ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 84-90.

УДК 517.5

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости рядов экспоненциальных многочленов, которые построены по почти экспоненциальным последовательностям таких многочленов. Частными случаями этих рядов являются ряды экспоненциальных мономов, ряды экспонент, ряды Дирихле и степенные ряды. Получен аналог теоремы Абеля для таких рядов, из которого, в частности, вытекают результаты о продолжении их сходимости. Получен также аналог теоремы Коши-Адамара. Приводится формула, позволяющая восстанавливать область сходимости указанных рядов по их коэффициентам. Полученные результаты включают в себя результаты, связанные с теоремами Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов, рядов экспонент, рядов Дирихле и степенных рядов.

Ключевые слова: экспоненциальный многочлен, выпуклая область, ряд экспонент, инвариантное подпространство, область сходимости.

Mathematics Subject Classification: 41A05, 4130

1. Введение

В работе изучается сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k(z), \tag{1.1}$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность.

Для каждой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ зафиксируем последовательность выпуклых компактов $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset intK_{p+1}$, $p = 1, 2, \dots$, (int – внутренность множества) и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел такая, что $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, и e_m — целая функция, $m = 1, 2, \dots$ Будем говорить (см. [1]), что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}$, если для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ выполнены два условия:
1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_k(w)| \leqslant a \exp\left(H_{K_s}(\lambda_k)\right), \quad k = 1, 2, \dots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp\left(H_{K_p}(\lambda_k)\right) \leqslant \sup_{w \in K_s} |e_k(w)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

O.A. Krivosheyeva, Convergence domain for series of exponential polynomials.

Поступила 7 апреля 2013 г.

Здесь $H_M(\lambda)$ обозначает опорную функцию множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества):

$$H_M(\lambda) = \sup_{w \in M} Re(\lambda w), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Условия 1) и 2) означают, что последовательность $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ в некотором смысле схожа с последовательностью экспонент $\{\exp(\lambda_m z)\}_{m=1}^{\infty}$. Действительно, из условия 1) с учетом определения опорной функции получаем соотношения:

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leqslant a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) = a \sup_{w \in K_s} \exp(Re(\lambda_m w)) = a \sup_{w \in K_s} |\exp(\lambda_m w)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Условие 2) дает аналогичную оценку снизу на модуль функции $e_m(w)$. Очевидно, что указанная последовательность экспонент является почти экспоненциальной последовательностью. В качестве примера последней рассмотрим еще семейство функций $\{z^n \exp(\lambda_m z)\}_{m=1,n=0}^{\infty,k_m}$. В предложении 2.3 работы [2] по существу показано, что при условии $k_m/|\lambda_m| \to 0$ это семейство является почти экспоненциальной последовательностью. Сходимость рядов экспоненциальных мономов, т.е. рядов по элементам такой системы изучалась в работе [3]. В ней получены аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов. Почти экспоненциальные последовательности более общего вида рассматривались в работе [4]. Они состоят из линейных комбинаций экспоненциальных многочленов, показатели которых образуют так называемые "относительно малые" группы. Подобные последовательности используются в теории представления элементов инвариантных относительно оператора дифференцирования подпространств функций, аналитических в выпуклой области (см. [5]), и, в частности, пространств решений однородных уравнений свертки и их систем. В этой связи возникает задача исследования сходимости рядов экспоненциальных многочленов, построенных по почти экспоненциальным последовательностям таких многочленов. В настоящей работе изучаются области сходимости указанных рядов. Для них получены аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара.

2. Предварительные результаты

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $p = 1, 2, \dots$

Рассмотрим банахово пространство комплексных последовательностей

$$Q_p(\Lambda) = \{d = \{d_k\} : ||d_p|| = \sup_{k \geq 1} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty\}.$$

Символом $Q(\Lambda, D)$ обозначим проективный предел пространств Q_p, $p \geq 1$. Пространство $Q(\Lambda, D)$ является пересечением Q_p, $p \geq 1$. Топология в $Q(\Lambda, D)$ эквивалентна топологии, определяемой метрикой

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{||d - d'||_p}{1 + ||d - d'||_p}.$$

С этой метрикой $Q(\Lambda, D)$ становится, очевидно, пространством Фреше.

Покажем, что последовательность коэффициентов сходящегося ряда (1.1) принадлежит пространству $Q(D)$ для некоторой специальной выпуклой области D.

Символом $\mathbb{S}$ будем обозначать окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Θ-выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi), \xi \in \Theta\}.$$

Отметим, что внутренность E лежит в $E(\Theta)$. В самом деле, если z — внутренняя точка E, то из определения опорной функции следуют неравенства $Re(z\xi) < H_E(\xi), \forall \xi \in \Theta$. Это означает, что $z \in E(\Theta)$. В частном случае, когда $\Theta = \mathbb{S}$, Θ-выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки) и, таким образом, является выпуклой областью. Последнее имеет место и в общем случае, что и подтверждает

Лемма 2.1. *Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Тогда множество $E(\Theta)$* является выпуклой областью.

Доказательство. По определению, множество $E(\Theta)$ есть пересечение полуплоскостей, а потому выпукло. Выпуклость влечет за собой связность $E(\Theta)$. Остается показать, что $E(\Theta)$ — открытое множество. Предположим, что это не так. Тогда существует точка $z_0 \in E(\Theta)$ и последовательность $\{z_k\}$ такие, что $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$ и $z_k \notin E(\Theta)$ для всех $k \geq 1$, то есть $Re(z_k\xi_k) \geq H_E(\xi_k)$ для некоторого $\xi_k \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$ Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\xi_k\}$ сходится к точке $\xi_0 \in \Theta$. Тогда из последнего неравенства с учетом полунепрерывности снизу опорной функции получаем

$$Re(z_0\xi_0) = \lim_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) = \varliminf_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) \geq \varliminf_{k\to\infty} H_E(\xi_k) \geq H_E(\xi_0).$$

Это противоречит определению $E(\Theta)$, так как $z_0 \in E(\Theta)$, а $\xi_0 \in \Theta$. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество всех частичных пределов последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$ (исключая точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Символом $B(x, \delta)$ будем обозначать открытый круг с центром в точке x и радиусом δ.

Лемма 2.2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что общий член ряда (1.1) ограничен на каждом компакте K открытого множества $E \subset \mathbb{C}$, т.е. $|d_k e_k(z)| \leqslant A$, $k = 1, 2, \ldots$, $z \in K$. Тогда имеет место включение $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$.*

Доказательство. Предположим, что $d \notin Q(\Lambda, D)$. Тогда $d \notin Q_p(\Lambda)$ для некоторого номера $p = 1, 2, \ldots$ Это означает, что найдется подпоследовательность $\{d_{k_l}\}$ такая, что

$$|d_{k_l}| \exp H_{K_p}(\lambda_{k_l}) \to +\infty, \quad l \to \infty. \tag{2.1}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_l}/|\lambda_{k_l}|\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \Theta(\Lambda)$. Поскольку K_p — компакт в области $D = E(\Theta(\lambda))$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка: $Re(z_0x_0) > H_{K_p}(x_0)$. Тогда с учетом непрерывности опорной функции компакта найдется $\delta > 0$ такое, что

$$Re(z_0x) > H_{K_p}(x), \qquad x \in B(x_0, \delta). \tag{2.2}$$

По условию E — открытое множество. Поэтому оно содержит некоторый круг $\tilde{D}$ с центром в точке z_0. Пусть $K(\tilde{D}) = \{\tilde{K}_m\}_{m=1}^{\infty}$. Выберем номер s, для которого компакт $\tilde{K}_s$ содержит z_0. Тогда верно неравенство

$$H_{\tilde{K}_s}(x) \geq Re(z_0x), \qquad x \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Поскольку $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, то существуют постоянная $b > 0$ и номер n такие, что

$$b \exp(H_{\tilde{K}_s}(\lambda_k)) \leqslant \sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_k(w)|, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Выберем номер l_0 так, что $\lambda_{k_l}/|\lambda_{k_l}| \in B(x_0,\delta)$, $l \geq l_0$. Тогда из неравенств (2.2)–(2.4) и положительной однородности опорной функции для всех $l \geq l_0$ получаем:

$$\sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_{k_l}(w)| \geq b\exp(H_{K_p}(\lambda_{k_l})).$$

Таким образом, в силу (2.1) имеем:

$$|d_{k_l}| \sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_{k_l}(w)| \to +\infty, \quad l\to\infty.$$

С другой стороны, согласно условию верно неравенство

$$|d_{k_l}| \sup_{w\in\tilde{K}_n} |e_{k_l}(w)| \leqslant A, \quad l=1,2,\ldots$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Из леммы 2.2 вытекает один из результатов работы [1] (лемма 1).

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k|\to\infty$, $k\to\infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что ряд (1.1) сходится равномерно на каждом компакте области D. Тогда верно включение $d=\{d_k\}\in Q(\Lambda,D)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $D\subset D(\Theta(\Lambda))$, а потому имеет место вложение $Q(\Lambda,D(\Theta(\Lambda)))\subset Q(\Lambda,D)$.

В работе [1] доказывается, что при условии $\sigma(\Lambda)=\lim\limits_{k\to\infty}\ln k/|\lambda_k|=0$ имеет место утверждение обратное к этому следствию и даже более сильное утверждение:

Лемма 2.3. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k|\to\infty$, $k\to\infty$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, такими, что $\sigma(\Lambda)=0$, и $d=\{d_k\}\in Q(\Lambda,D)$. Тогда для каждого номера $p\geq 1$ существуют номер s и постоянная $C_p>0$, не зависящие от $d=\{d_k\}$, для которых выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|\sup_{z\in K_p}|e_k(z)|\leqslant C_p||d||_s. \tag{2.5}$$

В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте области D.

3. Аналог теоремы Абеля

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля для ряда (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k|\to\infty$, $k\to\infty$, такая, что $\sigma(\Lambda)=0$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что общий член ряда (1.1) ограничен на каждом компакте K открытого множества $E\subset\mathbb{C}$. Тогда для каждого номера $p=1,2,\ldots$ найдутся номер s и число $C_p>0$ (не зависящие от последовательности d) такие, что выполнено (2.5), где нормы $||d_p||$ построены по последовательности $K(D)=\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ и $D=E(\Theta(\Lambda))$. В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте области D.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2.2 имеет место включение $d=\{d_k\}\in Q(\Lambda,D)$. Отсюда по лемме 2.3 для каждого $p=1,2,\ldots$ найдутся номер s и число $C_p>0$ (не зависящие от последовательности d) такие, что выполнено (2.5). Теорема доказана.

Замечания. 1. Из теоремы 3.1 следует, что при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ внутренность множества равномерной сходимости ряда (1.1) всегда является выпуклой и даже Θ – выпуклой областью (т.е. областью, которая представляет из себя пересечение полуплоскостей $\{z : Re(z\xi) < h(\xi), \xi \in \Theta\}$).

2. Если из теоремы 3.1 изъять условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ее утверждение становится неверным. В лемме 4 работы [1] доказывается, что из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \sup_{z\in K_p} |e_k(z)|$$

при любой последовательности $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D)$, где D — ограниченная область, вытекает равенство $\sigma(\lambda) = 0$.

4. Аналог теоремы Коши-Адамара

Приведем результат, который является аналогом теоремы Коши-Адамара для степенных рядов. Прежде чем его сформулировать, введем еще обозначения. Пусть $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Для последовательности коэффициентов $d = \{d_k\}$ ряда (1.1) положим

$$h(d, \xi) = \inf \varliminf_{j\to\infty} \frac{\ln(1/|d_{k(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к ξ, когда $j \to \infty$. Таким образом, мы получили функцию $h(d, \xi)$, $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Она является полунепрерывной снизу. Действительно, пусть $\xi, \xi_p \in \Theta(\Lambda)$, $p \geq 1$, $\xi_p \to \xi$ и последовательность $\{\xi_p\}$ такая, что

$$\varlimsup_{\zeta\to\xi} h(d, \zeta) = \lim_{p\to\infty} h(d, \xi_p) = a.$$

По определению функции $h(d, \zeta)$ для каждого $p \geq 1$ найдем точку $\lambda_{k(p)}$, удовлетворяющую условиям: $|\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}| - \xi_p| < 1/p$ и $\ln(1/|d_{k(p)}|)/|\lambda_{k(p)}| < a + 1/p$. Тогда последовательность $\lambda_{k(p)}/|\lambda_{k(p)}|$ сходится к ξ и

$$\varlimsup_{p\to\infty} \frac{\ln(1/|d_{k(p)}|)}{|\lambda_{k(p)}|} \leqslant a.$$

Это означает, что

$$\varlimsup_{\zeta\to\xi} h(d, \zeta) \geq h(d, \xi),$$

т.е. $h(d, \zeta)$ полунепрерывна снизу. Тогда, как и в лемме 2.1, показывается, что множество

$$D(d, \Lambda) = \{z : Re(z\xi) < h(d, \xi), \xi \in \Theta(\Lambda)\}$$

является $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью. Символом $\tilde{D}(d, \Lambda)$ обозначим множество точек плоскости, в окрестности каждой из которых ряд (1.1) сходится равномерно.

Теорема 4.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$, такая, что $\sigma(\Lambda) = 0$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — почти экспоненциальная последовательность с показателями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда области $\tilde{D}(d, \Lambda)$ и $D(d, \Lambda)$ совпадают.*

Доказательство. Покажем, что $d = \{d_k\} \in Q(\Lambda, D(d, \Lambda))$. Пусть K_p — произвольный элемент множества $K(D(d, \Lambda))$. Достаточно доказать, что

$$\varlimsup_{k\to\infty} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < +\infty. \tag{4.1}$$

Предположим, что это не так. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{k(j)\}$ имеем:

$$\varlimsup_{k\to\infty} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) = +\infty,$$

или, что эквивалентно

$$\lim_{j\to\infty}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) = +\infty.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) \geq 0. \tag{4.2}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к некоторой точке $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Тогда с учетом непрерывности, положительной однородности опорной функции компакта и определения величины $h(d,\xi)$ получаем

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}\ln|d_{k(j)}| + \overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}H_{K_p}(\lambda_{k(j)}) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\xi) \leqslant -h(d,\xi) + H_{K_p}(\xi).$$

Поскольку K_p — компакт в области $D(d,\Lambda)$, то верно неравенство $H_{K_p}(\xi) < H_{D(d,\Lambda)}(\xi)$. Кроме того, в силу определения области $D(d,\Lambda)$ и ее опорной функции $H_D(d,\Lambda)$ верно также неравенство $H_{D(d,\Lambda)}(\xi) \leqslant h(d,\xi)$. Таким образом, с учетом предыдущего получаем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}}|\lambda_{k(j)}|^{-1}(\ln|d_{k(j)}| + H_{K_p}(\lambda_{k(j)})) \leqslant -h(d,\xi) + H_{K_p}(\xi) < -h(d,\xi) + H_{D(d,\lambda)}(\xi) \leqslant 0.$$

Это противоречит (4.2). Следовательно, (4.1) верно, т.е. $d \in Q(\Lambda, D(d,\Lambda))$. Тогда, согласно лемме 2.3, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте области $D(d,\Lambda)$. Это означает, что верно вложение $D(d,\Lambda) \subset \tilde{D}(d,\Lambda)$.

Покажем, что имеет место и обратное вложение. Пусть $z \in \tilde{D}(d,\Lambda)$. По определению области $\tilde{D}(d,\Lambda)$, в некоторой окрестности E точки z ряд (1.1) сходится равномерно. Поэтому общий член этого ряда ограничен на множестве E. Тогда по лемме 2.2 последовательность $d = \{d_k\}$ является элементом пространства $Q(\Lambda, E(\Theta(\Lambda))$. Выше отмечалось, что множество E лежит в области $E(\Theta(\Lambda))$. Поэтому один из компактов $\tilde{K}_p$ последовательности $K(E(\Theta(\Lambda))$ содержит точку z в своей внутренности. Согласно определению пространства $Q(\Lambda, E(\Theta(\Lambda))$ для некоторого $C > 0$ верно неравенство

$$|d_k| \leqslant C\exp(-H_{\tilde{K}_p}(\lambda_k)), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Фиксируем произвольную точку $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Согласно определению величины $h(d,\xi)$ найдем подпоследовательность $\{k(j)\}$ такую, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к точке ξ и

$$h(d,\xi) = \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(1/|d_{k(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|}.$$

Отсюда, с учетом (4.3), положительной однородности и непрерывности опорной функции компакта получаем

$$h(d,\xi) \geq \lim_{j\to\infty}\frac{\ln(1/C\exp(-H_{\tilde{K}_p}(\lambda_{k(j)})))}{|\lambda_{k(j)}|} = \lim_{j\to\infty}\frac{(ln(1/C) + H_{\tilde{K}_p}(\lambda_{k(j)}))}{|\lambda_{k(j)}|} =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\frac{H_{\tilde{K}_p}\lambda_{k(j)})}{|\lambda_{k(j)}|} = \lim_{j\to\infty}H_{\tilde{K}_p}\left(\frac{\lambda_{k(j)}}{|\lambda_{k(j)}|}\right) = H_{\tilde{K}_p}(\xi).$$

Поскольку точка z лежит внутри компакта $\tilde{K}_p$, то верно неравенство $Re(z\xi) < H_{\tilde{K}_p}(\xi)$. Следовательно, в силу предыдущего неравенства имеем: $Re(z\xi) < h(d,\Lambda)$. Напомним, что ξ — произвольная точка множества $\Theta(\Lambda)$. Поэтому согласно своему определению область $D(d,\Lambda)$ содержит z. Теорема доказана.

Замечание. Формула, определяющая величину $h(d,\Lambda)$ как частные случаи содержит в себе соответствующие формулы для рядов экспоненциальных мономов, рядов экспонент и формулу Коши-Адамара для степенных рядов. В частном случае для ряда $\sum d_k \exp(kz)$ имеем формулу

$$h(d,1) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln(1/|d_k|)}{k} = \overline{\lim_{k\to\infty}} (-\ln \sqrt[k]{|d_k|}).$$

Делая преобразование $w = \exp z$, переводящее этот ряд в степенной ряд, получаем следующую формулу для радиуса сходимости последнего

$$R = \exp h(d,1) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}.$$

Таким образом, мы получили формулу Коши-Адамара для степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальный базис* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 1. С. 87–96.
2. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
3. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 2. С. 43–56.
4. Кривошеев А.С. *Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов* // Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4. № 1. С. 88–106.
5. Кривошеев А.С. *Базисы „по относительно малым группам“* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. № 2. С. 67–89.

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru