ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 3-16.

УДК 519.216.73, 519.216.71

ОДНОМЕРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ПОТРАЕКТОРНЫЙ ПОДХОД

М.А. АБДУЛЛИН, Н.С. ИСМАГИЛОВ, Ф.С. НАСЫРОВ

Аннотация. Исследуются потраекторные аналоги одномерных стохастических дифференциальных уравнений с симметричным интегралом. Найдены условия существования, единственности решений, непрерывности и дифференцируемости по параметру, линеаризуемости таких уравнений, исследована структура решения.

Ключевые слова: симметричный интеграл, дифференциальные уравнения с симметричным интегралом.

Mathematics Subject Classification: 60H10, 60H05

1. Введение. Симметричный интеграл и его свойства

В стохастическом анализе (см., напр. [5]) в основном применяются два вида интегралов, это интегралы Ито и интегралы Стратоновича. Оказалось, что интеграл Стратоновича более восприимчив к обобщению, и его детерминированным аналогом является симметричный интеграл. Симметричные интегралы были введены последним из авторов, систематическое изложение теории симметричных интегралов и некоторые результаты по теории уравнений с симметричными интегралами приведены в монографии [8].

Главная цель данных исследований – перенести на язык теории функций ту часть стохастического анализа, которая может быть построена с привлечением понятия симметричного интеграла. При таком подходе интегрирование можно вести по произвольной непрерывной функции (реализации случайного процесса), а интегранды не обязаны быть предсказуемыми.

Ниже приводятся определение и некоторые свойства симметричного интеграла (см. подробнее в [6], [8]).

Пусть $X(s)$, $s \in [0,+\infty)$, – произвольная непрерывная функция, тогда *симметричным интегралом* называется

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s,X^{(n)}(s))(X^{(n)})'(s)ds, \tag{1}$$

где $X^{(n)}(s)$ – ломаная, построенная по разбиению $\{t_k^{(n)}\}$ отрезка $[0,t]$ и функции $X(s)$, причем $\max_k(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$.

M.A. Abdullin, N.S. Ismagilov, F.S. Nasyrov, One dimensional stochastic differential equations: pathwise approach.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению 220.

Поступила 24 августа 2013 г.

Будем говорить, что для пары функций $(X(s), f(s,u))$ справедливо условие (S), если выполнены следующие предположения:
(a) $X(s)$, $s \in [0,t]$, – непрерывная функция;
(b) При п. в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, непрерывна справа и имеет ограниченную вариацию;
(c) Полная вариация $|f|(t,u)$ по переменной s функции $f(s,u)$ на $[0,t]$ локально суммируема по переменной u;
(d) При п. в. u $\int_0^t \mathbf{1}(s : X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$.

В [6], [8] показано, что если для функций $(X(s), f(s,u))$ справедливо условие (S), то симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s) * dX(s)$ существует.

Важные свойства симметричного интеграла.

1. Пусть для $(X(s), f(s,u))$ справедливо условие (S), тогда
$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,u)du - \int_R \int_0^t \kappa(u, X(0), X(s)) f(ds,u)du, \qquad (2)$$
где $\kappa(u,a,b) = sign(b-a)\mathbf{1}(a \wedge b < u < a \vee b)$.

2. Для симметричного интеграла имеет место дифференциал, соответствующий стохастическому дифференциалу с интегралом Стратоновича.
Пусть функция $F(t,u)$ имеет непрерывные частные производные F_t' и F_u', тогда существует симметричный интеграл $\int_0^t F_u'(s,X(s)) * dX(s)$, и справедлива формула
$$F(t,X(t)) - F(0,X(0)) = \int_0^t F_u'(s,X(s)) * dX(s) + \int_0^t F_s'(s,X(s))ds. \qquad (3)$$

3. Пусть $Y(s)$, $s \in R^+$, – непрерывная функция, положим $X(s) = g(s,Y(s))$, где функция $g(s,y)$, $s \in R^+$, $y \in R$ совместно непрерывна вместе со своими частными производными $g_s'(s,y)$ и $g_y'(s,y)$. Пусть выполнены условия:

- Функции $f(s,u)$, $f_s'(s,u)$, $\phi(s,y)$, $\phi_s'(s,y)$, где $\phi(s,y)$=$f(s,g(s,y))g_y'(s,y)$, совместно непрерывны.
- Пары функций $(X(s), f(s,u))$ и $(Y(s), \phi(s,y))$ удовлетворяют условию (S) на $[0,t]$.

Тогда справедлива формула замены переменных в симметричном интеграле
$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t f(s,g(s,Y(s)))g_y'(s,Y(s)) * dY(s) +$$
$$+ \int_0^t f(s,g(s,Y(s)))g_s'(s,Y(s))ds.$$

Пусть $W(s) = W(s,\omega)$ – стандартный винеровский процесс, тогда в рамках формулы Ито для почти всех траекторий винеровского процесса потраекторный симметричный интеграл $\int_0^t f(s,W(s)) * dW(s)$ совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича $\int_0^t f(s,W(s)) * dW(s)$. Поэтому мы в этой ситуации будем применять одни и те же обозначения для обоих типов интегралов.

2. О существовании и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений с симметричными интегралами

Новый тип интегралов поставил задачу переноса части результатов теории стохастических дифференциальных уравнений (в дальнейшем–СДУ) на детерминированный язык. Хотя класс подынтегральных выражений для симметричного интеграла сравнительно узок, он оказался достаточным для построения содержательной теории детерминированных аналогов СДУ.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения с симметричным интегралом

$$d\xi_t = \sigma(t, X(t), \xi_t) * dX(t) + b(t, X(t), \xi_t)dt, \quad \xi_0 = \xi(0), \quad t \in [0, t_0], \tag{4}$$

где $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная функция.

Решением задачи Коши уравнения (4) называется функция $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ с непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$ такая, что дифференциал с симметричным интегралом этой функции совпадает с правой частью уравнения (4).

Теорема 1. *Пусть $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная функция, а коэффициенты уравнения $\sigma(t, v, \phi)$ и $b(t, v, \phi)$ совместно непрерывны. Предположим, что функция $\varphi(t, v)$, $\varphi(0, X(0)) = \xi(0)$ обладает непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$, и при п. в. $t \in [0, t_0]$ удовлетворяет системе уравнений:*

$$\varphi'_t(t, X(t)) = b(t, X(t), \varphi(t, X(t))), \tag{5}$$

$$\varphi'_v(t, X(t)) = \sigma(t, X(t), \varphi(t, X(t))). \tag{6}$$

Тогда при всех $t \in [0, t_0]$ существует симметричный интеграл

$$\int_0^t \sigma(s, X(s), \varphi(s, X(s))) * dX(s)$$

и $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ есть решение уравнения (4).

Доказательство. Пусть функция $\varphi(t, v)$, $\varphi(0, X(0)) = \xi(0)$, с непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$ при п.в. $t \in [0, t_0]$ удовлетворяет условиям (5) и (6). Заметим, что ввиду непрерывности выражений в обеих частях равенств (5) и (6), справедливость равенств (5) и (6) при п. в. $t \in [0, t_0]$ равносильна их выполнению при всех $t \in [0, t_0]$. Тогда ввиду формулы для дифференциала с симметричным интегралом имеем:

$$\varphi(t, X(t)) - \xi(0) = \int_0^t \varphi'_v(s, X(s)) * dX(s) + \int_0^t \varphi'_s(s, X(s))\, ds =$$

$$= \int_0^t \sigma(s, X(s), \xi_s) * dX(s) + \int_0^t b(s, X(s), \xi_s)\, ds.$$

Следовательно, функция $\xi(t) = \varphi(t, X(t))$ является решением задачи Коши (4).

Теорема 2. *Пусть $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная, почти везде не дифференцируемая функция, а коэффициенты уравнения $\sigma(t, v, \phi)$ и $b(t, v, \phi)$ удовлетворяют условиям:*

(a) функция $\sigma(t, v, \phi)$ совместно непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\sigma'_t(t, v, \phi)$ и $\sigma'_\phi(t, v, \phi)$;

(b) функция $b(t, v, \phi)$ совместно непрерывна.

Тогда следующие условия равносильны:

1. Задача Коши (4) имеет решение $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ с функцией $\varphi(t, v)$;

2. Функция $\varphi(t, v)$ с непрерывными производными $\varphi'_t(t, v)$, $\varphi'_v(t, v)$, $\varphi''_{tv}(t, v)$ такая, что $\varphi(0, X(0)) = \xi(0)$, при п. в. $t \in [0, t_0]$ удовлетворяет условиям (5) и (6).

Доказательство. Пусть $\xi_t = \varphi(t, X(t))$ – решение уравнения (4), тогда при любом $t \in [0, t_0]$ ввиду формул для дифференциала и вычисления симметричного интеграла имеем:

$$\varphi(t, X(t)) - \varphi(0, X(0)) = \int_{X(0)}^{X(t)} \varphi'_v(t, v) dv + \int_0^t \varphi'_s(s, X(0))\, ds =$$

$$= \int_{X(0)}^{X(t)} \sigma(t, v, \varphi(t, v)) dv + \int_0^t \left[b(s, X(s), \varphi(s, X(s))) - \int_{X(0)}^{X(s)} (\sigma(s, v, \varphi(s, v))'_s dv \right] ds.$$

Обозначим $\Phi(t,v)=\varphi'_v(t,v)-\sigma(t,v,\varphi(t,v))$, $g(t,X(t))=b(t,X(t),\varphi(t,X(t)))-\varphi'_t(t,X(0))-$ $-\int_{X(0)}^{X(t)}(\sigma(t,v,\varphi(t,v))'_t dv$, тогда полученное выше равенство можно записать в виде:

$$\int_{X(0)}^{X(t)}\Phi(t,v)dv=\int_0^t g(s,X(s))ds. \tag{7}$$

Заметим, что правая часть в равенстве (7) непрерывно дифференцируема по t как интеграл с переменным верхним пределом, значит, левая тоже, поэтому, дифференцируя обе части равенства (7) по переменной t, имеем:

$$g(t,X(t))-\int_{X(0)}^{X(t)}\Phi'_t(t,v)dv=\frac{d}{dt}\left(\int_{X(0)}^{X(t)}\Phi(p,v)dv\right)\Bigg|_{p=t},\quad t\in[0,t_0]. \tag{8}$$

Положим

$$a_t(h)=\frac{1}{h}\int_{X(t)}^{X(t+h)}\Phi(t,v)dv,\quad r_t(h)=\frac{1}{X(t+h)-X(t)}\int_{X(t)}^{X(t+h)}\Phi(t,v)dv,$$

если $X(t+h)\neq X(t)$, и $r_t(h)=\Phi(t,X(t))$ в случае $X(t+h)=X(t)$. Ввиду формулы (8) при каждом t существует конечный предел $a(t)=\lim\limits_{h\to 0}a_t(h)$, а предел $r(t)=\lim\limits_{h\to 0}r_t(h)$ существует и конечен в силу непрерывности функции $\Phi(t,v)$ по переменной v, и при этом справедливо при каждом $h\neq 0$ равенство

$$\frac{a_t(h)}{r_t(h)}=\frac{X(t+h)-X(t)}{h}. \tag{9}$$

Но функция $X(t)$ почти везде не дифференцируема, поэтому при п. в. t предел в левой части (9) при $h\to 0$ бесконечен или не существует. Последнее возможно только в том случае, когда либо $a(t)\neq 0$, $r(t)=0$ или $a(t)=r(t)=0$, то есть в любом случае $r(t)=0$. Значит, для любого $t\in[0,t_0]$ справедливо соотношение (6). Далее, ввиду (6) из формулы

$$\varphi'_v(t,X(t))*dX(t)+\varphi'_t(t,X(t))dt=\sigma(t,X(t),\xi_t)*dX(t)+b(t,X(t),\xi_t)dt$$

следует справедливость условия (5).

Для системы уравнений (5), (6), которая является непривычного вида системой уравнений вдоль траектории функции $X(s)$, хорошо разработанные методы решения, по-видимому, отсутствуют. Поэтому представляется разумным заменить задачу решения системы (5), (6) на задачу решения следующей цепочки уравнений

$$\varphi'_v(t,v)=\sigma(t,v,\varphi(t,v)),\ \varphi'_t(t,X(t))=b(t,X(t),\varphi(t,X(t))),\ \varphi(0,X(0))=\xi(0). \tag{10}$$

В этом случае мы можем воспользоваться методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений (в дальнейшем – ОДУ). Действительно, общее решение первого уравнения из (10), если оно существует, зависит от произвольной функции $C(t)$: $\varphi(t,v)=\varphi^*(t,v,C(t))$, здесь $\varphi^*(t,v,C)$ известная функция, при этом ввиду теоремы о дифференцируемости по параметру решений ОДУ функция $C(t)$ гладкая. Подставляя найденную функцию $\varphi^*(t,v,C(t))$ во второе уравнение из (10), приходим к задаче Коши для неизвестной функции $C(t)$

$$(\varphi^*)'_t(t,X(t),C(t))+(\varphi^*)'_C(t,X(t),C(t))C'(t)=b(t,X(t),\varphi^*(t,X(t),C(t))),$$

$\varphi^*(0,X(0),C(0))=\xi(0)$. Очевидно, решение цепочки (10), если такое существует, дает решение системы (5), (6). Это означает, что вопрос существования решения уравнения (1) можно свести к задаче выяснения условий разрешимости ОДУ из цепочки (10).

Рассмотрим более подробно задачу Коши для более простого уравнения с симметричным интегралом

$$d\xi_t=\sigma(t,\xi_t)*dX(t)+b(t,\xi_t)dt, \tag{11}$$

где $X(t)$ – непрерывная функция.

Предположим, что в области $G = \{(s, \phi)\} \subseteq R^2$ справедливы следующие условия:

- Найдется константа σ_0 такая, что $|\sigma(t, \phi)| \geq \sigma_0 > 0$.
- Функция $\sigma(t, \phi)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным.
- Функция $b(t, \phi)$ непрерывна и удовлетворяет локально условию Липшица по ϕ, то есть для любой точки $(t_0, \phi_0) \in G$ найдется окрестность этой точки U такая, что $|b(t, \phi_1) - b(t, \phi_2)| \leq L|\phi_1 - \phi_2|$ для всех $(t, \phi_k) \in U$, $k = 1, 2$, где L не зависит от точек из U.

Заметим, что первое из соотношений в (10) сразу приводит к равенству

$$\Phi(t, \phi, v) \equiv \int \frac{d\phi}{\sigma(t, \phi)} - v = 0.$$

Поскольку ввиду наших предположений при $(t, \phi) \in G$, $v \in R$ существуют непрерывные производные $\Phi'_t(t, \phi, v)$, $\Phi'_v(t, \phi, v)$ и отличная о нуля производная $\Phi'_\phi(t, \phi, v)$, то в силу теоремы о неявной функции (см. [4], стр. 48) существует (локально) функция $\phi = \phi^*(t, v)$, которая непрерывно дифференцируема по t и v. Для любой точки $(t_0, \phi_0) \in G$ обозначим через $J_0(t_0, \phi_0)$ максимальный интервал, в котором существует неявная функция $\phi = \phi(t, v, t_0, \phi_0)$ с начальными данными $\phi(t, X(t_0)) = \phi_0$.

Второе уравнение из (10) можно записать в виде

$$C'(t) = \frac{b(t, \phi(t, X(t) + C(t))) - (\phi)'_t(t, v)|_{v=X(t)+C(t)}}{\sigma(t, \phi(t, X(t) + C(t)))}. \tag{12}$$

Пусть $C(t_0)$ определяется из равенства $\phi(t_0, X(t_0) + C(t_0)) = \phi_0$. Заметим, что правая часть уравнения (11) непрерывна в G, а в ввиду того факта, что $\sigma(t, \phi)$ непрерывно дифференцируемая на G, а $\phi(t, v)$ непрерывно дифференцируема по обеим переменным, из формулы $(\phi)'_v(t, v) = \sigma(t, v, \phi(t, v))$ вытекает непрерывная дифференцируемость функции $(\phi)'_t(t, v)|_{v=X(t)+C}$ по переменной C. Следовательно, в силу теоремы 2.3.2 из [4] $G^{(1)} = \{(t, C) : (t, \phi(t, X(t) + C)) \in G\}$ есть область единственности для уравнения (11), и $C(t) = C(t, t_0, C_0)$ есть решение уравнения (11) с начальными данными (t_0, C_0), определенное на множестве $D = \{(t, t_0, C_0) : (t_0, C_0) \in G^{(1)}, t \in J_1(t_0, C_0)\}$, где $J_1(t_0, C_0)$ – максимальный интервал существования решения уравнения (11). Поэтому для любых начальных данных $(t_0, \phi_0) \in G$ существует решение $\xi_t = \phi^*(t, X(t) + C(t))$ на интервале $J(t_0, \phi_0) = J_0(t_0, \phi_0) \cap J_1(t_0, C_0)$.

Пример 1. Рассмотрим линейное уравнение Ито с постоянными коэффициентами вида

$$\xi_t - \xi_0 = \int_0^t [a\xi_s + b] dW(s) + \int_0^t [e\xi_s + f] ds,$$

здесь первое слагаемое в правой части есть стохастический интеграл Ито. Переходя к соответствующему уравнению со стохастическим интегралом Стратоновича, получим

$$\xi_t - \xi_0 = \int_0^t [a\xi_s + b] * dW(s) + \int_0^t [h\xi_s + g] ds, \tag{13}$$

где $h = e - a^2/2$, $g = f - ab/2$.

Будем искать решение (13) в виде $\xi_t = \phi(t, W(t))$. Составим два уравнения

$$\phi'_u(t, u) = a\phi(t, u) + b, \tag{14}$$

$$\phi'_t(t, u)|_{u=W(t)} = h\phi(t, W(t)) + g, \quad \phi(0, W(0)) = \xi_0. \tag{15}$$

Решение уравнения (14) имеет вид: $\ln(a\phi + b) = u + C(t)$ или

$$\phi(t, u) = \frac{1}{a} \left(e^{u+C(t)} - b \right). \tag{16}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (12), приходим к задаче Коши на неизвестную функцию $C(t)$:

$$\frac{1}{a}e^{W(t)+C(t)}C'(t) = \frac{h}{a}\left(e^{W(t)+C(t)} - b\right) + g, \quad \frac{1}{a}\left(e^{W(0)+C(0))} - b\right) = \xi_0.$$

Полученное ОДУ заменой $z(t) = e^{C(t)}$ сводится к линейному неоднородному ОДУ с постоянными коэффициентами

$$z'(t) - hz(t) = e^{-W(t)}(ag - bh),$$

решение которого имеет вид

$$z(t) = \left((ag - bh)\int_0^t e^{-W(s)}e^{-hs}ds + C^*\right)e^{hs}.$$

Чтобы построить решение уравнения (13), остается найти с помощью начального условия постоянную C^* и подставить в последнюю формулу.

Докажем одно обобщение леммы Гроноулла.

Лемма 1. *Пусть $\delta(s,v)$, $B(s,v)$, $s \in [a,t_0]$, $v \in R$, и $X(s)$, $s \in [a,t_0]$, – непрерывные функции, $C(s)$, $s \in [a,t_0]$, – непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что пара функций $(\delta(s,v)B(s,v), X(s))$ удовлетворяют условию (S) на $[a,t_0]$, и справедливо равенство*

$$\delta(t, X(t)) = C(t) + \int_a^t \delta(s, X(s))B(s, X(s)) * dX(s), \quad t \in [a,t_0]. \tag{17}$$

Если $\delta(s, X(s)) \neq 0$ при $s \in (a,t_0]$ и конечны интегралы

$$\int_a^t (\delta(s, X(s)))^{-1}C'(s)ds, \qquad \int_a^t B(s, X(s)) * dX(s), \quad t \in (a,t_0),$$

то при тех же t

$$|\delta(t, X(t))| = |\delta(a, X(a))| \ \exp\left\{\int_a^t (\delta(s, X(s)))^{-1}C'(s)ds + \int_a^t B(s, X(s)) * dX(s)\right\}.$$

Доказательство. Пусть $a < \varepsilon < t \le t_0$, тогда в силу формулы для дифференциала и соотношения (17) имеем:

$$d\left(\ln|\delta(s, X(s))|\right) = \frac{d\delta(s, X(s))}{\delta(s, X(s))} = (\delta(s, X(s)))^{-1}C'(s)ds + B(s, X(s)) * dX(s),$$

следовательно,

$$|\delta(t, X(t))| = |\delta(\varepsilon, X(\varepsilon))| \ \exp\left\{\int_\varepsilon^t (\delta(s, X(s)))^{-1}C'(s)ds + \int_\varepsilon^t B(s, X(s)) * dX(s)\right\}.$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $\varepsilon \to a$, получим формулу (17).

Опираясь на лемму 1, мы можем доказать теорему о единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений с симметричным интегралом.

Теорема 3. *Пусть функция $\sigma(t,v,\phi)$ совместно непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\sigma'_t(t,v,\phi)$ и $\sigma'_\phi(t,v,\phi)$, а функция $b(t,v,\phi)$ и ее производная $b'_\phi(t,v,\phi)$ совместно непрерывны. Если решение задачи Коши (4) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $\xi_t^{(1)} = \varphi^{(1)}(t, X(t))$, $\xi_t^{(2)} = \varphi^{(2)}(t, X(t))$ – два решения задачи Коши (4). Покажем, что тогда $\xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}$ при всех $t \in [0,t_0]$. Положим $\delta(t, X(t)) = \varphi^{(1)}(t, X(t)) - \varphi^{(2)}(t, X(t))$, ввиду начального условия $\delta(t, X(t)) = 0$ при $t = 0$. В силу непрерывности функций $\xi_t^{(1)}$, $\xi_t^{(2)}$ множество $\{t \in [0,t_0] : \xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}\}$ замкнуто.

Предположим, что функция $\delta(t, X(t))$ отлична от нуля на некотором непустом множестве L_0, тогда L_0 открыто и значит представляется в виде объединения не более чем счетного числа интервалов: $L_0 = \cup_k (a_k, b_k)$. Зафиксируем такой интервал (a_k, b_k), который ниже будем обозначать без индекса как (a, b). Для $s \in (a, b)$ положим

$$g_1(s, X(s)) = \frac{\sigma(s, X(s), \xi_s^{(1)}) - \sigma(s, X(s), \xi_s^{(2)})}{\xi_s^{(1)} - \xi_s^{(2)}},$$

$$g_2(s, X(s)) = \frac{b(s, X(s), \xi_s^{(1)}) - b(s, X(s), \xi_s^{(2)})}{\xi_s^{(1)} - \xi_s^{(2)}}.$$

Примем обозначения леммы 1:

$$C(t) = \int_a^t \left[b(s, \varphi^{(1)}(s, X(s))) - b(s, \varphi^{(2)}(s, X(s))) \right] ds,$$

$$B(t, u) = \sigma(t, \varphi^{(1)}(t, u)) - \sigma(t, \varphi^{(2)}(t, u)).$$

Так как пара функций $(g_1(s, v), X(s))$ обладает свойством (S), а $g_2(s, X(s))$ суммируема на любом отрезке $[a, a_1] \subset [a, b)$, то справедливы все предположения леммы 1, поэтому имеет место соотношение (17) на множестве $t \in [a, b)$. Но $\delta(a, X(a)) = 0$, значит, $\xi_t^{(1)} = \xi_t^{(2)}$ при всех $t \in [a, b)$ и $L_0 = \emptyset$. Следовательно, справедливо утверждение теоремы 3.

Замечание. Хорошо известно, что в стохастическом анализе существует понятие слабого решения, при этом сильное решение является слабым. Покажем, что в потраекторном анализе функция $X(t)$ может быть также найдена с помощью решения ξ_t уравнения (1), а именно, справедливо следующее равенство:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \frac{1}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} * d\xi_s - \int_0^t \frac{b(s, X(s), \xi_s)}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} ds. \tag{18}$$

Действительно, ввиду формулы замены переменных в симметричном интеграле и уравнения (4) правая часть соотношения (18) равна

$$\int_0^t \frac{1}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} [\sigma(s, X(s), \xi_s) * dX(s) + b(s, X(s), \xi_s) ds] - \int_0^t \frac{b(s, X(s), \xi_s)}{\sigma(s, X(s), \xi_s)} ds.$$

3. О структуре решений уравнений с симметричным интегралом

В предыдущем разделе было показано, что решение уравнения (11) имеет вид $\xi(t) = \phi(t, X(t) + C(t))$. Это обстоятельство может оказаться весьма полезным при исследовании СДУ. Пусть, например, в уравнении (11) функции $\sigma(t, \phi)$ и $b(t, \phi)$ детерминированы, а $X(t) \equiv W(t)$ есть траектория винеровского процесса. Тогда вся вероятностная информация о решении СДУ содержится в $W(t) + C(t)$, поскольку диффузионный процесс, определяемый как решение уравнения (11), есть детерминированная функция от суммы винеровского процесса и случайного гладкого сноса. Структура решения уравнения (11) впервые была найдена в работах [8], [7] в случае, когда $\sigma(s, \phi, u) = \sigma(s, \phi) \neq 0$.

Целью данного раздела является нахождение структуры решения уравнения (4) в более общих ситуациях, так как знание структуры позволяет во многих случаях существенно упростить исследования как уравнений с симметричными интегралами, так и СДУ. Выяснилось, что для решения этой задачи оказались эффективны методы группового анализа.

Групповой анализ – один из методов, с помощью которого можно многое узнать об исследуемом дифференциальном уравнении. Аппарат группового анализа широко развит и используется как для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных. Он довольно подробно изложен в работах [1], [2].

Пусть G – однопараметрическая группа $\bar{u} = f(u, \phi, a)$, $\bar{\phi} = g(u, \phi, a)$ с инфинитезимальным оператором $X = \xi(u, \phi)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, \phi)\frac{\partial}{\partial \phi}$. Будем говорить, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{d\phi}{du} = \sigma(\phi, u)$ допускает группу G, если

$$\frac{d\bar{\phi}}{d\bar{u}} = \sigma(\bar{\phi}, \bar{u}).$$

Как правило, нельзя найти группу, допускаемую обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, однако существуют уравнения, для которых допускаемая группа известна. Любую группу G с оператором $X = \xi(u, \phi)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, \phi)\frac{\partial}{\partial \phi}$ можно соответствующей заменой переменных привести к группе переносов вдоль одной из осей. Канонические переменные $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\phi, u)$, $\hat{u} = \hat{u}(\phi, u)$ находятся (см.[1]) из соотношений:

$$\xi(u, \phi)\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial u} + \eta(u, \phi)\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = 0, \quad \xi(u, \phi)\frac{\partial \hat{u}}{\partial u} + \eta(u, \phi)\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi} = 1. \tag{19}$$

При этом, если группа G является допускаемой, то переход к каноническим переменным приводит это уравнение к виду, где одна из этих переменных отсутствует, и уравнение можно интегрировать в квадратурах.

Пусть выполнены условия существования и единствнности уравнения (4) и коэффициенты уравнения достаточно гладкие, например, трижды непрерывно дифференцируемы. Отметим, что согласно теореме 1 решение уравнения (4) можно свести к решению цепочки из двух обыкновенных дифференциальных уравнений (10).

Рассмотрим первое уравнение цепочки

$$\phi'_u(s, u) = \sigma(s, u, \phi(s, u)). \tag{20}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, где время s является параметром. В общем случае, если решение (20) существует, то структура решения уравнения (20) представляется в виде: $\Psi(\phi(s, u), u, C(s)) = 0$, где $C(s)$ – произвольная функция. Для того чтобы найти функцию $C(s)$, необходимо выразить из этого соотношения $\phi(s, u) = \phi^*(s, u, C(s))$ и подставить во второе уравнение цепочки (10). В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение на неизвестную функцию $C(s)$. Начальные условия $\phi(0, X(0)) = \eta(0)$ переходят в начальное условие $\phi^*(0, X(0), C(0)) = \xi(0)$ для $C(s)$.

Заметим, что нашей задачей является определение структуры уравнения (4), а последнее, как видно из приведенных выше рассуждений, полностью определяется уравнением (20). Поэтому мы будем рассматривать конкретные уравнения (20) с известными допускаемыми группами, интегрировать их, тем самым, находя структуру решения соответствующих уравнений с симметричным интегралом.

Ниже приведены некоторые примеры построения структуры решений. Более полный набор возможных структур решения уравнений вида (4) приведен в таблице 1.

A. Рассмотрим уравнение

$$\xi(t) - \xi(0) = \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s, \xi(s))ds, \ t \in [0, T]. \tag{21}$$

Первое уравнение цепочки (10) в этом случае можно проинтегрировать:

$$\phi'_u(s, u) = \sigma(s, \phi(s, u)), \qquad \phi(s, u) = \Psi(s, u + C(s)), \tag{22}$$

где Ψ находится из (22), а $C(t)$ можно определить как решение дифференциального уравнения, если подставить функцию $\Psi(s, X(s) + C(s))$ во второе уравнение цепочки (10).

Отметим, что инфинитизимальный оператор допускаемой уравнением (22) группы имеет вид: $X = \frac{\partial}{\partial u}$. Таким образом, $\xi(s) = \Psi(s, X(s) + C(t))$ есть решение СДУ.

B. Пусть:

$$\sigma(s,u,\phi) = F(s, ku + l\phi), \tag{23}$$

где k и l – известные константы. Инфинитизимальный оператор группы преобразований, допускаемой уравнением (23), имеет вид: $X{=}l\frac{\partial}{\partial u} - k\frac{\partial}{\partial \phi}$. Найдем канонические переменные:

$$l\frac{\partial \hat\phi}{\partial u} - k\frac{\partial \hat\phi}{\partial \phi} = 0, \quad l\frac{\partial \hat u}{\partial u} - k\frac{\partial \hat u}{\partial \phi} = 1.$$

Решая эти уравнения, получим, например $\hat\phi = \frac{u}{l} + \frac{\phi}{k}, \quad \hat u = \frac{u}{l}$. Обратная замена: $\phi = k(\hat\phi - \hat u), \quad u = l\hat u$. Переходя к новым переменным, имеем:

$$\hat\phi'_{\hat u} = \frac{lF(lk\hat\phi)}{k} + 1, \ \hat\phi = \Psi(s, \hat u + C(s)).$$

$$\text{Структура решения: } \eta(s){=}k\left(\Psi\left(s, \frac{X(s)}{l}{+}C(s)\right) - \frac{X(s)}{l}\right).$$

C. Рассмотрим случай, когда

$$\sigma(s,u,\phi) = F\left(s, \frac{\phi}{u}\right), \ s \in [t_1, t_2], \ t_1 > 0. \tag{24}$$

Так как в этом случае уравнение (20) однородно, то оно допускает группу с инфинитизимальным оператором $X = u\frac{\partial}{\partial u} + \phi\frac{\partial}{\partial \phi}$. Уравнения (19) для нахождения канонических переменных:

$$\phi\frac{\partial \hat\phi}{\partial u} + u\frac{\partial \hat\phi}{\partial \phi} = 0, \quad \phi\frac{\partial \hat u}{\partial u} + u\frac{\partial \hat u}{\partial \phi} = 1.$$

Решение этих уравнений можно представить в виде: $\hat\phi = \frac{\phi}{u} \quad \hat u = \ln u$. Обратная замена: $\phi = \hat\phi e^{\hat u}, \quad u = e^{\hat u}$. Переходя к новым переменным, имеем:

$$\hat\phi'_{\hat u} = (F(s,\hat\phi) - \hat\phi), \qquad \hat\phi = \Psi(s, \hat u + C(s)).$$

Структура решения имеет вид: $\xi(s) = X(s)\Psi\left(s, \ln|X(s)| + C(s)\right)$.

D. Рассмотрим следующий пример:

$$\sigma(s,u,\phi) = \frac{\phi}{u + F(s,\phi)}. \tag{25}$$

Инфинитизимальный оператор группы преобразований, допускаемой уравнением (25), известен: $X = \phi\frac{\partial}{\partial u}$. Уравнения (19) для нахождения канонических переменных: $\phi\frac{\partial \hat\phi}{\partial u} = 0, \quad \phi\frac{\partial \hat u}{\partial u} = 1$. Решение этих уравнений можно представить в виде: $\hat\phi = \phi, \quad \hat u = \frac{u}{\phi}$. Обратная замена: $\phi = \hat\phi, \quad u = \hat\phi\hat u$. Переходя к новым переменным, имеем: $\hat u'_{\hat\phi} = \frac{F(s,\hat\phi)}{\hat\phi^2}$, $\hat\phi = \Psi(s, \hat u + C(s))$. Получаем структуру решения в виде: $\phi - \Psi\left(s, \frac{X(s)}{\phi} + C(s)\right) = 0$.

Таблица 1. Структура решения некоторых уравнений вида $\xi(t)-\xi(0)=\int\limits_0^t \sigma(s,\xi(s),X(s)){*}dX(s)+\int\limits_0^t b(s,\xi(s),X(s))ds$.

Уравнение $\phi_u=\sigma(s,u,\phi)$	Оператор группы	Структура решения $\eta(t)$
1. $\sigma=F(s,\phi)$	$\frac{\partial}{\partial u}$	$\Psi(s,X(s)+C(s))$
2. $\sigma=F(s,u)$	$\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\Psi(s,X(s))+C(t)$
3. $\sigma{=}F(s,ku{+}l\phi),\ k,\,l$ – const	$l\frac{\partial}{\partial u}-k\frac{\partial}{\partial\phi}$	$k(\Psi(s,\frac{X(s)}{l}+C(s))-\frac{X(s)}{l})$
4. $\sigma=F(s,\frac{\phi}{u}),\ u\neq0$	$u\frac{\partial}{\partial u}+\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)\cdot\Psi(s,\ln\lvert X(s)\rvert+C(s))$
5. $\sigma=u^kF(s,\frac{\phi}{u^k}),\ u\neq0$	$u\frac{\partial}{\partial u}+k\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$(X(s))^k\Psi(s,\ln\lvert X(s)\rvert+C(s))$
6. $u\sigma=F(s,ue^{-\phi}),\ u\neq0$	$u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\ln\lvert X(s)\rvert-\Psi(s,\ln\lvert X(s)\rvert+C(s))$
7. $\sigma=\phi F(s,\phi e^{-u})$	$\frac{\partial}{\partial u}+\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$e^{X(s)}\Psi(s,X(s)+C(s))$
8. $\sigma=\frac{\phi}{u}+uF(s,\frac{\phi}{u}),\ u\neq0$	$\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\phi}{u}\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)\Psi(s,X(s)+C(s))$
9. $u\sigma=\phi+uF(s,\frac{\phi}{u}),\ u\neq0$	$u^2\frac{\partial}{\partial u}+u\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)\Psi(s,-\frac{1}{X(s)}+C(s))$
10. $\sigma=\frac{\phi}{u+F(s,\phi)}$	$\phi\frac{\partial}{\partial u}$	$\phi-\Psi(s,\frac{X(s)}{\phi}+C(s))=0$
11. $u\sigma=\phi+F(s,u),\ u\neq0$	$u\frac{\partial}{\partial\phi}$	$X(s)(\Psi(s,X(s))+C(s))$
12. $u\sigma=\frac{\phi}{\ln\lvert u\rvert+F(s,\phi)},\ u\neq0$	$\phi u\frac{\partial}{\partial u}$	$\phi-\Psi(s,\frac{\ln\lvert X(s)\rvert}{\phi}+C(s))=0$

* — функция Ψ имеет конкретный вид и определяется из уравнения (20)
** — в случаях 10 и 12 структура решения Ψ определяется неявно
*** — функцию $C(s)$ можно найти из второго уравнения цепочки (12).

4. О непрерывности и дифференцируемости по параметру уравнений с симметричным интегралом

Рассмотрим уравнение с симметричным интегралом

$$d\xi_t=\sigma(t,\mu,\xi_t)*dX(t)+b(t,\mu,\xi_t)dt. \tag{26}$$

Предположим, что в области $G_\mu=\{(t,\mu,\phi)\}$ определены функции $\sigma(t,\mu,\phi)$ и $b(t,\mu,\phi)$, которые в этой области удовлетворяют следующим условиям:

1. Функции $\sigma(t,\mu,\phi)$, $b(t,\mu,\phi)$, $\sigma'_t(t,\mu,\phi)$, $\sigma'_\phi(t,\mu,\phi)$ и $b'_\phi(t,\mu,\phi)$ непрерывны.
2. Найдется положительное число σ_0, такое, что $|\sigma(t,\mu,\phi)|\geq\sigma_0$.

Тогда в силу рассуждений, приведенных в разделе 2, область $G=\{(t,\xi):(t,\mu,\xi)\in G_\mu\}$ есть область единственности решения уравнения (26) с $\xi_t=\xi(t,t_0,\xi(0),\mu)$ и с начальным условием $(t_0,\xi(0))$, которое определено на множестве $D_\mu{=}\{(t,t_0,\xi(0),\mu){:}(t_0,\xi(0),\mu)\in G_\mu\}$, $t\in J(t_0,\xi(0),\mu)$, где $J(t_0,\xi(0),\mu)$ – максимальный интервал существования решения (26).

Теорема 4. *При сделанных предположениях $\xi(t,t_0,\xi(0),\mu)$ непрерывна в D_μ.*

Доказательство. Решение уравнения (26) имеет вид

$$\xi_t=\varphi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu)), \tag{27}$$

где функция $\varphi(t,\mu,v)$ определяется из соотношения

$$\Phi(t,\mu,\phi,v) \equiv \int \frac{d\phi}{\sigma(t,\mu,\phi)} - v = 0. \tag{28}$$

Ввиду предположений теоремы 4 в области $G_\mu \times R$ функция $\Phi(t,\mu,\phi,v)$ совместно непрерывна и имеет непрерывные производные $\Phi'_t(t,\mu,\phi,v)$, $\Phi'_v(t,\mu,\phi,v)$ и отличную от нуля производную $\Phi'_\phi(t,\mu,\phi,v)$. Поэтому в силу теоремы о неявной функции существует функция $\phi(t,\mu,v)$, имеющая непрерывные частные производные $\phi'_t(t,\mu,v)$ и $\phi'_v(t,\mu,v)$. Для любой точки $(t_0,\mu,\phi_0) \in G_\mu$ обозначим через $J^{(0)}(t_0,\mu,\phi_0)$ максимальный интервал, в котором существует неявная функция $\phi = \phi^*(t,\mu,v,t_0,\phi_0)$ с начальными данными $\phi^*(t_0) = \phi_0$.

Далее, функция $C(t,\mu)$ из (27) находится как решение задачи Коши

$$C'_t(t,\mu) = \frac{b(t,\mu,\phi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu)))}{\sigma(t,\mu,\phi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu)))} - \int_0^{\phi(t,\mu,X(t)+C(t,\mu))} \left(\frac{1}{\sigma(t,\mu,\psi)}\right)'_t d\psi, \tag{29}$$

$$\phi(t_0,\mu,X(t_0)+C(t_0,\mu)) = \xi_0.$$

Рассмотрим множество $G_\mu^{(1)} = \{(t,\mu,C) : (t,\mu,C,\phi(t,\mu,X(t)+C) \in G\mu)$, тогда ввиду теоремы 2.3.2 из [4] множество $G^{(1)}=\{(t,C) : (t,C,\mu) \in G_\mu^{(1)}\}$ есть область единственности для уравнения (29) при каждом фиксированном μ.

Пусть $C(t,t_0,C_0,\mu)$ есть решение уравнения (29) с начальными данными $\phi(t_0,\mu,X(t_0)+C_0) = \xi_0$, определенными на множестве $D_\mu^{(1)} = \{(t,t_0,C_0,\mu) \in G_\mu^{(1)}$, $t \in J^{(1)}(t_0,C_0,\mu)\}$, где $J^{(1)}(t_0,C_0,\mu)$ – максимальный интервал существования решения. В силу теоремы 5.1.1. из [4] $D_\mu^{(1)}$ есть область и $C(t,t_0,C_0,\mu)$ непрерывна в $D_\mu^{(1)}$. Значит, решение (27) непрерывно в D_μ, где $J(t_0,C_0,\mu) = J^{(0)}(t_0,\mu,\phi_0) \cap J^{(1)}(t_0,C_0,\mu)$.

Теорема 5. *Пусть справедливы все предположения теоремы 4 и производные $\sigma'_\mu(t,\mu,\phi)$, $\sigma''_{t\mu}(t,\mu,\phi)$, $b'_\mu(t,\mu,\phi)$ также непрерывны в области G_μ. Тогда решение $\xi_t = \phi(t,\mu,X(t)+C(t_0,\mu,\xi(0)))$ задачи Коши (26) имеет в области D_μ непрерывные производные $\eta_t^\mu = \frac{\partial}{\partial\mu}\xi_t$ и $\eta_t^{\xi(0)} = \frac{\partial}{\partial\xi(0)}\xi_t$. При этом справедлива формула*

$$d\eta_t^\mu = \left[\frac{\partial}{\partial\mu}\sigma(t,\mu,\xi_t) + \frac{\partial}{\partial\phi}\sigma(t,\mu,\xi_t)\eta_t^\mu\right] * dX(t) + \left[\frac{\partial}{\partial\mu}b(t,\mu,\xi_t) + \frac{\partial}{\partial\phi}b(t,\mu,\xi_t)\eta_t^\mu\right] dt, \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\eta_{t_0}^{\xi(0)} = \frac{\partial}{\partial\mu}\xi_{t_0}.$$

Доказательство. Рассуждения во многом повторяют доказательство теоремы 4. Из предположений теоремы 5 следует, что решение уравнения (26) имеет вид (27) и $\phi(t,\mu,v)$ в силу теоремы о неявной функции имеет непрерывные частные производные по переменным (t,μ,v). Для любой точки $(t_0,\mu,\phi_0) \in G_\mu$ обозначим через $J^{(0)}(t_0,\mu,\phi_0)$ максимальный интервал, в котором существует неявная функция $\phi = \phi^*(t,\mu,t_0,\phi_0)$ с начальными данными $\phi^*(t_0) = \phi_0$.

Далее, ввиду теоремы 5.2.1 из [4] решение $C(t,t_0,C_0,\mu)$ из теоремы 4 имеет непрерывную производную по переменной μ. Поэтому решение $\xi(t,t_0,\xi(0),\mu)$ непрерывно и имеет в D_μ непрерывные производные $\eta_t^\mu = \frac{\partial}{\partial\mu}\xi_t$ и $\eta_t^{\xi(0)} = \frac{\partial}{\partial\xi(0)}\xi_t$. Воспользуемся тем фактом, что в силу теоремы 2 решение уравнения (26) удовлетворяет соотношениям типа (5) и (6). Дифференцируя полученные равенства по μ и снова применив теорему 2 для продифференцированных соотношений, приходим к формуле (30).

5. Линеаризация уравнений первого порядка с симметричным интегралом. Обратное преобразование

1. Рассмотрим уравнение с симметричным интегралом

$$d\xi_t = \sigma(t, X(t), \xi_t) * dX(t) + b(t, X(t), \xi_t)dt, \quad t \in [0, t_0], \tag{31}$$

где $X(t)$, $t \in [0, t_0]$, – непрерывная почти нигде не дифференцируемая функция.

Цель – показать, как с помощью подходящей замены переменных вида $\eta(t) = g(t, \xi_t)$ уравнение (31) преобразовать в линейное уравнение

$$d\eta(t) = A(t)\eta(t) * dX(t) + B(t)\eta(t)dt. \tag{32}$$

В дальнейшем предполагается, что функции $\sigma(t, X, \xi)$, $b(t, X, \xi)$ удовлетворяют всем предположениям теоремы 1, $\sigma(t, X, \xi) \neq 0$ для всех t, X, ξ, а функции $A(t)$, $B(t)$ непрерывно дифференцируемы.

С помощью формулы для дифференциала для симметричного интеграла и соотношения (31) имеем:

$$dg(t, \xi_t) = [g'_t(t, \xi_t) + g'_\xi(t, \xi_t)b(t, X(t), \xi_t)]dt + [g'_\xi(t, \xi_t)\sigma(t, X(t), \xi_t)] * dX(t).$$

Сравнивая дифференциалы $d\eta(t)$, вычисленные по последней формуле и формуле (32), приходим к соотношению

$$0 \equiv \left[g'_t(t, \xi_t) + g'_\xi(t, \xi_t)b(t, X(t), \xi_t) - B(t)g(t, \xi_t)\right] dt+$$
$$+ \left[g'_\xi(t, \xi_t)\sigma(t, X(t), \xi_t) - A(t)g(t, \xi_t)\right] * dX(t).$$

В силу рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, отсюда получим

$$g'_\xi(t, \xi_t) = \left[\frac{A(t)}{\sigma(t, X(t), \xi_t)} g(t, \xi_t)\right],$$

$$g'_t(t, \xi_t) = B(t)g(t, \xi_t) - g'_\xi(t, \xi_t)b(t, X(t), \xi_t) = \left[B(t) - \frac{A(t)b(t, X(t), \xi_t)}{\sigma(t, X(t), \xi_t)}\right] g(t, \xi_t).$$

Далее можно воспользоваться формулой (31), но тогда мы получим решение уравнения в виде $\eta_t = \tilde{\eta}_t(t, X(t))$, а нам нужно $\eta_t = \eta^*_t(t, \xi_t)$. Поэтому в общем случае нужно выразить $X(t)$ через ξ_t; это можно сделать, решив уравнение (31): $\xi_t = \varphi(s, X(s))$, и выразив из последнего соотношения $X(t)$ через ξ_t.

При любом варианте мы приходим к случаю $\sigma(t, X(t), \xi_t) = \sigma(t, \xi_t)$, в силу той же теоремы 1 функция $\eta_t = g(t, \xi_t)$ есть решение линейного уравнения с симметричным интегралом

$$d\eta_t = \left[\frac{A(t)}{\sigma(t, \xi_t)}\right] \eta_t * d\xi_t + \left[B(t) - \frac{A(t)b(t, X(t), \xi_t)}{\sigma(t, \xi_t)}\right] \eta_t dt. \tag{33}$$

Решение уравнения (33) ищем в виде $\eta_t = g(t, \xi_t)$, получим цепочку из двух уравнений:

$$g'_\xi(t, \xi) = \frac{A(t)}{\sigma(t, \xi)} g(t, \xi), \quad g'_t(t, \xi)|_{\xi=\xi_t} = \left[B(t) - \frac{A(t)b(t, X(t), \xi_t)}{\sigma(t, \xi_t)}\right] g(t, \xi_t).$$

Первое уравнение определяет $g(t, \xi)$ с точностью до неизвестной фунции $C(t)$:

$$g(t, \xi) = C(t) \exp\left(A(t) \int \frac{d\xi}{\sigma(t, \xi)}\right). \tag{34}$$

Дифференцируя, имеем

$$g'_t(t, \xi) = \exp\left(A(t) \int \frac{d\xi}{\sigma(t, \xi)}\right) \left\{C'(t) - C(t)\left[A'(t) \int \frac{d\xi}{\sigma(t, \xi)} - A(t) \int \frac{\sigma'_t(t, \xi)}{\sigma^2(t, \xi)} d\xi\right]\right\}.$$

Подставляя найденное для $g(t,\xi)$ выражение (34) во второе уравнение, получим уравнение на неизвестное $C(t)$:

$$C'(t)=C(t)\left[B(t)-\frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)}+A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}-A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi\right].$$

Следовательно,

$$\frac{C'(t)}{C(t)}=B(t)-\frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)}-A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}-A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi. \tag{35}$$

или

$$C(t)=C^*\exp\left(B(t)-\frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)}-A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}-A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi\right),$$

где C^* – произвольная постоянная. Подставляя найденное значение $C(t)$ в (34), находим искомое преобразование $g(t,\xi_t)$:

$$g(t,\xi_t)=C^*\exp\left(A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}+B(t)-\frac{A(t)b(t,X(t),\xi_t)}{\sigma(t,\xi_t)}-\right.$$
$$\left.-A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}-A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{\sigma_t'(t,\xi)}{\sigma^2(t,\xi)}d\xi\right). \tag{36}$$

2. С помощью несложных преобразований убедимся, что функция $\eta_t=g(t,\xi_t)$ действительно есть решение линейного уравнения. Для этого найдем полную производную (формально, так как ξ_t недифференцируема – на самом деле надо брать дифференциалы) выражения

$$\left(A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}\right)_t'=$$
$$=A'(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}+\frac{A(t)}{\sigma(t,\xi_t)}[\sigma(t,\xi_t)X'(t)+b(t,X(t),\xi_t)]+A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\left(\frac{1}{\sigma(t,\xi)}\right)_t'd\xi.$$

Воспользовавшись данной формулой, правую часть соотношения (35) можно после несложных алгебраических преобразований записать в виде:

$$B(t)+A(t)X'(t)-\left(A(t)\int_{\xi_0}^{\xi_t}\frac{d\xi}{\sigma(t,\xi)}\right)_t'.$$

Значит, $\eta_t=g(t,\xi_t)=\tilde C\exp\left(\int_0^t B(s)ds+\int_0^t A(s)*dX(s)\right)$, а функция в правой части есть решение линейного уравнения (32).

3. Рассмотрим обратную задачу перехода с помощью подходящей замены переменных от линейного уравнения (32) к уравнению (31).

Конечно, обратное преобразование находится из формулы (36), однако можно построить прямой метод, который часто является более предпочтительным. Рассмотрим предполагамую замену переменных $\xi_t=\Phi(t,\eta_t)$ и найдем дифференциал этой функции. Имеем

$$d\xi_t=\sigma(t,X(t),\xi_t)*dX(t)+b(t,X(t),\xi_t)dt=\left[\Phi_t'(t,\eta_t)+\Phi_\eta'(t,\eta_t)B(t)\eta_t\right]dt+$$
$$+\Phi_\eta'(t,\eta_t)A(t)\eta_t*dX(t).$$

Следовательно, в силу (6) при п. в. t справедливы равенства

$$\sigma(t,X(t),\xi_t)=\Phi_\eta'(t,\eta_t)A(t)\eta_t,\quad b(t,X(t),\xi_t)=\Phi_t'(t,\eta_t)+\Phi_\eta'(t,\eta_t)B(t)\eta_t.$$

Воспользовавшись первым соотношением, мы можем переписать второе в виде $b(t, X(t), \xi_t) = \Phi'_t(t, \eta_t) + \frac{B(t)}{A(t)}\sigma(t, X(t), \xi_t)$. Следовательно, функция $\xi_t = \Phi(t, \eta_t)$ есть решение уравнения с симметричным интегралом

$$d\xi_t = \frac{\sigma(t, X(t), \xi_t)}{A(t)\eta_t} * d\eta_t + \left[b(t, X(t), \xi_t) - \frac{B(t)}{A(t)}\sigma(t, X(t), \xi_t)\right] dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N.H. Ibragimov *Elementary Lie group analysis and ordinary equation.* John Wiley&Sons. Chichester. 1999. 347 p.
2. L.V. Ovsiannikov *Group analysis of differential equations.* Academic Press. New Jork. 1982. 416 p.
3. B. Srihirun, S.V. Meleshko, E. Schulz *On the definition of an admmited Lie group for stochastic differential equation* // Commun,Nonlinear Sci. Numer. Simul 12(8). 2007. P. 1379–1389.
4. Бибиков Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Высшая школа, 1991.
5. Ватанабе С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионнные процессы.* М.: Наука, 1986.
6. Насыров Ф.С. *Симметричные интегралы и стохастический анализ* // Теория вероятностей и ее примен. 2006. Т. 51, вып. 3. С. 496–517.
7. Насыров Ф.С., Парамошина И.Г. *О структуре одномерного диффузионного процесса* // Уфа, Вестник УГАТУ, 2006. Т. 7, № 2(15). С. 127–130.
8. Насыров Ф.С. *Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ.* М.: Физматлит. 2011.

Марат Айратович Абдуллин,
Уфимский государственный авиацонный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: 79marat97@rambler.ru

Нияз Салаватович Исмагилов,
Уфимский государственный авиацонный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: niyaz.ismagilov@gmail.com

Фарит Сагитович Насыров,
Уфимский государственный авиацонный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: farsagit@yandex.ru