имеем

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\big[\hat y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\int_0^\pi\Psi(\tau,x,\varepsilon)\hat y^2(\tau,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{\big[\hat y'(x_{k,n},q,\lambda_n)\big]^2}\delta\big[\hat y^2(\cdot,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(\cdot)\big](x).$$

Функция $\hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \pi]$. Поэтому множество $[0, \pi]$ состоит из точек Лебега функции $\hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n)\beta_{k,n}(\tau)$, и всюду на $[0, \pi]$ имеет место равенство

$$Dx_{k,n}[q, \delta[1](x)] = \frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n}, q, \lambda_n)\right]^2}\hat{y}^2(x, q, \lambda_n)\beta_{k,n}(x). \tag{13}$$

В силу теоремы 2 и (4), функция $\beta_{k,n}(x) \neq 0$. Таким образом, на множестве $[0, \pi]$ имеет место представление

$$\left|\hat{y}(x, q, \lambda_n)\right| = \sqrt{\left|Dx_{k,n}[q, \delta[1](x)]\right| \frac{\left[\hat{y}'(x_{k,n}, q, \lambda_n)\right]^2}{\left|\beta_{k,n}(x)\right|}}.$$

Отсюда следует, что на каждом из отрезков $[0, x_{0,n}]$, $[x_{0,n}, x_{1,n}]$,…, $[x_{n-1,n}, x_{n,n}]$, $[x_{n,n}, \pi]$ собственная функция может быть представлена как

$$\hat{y}(x, q, \lambda_n) = \eta_{l,n}\sqrt{\Big|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}, \quad 0 \leq l \leq n+1, \tag{14}$$

где каждый индекс l у константы $\eta_{l,n}$ соответствует номеру отрезка, в который попадает x, а последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ произвольная, стремящаяся к x вдоль плотного в отрезке $[0, \pi]$ множества $\mathbb{M}$, т. е. $x_p \in \mathbb{M}$. По определению [40, Гл. IV, §1] обобщённого решения дифференциального уравнения задачи Штурма-Лиувилля (1), функция $y(x, q, \lambda_n)$ на каждом из отрезков $[0, x_{0,n}]$, $[x_{0,n}, x_{1,n}]$,… $[x_{n-1,n}, x_{n,n}]$, $[x_{n,n}, \pi]$ имеет абсолютно непрерывную производную и почти всюду вторую производную, которая при подстановке в уравнение задачи (1) обращает его в верное равенство почти всюду. Отсюда следует существование для почти всех $x \in [0, \pi]$ второй производной

$$\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}$$

и представление

$$\begin{aligned} q(x) - \lambda_n &\overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{y}''(x, q, \lambda_n)}{\hat{y}(x, q, \lambda_n)} \\ &\overset{\text{п.в.}}{=} \frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, потенциал задачи Штурма-Лиувилля (1), удовлетворяющий условию нормировки (3), может быть представлен через значения дифференциала Гато при приращении в виде дельта функции Дирака следующим образом:

$$\begin{aligned} q(x) &\overset{\text{п.в.}}{=} \frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}\right)^{-1} - \\ &- \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2}\left(\sqrt{\Big|\lim_{x_p \xrightarrow{\mathbb{M}} x} Dx_{k,n}[q, \delta[1](x_p)]\Big|}\right)^{-1}\right\}dx. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

□

Доказательство предложения 1. Утверждение предложения 1 сразу следует из теоремы 3, если в качестве $\mathbb{M}$ взять весь отрезок $[0, \pi]$, а последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ выбирать стационарной.

Предложение 1 доказано.

□

Доказательство предложения 2. По определению [40, Гл. IV, §1] обобщённого решения дифференциального уравнения задачи Штурма-Лиувилля (1) функция $y(x,q,\lambda_n)$ на каждом из отрезков $[0,x_{0,n}]$, $[x_{n,n},\pi]$ имеет абсолютно непрерывную производную. Из представления (14) следует существование $\frac{d\sqrt{\left|Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)]\right|}}{dx}$ на концах отрезка $[0,\pi]$ и возможность определения параметров краевых условий задачи Штурма-Лиувилля (1) по формулам (7).

Предложение 2 доказано.

□

Замечание. Из представления (13) *и теоремы 2, в частности, следует, что при* $x < x_{k,n}$, $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)] \geq 0$, *а при* $x > x_{k,n}$ $Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)] \leq 0$. *Если возмущать функцией Дирака потенциал в узле, то сам этот узел и другие узлы останутся неподвижными. Действительно, из* (13) *следует*

$$Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_{l,n})]\frac{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}{\beta_{k,n}(x_{l,n})} = \hat{y}^2(x_{l,n},q,\lambda_n) = 0, \quad k,l \in [0,n].$$

Доказательство предложения 3. В силу непрерывности функции (15) из (14) следует истинность равенства (15) всюду на $[0,\pi]$.

Предложение 3 доказано.

□

Замечание. В предположениях теоремы 3 для нормированного с помощью соотношения (3) *потенциала n-е собственное значение задачи* (1) *определяется формулой*

$$\lambda_n = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{ \frac{d^2\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}}{dx^2} \left(\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}\right)^{-1} \right\} dx.$$

Значения дифференциала Гато позволяют не только вычислить собственное значение, но и определить собственную функцию $\hat{y}(x,q,\lambda_n)$. *Для этого нужно соответствующим образом подобрать константы* $\eta_{l,n}$ *в представлении* (14).

Доказательство теоремы 4. В силу (9) и (13) для любого $x \in \mathbb{M}$ имеем равенство

$$\frac{1}{\left[\hat{y}'(x_{k,n},q,\lambda_n)\right]^2}\hat{y}^2(x,q,\lambda_n)\beta_{k,n}(x) = Dx_{k,n}[q,\delta[1](x)] =$$

$$= D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q},\delta[1](x)] = \frac{1}{\left[\hat{\tilde{y}}'(\tilde{x}_{l,m},\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\right]^2}\hat{\tilde{y}}^2(\tilde{x},\tilde{q},\tilde{\lambda}_m)\tilde{\beta}_{l,m}(x).$$

Откуда следует, что множества узлов рассматриваемых задач совпадают, и на каждом из отрезков $[0,x_{0,n}]$, $[x_{0,n},x_{1,n}]$,…, $[x_{n-1,n},x_{n,n}]$, $[x_{n,n},\pi]$ собственные функции могут быть представлены как

$$\hat{\tilde{y}}(x,\tilde{q},\tilde{\lambda}_m) = \hat{y}(x,q,\lambda_n) = \eta_{\nu,n}\sqrt{\left|\lim_{x_p \overset{\mathbb{M}}{\to} x} Dx_{k,n}[q,\delta[1](x_p)]\right|}, \quad 0 \leq \nu \leq n+1, \tag{16}$$

где каждый индекс ν у константы $\eta_{\nu,n}$ соответствует номеру отрезка, в который попадает x, а последовательность $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$ произвольная, стремящаяся к x вдоль плотного в отрезке $[0,\pi]$ множества $\mathbb{M}$, т. е. $x_p \in \mathbb{M}$. Теперь из представления (15) устанавливаем, что

$$\tilde{q} - \tilde{\lambda}_m = q - \lambda_n$$

почти всюду на $[0,\pi]$. Проинтегрировав по τ полученное соотношение в пределах от 0 до π с учётом нормировки (3), получим $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$. Из (16) следуют также равенства $\tilde{\alpha} = \alpha$ и $\tilde{\beta} = \beta$.

Теорема 4 доказана.

□

Замечание. Аналогично устанавливается, что некоторый нуль $x_{k,n}[q]$ (4) *одной из собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* (1) *и значения* $Dx_{k,n}[q, \delta[1](x)]$ *дифференциала Гато функционала* $x_{k,n}[q]$ *на элементе* $q \in C[0, \pi]$ *при приращении* $\delta[1](x)$ *в каждой точке* x *плотного множества в отрезке* $[0, \pi]$ *единственным образом определяют потенциал* $q \in C[0, \pi]$ *с точностью до нормировки* (3).

Доказательство теоремы 5. Пусть при некоторых $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m, n, m \in \mathbb{N}$ $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0, \pi)$ общий нуль рассматриваемых в теореме 5 задач Штурма-Лиувилля, тогда из теоремы 2 и (10) для любого $w \in \mathbb{W}^1_\infty[0, \pi]$ имеем равенство

$$\begin{aligned} 0 &= Dx_{k,n}[q, w] - D\tilde{x}_{l,m}[\tilde{q}, w] \\ &= \int_0^\pi w(\tau) \Bigg\{ \frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)\big]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)\big]^2} \hat{\tilde{y}}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \Bigg\} d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу (2) функция

$$\frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)\big]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)\big]^2} \hat{\tilde{y}}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau)$$

принадлежит множеству $\mathbb{W}^1_\infty[0, \pi]$. Взяв в качестве приращения обоих дифференциалов Гато функцию

$$w(\tau) = \frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)\big]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)\big]^2} \hat{\tilde{y}}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau),$$

из (17) получим

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \Bigg\{ \frac{1}{\big[\hat{y}'(x^*, q, \lambda_n)\big]^2} \hat{y}^2(\tau, q, \lambda_n) \beta_{k,n}(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{\big[\hat{\tilde{y}}'(x^*, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)\big]^2} \hat{\tilde{y}}^2(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \Bigg\}^2 d\tau = 0. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то в силу теоремы 2 имеем представление

$$\hat{\tilde{y}}(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m) \overset{\text{п.в.}}{=} \begin{cases} C_1 \hat{y}(\tau, q, \lambda_n), & \text{при } \tau \in [0, x^*], \\ C_2 \hat{y}(\tau, q, \lambda_n), & \text{при } \tau \in (x^*, \pi], \end{cases} \qquad C_i \neq 0,\ i = 1, 2. \tag{18}$$

Соотношение $C_i \neq 0$, $i = 1, 2$ следует из условия $x^* = x_{k,n} = \tilde{x}_{l,m} \in (0, \pi)$, и, значит, $\beta_{k,n}(\tau) \neq 0$, $\tilde{\beta}_{l,m}(\tau) \neq 0$. В силу того, что $\hat{y}$ и $\hat{\tilde{y}}$ есть решения дифференциальных уравнений задачи (1) при соответствующих собственных значениях λ_n, $\tilde{\lambda}_m$ и потенциалах q и $\tilde{q}$, получаем

$$q(\tau) - \lambda_n \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{y}''(\tau, q, \lambda_n)}{\hat{y}(\tau, q, \lambda_n)} \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\hat{\tilde{y}}''(\tau, \tilde{q}, \lambda_n)}{\hat{\tilde{y}}(\tau, \tilde{q}, \tilde{\lambda}_m)} \overset{\text{п.в.}}{=} \tilde{q}(\tau) - \tilde{\lambda}_m. \tag{19}$$

Проинтегрировав по τ полученное соотношение в пределах от 0 до π с учётом нормировки (3), получим $\lambda_n = \tilde{\lambda}_m$.

Соотношения $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$ также следуют из (1), (8) и (18).

Теорема 5 доказана.

□

Доказательство предложения 4. Для того чтобы установить истинность предложения 4 в доказательстве теоремы 5, доопределим потенциалы q и $\tilde{q}$ в соотношении (19) по непрерывности.

Предложение 4 доказано.

$\square$

Доказательство предложения 5. Чтобы не усложнять рассуждения громоздкими техническими деталями, приведём доказательство для случая краевых условий Дирихле $\alpha = \pi m, \beta = \pi p, m, p \in \mathbb{Z}$.

В качестве $\tilde{q}$ возьмём $\tilde{q} \equiv 0$, тогда $\tilde{x}_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k \le n$. Для произвольного интервала $(a, b) \subset [0, \pi]$ найдутся такие $n \in \mathbb{N}$ и $0 \le k_0 \le n - 1$, что $[x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n}] \subset (a, b)$.

Пусть $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$. Рассмотрим неудовлетворяющий условию нормировки (3) потенциал

$$\breve{q}(x,z,t) = \begin{cases} \frac{2}{(x-x_{k_0,n}-t)^2-t^2+z^2}, & x_{k_0,n}+z \le x \le x_{k_0,n}+t, \\ \frac{2}{(x_{k_0+1,n}-x-t)^2-t^2+z^2}, & x_{k_0+1,n}-t \le x \le x_{k_0+1,n}-z, \\ -n^2, & x \in [0,\pi] \setminus [x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n}], \\ 0, & \text{в остальных точках } [0,\pi]. \end{cases} \tag{20}$$

Собственная функция задачи (1) с потенциалом (20), соответствующая n-му собственному значению $\breve{\lambda}_n = 0$, имеет вид:

$$y(x, \breve{q}, \breve{\lambda}_n, z, t) =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{k_0} Y(x - x_{k_0,n}, z, t), & x_{k_0,n} \le x \le \frac{x_{k_0,n}+x_{k_0+1,n}}{2}, \\ (-1)^{k_0} Y(x_{k_0+1,n} - x, z, t), & \frac{x_{k_0,n}+x_{k_0+1,n}}{2} < x \le x_{k_0+1,n}, \\ \sin nx, & x \in [0,\pi] \setminus [x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n}], \end{cases} \tag{21}$$

где

$$Y(x,z,t) = \begin{cases} nx, & \text{при } x \in [0, z], \\ -\frac{n}{2(t-z)}(x-t)^2 + nz + \frac{n(t-z)}{2}, & \text{при } x \in (z, t], \\ nz + \frac{n(t-z)}{2}, & \text{при } x \in (t, \frac{\pi}{2n}]. \end{cases}$$

Здесь собственные функции задач (1) с потенциалами (20) и $\tilde{q} \equiv 0$ при любых $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$ одинаково нормированы условием $y'(0, \breve{q}, \breve{\lambda}_n, z, t) = \tilde{y}'(0, n^2) = n$. Кроме того, множества их нулей $x_{k,n} = \tilde{x}_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $0 \le k \le n$ совпадают.

На треугольнике $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$ рассмотрим функцию

$$F(z,t) = \frac{1}{2}\|y^2(\cdot, \breve{q}, \breve{\lambda}_n, z, t)\|^2_{L_2(x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n})} - \frac{1}{2}\|\tilde{y}^2(\cdot, \tilde{q}, n^2)\|^2_{L_2(x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n})} =$$

$$= \frac{n^2 z^3}{3} + \frac{n^2(t-z)^3}{20} - \frac{n^2(t+z)(t-z)^2}{6} + \left\{\frac{n(t+z)}{2}\right\}^2 \left(\frac{\pi}{2n} - z\right) - \frac{\pi}{4n}.$$

В замкнутой области $0 \le z \le t \le \frac{\pi}{2n}$ функция F непрерывна. Через точки с координатами $z = 0$, $t = 0$ и $z = \frac{\pi}{2n}$, $t = \frac{\pi}{2n}$ проведём непрерывную кривую Γ, принадлежащую внутренности (кроме концов кривой) области $0 < z < t < \frac{\pi}{2n}$. Так как $F(0,0) = -\frac{\pi}{4n}$, а $F(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{4n}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$, то на кривой Γ найдутся точки с координатами $(z^*, t^*) \in \Gamma$, $0 < z^* < t^* < \frac{\pi}{2n}$, для которых (смотрите (21)) справедливо равенство

$$F(z^*, t^*) = \frac{1}{2}\|y^2(\cdot, \breve{q}, \breve{\lambda}_n, z^*, t^*)\|^2_{L_2(x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n})} - \frac{1}{2}\|\tilde{y}^2(\cdot, \tilde{q}, n^2)\|^2_{L_2(x_{k_0,n}, x_{k_0+1,n})} = 0,$$

где $0 < z^* < t^* < \frac{\pi}{2n}$.

Отсюда, а также из теоремы 2 и (21) получаем соотношения

$$\|y^2(\cdot,\breve{q},\breve{\lambda}_n,z^*,t^*)\|^2_{L_2(0,\pi)}=\|\tilde{y}^2(\cdot,\tilde{q},n^2)\|^2_{L_2(0,\pi)},\quad \breve{\beta}_{k,n}\equiv\tilde{\beta}_{k,n} \text{ на } [0,\pi],\quad 0\le k\le n,$$

и

$$Dx_{k,n}[\breve{q},\delta[1](x)]=D\tilde{x}_{k,n}[\tilde{q},\delta[1](x)],$$
$$\text{для любого } x\in[0,\pi]\setminus(x_{k_0,n},x_{k_0+1,n}), 0\le k\le n.$$

Откуда следует (12).

После нормировки потенциала

$$\breve{q}(x,z^*,t^*)=\begin{cases}\frac{2}{(x-x_{k_0,n}-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}}, & x_{k_0,n}+z^*\le x\le x_{k_0,n}+t^*,\\ \frac{2}{(x_{k_0+1,n}-x-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}}, & x_{k_0+1,n}-t^*\le x\le x_{k_0+1,n}-z^*,\\ -n^2, & x\in[0,\pi]\setminus[x_{k_0,n},x_{k_0+1,n}],\\ 0, & \text{в остальных точках } [0,\pi]\end{cases}$$

получаем удовлетворяющий условиям (3), (11) и (12) потенциал

$$q(x)=\breve{q}(x,z^*,t^*)-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \breve{q}(x,z^*,t^*)\,dx.$$

Так как функция $(x-x_{k_0,n}-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}$ на отрезке $x_{k_0,n}+z^*\le x\le x_{k_0,n}+t^*$ и функция $(x_{k_0+1,n}-x-t^*)^2-t^{*2}+z^{*2}$ на отрезке $x_{k_0+1,n}-t^*\le x\le x_{k_0+1,n}-z^*$ отделены от нуля, то потенциал q является функцией ограниченной вариации на $[0,\pi]$. В силу (21) все нули собственных функций $y(\cdot,q,\lambda_n,z^*,t^*)$ и $\tilde{y}(\cdot,\tilde{q},n^2)$ совпадают.

Случай произвольных α, $\beta\in\mathbb{R}$ доказывается аналогично.

Предложение 5 доказано.

$\square$

Замечание. Так как кривая Γ *в доказательстве предложения 5 выбиралась произвольным образом во внутренности области* $0<z<t<\frac{\pi}{2n}$, *то различных точек* (t^*,z^*), *а, следовательно, и различных потенциалов* q, *удовлетворяющих условиям* (11), (12) *предложения 5, не менее континуума.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом* // Изв. РАН, Сер. мат.. **64**, №4. 2000. С. 47–108.
2. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами* // Матем. заметки. **66**, №6. 1999. С. 897–912.
3. Савчук А.М. *О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом* // Матем. заметки. **69**, №2. 2001. С. 277–285.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. **260**. 2008. С. 227–247.
5. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева* // Матем. заметки. **80**, №6. 2006. С. 897–912.
6. Велиев О.А., Шкаликов А.А. *О базисности Рисса собственных и присоединённых функций периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля* // Матем. заметки. **85** 5, 2009. С. 671–686.
7. Суетин С.П. *Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля* // УМН. 2006. **61** 2(368). С. 171–172.
8. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением* // Изв. РАН. Сер. матем.. 2008. **72** №4. С. 37–66.

9. Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р. *О спектре самосопряженного дифференциального оператора на оси с быстро осциллирующими коэффициентами* // Матем. сб.. 2007. **198** №8. С. 3–34.
10. Борисов Д.И. *О некоторых сингулярных возмущениях периодических операторов* // ТМФ. 2007. **151** №2. С. 207–218.
11. Покорный Ю.В., Прядиев В.Л. *Некоторые вопросы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственной сети* // Успехи мат. наук. **59**, №3(357). 2004. С. 116–150.
12. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Ищенко А.С., Шабров С.А. *О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля* // Матем. заметки. **82**, №4. 2007. С. 578–582.
13. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. *Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач* // Успехи мат. наук. **63**, №1(379). 2008. С. 111–154.
14. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Мат. сборник. 2009. **200**. 11. С. 61–108.
15. Трынин А.Ю. *Об асимптотике решений и узловых точек дифференциальных выражений Штурма-Лиувилля* // Сибирск. матем. журнал **51**. 3. 2010. С. 662–675.
16. Амбарцумян В.А. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie* // Zeitschr. für Physik. 1929. **53.** P. 690–695.
17. G. Borg *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe* // Acta Math. 1946. **78,** 1. P. 1–96.
18. N. Levinson *On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase* // Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd. 1949. **25** 9. P. 25.
19. Чудов Л.А. *Обратная задача Штурма-Лиувилля* // Матем. сб. 1949. **25(67).** 3. С. 451–454.
20. Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка* // ДАН. 1950. **72,** 3. С. 457–460.
21. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. *Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции* // Известия Академии Наук СССР, Серия математическая. 1951. **15**. С. 309–360.
22. Марченко В.А. *Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка* // Труды Моск. матем. об-ва. 1952. **1**. С. 327–420.
23. Левитан Б.М. *Об определении оператора Штурма — Лиувилля по одному и двум спектрам* // Известия Академии Наук СССР, Серия математическая. **Т.42**, № 1. 1978. С. 185—199.
24. Левитан Б.М. *Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов* // Тр. ММО. **45**. 1982. С. 3—36.
25. Савчук А.М., Шкаликов А.А. *Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость, Функциональный анализ и его приложения* // 2010. **44**, № 4. С. 34–53.
26. Белишев В.М. *Граничное управление и обратные задачи: одномерный вариант BC-метода, Математические вопросы теории распространения волн. 37* // Зап. научн. сем. ПОМИ, **354**, ПОМИ, СПб., 2008. С. 19–80.
27. J.R. McLaughlin *Inverse spectral theory using nodal points as data — a uniqueness result* // J. Differ. Equations. 1988. **73**, №2. P. 354–362.
28. E.S. Panakhov, H. Koyunbakan *Inverse Nodal Problems for Second Order Differential Operators with a Regular Singularity* // International Journal of Difference Equations. 2006. **1** №2. P. 241—247, ISSN 0973-6069.
29. Y-H. Cheng, C.K. Law, J. Tsay *Remarks on a New Inverse Nodal Problem* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2000. **248**. P. 145–155.
30. Sh. Akbarpoor, A.H. Dabbaghian *The Uniqueness Theorem for Boundary Value Problem with Aftereffect and Eigenvalue in the Boundary Condition* // Int. J. Contemp. Math. Sciences. 2011. **6**, №. 20. P. 963–970.
31. M. Sat, E.S. Panakhov *Inverse nodal problem for Sturm-Liouville operators with coulomb potential* // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. **80**, №2. P. 173–180.
32. Юрко В.А. *Обратные узловые задачи для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на звездообразном графе* // Сибирский мат. журн., Март-апрель. 2009. **Т. 50**, № 2. С. 469–475.

33. Марченко В.А. *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* Киев: „Наукова думка“. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1977.
34. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: „Наука“, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1984.
35. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.* М.: "Наука" , Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988. 432 с. ISBN 5-02-013751-0.
36. Трынин А.Ю. *Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. 2000. №9(460). С. 60–73.
37. Трынин А.Ю. *Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма-Лиувилля* // Уфимский матем. журн.. Том 3, № 4. 2011. С. 133–143.
38. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: "Наука" , Гл. ред-ия физико-математической литературы. 1988.
39. Никольский С.М. *Курс математического анализа. Т. 2.* М.: "Наука" , Гл. ред-ия физико-математической литературы. 1983.
40. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: "Мир" , 1970.

Александр Юрьевич Трынин,
Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83,
410012, г. Саратов, Россия
E-mail: `atrynin@gmail.com`

ABSTRACTS

M.A. Abdullin, N.S. Ismagilov, F.S. Nasyrov

ONE DIMENSIONAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS: PATHWISE APPROACH

Abstract. We study path-wise analogues of one dimensional stochastic differential equations with symmetric integrals. We find existence and uniqueness conditions for solutions, the conditions of continuity and differentiability w.r.t. a parameter, as well as the conditions of linearization for such equations. We also study the structure of the solutions.

Keywords: symmetric integral, differential equations with symmetric integral.

G.G. Braichev

EXACT RELATIONSHIPS BETWEEN CERTAIN CHARACTERISTICS OF GROWTH FOR COMPLEX SEQUENCES

Abstract. We establish exact estimates relating the classical densities of complex sequences (ordinary and averaged) with relative densities and lacunarity and sparsity indices.

Keywords: the upper and lower (average) densities, lacunarity and sparsity indices of sequence.

B.V. Vinnitskii, V.N. Dilnyi

ON GENERALIZATION OF PALEY-WIENER THEOREM FOR WEIGHTED HARDY SPACES

Abstract. We consider the Hardy space $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ in the half-plane with an exponential weight. In this space we study the analytic continuation from the boundary. In the previous works for the case $p \in (1, 2]$ a result on analytic continuation from the imaginary axis was obtained, and it was a generalization of Paley-Wiener theorem. But for many applications the case $p = 1$ is more interesting. For this case in the paper we obtain estimates for a function satisfying certain standard conditions.

Keywords: weighted Hardy space, Paley-Wiener theorem, angular boundary values.

M.G. Gadoev, S.A. Iskhokov

SPECTRAL PROPERTIES OF DEGENERATE ELLIPTIC OPERATORS WITH MATRIX COEFFICIENTS

Abstract. In the work we study some spectral properties of the non-self-adjoint operator A in the space $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$ associated with a noncoercive sesquilinear form. We address the issues on completeness of a system of root vector-functions for operator A in $\mathcal{H}^l$, description of the domain of operator A, estimating resolvent of operator A and asymptotic distribution of eigenvalues of operator A.

Keywords: elliptic differential operators, resolvent of operator, distribution of eigenvalues, system of root vector-functions.

A.M. Gaisin

MINIMUM OF MODULUS OF THE SUM OF DIRICHLET SERIES CONVERGING IN A HALF-PLANE

Abstract. The estimate of the sum of Dirichlet series near the convergence line and outside some exceptional set of disks is obtained in terms of minimum of modulus on continuums close to vertical line segments. This result generalizes the known theorem on minimum of modulus on vertical segments lying in the convergence half-plane.

Keywords: Dirichlet series, convergence half-plane, minimum modulus theorem.

I.I. Golichev

MODIFIED GRADIENT FASTEST DESCENT METHOD FOR SOLVING LINEARIZED NON-STATIONARY NAVIER-STOKES EQUATIONS

Abstract. We introduce a regularization of Navier-Stokes equations, whose solution coincides with the solution to the system of Navier-Stokes equations if the latter exists. The regularized nonlinear system is reduced to solving a sequence of linearized systems. To solve the latter system, we employ the gradient method. We construct and justify a modified method of fastest descent, which may be employed under restrictions on the control and an unbounded Lebesgue set.

Keywords: Navier-Stokes equations, gradient method, regularization, apriori estimates.

E.E. Dikarev

ON THE BERNSTEIN INEQUALITY FOR VECTORS IN BANACH SPACES

Abstract. We obtain Bernstein inequality for the vectors in the Banach space of the isometric representation of a one-parametric group of the operators. We introduce the notion of an entire at infinity function. For such functions and for the norms of commutation operators we obtain Bernstein inequality.

Keywords: Banach modulus, isometric representation, Beurling spectrum, entire function, commutation operator.

O.A. Krivosheyeva

CONVERGENCE DOMAIN FOR SERIES OF EXPONENTIAL POLYNOMIALS

Abstract. In this paper we study the convergence of exponential polynomials series constructed by almost exponential sequences of such polynomials. Particular cases of such series are series of exponential monoms, exponential series, Dirichlet series and power series. We obtain an analogue of Abel theorem for these series implying in particular results on continuation of convergence. An analogue of the Cauchy–Hadamard theorem is obtained as well. We give a formula allowing one to recover the convergence domain for these series by their coefficients. The obtained results include results relating with Abel and Cauchy–Hadamard theorems for exponential monoms series, exponential series, Dirichlet series and power series.

Keywords: exponential polynomial, convex domain,exponential series, invariant subspace, convergence domain.

V.V. Napalkov(Jr.)

ORTHOSIMILAR EXPANSION SYSTEMS IN SPACE WITH REPRODUCING KERNEL

Abstract. We study expansion system similar to orthogonal ones (orthosimilar systems) in Hilbert spaces with reproducing kernel. We establish the equivalency of two definitions of orthosimilar system. We show the relation of orthosimilar system with the problem on description of the adjoint space to a Hilbert space in terms of a special system of functions.

Keywords: Bergman space, Hilbert spaces, reproducing kernel, Hilbert space with reproducing kernel, Paley-Wiener theorem.

A.V. Panov

GROUP CLASSIFICATION OF A CLASS OF SEMILINEAR PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

Abstract. Group classification is implemented for a pseudoparabolic partial differential equation with two parameters. Equivalence transformations groups are found and used for classification of the equation parameters. Kernels of principal symmetries groups are found for the equations. Principal symmetries groups are found for specifications of parameters expanding the kernel of transformations groups. The obtained submodels are summarized in a table at the end of the paper.

Keywords: Lie algebra, group classification, submodels programm.

A.Yu. Trynin

ON INVERSE NODAL PROBLEM FOR STURM-LIOUVILLE OPERATOR

Abstract. In this paper we proposed a solution to some inverse Sturm-Liouville problem, which allows one to determine the potential and the boundary conditions of the differential operator on the values of one of the differentials of Gateaux zeroes $x_{k,n}[q] \in (0, \pi)$ of some eigenfunction $\hat{y}(x, q, \lambda_n[q])$ for an increment w from the set $\mathbb{W}$. As $\mathbb{W}$, we consider some sets of classical and generalized functions.

Keywords: eigenfunction of Sturm-Liouville problem, nodal points of Sturm-Liouville problem, Gateaux differential, inverse Sturm-Liouville problem, inverse nodal problem, nodal points.

CONTENTS