ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 17-30.

УДК 517.521+517.547.22

ТОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Г.Г. БРАЙЧЕВ

Аннотация. Установлены точные оценки, связывающие классические плотности последовательности комплексных чисел (обычные и усредненные) с ее относительными плотностями, а также с индексами лакунарности и разреженности.

Ключевые слова: нижняя и верхняя (усредненная, относительная) плотности, индексы лакунарности и разреженности последовательности.

Mathematics Subject Classification: 11B05, 11L07

Одним из центральных направлений теории целых функций является исследование зависимости роста функции от распределения ее нулей на плоскости. Большое количество работ, относящихся к этому разделу комплексного анализа, посвящено оценкам индикаторов и типов целой функции конечного порядка через такие устоявшиеся характеристики поведения ее нулей, как обычные, усредненные и другие плотности (см., например, [1]–[5] и обзор [6]), а в последнее время — и менее традиционные в этих вопросах индексы лакунарности и разреженности [7], [8]. Недавние исследования экстремальных задач для целых функций с нулями на луче [9], [10] отчетливо демонстрируют невозможность получения окончательных результатов без выяснения внутренних связей между плотностями последовательностей нулей. Как видно на примере работы [8], дальнейшее развитие теории экстремальных задач порождает также потребность в нахождении и изучении закономерностей, связывающих "количественные" плотностные характеристики стремления последовательности к бесконечности с "качественными", вроде индексов лакунарности и разреженности. К настоящему времени такие закономерности недостаточно изучены. Ликвидируя этот пробел, здесь мы находим точную взаимосвязь указанных выше характеристик роста последовательностей нулей целых функций конечного порядка.

Итак, предметом изучения в работе являются бесконечно большие последовательности комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые мы располагаем в порядке возрастания модулей:

$$0 < |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_{n_1}| < |\lambda_{n_1+1}| = \ldots = |\lambda_{n_2}| < |\lambda_{n_2+1}| = \ldots = |\lambda_{n_3}| < \ldots .$$

Номера n_k, в которых модули членов последовательности имеют скачки, называются *центральными индексами* последовательности Λ.

Обозначим через $n_\Lambda(x) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant x} 1$ *считающую функцию* этой последовательности, а через $N_\Lambda(x) = \int\limits_0^x \dfrac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt$ — ее *усредненную считающую функцию.*

Показатель сходимости последовательности Λ (см. [1]) вычисляется по формулам:

$$\rho_\Lambda = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln n_\Lambda(x)}{\ln x} = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln N_\Lambda(x)}{\ln x}.$$

G.G. Braichev, Exact relationships between certain characteristics of growth for complex sequences.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00281).

Поступила 13 мая 2013 г.

Далее в работе через ρ обозначаем показатель сходимости ρ_Λ последовательности Λ, предполагая, что ρ — положительное число.

Величины
$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{n_\Lambda(x)}{x^\rho} \quad \text{и} \quad \overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{N_\Lambda(x)}{x^\rho}$$
называются *верхними ρ-плотностями* (обычной и усредненной) последовательности Λ. Замена в этих равенствах верхних пределов на нижние приводит к определениям *нижней* и *усредненной нижней ρ-плотностей* последовательности:
$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{n_\Lambda(x)}{x^\rho}\,, \quad \underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda) = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{N_\Lambda(x)}{x^\rho}.$$

Для упрощения записей там, где это не приведет к недоразумениям, будем опускать символы ρ и Λ в обозначениях плотностей и других вводимых далее характеристик. Кроме того, ради экономии места будем использовать одновременно верхнее и нижнее подчеркивания, считая, что они соответствуют друг другу во всех частях равенств.

Введем еще *верхнюю* и *нижнюю относительные плотности* последовательности, полагая по определению
$$\overline{\underline{\nu}} = \overline{\underline{\lim_{x\to+\infty}}} \frac{N(x)}{n(x)}.$$

Поскольку всегда выполняется
$$\overline{\underline{\Delta}} = \overline{\underline{\lim_{x\to+\infty}}} \frac{n(x)}{x^\rho} = \overline{\underline{\lim_{n\to\infty}}} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} = \overline{\underline{\lim_{n\to\infty}}} \frac{n(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho},$$
то естественно ввести *дискретные усредненные верхнюю* и *нижнюю плотности* последовательности по формулам:
$$\widetilde{\underset{\sim}{\Delta}} = \overline{\underline{\lim_{n\to\infty}}} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}\,.$$

Мы увидим ниже (см. теорему 1 и предложение 1), что всегда $\underline{\Delta}^* = \underset{\sim}{\Delta}$, а если $|\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |\lambda_{n+1}|$, то и $\overline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta}$.

Последовательности, удовлетворяюшие условию $\overline{\Delta}^* = \underline{\Delta}^*$, или, что эквивалентно, $\overline{\Delta} = \underline{\Delta}$, называются *измеримыми.* Аналогично этому, будем называть *дискретно измеримыми* последовательности, которые удовлетворяют условию $\widetilde{\Delta} = \underset{\sim}{\Delta}$, означающему существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^\rho}$. Точно так же, если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{N(x)}{n(x)}$, то говорим, что такая последовательность *внутренне измерима.* Полезно отметить, что, в отличие от обычной или дискретной измеримости, понятие внутренней измеримости не привязано к какому-либо показателю ρ.

Сразу укажем, что ни дискретная, ни внутренняя измеримость последовательности не влекут ее измеримости. В работе [10] показано, что класс дискретно измеримых последовательностей достаточно широк: для произвольных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \in [0, \beta]$ существуют дискретно измеримые последовательности с плотностями $\underline{\Delta} = \alpha$ и $\overline{\Delta} = \beta$. Здесь мы доказываем (см. ниже предложение 9), что такое же утверждение справедливо и для внутренне измеримых последовательностей.

Из определения считающей функции последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$ имеем $n_\Lambda(x) = 0$ при $x \in [0, |\lambda_1|)$ и $n_\Lambda(x) \equiv n_k$ при $x \in [|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_k+1}|)$, $k = 1, 2, \ldots$. Для последовательности центральных индексов $N = \{n_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ определим характеристики
$$\mu_N = \mu = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \;\; \text{и} \;\; \delta_N = \delta = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k}.$$

Будем называть μ_N *индексом лакунарности*, а δ_N — *индексом разреженности* последовательности N. Аналогично определяются индексы лакунарности l_Λ и разреженности p_Λ последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ (точнее, последовательности $|\Lambda| = \{|\lambda_n|\} \subset \mathbb{R}_+$) :

$$l_\Lambda = l = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|} \quad \text{и} \quad p_\Lambda = p = \varliminf_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}.$$

Говорят, что последовательность Λ *лакунарна по Адамару*, если её индекс разреженности больше единицы, т. е. $p_\Lambda > 1$ (при $p_\Lambda = \infty$ имеем так называемые *лакуны Островского*). Если индекс лакунарности последовательности Λ равен единице, $l_\Lambda = 1$, то Λ называется *слабо лакунарной по Адамару* (коротко, *слабо лакунарной*). Например, последовательность всех простых чисел слабо лакунарна. Этим же свойством при $b > 1$ обладает и последовательность $\Lambda = \{b^{n^\alpha}\}$, когда $\alpha \in (0, 1)$. Если здесь $\alpha = 1$, то $p_\Lambda = l_\Lambda = b$, а при $\alpha > 1$ оказывается $p_\Lambda = \infty$.

Связи между обычными и усредненными плотностями последовательности Λ отражают классические неравенства (см. [1, гл. I, § 12], [2, гл. II, § 4, п. 4]):

$$\underline{\Delta} \leqslant \rho \underline{\Delta}^* \leqslant \rho \overline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta} \leqslant \rho\, e\, \overline{\Delta}^*. \tag{1}$$

В книге [3, p. 16] фактически идет речь об оценке, уточняющей последнее из этих неравенств в случае, когда известна не только верхняя, но и нижняя плотность последовательности. Именно,

$$\rho\, e\, \overline{\Delta}^* \geq \overline{\Delta} \exp\left\{\underline{\Delta} / \overline{\Delta}\right\}.$$

Из общих результатов о сравнительном росте выпуклых функций, установленных в монографии [7], можно извлечь следующие неравенства, уточняющие все предыдущие соотношения (см. также [11]):

$$\rho\, a_1 \overline{\Delta}^* \leqslant \underline{\Delta} \leqslant \rho\, \widetilde{a}_1 \overline{\Delta}^*, \qquad \rho\, \widetilde{a}_2 \overline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta} \leqslant \rho\, a_2 \overline{\Delta}^*. \tag{2}$$

Здесь a_1 и a_2 — корни уравнения

$$a \ln \frac{e}{a} = \underline{\Delta}^* / \overline{\Delta}^*,$$

а $\widetilde{a}_1$ и $\widetilde{a}_2$ — корни подобного же уравнения с "подправленной" правой частью:

$$a \ln \frac{e}{a} = \widetilde{\Delta} / \overline{\Delta}^*.$$

Корни этих уравнений связаны неравенствами $0 \leqslant a_1 \leqslant \widetilde{a}_1 \leqslant 1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant a_2 \leqslant e$.

Как видно из (2), для дискретно измеримых последовательностей в силу условия $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$ (см. ниже теорему 1) выполняются точные равенства

$$\underline{\Delta} = \rho\, a_1 \overline{\Delta}^*, \qquad \overline{\Delta} = \rho\, a_2 \overline{\Delta}^*. \tag{3}$$

Таким образом, можно констатировать, что к настоящему моменту взаимоотошения между обычными и усредненными плотностями последовательностей достаточно хорошо изучены. К сожалению, так нельзя сказать об изучении связей между плотностями (обычными, усредненными, относительными) и индексами лакунарности и разреженности последовательностей Λ. В то же время, такое исследование имеет существенное значение при описании роста целых функций, нулями которых служат Λ.

Установлению точных соотношений между указанными характеристиками последовательностей и посвящена настоящая работа.

В дальнейшем считаем, что число $\rho > 0$ задано, а сответствующие величины вычисляются при этом показателе ρ. Кроме того, из неравенств (1) вытекает, что условия $\overline{\Delta} = 0$ и $\overline{\Delta}^* = 0$, равно как и условия $\overline{\Delta} = \infty$ и $\overline{\Delta}^* = \infty$, равносильны. Поэтому в дальнейшем предполагается, а иногда и явно оговаривается, что выполнено условие $0 < \overline{\Delta} < \infty$.

Предложение 1. *Справедливы следующие неравенства*

$$\underline{\Delta}\,\mu \leqslant \overline{\Delta}, \tag{4}$$

$$\underline{\Delta}\,l^{\rho} \leqslant \overline{\Delta}, \tag{5}$$

$$\overline{\Delta}^{*} \leqslant \widetilde{\Delta}\,l^{\rho}, \tag{6}$$

$$\underline{\nu}\,\mu \leqslant \overline{\nu}, \tag{7}$$

$$\ln l \leqslant \overline{\nu} - \underline{\nu}. \tag{8}$$

Доказательство. Поскольку для считающей функции последовательности Λ выполняются равенства $n_{\Lambda}(t) = n(t) \equiv n_k$ при $t \in I_k = [|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_k+1}|),\ k = 1, 2, \dots$, то

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{x\in I_k} \frac{n(x)}{x^{\rho}} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}},\ \ \underline{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{x\in I_k} \frac{n(x)}{x^{\rho}} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}} \ \text{ и} \tag{9}$$

$$\overline{\nu} = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{x\in I_k} \frac{N(x)}{n(x)} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k},\ \ \underline{\nu} = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{x\in I_k} \frac{N(x)}{n(x)} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}. \tag{10}$$

Из (9) легко получаем

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}} \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \underline{\Delta}\, \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \underline{\Delta}\,\mu,$$

т. е. неравенство (4) выполняется. Точно так же

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}} \geq \underline{\Delta}\, \varlimsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}} = \underline{\Delta}\,l^{\rho},$$

что подтверждает истинность и неравенства (5).

Аналогичным образом из (10) получаем (7):

$$\overline{\nu} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_{k+1}}\, \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \underline{\nu}\,\mu.$$

Далее, для произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k при всех $x \in I_k$ в силу возрастания функции $N(x)$ имеем

$$\frac{N(x)}{x^{\rho}} \leqslant \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}} = \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}} \left(\frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}\right)^{\rho} < (\widetilde{\Delta} + \varepsilon)(l + \epsilon)^{\rho}.$$

Переход к верхнему пределу по $x \to +\infty$, а затем по $\varepsilon \to 0$ доказывает (6).

Для доказательства (8) и в дальнейшем нам понадобится формула:

$$N\big(\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|\big) - N(|\lambda_{n_k}|) = n_k \ln \frac{\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|}{|\lambda_{n_k}|}, \tag{11}$$

которая непосредственно вытекает из определения функции $N(x)$:

$$N\big(\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|\big) - N(|\lambda_{n_k}|) = \int\limits_{|\lambda_{n_k}|}^{|\lambda_{n_{k+1}}|} \frac{n(x)}{x}\,dx = n_k \int\limits_{|\lambda_{n_k}|}^{|\lambda_{n_{k+1}}|} \frac{dx}{x} = n_k \ln \frac{\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|}{|\lambda_{n_k}|}.$$

Чтобы получить (8), запишем (11) в удобном для этого виде:

$$\ln \frac{\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|}{|\lambda_{n_k}|} = \frac{N\big(\big|\lambda_{n_{k+1}}\big|\big)}{n_k} - \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \tag{12}$$

и перейдем к верхнему пределу, принимая во внимание формулы (10).

Все соотношения (4)–(8) установлены.

Из доказанного предложения вытекает следующий факт.

Следствие. *Если последовательность измерима* ($\underline{\Delta} = \overline{\Delta} = \Delta$) *с* $\Delta > 0$ *или только внутренне измерима* ($\underline{\nu} = \overline{\nu} = \nu$) *с* $\nu > 0$, *то она сама и последовательность её центральных индексов являются слабо лакунарными.*

Действительно, первое утверждение есть следствие формул (4) и (5), а второе вытекает из неравенств (7) и (8).

Следующее предложение устанавливает взаимоотношения между обычными, относительными и дискретными плотностями последовательностей.

Предложение 2. *Имеют место следующие неравенства*

$$\underset{\sim}{\Delta} \leqslant \min\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\, \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\} \leqslant \max\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\, \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\} \leqslant \widetilde{\Delta}. \tag{13}$$

Доказательство. Используя формулы (9) и (10), получаем

$$\underset{\sim}{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} = \underline{\Delta}\,\overline{\nu}$$

или

$$\underset{\sim}{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \overline{\Delta}\,\underline{\nu}.$$

Тем самым, неравенство $\underset{\sim}{\Delta} \leqslant \min\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\, \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\}$ доказано.

Неравенство $\max\left\{\underline{\Delta}\,\overline{\nu},\, \overline{\Delta}\,\underline{\nu}\right\} \leqslant \widetilde{\Delta}$ проверяется аналогично:

$$\widetilde{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k} = \underline{\Delta}\,\overline{\nu} \quad \text{и}$$

$$\widetilde{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \overline{\Delta}\,\underline{\nu}.$$

Предложение 2 установлено.

В книге [12, отд. IV, гл. 1, задача 60]) указана связь между относительными плотностями последовательности и ее показателем сходимости:

$$\underline{\nu} \leqslant 1/\rho \leqslant \overline{\nu}.$$

Какими свойствами будет обладать последовательность, для которой реализуется равенство в одном из этих неравенств? В этой связи предложение 2 может предоставить любопытную, на наш взгляд, информацию.

Следствие. *Если верхняя относительная плотность последовательности принимает свое наименьшее возможное значение, т. е.* $\overline{\nu} = 1/\rho$, *то выполняются равенства* $\underline{\Delta}^* = \underset{\sim}{\Delta} = \underline{\Delta}\,/\rho$.

Если нижняя относительная плотность последовательности принимает свое наибольшее возможное значение, т. е. $\underline{\nu} = 1/\rho$, *то* $\overline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta} = \overline{\Delta}/\rho$.

В самом деле, из (1) извлекаем $\underline{\Delta}\,/\rho \leqslant \underline{\Delta}^*$. При условии $\overline{\nu} = 1/\rho$ левая оценка в (13) дает $\underset{\sim}{\Delta} \leqslant \underline{\Delta}\,/\rho$. Отсюда

$$\underline{\Delta}\,/\rho \leqslant \underline{\Delta}^* \leqslant \underset{\sim}{\Delta} \leqslant \underline{\Delta}\,/\rho,$$

что приводит к первому утверждению следствия. Второе вытекает из аналогичных рассуждений, приводящих в ситуации $\underline{\nu} = 1/\rho$ к неравенствам

$$\overline{\Delta}/\rho \leqslant \widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}/\rho.$$

Предложение 3. *Для любой последовательности комплепксных чисел с показателем сходимости* $\rho > 0$ *справедливы следующие утверждения.*
Если $0 < \overline{\Delta} < \infty$, *то выполняется неравенство*

$$l^\rho \geq \delta, \tag{14}$$

а если $0 < \underline{\Delta} < \infty$, *то имеем*

$$p^\rho \leqslant \mu. \tag{15}$$

Всегда справедливы оценки

$$\ln p \leqslant \underline{\nu}\,(\mu - 1), \tag{16}$$

$$\ln l \geq \overline{\nu}\,\frac{\delta - 1}{\delta}. \tag{17}$$

Доказательство. При условии $\overline{\Delta} \neq 0$ можно записать

$$\overline{\Delta} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\,\frac{1}{\varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_{k+1}}{n_k}}\,\varlimsup_{k\to\infty}\left(\frac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}\right)^\rho = \overline{\Delta}\,\frac{l^\rho}{\delta}.$$

Сократив на $\overline{\Delta}$, получаем неравенство (14). Если же $\underline{\Delta} \neq 0$, то

$$\underline{\Delta} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{|\lambda_{n_{k+2}}|^\rho}\,\frac{1}{\varliminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_{k+1}}{n_k}}\,\varlimsup_{k\to\infty}\left(\frac{|\lambda_{n_{k+2}}|}{|\lambda_{n_{k+1}}|}\right)^\rho = \underline{\Delta}\,\frac{p^\rho}{\mu},$$

что приводит к неравенству (15).

Оценки (16), (17) доказываются с помощью обобщенной леммы Штольца (см., например, [7, с. 26]) и формул (12), (10): $\ln p = \varliminf\limits_{k\to\infty} \ln \dfrac{\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|}{|\lambda_{n_k}|} =$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_{k+1} - n_k}\left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_{k+1} - n_k}\,\varlimsup_{k\to\infty}\left(\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1\right) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}(\mu - 1) = \underline{\nu}(\mu - 1).$$

Опираясь на те же соображения, получаем, что $\quad \ln l = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \ln \dfrac{\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|}{|\lambda_{n_k}|} =$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k - n_{k-1}}\left(\frac{n_k - n_{k-1}}{n_k}\right) \geq$$

$$\geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(\left|\lambda_{n_{k+1}}\right|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k - n_{k-1}}\,\varliminf_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n_k/n_{k-1}}\right) \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}\left(1 - \frac{1}{\delta}\right),$$

т. е. неравенство $\ln l \geq \overline{\nu}\,\dfrac{\delta - 1}{\delta}$. Предложение 3 установлено.

Нам понадобится ряд элементарно проверяемых фактов, которые удобно собрать в одно утверждение.

Лемма. I. *Функция* $q_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x - 1}, & x \neq 1\,, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ *строго убывает на* $(0, +\infty)$.

II. *Функция* $q_2(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ *имеет на* $(0,+\infty)$ *единственный минимум в точке* $x = 1$, *равный* 1.

III. *Функция* $q_3(x) = \dfrac{b + a\ln x}{x^\rho}$, $a > 0$, $b > 0$, *имеет на* $(0,+\infty)$ *единственный максимум в точке* $x = e^{\frac{1}{\rho} - \frac{b}{a}}$, *равный* $\dfrac{a}{\rho}\, e^{\rho\,\frac{b}{a} - 1}$.

Исследуем теперь зависимость между индексом разреженности последовательности и ее обычными и дискретными плотностями.

Предложение 4. *Индекс разреженности, плотности и дискретные плотности последовательности, имеющей показатель сходимости* $\rho > 0$, *связаны соотношениями*

$$(p^\rho - 1)\,\widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}\, \ln p, \qquad \underline{\Delta}\, p^\rho\, \ln p \leqslant (p^\rho - 1)\, \underset{\sim}{\Delta}\,. \tag{18}$$

Доказательство. При $p = 1$ оба неравенства превращаются в тривиальное равенство $0 = 0$. При $p > 1$ обозначим $c_k = \dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}$ и применим лемму Штольца, используя равенство (10) и пункт I предыдущей леммы:

$$\widetilde{\Delta} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho - |\lambda_{n_k}|^\rho} =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \frac{\ln c_k}{c_k^\rho - 1} \leqslant \frac{1}{\rho} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln c_k^\rho}{c_k^\rho - 1} = \frac{\overline{\Delta}}{\rho} \cdot \frac{\ln p^\rho}{p^\rho - 1}.$$

Таким образом, $\widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta} \cdot \dfrac{\ln p}{p^\rho - 1}$. Точно так же

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho} \geq \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) - N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho - |\lambda_{n_k}|^\rho} =$$

$$= \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \frac{\ln c_k}{1 - c_k^{-\rho}} \geq \frac{1}{\rho} \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho} \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln c_k^{-\rho}}{c_k^{-\rho} - 1} = \frac{\underline{\Delta}}{\rho} \cdot \frac{p^\rho \ln p^\rho}{p^\rho - 1},$$

т. е. $\underset{\sim}{\Delta} \geq \underline{\Delta} \cdot \dfrac{p^\rho \ln p}{p^\rho - 1}$. Предложение полностью доказано.

В качестве следствия из предложений 2–4 можно получить

Предложение 5. *Если* $0 < \overline{\Delta} < \infty$, *причем последовательность* $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *имеет лакуны Адамара, то справедливы оценки*

$$\frac{\ln p}{\mu - 1} \leqslant \underline{\nu} \leqslant \frac{\ln p}{p^\rho - 1}. \tag{19}$$

Если $0 < \underline{\Delta} < \infty$, *и последовательность* $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ *имеет лакуны Адамара, то справедливы оценки*

$$\frac{p^\rho \ln p}{p^\rho - 1} \leqslant \overline{\nu} \leqslant \frac{\delta \ln l}{\delta - 1}. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку $\{\lambda_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ имеет лакуны Адамара, то $p > 1$. Поэтому, сопоставляя правую часть неравенств (13) с первым неравенством из формулы (18), получим $\underline{\nu}\,\overline{\Delta} \leqslant \widetilde{\Delta} \leqslant \overline{\Delta}\,\dfrac{\ln p}{p^\rho - 1}$. Это дает правую часть соотношения (19). Левая часть этого соотношения вытекает из (16), так как согласно (15) имеем $\mu \geq p^\rho > 1$.

При доказательстве оценок (20) действуем схожим образом, только теперь сочетаем левую часть (13) и второе неравенство из (18) с последующим привлечением (17). Обе части предложения 5 установлены.

Результат является точным в следующем смысле. Равенства всюду в (19), (20) заведомо достигаются, если реализуются равенства в (14), (15). А это имеет место, например, для любой последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, модули членов которой и центральные индексы образуют две согласованные "почти геометрические прогрессии" , т. е. с некоторым $q > 1$ удовлетворяют условиям

$$|\lambda_{n_{k+1}}| \sim q\,|\lambda_{n_k}|, \qquad n_{k+1} \sim q^{\rho}\, n_k, \qquad k \to \infty.$$

В этом случае $l = p = q$, $\mu = \delta = q^{\rho}$, и справедливы формулы

$$\underline{\nu} = \frac{\ln q}{q^{\rho} - 1}, \qquad \overline{\nu} = \frac{q^{\rho}\ln q}{q^{\rho} - 1}.$$

Теорема 1. *Нижняя дискретная усредненная плотность* $\underset{\sim}{\Delta}$ *и нижняя усредненная плотность* $\underline{\Delta}^*$ *произвольной бесконечно большой последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *совпадают:*

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underline{\Delta}^*.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\underset{\sim}{\Delta} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{N(|\lambda_n|)}{|\lambda_n|^{\rho}} \geq \varliminf_{x\to+\infty} \frac{N(x)}{x^{\rho}} = \underline{\Delta}^*.$$

Чтобы получить неравенство противоположного смысла, рассмотрим функцию $\Phi(x) = \dfrac{N(x)}{x^{\rho}}$, для изучения которой при $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\Phi_k(t) = \frac{N(|\lambda_{n_k}|) + n_k \ln t}{t^{\rho}}, \qquad t > 0.$$

Поскольку на промежутках $I_k = [|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_k+1}|)$ имеем $n_{\Lambda}(t) \equiv n_k$, то

$$\Phi(x) = \frac{N(|\lambda_{n_k}|) + n_k \ln \frac{x}{|\lambda_{n_k}|}}{x^{\rho}} = \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^{\rho}}\, \Phi_k\left(\frac{x}{|\lambda_{n_k}|}\right), \qquad x \in I_k.$$

Согласно пункту III леммы $\Phi(x)$ либо монотонна на I_k, либо имеет на этом промежутке единственный максимум. В любом случае имеем

$$\inf_{x\in I_k} \{\Phi(x)\} = \min\left\{\Phi(|\lambda_{n_k}|),\, \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\right\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\underline{\Delta}^* = \varliminf_{k\to\infty} \inf_{x\in I_k} \Phi(x) = \varliminf_{k\to\infty} \min\left\{\Phi(|\lambda_{n_k}|),\, \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\right\}$$
$$\geq \varliminf_{k\to\infty} \inf_{m\geq k} \Phi(|\lambda_m|) = \varliminf_{m\to\infty} \Phi(|\lambda_m|) = \underset{\sim}{\Delta}, \quad \text{т. е.} \quad \underline{\Delta}^* \geq \underset{\sim}{\Delta}\,.$$

Сопоставляя с предыдущим, получаем $\underset{\sim}{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, что и требовалось.

В формулировке следующего результата используем стандартное обозначение $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема 2. *Для произвольной бесконечно большой последовательности* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *с усредненной верхней* ρ*-плотностью* $\overline{\Delta}_{\rho}^*(\Lambda) = \overline{\Delta}^* \in (0, +\infty)$ *выполняются неравенства*

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{e^{\rho\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}, \tag{21}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{e^{\rho\,\overline{\nu}-1}}{\rho\,\overline{\nu}}, \tag{22}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{l^\rho}{\ln l^\rho + 1}, \tag{23}$$

$$\overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{l^{-\rho}}{(\ln l^{-\rho} + 1)^+}. \tag{24}$$

Доказательство. Отметим сразу, что неравенство (23) уточняет неравенство (5) в случае $l > 1$. Теперь приступим непосредственно к доказательству.

Если $\widetilde{\Delta} = \overline{\Delta}^*$, то неравенства (21)–(24) выполняются очевидным образом, поскольку каждый из сомножителей величины $\widetilde{\Delta}$ в правых частях этих неравенств не меньше единицы.

Изучим теперь случай $\widetilde{\Delta} < \overline{\Delta}^*$. Выберем положительное число $\varepsilon < \overline{\Delta}^* - \widetilde{\Delta}$. Сохраняя обозначения теоремы 1 и используя определение верхней усредненной плотности, найдем последовательности индексов $\mathbb{K}$ и точек x_k так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\overline{\Delta}^* = \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{x\in I_k} \Phi(x) = \lim_{k\in\mathbb{K}} \sup_{x\in I_k} \Phi(x),$$

$$\Phi(x_k) = \sup_{x\in I_k} \Phi(x) > \widetilde{\Delta} + \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{K}.$$

При достаточно больших номерах k функция $\Phi(x)$ принимает на концах промежутков I_k значения

$$\Phi(|\lambda_{n_k}|) < \widetilde{\Delta} + \varepsilon < \Phi(x_k).$$

Поэтому (отбрасывая при необходимости конечное число индексов из $\mathbb{K}$) можем считать, что для каждого $k \in \mathbb{K}$ точка x_k лежит строго внутри I_k, т. е.

$$|\lambda_{n_k}| < x_k < |\lambda_{n_{k+1}}|, \qquad k \in \mathbb{K}.$$

Обозначим $c_k = \dfrac{|\lambda_{n_{k+1}}|}{|\lambda_{n_k}|}$ и $\nu_k = \dfrac{N(|\lambda_{n_k}|)}{n_k}$. Применяя пункт III леммы к функции $\Phi_k(t)$, с учетом равенства

$$\Phi(x) = \frac{1}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\, \Phi_k\left(\frac{x}{|\lambda_{n_k}|}\right), \qquad x \in I_k,$$

получаем

$$1 < \frac{x_k}{|\lambda_{n_k}|} = e^{\frac{1}{\rho} - \nu_k} < c_k, \tag{25}$$

$$\Phi(x_k) = \frac{n_k}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\, e^{\rho\,\nu_k - 1} = \frac{N(|\lambda_{n_k}|)}{|\lambda_{n_k}|^\rho}\, \frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k} = \Phi(|\lambda_{n_k}|)\, \frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k}. \tag{26}$$

Логарифмирование (25) приводит к неравенству

$$1 - \ln c_k^\rho < \rho\,\nu_k < 1. \tag{27}$$

Теперь после проведенной подготовительной работы оценка (21) легко доказывается предельным переходом в равенстве (26):

$$\overline{\Delta}^* = \lim_{k\in\mathbb{K}} \Phi(x_k) = \lim_{k\in\mathbb{K}} \left\{\Phi(|\lambda_{n_k}|)\, \frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k}\right\} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \Phi(|\lambda_{n_k}|)\, \varlimsup_{k\to\infty} \frac{e^{\rho\,\nu_k-1}}{\rho\,\nu_k} \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}.$$

Здесь мы учли, что функция $q_2(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}$ убывает на интервале $(0,\ 1)$, согласно пункту II леммы.

Неравенство (22) доказывается аналогичным образом. Запишем

$$\Phi(x) = \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|) + n_k \ln \frac{x}{|\lambda_{n_{k+1}}|}}{x^\rho} = \frac{1}{|\lambda_{n_{k+1}}|^\rho}\, \Phi_k\left(\frac{x}{|\lambda_{n_{k+1}}|}\right), \qquad x \in I_k.$$

Обозначив $\nu'_k = \dfrac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{n_k}$, получим $\dfrac{1}{c_k} < \dfrac{x}{|\lambda_{n_{k+1}}|} = e^{\frac{1}{\rho}-\nu'_k} < 1$, или, после логарифмирования,

$$1 < \rho\,\nu'_k < 1 + \ln c_k^{\rho}. \tag{28}$$

Следующее соотношение выводится так же, как и формула (25), и на этот раз приобретает вид

$$\Phi(x_k) = \frac{n_k}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}\, e^{\rho\,\nu'_k - 1} = \frac{N(|\lambda_{n_{k+1}}|)}{|\lambda_{n_{k+1}}|^{\rho}}\, \frac{e^{\rho\,\nu'_k-1}}{\rho\,\nu'_k} = \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\, \frac{e^{\rho\,\nu'_k-1}}{\rho\,\nu'_k}. \tag{29}$$

Снова используя пункт II леммы (теперь на промежутке $(1,\,+\infty)$, где функция $q_2(x)$ возрастает), предельным переходом из (28) получаем (22):

$$\overline{\Delta}^{*} = \lim_{k\in\mathbb{K}} \Phi(x_k) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\, \varlimsup_{k\to\infty} \frac{e^{\rho\,\nu'_k-1}}{\rho\,\nu'_k} \leqslant \widetilde{\Delta}\, \frac{e^{\rho\,\overline{\nu}-1}}{\rho\,\overline{\nu}}.$$

Для доказательства неравенства (23) воспользуемся определением индекса лакунарности, согласно которому при любом $\varepsilon > 0$ и всех $k \geq k_0(\varepsilon)$ выполняется $c_k < l + \varepsilon$. Это позволяет для достаточно больших $k \in \mathbb{K}$ сначала из (28) вывести, что $1 < \rho\,\nu'_k < 1+\ln(l+\epsilon)^{\rho}$, а затем из (29) и леммы II получить

$$\Phi(x_k) < \Phi(|\lambda_{n_{k+1}}|)\, \frac{e^{\ln(l+\varepsilon)^{\rho}}}{\ln(l+\varepsilon)+1} < (\widetilde{\Delta}+\varepsilon)\, \frac{(l+\varepsilon)^{\rho}}{\ln(l+\varepsilon)+1}.$$

Последовательный переход к пределу при $k \to \infty,\ k \in \mathbb{K}$, и $\varepsilon \to 0$ приводит к нужной оценке (23).

Неравенство (24) доказывается с использованием аналогичных соображений. Действительно, из (27) следуют неравенства

$$1 - \ln(l+\epsilon)^{\rho} < 1 - \ln c_k < \rho\,\nu_k < 1, \quad \rho\,\nu_k > 0,$$

откуда $\rho\,\nu_k > (1 + \ln(l+\epsilon)^{-\rho})^{+}$. Дальнейшее ясно.

Доказательство теоремы 2 завершено.

Отметим, что оценки (21) и (22) теоремы 2 можно записать в виде

$$\frac{\widetilde{\Delta}}{\underline{\Delta}^{*}} \geq \rho\,\underline{\nu} e^{1-\rho\,\underline{\nu}} = e^{1-\rho\,\underline{\nu}} \ln\frac{e}{e^{1-\rho\,\underline{\nu}}}, \qquad \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^{*}} \geq e^{1-\rho\,\overline{\nu}} \ln\frac{e}{e^{1-\rho\,\overline{\nu}}}$$

соответственно. Поскольку функция $a\ln\dfrac{e}{a}$ строго возрастает на отрезке $[0,\,1]$ и строго убывает на промежутке $[1,\infty),$ то предыдущие неравенства эквивалентны неравенствам

$$e^{1-\rho\,\underline{\nu}} \geq \widetilde{a}_2, \quad e^{1-\rho\,\overline{\nu}} \leqslant \widetilde{a}_1, \tag{30}$$

где $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2 -$ корни уравнения $a\ln\dfrac{e}{a} = \dfrac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^{*}}$, $\quad 0 \leqslant \widetilde{a}_1 \leqslant 1 \leqslant \widetilde{a}_2 \leqslant e$. Логарифмируя (30), приходим к соотношениям

$$\rho\,\underline{\nu}\,\widetilde{a}_2 \leqslant \widetilde{a}_2 \ln\frac{e}{\widetilde{a}_2} = \frac{\widetilde{\Delta}}{\underline{\Delta}^{*}} \quad \text{и} \quad \rho\,\overline{\nu}\,\widetilde{a}_1 \geq \widetilde{a}_1 \ln\frac{e}{\widetilde{a}_1} = \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^{*}}.$$

Таким образом, неравенства (21) и (22) теоремы 2 можно коротко записать в эквивалентном виде

$$\rho\,\underline{\nu}\,\widetilde{a}_2 \leqslant \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^{*}} \leqslant \rho\,\overline{\nu}\,\widetilde{a}_1.$$

Действуя аналогичным образом, запишем неравенства (23) и (24) в виде

$$\frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^{*}} \geq l^{-\rho} \ln\frac{e}{l^{-\rho}} \quad \text{и} \quad \frac{\widetilde{\Delta}}{\overline{\Delta}^{*}} \geq l^{\rho} \ln\frac{e}{l^{\rho}}, \tag{31}$$

что эквивалентно

$$\widetilde{a_1} \geq l^{-\rho}, \quad \widetilde{a_2} \leqslant l^{\rho}. \tag{32}$$

Дополним теперь неравенство (21) оценкой снизу через нижние усредненную и относительную плотности.

Предложение 6. *Справедливы неравенства*

$$\underline{\Delta}^* \,\frac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta}\,\frac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}. \tag{33}$$

Доказательство. В обосновании нуждается лишь левая часть оценки (33) в нетривиальном случае, когда $0 < \underline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}^* < +\infty$. Предположим, рассуждая от противного, что $\overline{\Delta}^* < \underline{\Delta}^* \dfrac{e^{\rho\,\underline{\nu}-1}}{\rho\,\underline{\nu}}$. Тогда $\rho\,\underline{\nu} e^{1-\rho\,\underline{\nu}} < \dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$, или, что равносильно, $e^{1-\rho\,\underline{\nu}} \ln \dfrac{e}{e^{1-\rho\,\underline{\nu}}} < \dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$. Следовательно, $e^{1-\rho\,\underline{\nu}} > a_2$, где, как и прежде, a_2 обозначает больший корень уравнения $a \ln \dfrac{e}{a} = \dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$. Отсюда с учетом левой части (13) заключаем, что

$$\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} = a_2 \ln \frac{e}{a_2} > a_2 \rho\,\underline{\nu} \geq a_2 \rho\,\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}}.$$

Из полученного неравенства $\dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} > a_2\rho\,\dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}}$ выводим оценку $\overline{\Delta} > a_2\rho\,\overline{\Delta}^*$, которая противоречит последнему из соотношений (2). Предложение доказано.

Отметим в очередной раз, что в случае дискретно измеримой последовательности, определяемой условием $\underline{\Delta}^* = \widetilde{\Delta}$, знаки неравенств в предложении 6 заменяются равенствами, подтверждая точность оценок (33).

В работе [11] для корней a_1 и a_2 уравнения $a \ln \dfrac{e}{a} = \dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$ найдено представление

$$a_1 = e\,q^{\frac{q}{1-q}}, \quad a_2 = e\,q^{\frac{1}{1-q}}$$

через параметр $q = \dfrac{a_2}{a_1}$ и показано, что в случае дискретно измеримой последовательности комплексных чисел с индексом лакунарности l выполняется равенство $q = l^{\rho}$. Воспользуемся этими фактами для получения следующего результата, который интересно сравнить с оценками (23), (24) из теоремы 2.

Предложение 7. *Для произвольной последовательности комплексных чисел с конечными положительными усредненными плотностями $\underline{\Delta}^*$, $\overline{\Delta}^*$ и индексом лакунарности l справедливы неравенства*

$$\overline{\Delta}^* \geq \underline{\Delta}^*\, l^{\frac{\rho}{l^{\rho}-1}} \frac{l^{\rho}-1}{e\,\ln l^{\rho}}, \tag{34}$$

$$\underline{\Delta}^* \,\frac{l^{\rho}-1}{a_2\,\ln l^{\rho}} \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \underline{\Delta}^* \,\frac{l^{\rho}-1}{a_1\, l^{\rho}\,\ln l^{\rho}}. \tag{35}$$

Как и ранее, a_1 и a_2 – корни уравнения $a \ln \dfrac{e}{a} = \dfrac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*}$. Наличие дискретной измеримости последовательности обеспечивает в (34), (35) знаки равенств.

Доказательство. Из неравенств (5) и (1) следует, что $l^{\rho} \leqslant \dfrac{\overline{\Delta}}{\underline{\Delta}} \leqslant \dfrac{a_2}{a_1} = q$, т. е. $l^{\rho} \leqslant q$. Привлекая пункт I леммы, видим, что выражение $a_2(q) = e\,q^{\frac{1}{1-q}}$ возрастает с увеличением

q. Поэтому $a_2(q) \geq a_2(l^\rho)$. Поскольку функция $a \ln \dfrac{e}{a}$ убывает на промежутке $[1, +\infty)$, то

$$\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} = a_2(q) \ln \frac{e}{a_2(q)} \leqslant a_2(l^\rho) \ln \frac{e}{a_2(l^\rho)} = e\, l^{\frac{\rho}{1-l^\rho}} \frac{\ln l^\rho}{l^\rho - 1},$$

что дает (34). Неравенства (35) вытекают из аналогичных рассуждений, если заметить еще, что $a_1 = a_1(q) = e\, q^{\frac{q}{1-q}}$ убывает при возрастании q. Так, например, правая часть (35) следует из соотношений

$$\frac{\underline{\Delta}^*}{\overline{\Delta}^*} = a_1(q) \ln \frac{e}{a_1(q)} \geq a_1 \ln \frac{e}{a_1(l^\rho)} = a_1\, l^\rho \frac{\ln l^\rho}{l^\rho - 1}.$$

Предложение 7 установлено.

Как уже отмечалось, дискретная измеримость последовательности не влечет её измеримости. Интересно, какие дополнительные к дискретной измеримости условия на последовательность могут обеспечить её измеримость? Как видно из предложения 1, одним из таких условий является слабая лакунарность последовательности. Действительно, при $l = 1$ из (6) вытекает $\underline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$, т. е. $\underline{\Delta}^* = \overline{\Delta}^*$. Другим условием служит внутренняя измеримость последовательности, которая, согласно неравенству (8) предложения 1, влечет её слабую лакунарность. Однако, из теоремы 2 можно вывести более сильное утверждение.

Предложение 8. *Пусть Λ — дискретно измеримая последовательность комплексных чисел. Тогда выполнение любого из условий $\underline{\nu} = \frac{1}{\rho}$ или $\overline{\nu} = \frac{1}{\rho}$ влечет измеримость этой последовательности.*

Доказательство. Дискретная измеримость означает, что $\widetilde{\Delta} = \underline{\Delta}^*$. Выполнение же любого из условий предложения приводит, согласно формулам (21) и (22), к неравенствам $\underline{\Delta}^* \leqslant \overline{\Delta}^* \leqslant \widetilde{\Delta} \leqslant \underline{\Delta}^*$, влекущим измеримость.

Возникают естественные вопросы: влечет ли только слабая лакунарность или только внутренняя измеримость последовательности (без дискретной) её измеримость? На оба вопроса мы дадим отрицательные ответы, используя понятие *уточненного порядка* (по Валирону). Напомним, что так называется дифференцируемая на $\mathbb{R}_+$ функция $\rho(x)$, удовлетворяющая двум условиям $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = \rho > 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho'(x)\, x \ln x = 0$, которые эквивалентны одному условию $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\, h'(x)}{h(x)} = \rho$ для функции $h(x) = x^{\rho(x)}$, или, что наиболее удобно для наших целей, условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\, L'(x)}{L(x)} = 0 \tag{36}$$

для функции $L(x) = h(x)\, x^{-\rho}$.

Предложение 9. *Для наперед заданных чисел $\rho > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha \in [0, \beta]$ существуют внутренне измеримые, слабо лакунарные последовательности с ρ-плотностями $\underline{\Delta} = \alpha$ и $\overline{\Delta} = \beta$.*

Доказательство. Пусть числа ρ, β и α удовлетворяют условиям предложения. Если $\alpha > 0$, то для построения заявленной последовательности возьмем функцию $\alpha(x) \equiv \alpha$. Если же $\alpha = 0$, то полагаем $\alpha(x) = \ln^{-\gamma} x$, где $\gamma \in (0, 1)$. Выберем затем в качестве $L(x)$ функцию

$$L(x) = \frac{1}{\rho} \sqrt{\alpha(x)\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(x)}} \right)^{\sin \ln^\gamma x},$$

которая, как несложно проверить, удовлетворяет условию (36). Определим далее функцию $n(x) = [x\,h'(x)]$, а последовательность Λ возьмем так, чтобы ее считающая функция совпадала с $n(x)$. Здесь $h(x) = x^\rho\,L(x)$, а $[x]$ обозначает целую часть числа x. Из результатов монографии [7] следует, что при $x \to +\infty$ условия $N(x) \sim h(x)$ и $n(x) \sim x\,h'(x)$ на считающие функции Λ эквивалентны. Последовательность Λ является внутренне измеримой, так как для нее по построению выполнено

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{n(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x\,h'(x)} = \frac{1}{\rho}\,.$$

С другой стороны,

$$\rho\,\underline{\Delta}^* = \rho\varliminf_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{x^\rho} = \rho\varliminf_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x^\rho} = \rho\varliminf_{x\to+\infty}L(x) =$$

$$= \varliminf_{x\to+\infty}\sqrt{\alpha(x)\beta}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(x)}}\right)^{\sin\ln^\gamma x} = \varliminf_{x\to+\infty}\sqrt{\alpha^2(x)} = \lim_{x\to+\infty}\alpha(x) = \alpha$$

и

$$\rho\,\overline{\Delta}^* = \rho\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{x^\rho} = \rho\varlimsup_{x\to+\infty}L(x) = \varlimsup_{x\to+\infty}\sqrt{\alpha(x)\beta}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(x)}}\right)^{\sin\ln^\gamma x} = \beta.$$

Применяя следствие из предложения 2, получаем

$$\underline{\Delta} = \rho\,\underline{\Delta}^* = \alpha \ \text{ и } \ \overline{\Delta} = \rho\,\overline{\Delta}^* = \beta.$$

Итак, построенная последовательность имеет заданные ρ-плотности, внутренне измерима, а её слабая лакунарность вытекает из неравенства (8) предложения 1. Доказательство завершено.

Подытоживая предыдущие рассуждения, можно сформулировать следующее утверждение.

Предложение 10. *Произвольная последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ комплексных чисел с показателем сходимости $\rho > 0$ и $0 < \overline{\Delta} < \infty$ измерима тогда и только тогда, когда она дискретно измерима и выполнено хотя бы одно из условий:*

a) последовательность Λ слабо лакунарна, т. е. $l_\Lambda = \varlimsup_{n\to\infty}\dfrac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} = 1$,

b) выполняется условие $\underline{\nu} = \varliminf_{x\to+\infty}\dfrac{N(x)}{n(x)} = \dfrac{1}{\rho}$,

c) выполняется условие $\overline{\nu} = \varlimsup_{x\to+\infty}\dfrac{N(x)}{n(x)} = \dfrac{1}{\rho}$,

d) последовательность Λ внутренне измерима, т. е. существует предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{n(x)}\ \left(=\frac{1}{\rho}\right).$$

Доказательство. Достаточность дискретной измеримости последовательности Λ с любым из условий a) или d) для её измеримости уже обсуждалась перед предложением 8, а с условиями b), c) — в самом предложении 8.

Пусть теперь последовательность Λ измерима, т. е. $\underline{\Delta} = \overline{\Delta} = \Delta$. Её дискретная измеримость следует прямо из определения. Слабая лакунарность вытекает из неравенства (5) предложения 1, а внутренняя измеримость – из неравенств (1) и того, что существует предел

$$\nu = \lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)}{n(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{N(x)/x^\rho}{n(x)/x^\rho} = \frac{\Delta/\rho}{\Delta} = \frac{1}{\rho}.$$

Все доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ. 1956. 632 с.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
3. Boas R.P. *Entire functions.* Acad. Press. New-York. 1954. 276 p.
4. Гольдберг А.А. *Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, IV* // Матем. сб. Т. 66. 1965. С. 411–457.
5. Кондратюк А.А. *Об экстремальном индикаторе целых функций с положительными нулями* // Сиб. матем. журн. Т. 11. № 5. 1970. С. 1084–1092.
6. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Монография-обзор, РИЦ БашГУ, изд. четвертое, дополненное. Уфа. 2012. 176 с.
7. Брайчев Г.Г. *Введение в теорию роста выпуклых и целых функций* М.: Прометей. 2005. 232 с.
8. Брайчев Г.Г. *Точные оценки типов целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ нулями на луче* // Уфимск. матем. журн. Т. 4. № 1. 2012. С. 29–37.
9. Брайчев Г.Г. *Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0,1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей* // Матем. сб. Т. 203. № 7. 2012. С. 31–56.
10. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями* // Матем. заметки. Т. 91. в. 5. 2012. С. 674–690.
11. Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б. *Точные соотношения между плотностями нулей целых функций конечного порядка* // Математичнi студiї. Т. 30. № 2. 2008. С. 183–188.
12. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа. Часть II. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел.* М.: Наука. 1978. 432 с.

Георгий Генрихович Брайчев
Московский педагогический государственный университет,
ул. М.Пироговская, 1,
199296, Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru