ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 38-50.

УДК 517.918

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВЫРОЖДЕННО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.Г. ГАДОЕВ, С.А. ИСХОКОВ

Аннотация. В работе исследуются некоторые спектральные свойства несамосопряженного эллиптического оператора A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированного с некоэрцитивной полуторалинейной формой.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-функций оператора A в $\mathcal{H}^l$, описание области определения оператора A, оценка резольвенты оператора A, асимптотическое распределение собственных значений оператора A.

Ключевые слова: Эллиптические дифференциальные операторы, резольвента оператора, распределение собственных значений, система корневых вектор-функций.

Mathematics Subject Classification: 34L20, 34L10, 47E05, 47A10, 46E35

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней исследуются некоторые спектральные свойства одного класса несамосопряженных вырожденно-эллиптических операторов A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированных с некоэрцитивными полуторалинейными формами.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-фукций оператора A в $\mathcal{H}^l$, описание области определения оператора A, оценки резольвенты оператора A, асимптотическое распределение собственных значений оператора A.

Спектральные асимптотики вырождающихся эллиптических операторов, далеких от самосопряженных, изучались в работах [2–7] в ситуации, когда собственные значения оператора делятся на две серии, одна из которых лежит вне угла $|\,arg\,z| \leqslant \varphi$, $\varphi < \pi$, а другая локализуется к лучу $R_+ = (0, +\infty)$. Эта статья, как и [1], примыкает к работам [2, 3, 7], в которых наиболее общие результаты получены в [7], где предполагается, что старший коэффициент оператора A

$$a(t) \equiv a_{mm}(t) \in C^m([0,1]; End\mathbf{C}^l) \tag{0.1}$$

и имеет простые различные собственные значения (с.з.) при каждом $t \in [0,1]$.

Вместо (0.1) мы требуем лишь, чтобы $a(t) \in C([0,1]; End\mathbf{C}^l)$.

M.G. Gadoev, S.A. Iskhokov, Spectral properties of degenerate elliptic operators with matrix coefficients.

Поступила 15 июня 2013 г.

§1. Формулировка основных результатов

1. Оператор A, заданный в гильбертовом пространстве H, мы назовем далеким от самосопряженного, если он не приводится к виду

$$A = B(E + D), \quad B = B^*, \quad D \in \sigma_\infty(H). \tag{1.1}$$

Здесь и далее, символ $\sigma_\infty(H)$, обозначает класс линейных вполне непрерывных операторов в H; B^* — оператор, сопряженный к B.

Спектральные свойства эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, близких к самосопряженным, т.е. приводящихся к виду (1.1), в литературе достаточно подробно изучены (см. [8, 9]). Также подробно исследованы спектральные свойства эллиптических дифференциальных операторов (д.о.) и псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), далеких от самосопряженных в случае, если они заданы на компактном многообразии без края (см. [7, 10–12], где имеется библиография). В случае областей с краями, д.о. и п.д.о., далекие от самосопряженных, изучались в [3, 4, 13–18]; из них вырожденно-эллиптическим задачам посвящены [3, 4, 13].

2. В данной статье изучаются спектральные свойства несамосопряженного оператора в $L_2(0,1)^l$, порожденного полуторалинейной формой

$$\mathcal{A}[u,v] = \sum_{i,j=0}^{m} \int_0^1 < p_i(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t), p_j(t)v^{(j)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt. \tag{1.2}$$

Здесь

$$p_i(t) = \{t(1-t)\}^{\theta+i-m} \quad (i = \overline{0,m}),\ \theta < m,\ u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i},$$

$$a_{ij} \in L_\infty(J;\, End\,\mathbf{C}^l) \quad (i,j = \overline{0,m}),$$

где $J = (0,1)$. Символ $<\,,\,>_{\mathbf{C}^l}$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$.

Обозначим через $\mathcal{H}_+$ замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(J)$ по норме

$$|\varphi|_+ = \left(\int_J p_m^2(t)|\varphi^{(m)}(t)|^2 dt + \int_J |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Положим

$$\mathcal{H} = L_2(J), \quad \mathcal{H}^l = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H} \quad (l - \text{раз}),$$

$$\mathcal{H}_+^l = \mathcal{H}_+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_+ \quad (l - \text{раз}).$$

В дальнейшем скалярное произведение в пространствах $\mathcal{H}, \mathcal{H}^l$ будет обозначаться одним и тем же символом $(\,,\,)$. Аналогично, нормы в пространствах $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_+^l$ и $\mathcal{H}, \mathcal{H}^l, \mathbf{C}^l$ будут обозначаться соответственно через $|\ |_+, |\ |$. Символом $\|T\|$ обозначим норму ограниченного оператора T, заданного в $\mathcal{H}$ или $\mathcal{H}^l$.

За область определения полуторалинейной формы $\mathcal{A}[u,v]$ (1.2) примем пространство $\mathcal{H}_+^l$.

Предположим, что $a_{mm}(t) \in C^m(\overline{J};\, End\,\mathbf{C}^l)$, и матрица $a(t) = a_{mm}(t)$ при каждом $t \in \overline{J}$ имеет l различных ненулевых собственных значений $\mu_1(t), ..., \mu_l(t)$. Тогда собственные значения матрицы $a(t)$ можно так перенумеровать, что $\mu_j(t), \mu_j^{-1}(t) \in C^m(\overline{J}), j = \overline{1,l}$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$|a_{ij}(t)| \leqslant Mt^\delta(1-t)^\delta \quad (i+j < 2m), \quad \delta > 0, \tag{1.3}$$

$$\mu_j(t) \notin S \qquad (j = \overline{1,l},\ t \in \bar{J}), \tag{1.3'}$$

где $S \subset \mathbf{C}$ — некоторый замкнутый угол с началом в нуле, а $\mu_j(t)$ с.з. матрицы $a(t)$.

При выполнении перечисленных выше условий имеют место следующие теоремы (см. [1]):

Теорема 1.1. *Существует единственный замкнутый оператор A в $\mathcal{H}^l$, обладающий следующими свойствами:*

(i) $\quad D(A) \subset \mathcal{H}^l_+$, $(Au, v) = \mathcal{A}[u, v] \quad (\forall u \in D(A),\, v \in \mathcal{H}^l_+)$,

(ii) *при некотором* $z_0 \in \mathbf{C}$ *существует непрерывный обратный*

$$(A - z_0E)^{-1} \,:\, \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l.$$

Пусть A такой же оператор, как в условиях $(i), (ii)$.

Теорема 1.2. *Оператор A имеет дискретный спектр. Система корневых вектор-функций оператора A полна в $\mathcal{H}^l$, т.е. их конечные линейные комбинации плотны в $\mathcal{H}^l$. Порядок резольвенты оператора A не превосходит число $\frac{1}{2m}$. Для числа $N(\lambda)$ собственных значений оператора A, не превосходящих по модулю λ, с учетом их корневых кратностей, справедлива оценка $N(\lambda) \leqslant M\lambda^{1/2m}$, $(\lambda \geq 1)$.*

Отметим, что сформулированные выше результаты в случае симметрической формы (1.2) хорошо известны.

3. Обозначим через $\mathcal{H}_-$ пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме

$$|u|_- = \sup_{0 \neq \varphi \in \mathcal{H}_+} \frac{|(u, \varphi)|}{|\varphi|_+}.$$

Положим $\mathcal{H}^l_- = \mathcal{H}_- \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_-$ $\quad (l$ - раз). Элемент $F = (F_1, \ldots, F_l) \in \mathcal{H}^l_-$ порождает антилинейный непрерывный функционал над $\mathcal{H}^l_+$ по формуле:

$$< F, v >= \lim_{i \to +\infty} (u_i, v), \qquad v \in \mathcal{H}^l_+,$$

где последовательность вектор-функций $u_1, u_2, \ldots \in \mathcal{H}^l$ выбирается так, что $u_i \to F\,(i \to +\infty)$ в $\mathcal{H}^l_-$.

Заметим, что если $v = (v_1, \ldots, v_l) \in \mathcal{H}^l_+$, то

$$< F, v >= \sum_{i=1}^{l} < F_i, v_i >, \quad |F|_- = (\sum_{i=1}^{l} |F_i|_-^2)^{1/2}.$$

Здесь и далее, как при $l = 1$, так и в случае произвольного $l \in N$ приняты одни и те же обозначения: $|\ |_-$, $<, >$.

Обратно, для любого антилинейного непрерывного функционала $g(v)\,(v \in \mathcal{H}^l_+)$ существует единственный элемент $F \in \mathcal{H}^l_-$ такой, что $g(v) =< F, v >$, $\forall v \in \mathcal{H}^l_+$. При этом норма функционала g равна $|F|_-$.

В дальнейшем антилинейные непрерывные функционалы над $\mathcal{H}^l_+$ отождествляются с элементами пространства $\mathcal{H}^l_-$.

4. При выполнении условия (1.3) согласно неравенству Харди имеем

$$|\mathcal{A}[u, v]| \leqslant M|u|_+|v|_+ \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}^l_+).$$

Поэтому можно ввести в рассмотрение оператор $\mathcal{A} \,:\, \mathcal{H}^l_+ \to \mathcal{H}^l_-$, действующий по формуле

$$< \mathcal{A}u, v >= \mathcal{A}[u, v] \qquad (\forall u, v \in \mathcal{H}^l_+).$$

Пусть A такой же оператор, как в теоремах 1.1, 1.2. Имеет место следующая

Теорема 1.3. *Для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ существуют непрерывные обратные*

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} \,:\, \mathcal{H}^l_- \to \mathcal{H}^l_-, \quad (A - \lambda E)^{-1} \,:\, \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l,$$

и выполняется равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1}u = (A - \lambda E)^{-1}u \qquad (\forall u \in \mathcal{H}^l).$$

При этом $Au = \mathcal{A}u\,(\forall u \in D(A))$, *и*

$$D(A) = \{u \in \mathcal{H}^l_+ \, : \, \mathcal{A}u \in \mathcal{H}^l\}.$$

Аналогичный результат для д.о. в частных производных, имеющих скалярные коэффициенты, получен в работе [19]. Отметим, что первая часть утверждения теоремы 1.3 может быть установлена по схеме статьи [19] лишь в том случае, если дополнительно предположить, что при некоторой непрерывной в $\bar{J}$ функции $\gamma(t)$, которая не обращается в нуль, и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$|\,arg\,\{\gamma(t) < a(t)h, h >_{\mathbf{C}^l}\}| < \frac{\pi - \varepsilon}{2} \quad (\forall t \in \bar{J},\, 0 \neq h \in \mathbf{C}^l). \tag{1.4}$$

Здесь и далее, мы считаем, что функция $arg\,z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$.

Из (1.4), в частности, следует, что

$$|\,arg\,\gamma(t)\mu_j(t)| \leqslant \frac{\pi - \varepsilon}{2} \quad (\forall t \in \bar{J},\, j = \overline{1, l}).$$

5. Доказательства теоремы 1.2 приведена в §2. Отметим, что в §2 получена также следующая оценка резольвенты оператора A в секторе S:

$$\|(A - \lambda E)^{-1}\| \leqslant M|\lambda|^{-1}, \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq c(S)),$$

где $c(S) > 0$. Суммируемость рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A методом Абеля со скобками установлена в [1]. В данной работе доказана полнота системы корневых вектор-функций оператора A в $\mathcal{H}^l$.

В §3 работы дано описание области определения оператора A. В §4 исследуется асимптотическое поведение собственных значений оператора A.

Результаты данной работы частично анонсированы в [20].

§2. Оценка резольвенты оператора A

1. Пусть P – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, ассоциированный с полуторалинейной формой

$$P^{'}[u, v] = (\rho^{\theta}u^{(m)}, \rho^{\theta}v^{(m)}), D[P^{'}] = \mathcal{H}_+,$$

где $\rho(t) = t(1-t), t \in [0, 1]$, θ — такое же, как в (1.2).

Обозначим (см.[1, стр. 32]) через $\mathcal{H}^r_\nu, \nu > 0$ пространство функций $u \in \mathcal{H}^r_+$ с нормой

$$|u|_\nu = \left(\int\limits_J \rho^{2\theta}(t)|u^{(m)}(t)|^2 dt + \nu \int\limits_J |u(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $\mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, обозначает пространство элементов $F \in \mathcal{H}^r_-$ с нормой

$$|F|_{-\nu, r} = \sup_{\substack{v \in \mathcal{H}^r_+ \\ |v|_\nu \leqslant 1}} |< F, v >|.$$

При $\nu_1, \nu_2 > 0$ множества $\mathcal{H}^r_{\pm\nu_1}, \mathcal{H}^r_{\pm\nu_2}$ совпадают, а как нормированные пространства отличаются друг от друга только эквивалентными нормами. Для $\nu = 1$ имеем $\mathcal{H}^r_\nu = \mathcal{H}^r_+, \mathcal{H}^r_{-\nu} = \mathcal{H}^r_-$. Пространство $\mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, является негативным пространством в тройке $\mathcal{H}^r_\nu \subset \mathcal{H}^r \subset \mathcal{H}^r_{-\nu}$ по отношению к позитивному пространству $\mathcal{H}^r_\nu$. (см., например, [21, стр. 51]).

В дальнейшем нам понадобится следующая (см. [1, стр.36])

Лемма 2.1. *Существует непрерывный обратный оператор* $T_\omega : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}, \omega \geq 1$, *такой, что* $T_\omega u = (P + \omega E)^{-\frac{1}{2}}u$, $\forall u \in \mathcal{H}$, причем

$$|T_\omega F| \leqslant M|F|_{-\nu} \;\; (\forall \omega \geq 1, \nu \in [1, 2\omega)), \forall F \in \mathcal{H}_{-\nu}),$$

где число $M > 0$ не зависит от ω, ν.

2. Пусть T_ω – такой же оператор, как в лемме 2.1, $\mathcal{T}_\omega : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_-$ – оператор, обратный к оператору $T_\omega : \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}$. Так же, как в лемме 2.1, доказывается, что

$$|\mathcal{T}_\omega u|_{-\nu} \leqslant M|u| \quad (\forall \omega \geq 1, \nu \in [1, 2\omega), \forall u \in \mathcal{H}),$$

где число $M > 0$ не зависит от ω, ν. При этом, если $u \in \mathcal{H}_\nu$, то

$$\mathcal{T}_\omega u = (P + \omega E)^{\frac{1}{2}} u.$$

Введем операторы $T^l_\omega : \mathcal{H}^l_- \to \mathcal{H}^l, \mathcal{T}^l_\omega : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l_-$ по формулам:

$$T^l_\omega = diag\{T_\omega, ..., T_\omega\}, \quad \mathcal{T}^l_\omega = diag\{\mathcal{T}_\omega, ..., \mathcal{T}_\omega\}.$$

Положим $P_l = diag\{P, ..., P\}$. Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Для $\lambda \in S,\ |\lambda| \geq \sigma$, где $\sigma > 0$ – достаточно большое число, справедливы представления*

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = (P_l + |\lambda| E)^{-1} \Phi(\lambda) T_\lambda \tag{2.1}$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}} \Phi(\lambda) (P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.1$'$}$$

где $\Phi(\lambda) : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l$ – ограниченный оператор

$$\sup_{\lambda \in S,\ |\lambda| \geq \sigma} ||\Phi(\lambda)|| < +\infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. Докажем, что если $\nu = |\lambda|$, то для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$,

$$|(P_l + |\lambda| E)^{\frac{1}{2}} (\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} \mathcal{T}^l_{|\lambda|} u| \leqslant M|u| \quad (\forall u \in \mathcal{H}^l).$$

Для этого используем равенство (см. [1], §4, (4.6), (4.7))

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} = X_\nu(\lambda) \Gamma'_\nu(\lambda).$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_\nu\ :\ \mathcal{H}^l_\nu \to \mathcal{H}^l_{-\nu}$ определен по формуле

$$< \mathcal{A}_\nu u, v >= \mathcal{A}[u, v], \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}^l_\nu).$$

Ясно, что

$$|T^l_{|\lambda|} \Gamma^{(\lambda)}_{|\lambda|} \mathcal{T}^l_{|\lambda|} u| \leqslant |\Gamma^{(\lambda)}_{|\lambda|} \mathcal{T}^l_{|\lambda|} u|_{-|\lambda|} \leqslant M_1 |\mathcal{T}^l_{|\lambda|} u|_{-|\lambda|} \leqslant M_2 |u|,\ (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma_1).$$

Остается показать (см. [1], §4, (4.6), (4.7)), что

$$|(P_l + |\lambda| E)^{\frac{1}{2}} X_{|\lambda|}(\lambda) \mathcal{T}^l_{|\lambda|} u| \leqslant M_3 |u|, \quad (u \in \mathcal{H}^l). \tag{2.3}$$

Используя (4.3), (3.13) из [1], сведем доказательство оценки (2.3), так же, как выше, к доказательству следующего неравенства:

$$|(P_l + |\lambda| E)^{\frac{1}{2}} R_{k,|\lambda|}(\lambda) \mathcal{T}_{|\lambda|} v| \leqslant M_4 |v|, \quad (v \in \mathcal{H}).$$

Справедливость этого неравенства для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ вытекает из представления (3.12) работы [1]. Таким образом, имеем

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} = (P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}} \Phi(\lambda) T^l_{|\lambda|}, \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma) \tag{2.4}$$

где где $\Phi(\lambda) : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l$ – ограниченный оператор, удовлетворяющий оценке (2.2).

Заметим, что

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} F = (\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} F. \ \ (\forall\ \nu \geq 1, F \in \mathcal{H}^l_-). \tag{2.5}$$

Для $u \in \mathcal{H}^l$ имеем

$$T^l_{|\lambda|} u = (P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}} u,\ (\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} u = (A - \lambda E)^{-1} u,$$

что вместе с (2.4), (2.5) доказывает (2.1), (2.1′). Теорема доказана.

3. Из представления $(2.1')$ следует оценка

$$||(A-\lambda E)^{-1}|| \leqslant M|\lambda|^{-1}. \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma). \tag{2.6}$$

Так как порядок резольвенты оператора P_l равен $\frac{1}{2m}$, то из $(2.1')$ вытекает, что порядок резольвенты оператора A не превосходит числа $\frac{1}{2m}$. Отсюда и из (2.6), применяя теорему 6.4.1 из [10], устанавливаем, что система корневых вектор-функций оператора A полна в $\mathcal{H}^l$.

Отметим, что суммируемость методом Абеля со скобками рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A установлена в [1].

4. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим через $\sigma_\tau(H),\ \tau \geq 1$ класс операторов $L \in \sigma_\infty(H)$, сумма s-чисел которых в степени τ сходится ([22]):

$$||L||_\tau = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j^\tau(L)\right)^{\frac{1}{\tau}} < +\infty.$$

(Нижняя грань чисел τ, таких, что $L \in \sigma_\tau(H)$, называется порядком оператора L.)

Обозначим через $\nu_1(t), \nu_2(t), ...$ последовательность с.з. оператора $L \in \sigma_\infty(H)$, занумерованных в порядке невозрастания их модулей, с учетом их корневых кратностей. Отметим, что

$$\nu_j\left((L^*L)^{\frac{1}{2}}\right) = s_j(L),\ j = 1, 2, ... \ .$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие, хорошо известные (см., например, [22]) неравенства

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\mu_j(t)| \leqslant ||L||_1, \quad (\forall L \in \sigma_1(H)) \tag{2.7}$$

$$||LL'||_p \leqslant ||L||_p||L'||, \quad ||L'L||_p \leqslant ||L'||||L||_p, \tag{2.8}$$

если $L \in \sigma_p(H), p \geq 1, L'$ – ограниченный оператор;

$$||L_1...L_r||_p \leqslant ||L_1||_{\kappa_1}...||L_r||_{\kappa_r}, \tag{2.9}$$

если $L_j \in \sigma_{\kappa_j}(H),\ 1 \leqslant p \leqslant \kappa_j\ \ (j = \overline{1,r}),\ \ \sum\limits_{j=1}^{r} \kappa_j^{-1} = \frac{1}{p}$. Из (2.9) при $L_1 = ... = L_r = L \in \sigma_1(H)$, $\kappa_j = r\ (j = \overline{1,r})$ следует неравенство

$$||L^r||_1 \leqslant ||L||_r^r. \tag{2.10}$$

Из (2.7) следует сходимость ряда

$$spL \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{+\infty} \nu_j(t), \quad \forall L \in \sigma_1(H).$$

5. В заключении этого параграфа докажем утверждение теоремы 1.2 об оценке спектра оператора A.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ...$ последовательность с.з. оператора A, занумерованных в порядке неубывания их модулей, с учетом корневых кратностей.

Используя $(2.1')$, (2.8) - (2.10), находим

$$||(A-\lambda E)^{-r}||_1 \leqslant ||(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}\Phi(\lambda)(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}||_r^r \leqslant M||(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}||_{2r}^{2r},$$
$$(\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma) \tag{2.11}$$

где $r = 4m, \sigma > 0$ – достаточно большое число. Известно, что

$$N_0(t) \overset{def}{=} \sum_{\omega_j \leqslant t} 1 \sim const \cdot t^{\frac{1}{2m}} \quad (t \to +\infty),$$

где $\omega_1, \omega_2, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора P. Поэтому

$$||(P_l+|\lambda|E)^{-\frac{1}{2}}||_{8m}^{8m}=\sum_{j=1}^{+\infty}(\omega_j+|\lambda|)^{-4m}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dN_0(t)}{(t+|\lambda|)^{4m}}\leqslant M|\lambda|^{\frac{1}{2m}-4m}\quad (|\lambda|\geq 1).$$

Отсюда и из (2.7), (2.11) заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{+\infty}|(\lambda_j-\lambda)^{-4m}|\leqslant M|\lambda|^{\frac{1}{2m}-4m}\quad (\lambda\in S, |\lambda|\geq\sigma).$$

Выберем число $\varphi\in(-\pi;\pi]$ так, что луч $\Gamma=\{\lambda=te^{i\varphi}: t\geq 0\}$ будет биссектрисой угла S. Тогда

$$|z|+|\lambda|\leqslant c'|z-\lambda|\quad (\forall z\notin S, \lambda\in\Gamma), \tag{2.12}$$

где число $c'>0$ зависит только от раствора угла S. Для достаточно больших $j\geq j_0$ имеем $\lambda_j\notin S$. Очевидно, что

$$N(t)=\int\limits_0^t dN(\tau)\leqslant(2t)^{4m}\int\limits_0^t\frac{dN(\tau)}{(t+\tau)^{4m}}\leqslant(2t)^{4m}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dN(\tau)}{(t+\tau)^{4m}}=$$

$$=(2t)^{4m}\sum_{j=1}^{+\infty}(|\lambda_j|+t)^{-4m},$$

где $N(t)=card\{j:|\lambda_j|\leqslant t\}$. Следовательно, (см. (2.12))

$$N(t)\leqslant M_1+M_2t^{4m}\sum_{j=j_0}^{+\infty}|\lambda_j-te^{i\varphi}|^{-4m}\leqslant M_2t^{\frac{1}{2m}}\quad (t\geq 1).$$

Тем самым, нами полностью завершено доказательство теоремы 1.2.

§3. Описание области определения оператора A

1. Пусть A – такой же оператор, как в теореме 1.1; коэффициенты

$$a_{ij}(t)\in C^j(J;\, End\,\mathbf{C}^l)\quad (i,j=\overline{0,m}). \tag{3.1}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1. *Область определения $D(A)$ оператора A описывается как класс вектор-функций $u\in W^{2m}_{2,loc}(J)^l\cap\mathcal{H}^l_+$ таких, что*

$$f=\sum_{i,j=0}^m(-1)^j(p_i(t)p_j(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t))^{(j)}\in\mathcal{H}^l.$$

При этом $f=Au$.

Доказательство. Пусть $u\in W^{2m}_{2,loc}(J)^l\cap\mathcal{H}^l_+$ и вектор-функция $f(t)\in\mathcal{H}^l$. Тогда для произвольной вектор-функции $v(t)\in C_0^\infty(J)^l$ путем интегрирования по частям получим

$$(f,v)=\sum_{i,j=0}^m(p_i(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t), p_j(t)v^{(j)}(t))=\mathcal{A}[u,v].$$

Эти равенства по непрерывности справедливы для всех $v\in\mathcal{H}^l_+$. Поэтому, согласно теореме 1.1, $u\in D(A), f=Au$.

Обратно, пусть $u \in D(A), f_1 = Au$. Тогда

$$(f_1, v) = \sum_{i,j=0}^{m} (p_i a_{ij} u^{(i)}, p_j v^{(j)}), \quad \forall v \in C_0^\infty(J)^l,$$

так что элемент

$$f_2 = \sum_{i,j=0}^{m} (-1)^j (p_i(t) p_j(t) a_{ij}(t) u^{(j)}(t))^{(j)},$$

понимаемый в смысле распределений, принадлежит $\mathcal{H}^l$. При этом имеем $f_1 = f_2$. Далее из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u \in W_{2,loc}^{2m}(J)^l$.

2. В связи с теоремой 3.1, отметим, что пространство $\mathcal{H}_+^l$ при $-\frac{1}{2} < \theta < m - \frac{1}{2}$ описывается (см. [23]) как класс вектор-функций $u(t) \in \mathcal{H}^l$ с конечной нормой

$$|u|_+ = \left(\int_J |\rho^{2\theta}(t) u(t)|^2 dt + \int_J |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty, \tag{3.2}$$

которые имеют нулевые следы

$$u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, ..., s_0 - 1;$$

здесь s_0 – целое число, такое, что $m - \theta - \frac{1}{2} \leqslant s_0 < m - \theta + \frac{1}{2}$. Если $\theta \leqslant -\frac{1}{2}$ или $m - \frac{1}{2} \leqslant \theta < m$, то пространство $\mathcal{H}_+^l$ состоит из вектор-функций $u(t) \in \mathcal{H}^l$ (см. [23]) с конечной нормой $|u|_+$ (3.2).

3. Наряду с теоремой 3.1 имеет место следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполнено (3.1) и*

$$|a_{ij}^{(k)}(t)| \leqslant M\{t(1-t)\}^{-k}, \quad (k = 0, 1, ..., j).$$

Пусть, кроме того, $\theta + \frac{1}{2} \notin \{1, 2, ..., m\}$. *Тогда область определения оператора* A *описывается как класс вектор-функций* $u \in W_{2,loc}^{2m}(J)^l \cap \mathcal{H}_+^l$ *таких, что*

$$p_0(t) u(t), \quad \sum_{i,j=0}^{m} (-1)^j (p_i(t) p_j(t) a_{ij}(t) u^{(j)}(t))^{(j)} \in \mathcal{H}^l.$$

§4. Асимптотическое распределение собственных значений оператора A

1. Пусть A такой же оператор, как в теореме 1.1. Предположим, что собственные значения $\mu_1(t), ..., \mu_l(t)$ матрицы $a(t)$ расположены в комплексной плоскости следующим образом:

$$\mu_1(t), ..., \mu_n(t) \in R_+ \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0, Imz = 0\}, \quad \mu_{n+1}(t), ..., \mu_l(t) \notin \overline{\Phi},$$

где $1 \leqslant n \leqslant l$, $\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \varphi\}, \varphi \in (0, \pi)$. Тогда, согласно теореме 1.3, в любом замкнутом секторе $S \subset \overline{\Phi} \backslash R_+$, с началом в нуле, содержится конечное число с.з. оператора A. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\lim_{j \to +\infty} arg \lambda_j = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора A, расположенных в углу Φ и занумерованных в порядке неубывания их модулей, с учетом корневых кратностей.

Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Для функции*

$$N(t) = card\{j : |\lambda_j| \leqslant t\},$$

при $t \to +\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$N(t) \sim ct^{\frac{1}{2m}}, \quad c = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 \rho^{-\frac{\theta}{m}}(t) \mu_j^{-\frac{1}{2m}}(t) dt.$$

Аналогичный результат для дифференциальных операторов второго порядка установлен в [4, 13]. Отметим, однако, что схема работ [4, 13] не может непосредственно применяться в случае $m > 1$, даже если выполнено условие (1.4). Существенным моментом методики данной работы является то, что мы "выделяем" в явном виде главный член "обобщенной резольвенты" как оператор, действующий из $\mathcal{H}^l_{-\nu}$ в $\mathcal{H}^l_{\nu}$.

Отметим, также, что аналогичный результат для одного класса несамосопряженных эллиптических систем второго порядка установлен в [24].

В сочетании с применением некоторых других аналитических приемов, это позволяет вычислить главный член асимптотики функции $sp(A - zE)^{-1}$ при $z \to +\infty$ по некоторым лучам $\Gamma \subset \overline{\Phi} \backslash R_+$, с началом в нуле. Установленные на этом пути асимптотические формулы даже в случае $m = 1$ относятся к более широким классам операторов, нежели в работах [4, 13].

2. Для доказательства теоремы 4.1 используем (4.6), (4.7) из [1], при $\nu = |\lambda|$. Пусть P_l, T^l_ω, $\mathcal{T}^l_\omega$ такие же операторы, как в п.1, §2.

Обозначим через $u_1, u_2, ...$ ортонормированную последовательность собственных вектор-функций оператора P_l. Пусть $P_l u_j = \omega_j u_j$, $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant ...$. Так как $u_1, u_2, ...$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}^l$ и $(A - \lambda E)^{-1} u_j = (\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} u_j \ \ \forall \nu \geq 1$, то

$$sp(A - \lambda E)^{-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} ((A - \lambda E)^{-1} u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} ((\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} u_j, u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} (X_\nu(\lambda) u_j, u_j) + \sum_{j=1}^{+\infty} (X_\nu(\lambda) \Gamma_\nu(\lambda) u_j, u_j), \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma = \sigma(S)), \tag{4.1}$$

где $S \subset \overline{\Phi} \backslash R_+$ – произвольный замкнутый угол с началом в нуле. Учитывая, что

$$(P_l + |\lambda| E)^{\pm\frac{1}{2}} u_j = (\omega_j + |\lambda|)^{\pm\frac{1}{2}} u_j,$$

получим

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (X_\nu(\lambda) \Gamma_\nu(\lambda) u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (X_\nu(\lambda) \Gamma_\nu(\lambda) (P_l + |\lambda| E)^{\frac{1}{2}} u_j, (P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}} u_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} ((P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}} X_\nu(\lambda) \mathcal{T}_{|\lambda|} T_{|\lambda|} \Gamma_\nu(\lambda) \mathcal{T}_{|\lambda|} u_j, u_j). \tag{4.2}$$

Имеем при $\nu = |\lambda|, u \in \mathcal{H}^l$, согласно (4.6) (см. [1], §4),

$$|\mathcal{T}_{|\lambda|} \Gamma_\nu(\lambda) T_{|\lambda|} u| \leqslant M |\Gamma_\nu(\lambda) T_{|\lambda|} u|_{-|\lambda|} \leqslant M_1 |\lambda|^{-\varepsilon'} |T_{|\lambda|} u|_{-|\lambda|} = M_2 |\lambda|^{-\varepsilon'} |u|.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{T}_{|\lambda|} \Gamma_\nu(\lambda) T_{|\lambda|}$ индуцирует ограниченный оператор в $\mathcal{H}^l$, норма которого не превосходит $M_2 |\lambda|^{-\varepsilon'}$. Отсюда, согласно (4.1), (4.2), находим

$$Z(\lambda) \stackrel{def}{=} |sp(A - \lambda E)^{-1} - \sum_{j=1}^{+\infty} (X_\nu(\lambda) u_j, u_j)| \leqslant M |\lambda|^{-\varepsilon'} ||(P_l + |\lambda| E)^{-\frac{1}{2}} X_\nu(\lambda) \mathcal{T}_{|\lambda|}||_1.$$

Здесь, хотя $\mathcal{T}_{|\lambda|}$ – неограниченный оператор в $\mathcal{H}^l$, оператор $X_\nu(\lambda)\mathcal{T}_{|\lambda|}$ индуцирует в $\mathcal{H}^l$ ограниченный оператор. Применяя (2.3), находим

$$Z(\lambda) \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}|(P_l + |\lambda|E)^{-1}|_1 \leqslant M_1|\lambda|^{\frac{1}{2m}-1-\varepsilon'}.$$

Далее имеем (см. [1], §4, (4.3)),

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(X_\nu(\lambda)u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}(U(\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1}U^{-1}u_j, u_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}((\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1}u_j, u_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} sp(\widetilde{Q}_k - \lambda E)^{-1}.$$

Здесь операторы $\widetilde{Q}_k,\ k = \overline{1, l}$ определены в пространстве $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$D(\widetilde{Q}_k) = \{v \in \mathcal{H}_+ : Q_{\nu,k}v \in \mathcal{H}\}, \forall \nu \geq 1,$$

$$\widetilde{Q}_k v = Q_{\nu,k}v, \quad \forall v \in D(\widetilde{Q}_k).$$

Операторы $Q_{\nu,k}$ введены в [1, §4, п. 1]. Напомним, что

$$(\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} = diag\{(Q_{\nu,1} - \lambda E)^{-1}, ..., (Q_{\nu,\ l} - \lambda E)^{-1}\}.$$

Определенные выше операторы $\widetilde{Q}_1, ..., \widetilde{Q}_l$ не зависят от числа $\nu \geq 1$.

Воспользуемся теоремой 1.3 применительно к такой ситуации, когда $l = 1, A = \widetilde{Q}_j, j = \overline{1, l}$. Тогда мы получим, что оператор $\widetilde{Q}_j, j = \overline{n+1, l}$ в угле Φ имеет конечное число с.з. Так как $\mu_j(t) \in R_+ (j = \overline{1, n})$, то $\widetilde{Q}_j = \widetilde{Q}_j^* \geq 0, (j = \overline{1, n})$. Таким образом, имеем

$$sp(A - \lambda E)^{-1} = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{l}(\lambda_{i,k} - \lambda)^{-1} + O(|\lambda|^{\frac{1}{2m}-1-\varepsilon'}), \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma(S)), \tag{4.3}$$

где $\varepsilon' > 0, S \subset \overline{\Phi}\backslash R_+$ – замкнутый угол с началом в нуле, а $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора $\widetilde{Q}_k$, занумерованных в порядке неубывания их модулей.

Пусть $\psi \in (0, \varphi)$,

$$\mathcal{L} = \{z \in \mathbb{C} : argz = \pm\psi\} \cup \{0\}$$

– контур, огибающий R_+ слева. Выберем числа $c, \delta > 0$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) $|(arg\lambda'_j) \pm \varphi| \geq \delta, |(arg\lambda_{j,k}) \pm \varphi| \geq \delta$, если, соответственно, $|\lambda'_j| \geq c$ или $|\lambda_{j,k}| \geq c$, $(j = 1, 2, ..., k = \overline{1, l})$,

(ii) $\lambda_{j,k} \notin \Phi, \quad (k = \overline{n+1, l})$, если $|\lambda_{j,k}| \geq c$.

Здесь $\lambda'_1, \lambda'_2, ...$ обозначает последовательность с.з. оператора A, занумерованных в порядке неубывания модулей.

Тогда, в случае $|\lambda'_j| \geq c, |\lambda_{j,k}| \geq c$, для $\lambda \in \mathcal{L}$ имеем $|\lambda - \lambda'_j|^{-1} \leqslant M|\lambda'_j|^{-\tau}|\lambda|^{\tau-1}$, $|\lambda - \lambda_{j,k}|^{-1} \leqslant M|\lambda_{j,k}|^{-\tau}|\lambda|^{\tau-1}$, где $\tau \in \left(\frac{1}{2m}, 1\right)$. Поэтому

$$\sum_{q \leqslant |\lambda'_j|} |\lambda'_j - \lambda|^{-1} \leqslant M_1 r(q)|\lambda|^{\tau-1}, \tag{4.4}$$

$$r(q) \stackrel{def}{=} \sum_{q \leqslant |\lambda'_j|} |\lambda'_j|^{-\tau} \to 0, \quad (q \to +\infty). \tag{4.5}$$

Здесь мы использовали утверждение теоремы 1.2 об оценке спектра оператора A.

Далее имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}\left(\sum_{a<|\lambda_j'|\leqslant q}(t+\lambda)^{-1}(\lambda-\lambda_j')^{-1}\right)d\lambda=\sum_{a<|\lambda_j'|\leqslant q}{}'(t+\lambda_j')^{-1}, \tag{4.6}$$

где символ $\sum'$ обозначает, что при суммировании берутся только такие j, для которых $|arg\lambda_j'|<\psi$.

Учитывая, что (см. (4.4), (4.5))

$$\lim_{q\to+\infty}r(q)\int\limits_{\mathcal{L}}|\lambda|^{\tau-1}|t+\lambda|^{-1}d\lambda=0,$$

и, переходя в (4.6) к пределу при $q\to+\infty$, находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}(t+\lambda)^{-1}\left(\sum_{a<|\lambda_j'|}(\lambda-\lambda_j')^{-1}\right)d\lambda=\sum_{a<|\lambda_j'|}{}'(t+\lambda_j')^{-1}. \tag{4.7}$$

Аналогично имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{L}}(t+\lambda)^{-1}\left(\sum_{a<|\lambda_{j,k}|}(\lambda-\lambda_{j,k})^{-1}\right)d\lambda=\sum_{a<|\lambda_{j,k}|}{}''(t+\lambda_{j,k})^{-1},\quad k=\overline{1,l}, \tag{4.8}$$

где символ $\sum''$ обозначает, что при суммировании берутся только те индексы j, для которых $|arg\lambda_{j,k}|\leqslant\psi$.

Операторы $\widetilde{Q}_{n+1},...,\widetilde{Q}_l$ имеют конечное число с.з. в углу Φ. Отсюда и из (4.3), (4.7), (4.8) заключаем, что

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(t+\lambda_j)^{-1}=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(t+\lambda_{j,k})^{-1}+O(t^{\frac{1}{2m}-1-\varepsilon'}),\quad t\to+\infty.$$

Так как $arg\lambda_j\to0$ $(j\to+\infty)$, то $\lambda_j|\lambda_j|^{-1}\to1$ $(j\to+\infty)$. Поэтому для $q=1,2,...$ имеем

$$\sum_{j=q}^{+\infty}|(t+\lambda_j)^{-1}-(t+|\lambda_j|)^{-1}|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{j=q}^{+\infty}\left\{\frac{|\lambda_j-|\lambda_j||}{(t+|\lambda_j|)^2}\right\}\leqslant c_q\sum_{j=q}^{+\infty}\frac{|\lambda_j|}{(t+|\lambda_j|)^2}\leqslant c_q'\sum_{j=q}^{+\infty}(t+|\lambda_j|)^{-1},$$

где $c_q,c_q'\to0$ $(q\to+\infty)$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(t+\lambda_j)^{-1}\sim\sum_{j=1}^{+\infty}(t+|\lambda_j|)^{-1}\quad(t\to+\infty).$$

Для с.з. оператора $Q_k,\ k=\overline{1,n}$ известна оценка

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(t+\lambda_{j,k})^{-1}\sim\int\limits_0^{+\infty}\frac{dN_j(\tau)}{\tau+t},\quad(t\to+\infty),$$

где

$$N_j(\tau)=\frac{1}{\pi}\tau^{\frac{1}{2m}}\int\limits_0^{+\infty}\rho^{-\frac{\theta}{m}}(t)\mu_j^{-\frac{1}{2m}}(t)dt.$$

Таким образом, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dN(\tau)}{\tau + t} \sim \int_0^{+\infty} \frac{d\widetilde{N}(\tau)}{\tau + t}, \quad (t \to +\infty),$$

где

$$\widetilde{N}(\tau) = \sum_{j=1}^{n} N_j(\tau).$$

Применяя соответствующую тауберову теорему, получим формулу

$$N(t) \sim \sum_{j=1}^{n} N_j(t), \quad (t \to +\infty),$$

что и доказывает теорему 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гадоев М.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов с сингулярными матричными коэффициентами на отрезке* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 3. 2011. С. 26–54.
2. Бойматов К.Х. *Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряжённых операторов* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 11, № 4. 1977. С. 74–75.
3. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем* // Математический сборник. Т. 181 , № 12. 1990. С. 1678–1693.
4. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка* // Вестник МГУ. № 3. 1990. С. 24–31.
5. Розенблюм Г.В. *Спектральная асимптотика нормальных операторов* // Функц. анализ и его приложения. Т. 16. 1982. С. 82–83.
6. Розенблюм Г.В. *Условная асимптотика спектра операторов, близких к нормальным* // Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1986. С. 180–195.
7. M.S. Agranovich and A.S. Markus *On spectral properties of elliptic pseudo-differential operators far from self-adjoint ones* // Zeitshrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1989. Bd., 8(3). P. 237–260.
8. Бирман М.Ш. Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве* // Л. Издательство ЛГУ. 1980. 264 с.
9. Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А. *Спектральная теория дифференциальных операторов* // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. Т. 64. 1988. С. 5–248.
10. Агранович М.С. *Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНИТИ, М. Т. 63. 1990. С. 5–129.
11. Агранович М.С. *Некоторые асимптотические формулы для эллиптических псевдодифференциальных операторов* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 21. № 1. 1987. С. 63–65.
12. Кожевников А.Н. *Об асимптотике собственных значений эллиптических систем* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 11. № 4. 1977. С. 82–83.
13. Бойматов К.Х. *Асимптотика спектра несамосопряженных систем дифференциальных операторов второго порядка* // Математические заметки. Т. 51. № 4. 1992. С. 8–16.
14. Бойматов К.Х. *Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов далеких от самосопряженных* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 29. № 3. 1995. С. 55–58.
15. M. Faierman *An elliptic boundary problem involving an indefinite weight* // Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh. 130A. № 2. 2000. P. 287–305.
16. A.N. Kozhevnikov *Asymptotics of the spectrum of Douglis-Nirenberg elliptic operators on a compact manifold* // Math. Nachr. Bd. 182. 1996. P. 261–293.

17. S.G. Pyatkov *Riesz's bases from the eigenvectors and associated vectors of elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function* // Siberian Journal of Differential Equations. 1995. V. 1. No. 2, P. 179–196.
18. M. Sango *A spectral problem with an indefinite weight for an elliptic system* // Electronic Journal of Diff. Equations. № 21. 1997. P. 1–14.
19. Бойматов К.Х. *Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой* // Доклады РАН. Т. 330, № 3,1993. С. 285–290.
20. M.G. Gadoev, S.A. Iskhokov *Spectral properties of degenerate elliptic operators with matrix coefficients. // Centre de Recerca Matematica (Barcelona).* Preprint series number 1078, December, 2011. – 14 pages.
21. Бойматов К.Х. *О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами* // Сибирский математический журнал. Т. 47, № 1, 2006. С. 46–57.
22. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965.
23. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия вузов. Математика. № 8. 1988. С.4–30.
24. Гадоев М.Г. *Об асимптотике спектра одного класса несамосопряженных систем* // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН. 2007. С. 78–84.

Махмадрахим Гафурович Гадоев,
Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Респ. Саха (Якутия), Россия
E-mail: gadoev@rambler.ru

Сулаймон Абунасрович Исхоков,
Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г. Мирный, Респ. Саха (Якутия), Россия
E-mail: sulaimon@mail.ru