ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 77-83.

УДК 517.9

О НЕРАВЕНСТВЕ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ВЕКТОРОВ ИЗ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е.Е. ДИКАРЕВ

Аннотация. Для векторов из банахова пространства изометрического представления однопараметрической группы операторов получено неравенство Бернштейна. Вводится понятие целой функции на бесконечности. Для таких функций и для норм операторов коммутирования получено неравенство Бернштейна.

Ключевые слова: банахов модуль, изометрическое представление, спектр Бёрлинга, неравенство Бернштейна, целая функция, оператор коммутирования.

Mathematics Subject Classification: 47A10, 47L10

Введение

Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ непрерывных 2π — периодических комплекснозначных функций, определённых на $\mathbb{R}$, а также тригонометрические многочлены $x \in \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ вида

$$x(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad |\alpha_{-n}| + |\alpha_n| > 0. \tag{1}$$

С.Н. Бернштейном было получено следующее неравенство:

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \left|x'(t)\right| \leqslant n \cdot \max_{t\in[0,2\pi]} |x(t)|.$$

Это неравенство обобщалось в разных направлениях. Так, неравенство Бернштейна было получено для целой функции экспоненциального типа σ, ограниченной на вещественной оси (см. [1]):

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|x'(t)\right| \leqslant \sigma \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство. Через $\operatorname{End}\mathscr{X}$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathscr{X}$.

Замкнутый линейный оператор $A\colon \mathrm{D}(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ назовём *корректным* (см. [2]) (или *самосопряжённым* [3, 4]), если оператор $\mathrm{i}A$ является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной группы изометрических операторов $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$.

В частности, в классической теореме Бернштейна оператор A определяется следующим образом: $A = \mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, действует в пространстве равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ и является генератором группы сдвигов. Заметим, что спектр оператора $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (см. [3]). В статье А. Г. Баскакова [5] для ограниченного корректного оператора в банаховом пространстве доказано, что $\|A\| = r(A)$, где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

В данной статье неравенство Бернштейна получено для векторов банахова пространства, где действует изометрическая группа операторов с генератором $\mathrm{i}A$, который может являться неограниченным оператором. Получены приложения неравенства Бернштейна для функций экспоненциального типа на бесконечности и для оценки оператора коммутирования. В статье для такого оператора получена оценка

$$\|Ax\| \leqslant r(x) \cdot \|x\|, \qquad x \in \mathscr{X}, \tag{2}$$

E.E. Dikarev, On the Bernstein inequality for vectors in Banach spaces.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00378).

Поступила 21 сентября 2013г.

где $r(x)$ — спектральный радиус вектора x, который определяется ниже.

В частности, для $x \in \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, являющегося тригонометрическим многочленом вида (1), $r(x) = n$. Таким образом, оценка (2) является непосредственным обобщением неравенства Бернштейна.

1. Свойства спектра Бёрлинга

Пусть $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра всех суммируемых на $\mathbb{R}$ комплексных функций со свёрткой функций в качестве умножения с нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),$$

и пусть $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End} \mathscr{X}$ (где $\mathscr{X}$ — банахово пространство) — сильно непрерывное изометрическое представление. Тогда $\mathscr{X}$ наделяется структурой $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ \ x \in \mathscr{X}. \tag{3}$$

Модульная структура на $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$ определяется формулой (3) с помощью представления $\big(T(t)\varphi\big)(s) = \varphi(s+t)$, $\varphi \in \mathrm{C_b}(\mathbb{R})$, $t, s \in \mathbb{R}$, т.е. с помощью обычной операции свертки функций. С учётом формулы (3) банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуль $\mathscr{X}$ иногда будет обозначаться через $(\mathscr{X}, T)$.

Определение 1 (См. [3, 4, 5])**.** *Спектром Бёрлинга вектора x из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0\}$.*

Пример 1. *Спектром Бёрлинга тригонометрического многочлена вида (1) является множество тех k, для которых $\alpha_k \neq 0$.*

Определение 2. *Пусть M — произвольное подмножество из банахова модуля $\mathscr{X}$. Спектром Бёрлинга множества M называется множество $\Lambda(M)$ из $\mathbb{R}$, являющееся дополнением в $\mathbb{R}$ к множеству $\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid$ существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0$ для всех $x \in M\}$.*

Лемма 1. *Имеют место следующие свойства спектра Бёрлинга векторов из банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$:*

1. *$\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$ и $\Lambda(x) = \varnothing \Leftrightarrow x = 0$;*
2. *$\Lambda(fx) \subset \big(\operatorname{supp}\widehat{f}\big) \cap \Lambda(x)$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), x \in \mathscr{X}$. В частности, если x имеет компактный спектр Бёрлинга, то вектор fx также имеет компактный спектр Бёрлинга;*
3. *$fx = 0$, если $\widehat{f} = 0$ на множестве $\Lambda(x)$ и $\big(\operatorname{supp}\widehat{f}\,\big) \cap \Lambda(x)$ не более чем счётно;*
4. *$fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$.*

Замечание 1 (См. [3])**.** *Из свойства $fx = 0$ для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$.*

Определение 3. *Линейное подпространство E из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$ называется подмодулем, если оно инвариантно относительно всех операторов вида $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и $T(f)$, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.*

Пусть Δ — замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Подмодуль

$$\mathscr{X}(\Delta) = \big\{x \in \mathscr{X} \mid \Lambda(x) \subset \Delta\big\}$$

называется *спектральным подмодулем.*

Лемма 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — банахов $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуль, Δ — замкнутое множество из $\mathbb{R}$. Тогда $\mathscr{X}(\Delta)$ — замкнутый подмодуль, и $\Lambda\big(\mathscr{X}(\Delta)\big) \subset \Delta$.*

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp} \widehat{f}$ — компакт, и $[-a, a]$, $a > 0$ — наименьший отрезок, содержащий $\operatorname{supp} \widehat{f}$. Тогда f бесконечно дифференцируема. Более того, она допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа $\leqslant a$, т.е. справедлива оценка*

$$\bigl|\widetilde{f}(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max \bigl|\widehat{f}(\lambda)\bigr| \cdot \mathrm{e}^{a|z|}, \;\; z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4. *Пусть $\widehat{f} \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$, где x — элемент банахова $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $\mathscr{X}$. Тогда верны следующие равенства:*

$$T(t)x = T(t)(fx) = f_t x, \;\; t \in \mathbb{R}, \text{ где } f_t(s) = \bigl(S(t)f\bigr)(s) = f(t+s), \;\; s \in \mathbb{R}, \;\; x \in \mathscr{X}.$$

Доказательство. Первое равенство следует из свойства 4 леммы 1. Далее,

$$T(t)(fx) = T(t) \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) T(-\tau) x \, \mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) T(t) T(-\tau) x \, \mathrm{d}\tau =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau) T(t-\tau) x \, \mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \bigl(S(t)f\bigr)(s) T(-s) x \, \mathrm{d}s = f_t x.$$

□

Далее используются степени $A^n\colon \mathrm{D}(A^n) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ оператора A, которые определим согласно книге [6].

Определение 4. *Для $n = 0, 1, \ldots$ оператор A^n определяется по индукции соотношениями $A^0 = I$, $A^1 = A$ и*

$$\mathrm{D}(A^n) = \bigl\{x \in \mathscr{X} \bigm| x \in \mathrm{D}(A^{n-1}), \;\; A^{n-1}x \in \mathrm{D}(A)\bigr\},$$
$$A^n x = A(A^{n-1}x), \;\; x \in \mathrm{D}(A^n).$$

Лемма 5. *Пусть вектор x из $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ — модуля $(\mathscr{X}, T)$ имеет компактный спектр Бёрлинга $\Lambda(x)$, и функция $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{f}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности U множества $\Lambda(x)$. Тогда $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$ и $fx = Ax$.*

Доказательство. Выберем функцию$\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{\varphi} \equiv 1$ в окрестности V множества $\Lambda(x)$ и $\operatorname{supp} \widehat{\varphi}$ — компактное множество. В силу леммы 1, $\varphi x = x$. Кроме того, φ можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства: φ — бесконечно дифференцируема, $\varphi' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и $\widehat{\varphi'}(\lambda) = \mathrm{i}\lambda\widehat{\varphi}(\lambda)$. Рассмотрим функцию $\psi = -\mathrm{i}\varphi$, $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Следовательно, $\widehat{\psi'}(\lambda) = \lambda\widehat{\varphi'}(\lambda)$. Кроме того, $f - \psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и $\widehat{f} - \widehat{\psi'} = 0$ в окрестности $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ множества $\Lambda(x)$. Следовательно, по свойству 2 леммы 1, $(f - \psi')x = 0$, откуда $fx = \psi' x$. Таким образом, утверждение леммы достаточно доказать для функции ψ'.
Поскольку функция φ удовлетворяет условиям леммы 4, то имеют место равенства

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)(\varphi x) - \varphi x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t x - \varphi x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t - \varphi)x}{t} = \varphi' x = \mathrm{i}\psi' x = \mathrm{i}Ax.$$

Таким образом, $x \in \mathrm{D}(A)$. Кроме того, из равенства $\varphi' x = \mathrm{i}Ax$ следует, что $\psi' x = Ax$, или $fx = Ax$.

Из полученного представления $Ax = fx$ и свойства 2 леммы 1 следует, что вектор fx имеет компактный спектр Бёрлинга, и поэтому по доказанному $fx = Ax \in \mathrm{D}(A)$, причём $A^2 x = fAx$. Из определения оператора A^n следует, что $x \in \mathrm{D}(A^n)$ при любом $n \geqslant 1$. □

Теорема 1. *Если $x \in \mathscr{X}$ имеет компактный спектр Бёрлинга, то $x \in \mathrm{D}(A^m)$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$ и справедливы оценки*

$$\|A^m x\| \leqslant r(x)^m \cdot \|x\|$$

при $m \geqslant 1$.

Доказательство. Тот факт что $x \in \mathrm{D}(A^m)$ следует из леммы 5.
Покажем, что $\Lambda(A^m x) \subset \Lambda(x)$. Пусть $\lambda_0 \notin \Lambda(x)$. Тогда по определению существует функция $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$ и $f_0 x = 0$. Тогда $f_0(Ax) = Af_0 x = 0$, откуда

$$\Lambda(Ax) \subset \Lambda(x), \qquad \Lambda(A^n x) \subset \Lambda(x). \tag{4}$$

Рассмотрим вектор y вида

$$y = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\right)x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}. \tag{5}$$

Пусть функция $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такова, что $\widehat{\psi}(\lambda) = \lambda$ в некоторой окрестности множества $\Lambda(x)$. Тогда в силу леммы 5 выполнено равенство $Ax = \psi x$. Для любой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ из леммы 4 получим следующие равенства:

$$f(y - Ax) = f(y - \psi x) =$$

$$= r(x) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_{\frac{k\pi-\pi}{r(x)}}}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}\right) x - (\psi * f)x = gx - (\psi * f)x = \varphi x,$$

где $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ имеет преобразование Фурье вида

$$\widehat{g}(\lambda) = r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\lambda}}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2}$$

и $\varphi = g - \psi * f$. Поскольку x имеет компактный спектр Бёрлинга, то $r(x) < \infty$. Ряд в правой части равенства (5) сходится абсолютно. Функция φ удовлетворяет условиям свойства 3 леммы 1. Таким образом, $f(y - Ax) = 0$ для каждой функции $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и поэтому $y - Ax = 0$ в силу замечания 1. Имеют место оценки

$$\|Ax\| = r(x) \cdot \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{T\left(\frac{k\pi-\pi}{r(x)}\right)x}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \right\| \leqslant r(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\pi/2 - k\pi\right)^2} \cdot \|x\| = r(x) \cdot \|x\|.$$

Из включения (4) и доказанного получаем, что

$$\left\|A^n x\right\| = \left\|A^{n-1} Ax\right\| \leqslant r(x)^n \|x\|, \qquad n \geqslant 2.$$

□

2. Неравенство Бернштейна для целой функции на бесконечности

Через $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций из $\mathrm{C_b}(\mathbb{R})$. Через $\mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ обозначим замкнутое подпространство $\left\{x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{|t|\to\infty} \left|x(t)\right| = 0\right\}$.

Определение 5. *Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ назовём* ***целой*** *на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_0 \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$, допускающая расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции $\widetilde{x_0}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$ такая, что $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$, где $y_0 \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$.*

Лемма 6. *Любая функция $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ со свойством $\operatorname{supp}\widehat{f} \in [-\sigma, \sigma]$ допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа a. Более того, функция $f_z(s) = f(s + z)$, $s \in \mathbb{R}$, для каждого $z \in \mathbb{C}$ принадлежит алгебре $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, и функция $F\colon \mathbb{C} \to \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $F(z) = f_z$ является целой функцией экспоненциального типа σ.*

Доказательство. Покажем, что f допускает расширение до функции экспоненциального типа σ. Запишем функцию f в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda,$$

и положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \, \mathrm{d}\lambda, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Справедлива оценка

$$\big|f(z)\big| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\sigma \cdot \max_{\lambda \in [-\sigma, \sigma]} \big|\widehat{f}(\lambda)\big| \cdot \mathrm{e}^{\sigma|z|}.$$

Таким образом, получено расширение функции f на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа σ.

Поскольку $\left(\frac{\mathrm{d}f_z}{\mathrm{d}z}\right)(s) = \frac{\mathrm{d}f(z-s)}{\mathrm{d}z}$, $z \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$, то функция F является целой функцией экспоненциального типа σ. □

Лемма 7. *Функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ допускает расширение до функции экспоненциального типа σ тогда и только тогда, когда $\Lambda(x) \subset [-\sigma, \sigma]$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть найдётся $\lambda_0 > \sigma + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Выберем $f_0 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ так, чтобы $\widehat{f_0}(\lambda_0) \neq 0$, и пусть $x_0 = f_0 * x$, тогда $\Lambda(x_0) \subset [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$. Рассмотрим функцию $y_0(t) = (f_0 * x)(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 t}$, $\Lambda(y_0) \subset [-\delta, \delta]$. Таким образом, построена функция $(f_0 * x)(z) = y_0(z)\mathrm{e}^{i\lambda_0 z}$ экспоненциального типа $\geqslant \sigma + \delta$. *Достаточность.* Пусть $\Lambda(x) \subset [-\sigma, \sigma]$. Выберем $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f} = 1$ в окрестности спектра, и $\mathrm{supp}\widehat{f} \subset [-\sigma - \varepsilon, \sigma + \varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $f * x = x$, f — целая функция со свойствами из леммы 6. Тем же символом x будем обозначать продолжение x на $\mathbb{C}$. Положим $x(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z-s)x(s)\,\mathrm{d}s$. Имеет место оценка

$$x(z) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(z-s)| x(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \|f_z\|_1 \cdot \|x\|, \qquad z \in \mathbb{C}, \;\; s \in \mathbb{R}.$$

Поскольку $\|f_z\|_1 \leqslant \mathrm{Const} \cdot \mathrm{e}^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$, $z \in \mathbb{C}$ $s \in \mathbb{R}$, то x — функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma + \varepsilon$. Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем, что x — функция экспоненциального типа σ. □

Лемма 8. *Функция $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа $\sigma \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $(x - f * x) \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ для каждой суммируемой функции f со свойством $\widehat{f} \equiv 1$ на $[-\sigma, \sigma]$.*

Определение 6. *Функцию $x \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ назовём медленно меняющейся на бесконечности функцией, если для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено свойство $S(\alpha)x \ - x \ \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$ или, другими словами, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\lim_{|t| \to \infty} \big|x(t + \alpha) - x(t)\big| = 0.$$

Множество всех медленно меняющихся на бесконечности функций из $\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathrm{C_{sl}}(\mathbb{R})$.

Отметим, что каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция эквивалентна целой функции на бесконечности экспоненциального типа 0 (см. [7]).

Рассмотрим сильно непрерывную группу сдвигов $S\colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,\mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$, действующую по правилу: $\big(S(t)x\big)(s) = x(s + t)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Через $\widetilde{S}\colon \mathbb{R} \to \ \mathrm{End} \ \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})/\mathrm{C_0}$ обозначим представление, определённое по правилу: $\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x}$. Модульная структура определяется формулой

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\widetilde{S}(-t)\widetilde{x}\,\mathrm{d}t, \qquad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}), \; \widetilde{x} \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R}).$$

Пусть $x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})$, и $y \in \mathrm{C_{bu}}(\mathbb{R})$ — представитель класса $\widetilde{y}$. Введём норму класса $\widetilde{y}$ по правилу:

$$\big\|\widetilde{y}\big\| = \inf_{x \in \mathrm{C_0}(\mathbb{R})} \|y + x\|.$$

Теорема 2. *Функция x является целой на бесконечности функцией экспоненциального типа порядка $\sigma \geqslant 0$, если $\Lambda(\widetilde{x}) \subset [-\sigma, \sigma]$, или, что эквивалентно, если в классе $\widetilde{x}$ существует дифференцируемая функция x_0, для которой справедлива оценка $\|x_0'\| \leqslant \sigma\big\|\widetilde{x}\big\|$.*

Доказательство. следует из приведённых выше результатов и теоремы 1. □

Здесь используется терминология и результаты из статей [8, 9, 10]. Пусть $\mathscr{X}_1,\ \mathscr{X}_2$ — банаховы пространства и пусть $\mathrm{i}A_1,\ \mathrm{i}A_2,\ A_k \in \operatorname{End}\mathscr{X}_k,\ k=1,2$ — генераторы изометрических групп $T_1(t)$ и $T_2(t)$ соответственно:

$$T_1\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_1, \qquad T_2\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_2.$$

Банахово пространство $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ наделяется структурой банахова модуля по представлению $T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ вида $T(t)X = T_2(t)XT_1(-t),\ t \in \mathbb{R},\ X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$. Модульная структура определяется с помощью формулы

$$(fX)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(T(t)X\big)x\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(T_2(t)XT_1(-t)\big)x\,\mathrm{d}\tau.$$

Отметим, что представление T является непрерывным в сильной операторной топологии.

Обозначим символом ad_{A_1,A_2} оператор вида $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = A_2X - XA_1$. В случае, когда $A_1 = A_2 = A$, $\mathrm{ad}_{A_1,A_2}X = \mathrm{ad}_A X = AX - XA$ — коммутатор. Оператор X принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$, если $X\mathrm{D}(A_1) \subset \mathrm{D}(A_2)$, и оператор $A_2X - XA_1$ допускает ограниченное расширение на $\mathscr{X}_1$. В дальнейшем это расширение будет обозначаться тем же символом $A_2X - XA_1$. Отметим, что спектром оператора ad_{A_1,A_2} является множество

$$\sigma(\mathrm{ad}_{A_1,A_2}) = \overline{\big\{\lambda_2 - \lambda_1\colon \lambda_1 \in \sigma(A_1), \lambda_2 \in \sigma(A_2)\big\}},$$

где $\sigma(A_1),\ \sigma(A_2)$ — соответственно спектры операторов $A_1,\ A_2$.

Лемма 9. *Если $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ имеет компактный спектр Бёрлинга, то $X \in \mathrm{D}(\mathrm{ad}_{A_1,A_2})$ $\big($т.е. корректно определен оператор $A_2X - -XA_1 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)\big)$.*

Теорема 3. *Если спектр Бёрлинга $\Lambda(X,T)$ оператора $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ является компактным множеством, то справедливо следующее неравенство:*

$$\big\|A_2X - XA_1\big\| \leqslant r(X)\cdot\|X\|.$$

Доказательство. следует из теоремы 1 и приведённых выше результатов. □

Пусть $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ — сепарабельные бесконечномерные банаховы пространства с безусловными базисами $\big(e_k^{'}\big)$ и $\big(e_k^{''}\big)$ соответственно. Матрица (x_{mn}) оператора $X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$ определяется из равенств

$$Xe_n^{'} = \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}e_m^{''}.$$

Пусть определены сильно непрерывные изометрические представления $T_k\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}_k$, $k = 1,2$, определённые равенствами:

$$T_1(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\alpha_n e_n^{'}, \qquad T_2(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\beta_n e_n^{''}.$$

Рассмотрим ограниченное представление

$$T\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}\operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2), \qquad T(t)X = T_2(t)XT_1(-t),$$

где $x \in \mathscr{X}_1,\ f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R},\ X \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$, и оператор вида

$$(fX)x = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)XT_1(-\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

При $x = e_n'$ получаем равенства:

$$(fX)e_n' = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)XT_1(-\tau)e_n'\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}e_n'\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}Xe_n'\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)T_2(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\sum_{m=1}^{\infty}x_{mn}e_m''\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)\tau}x_{mn}e_m''\,\mathrm{d}\tau = \sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(n-m)x_{mn}e_m''.$$

Таким образом, матрица оператора X имеет вид $\big(\widehat{f}(n-m)x_{mn}\big)$. Следовательно, $fX = 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(n-m) = 0,\ \ m,n \in \mathbb{N}$, для которых $x_{mn} \neq 0$, то есть спектр Бёрлинга оператора X имеет вид:

$$\Lambda(X) = \big\{m,n \in \mathbb{N} \mid \text{существует } f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \text{ такая, что } \widehat{f}(n-m) = 0 \text{ и } x_{mn} \neq 0\big\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Наука. 1965.
2. Любич Ю.И. *Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора* // УМН, Т.18:1(109). 1963. С. 165–171.
3. Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов* // Функциональный анализ. СМФН. № 9. МАИ. М. 2004. С. 3—151.
4. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов.* Воронеж. ВГУ. 1987.
5. Баскаков А.Г. *Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе* // Сиб. матем. журн. Т. 20, № 5. 1979. С. 942–952.
6. Данфорд Н. *Линейные операторы: Общая теория.* М.: Едиториал УРСС. 2010. 896 с.
7. Калужина Н.С. *Медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции и их свойства* // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. № 2. 2010. С. 97–102.
8. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58:4 1994. С. 3—320.
9. Баскаков А.Г., Криштал И.А. *Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 69:3. 2005. С. 3—54.
10. Баскаков А.Г., Калужина Н.С. *Теорема Бёрлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений* // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643—661.

Егор Евгеньевич Дикарев,
Воронежский государственный университет,
Университетская площадь, 1,
394006, г. Воронеж, Россия
E-mail: heiligenkreuz@gmail.com