Уфимский математический журнал. Том 1. № 2 (2009). С. 75-100.

УДК 517.982.3

О КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ В $\mathbb{R}^n$, ДОПУСКАЮЩИХ ГОЛОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В $\mathbb{C}^n$

И.Х. МУСИН, П.В. ФЕДОТОВА

Аннотация. Изучается подпространство пространства Шварца быстро убывающих функций класса C^∞ на замкнутом выпуклом неограниченном множестве в $\mathbb{R}^n$, допускающих голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$. Рассматривается задача описания сопряженного пространства к этому пространству в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов.

Ключевые слова: трубчатая область, обобщённые функции медленного роста, преобразование Лапласа функционалов, $\overline{\partial}$-задача.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть C — открытый острый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале [1, с. 73], b — выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$ — замыкании конуса C в $\mathbb{R}^n$. Пара (b, C) определяет замкнутое выпуклое неограниченное множество

$$U(b,C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ - < \xi, y > \le b(y), \forall y \in C\},$$

не содержащее целую прямую. Отметим, что внутренность $U(b,C)$ не пуста и совпадает с множеством

$$V(b,C) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ - < \xi, y > < b(y), \forall y \in \overline{C}\},$$

а замыкание $V(b,C)$ есть множество $U(b,C)$. Для краткости будем обозначать множество $U(b,C)$ через U, а множество $V(b,C)$ – через V.

По неограниченной неубывающей последовательности $M = (M_k)_{k=0}^\infty$ вещественных чисел M_k с $M_0 = 1$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln M_k}{k} = +\infty$, определим пространство $G_M(U)$ функций класса C^∞ на U следующим образом. Для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ введём пространство $G_{m,\varepsilon}(U)$, состоящее из $C^\infty(U)$-функций f, для которых конечны нормы

$$p_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{x\in V, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^m}{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}\ , \ m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0.$$

Musin I.Kh., Fedotova P.V. On a class of infinitely differentiable functions on unbounded convex set in $\mathbb{R}^n$ admitting holomorphic continuation in $\mathbb{C}^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00779, 08-01-97023), программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации НШ 3081.2008.1).

Поступила 25 мая 2009 г.

Положим $G_M(U) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{\varepsilon>0} G_{m,\varepsilon}(U)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $G_M(U)$ становится линейным пространством. Определим локально выпуклую топологию в $G_M(U)$ с помощью семейства норм $p_{m,\varepsilon}$. Отметим, что, если $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ — произвольная убывающая к нулю последовательность положительных чисел ε_m, то топологию в $G_M(U)$ можно задать с помощью семейства норм

$$p_m(f) = \sup_{x\in V, \alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^m}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} .$$

Таким образом, функции из $G_M(U)$ образуют подкласс в классе Шварца $C^\infty(U)$-функций, быстро убывающих на U.

В данной работе рассматривается задача описания сильного сопряженного пространства к пространствам типа $G_M(U)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов.

Детальное рассмотрение этой задачи зависит от дополнительных условий на последовательность M. Так, Роевером [2] она изучалась при следующих предположениях на последовательность M:

1). $M_k^2 \le M_{k-1}M_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$;

2). $\exists H_1 > 1 \ \exists H_2 > 1 \ \ \forall k, m \in \mathbb{Z}_+ \quad M_{k+m} \le H_1 H_2^{k+m} M_k M_m$;

3). $\exists A > 0 \ \ \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \dfrac{M_{k-1}}{M_k} \le Am \dfrac{M_m}{M_{m+1}}$.

Заметим, что в этом случае последовательность M – неквазианалитическая, а из условий 1) и 3) следует, что найдутся числа $h_1, h_2 > 0$ такие, что $M_k \ge h_1 h_2^k k!, \ \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

В [3] эта задача рассматривалась (на основе других подходов) при меньших ограничениях на последовательность M, чем у Роевера. А именно, вместо условий 2) и 3) предполагалось выполнение условий:

2)$'$. $\exists H_1 > 1 \ \exists H_2 > 1 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \ M_{k+1} \le H_1 H_2^k M_k$;

3)$'$. $\exists Q_1 > 0 \ \exists Q_2 > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \ M_k \ge Q_1 Q_2^k k!$.

В данной работе указанная задача изучается в предположении, что последовательность M с $M_0 = 1$ удовлетворяет условиям:

i_1). $M_k^2 \le M_{k-1}M_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$;

i_2). $\exists H_1 > 1 \ \exists H_2 > 1 \ \ \forall k, m \in \mathbb{Z}_+ \quad M_{k+m} \le H_1 H_2^{k+m} M_k M_m$;

i_3). $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a_\varepsilon > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \ M_k \le a_\varepsilon \varepsilon^k k!$;

i_4). $\exists \gamma \in (0,1) \ \exists b_1 > 0 \ \exists b_2 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \ M_k \ge b_1 b_2^k k!^\gamma$;

i_5). существует логарифмически выпуклая неубывающая последовательность $(K_m)_{m=0}^{\infty}$ с $K_0 = 1$ такая, что при некоторых $t_1 > 1, t_2 > 1$

$$t_1^{-1} t_2^{-m} K_m \le \frac{m!}{M_m} \le t_1 t_2^m K_m, \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Простым примером такой последовательности является последовательность $(m!^\alpha)_{m=0}^{\infty}$, где $\alpha \in (0,1)$.

1.2. Обозначения. Для точек $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$ из $\mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$ пусть $< u, v >= u_1v_1 + \dots + u_mv_m$, $\|u\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^m(\mathbb{C}^m)$.

Для $z \in \mathbb{C}^m$, $R > 0$ через $B_R(z)$ обозначаем шар в $\mathbb{C}^m$ радиуса R с центром в точке z. Пусть $\nu_m(R) = \nu_m(1)R^{2m}$ — объём шара $B_R(z)$.

Через T_C обозначаем трубчатую область $\mathbb{R}^n + iC$.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(\Omega \subset \mathbb{C}^m)$, то расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^m$ $(z \in \mathbb{C}^m)$ до множества Ω обозначим через $d_\Omega(x)(d_\Omega(z))$, расстояние от точки $x \in \Omega$ $(z \in \Omega)$ до границы множества Ω обозначим через $\Delta_\Omega(x)(\Delta_\Omega(z))$.

Для локально выпуклого пространства X X' — пространство линейных непрерывных функционалов на X, X^* — сильное сопряжённое пространство.

Для открытого множества Ω в $\mathbb{C}^m$ $H(\Omega)$ — множество функций, голоморфных в Ω, $psh(\Omega)$ — множество функций, плюрисубгармонических в Ω.

С последовательностью $L = (L_k)_{k=0}^{\infty}$ положительных чисел L_k с $L_0 = 1$ таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln L_k}{k} = +\infty$, свяжем функцию ω_L: $\omega_L(r) = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \ln \dfrac{r^k}{L_k}$ для $r > 0$, $\omega_L(0) = 0$.

Для выбранной убывающей к нулю последовательности $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$ чисел ε_m для краткости обозначаем $\omega_M(\frac{r}{\varepsilon_m})$ через $\omega_m(r),\ r \ge 0$.

1.3. О результатах. Отметим, что в силу условия i_3) на последовательность M каждая функция из $G_M(U)$ допускает голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$. Условия i_4) и i_5) позволяют получить явное описание указанных продолжений. Оказалось (Теорема 1), что пространство $G_M(U)$ топологически изоморфно пространству $E(U)$ целых функций f в $\mathbb{C}^n$ таких, что для любых $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C_{m,\varepsilon} > 0$ такая, что

$$|f(z)| \le C_{m,\varepsilon} \frac{e^{w_K(\varepsilon d_U(x)) + w_K(\varepsilon \|y\|)}}{(1+\|z\|)^m}\ ,\ z \in \mathbb{C}^n,$$

с топологией, определяемой системой норм

$$q_{m,\varepsilon}(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|(1+\|z\|)^m}{e^{w_K(\varepsilon d_U(x)) + w_K(\varepsilon\|y\|)}}\ ,\ \varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}.$$

Здесь, как обычно, $x = Re\ z, y = Im\ z$.

При описании сопряжённого для $G_M(U)$ мы использовали подход из работы Б.А. Тейлора [4], применение которого потребовало дополнительного изучения преобразования Фурье-Лапласа обобщённых функций медленного роста с носителем в $U(b, C)$. Поэтому мы рассматриваем пространство $S(U)$ $C^\infty(U)$-функций f таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,U} = \sup_{x\in V, |\alpha|\leqslant p} |(D^\alpha f)(x)|(1+\|x\|)^p < \infty.$$

Пусть $S_p(U)$ — пополнение $S(U)$ по норме $\|\cdot\|_{p,U}$. В $S(U)$ введём топологию проективного предела пространств $S_p(U)$. Известно, что $S^*(U)$ топологически изоморфно пространству S^*_U обобщенных функций медленного роста с носителем в U (см. [5, с. 21]).

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим нормированные пространства

$$V_{b,m}(T_C) = \{f \in H(T_C) : N_m(f) = \sup_{z\in T_C} \frac{|f(z)|e^{-b(y)}}{(1+\|z\|)^m(1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^m} < \infty\},$$

$$H_m(T_C) = \{F \in H(T_C) : \|F\|_m = \sup_{z\in T_C} \frac{|F(z)|}{e^{\omega_m(\|z\|)}(1+\frac{1}{\Delta_C(y)})^m} < \infty\}\ ,$$

где $z = x + iy, x \in \mathbb{R}^n, y \in C$. Пусть $H_M(T_C) = \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m(T_C)$, $V_b(T_C) = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{b,m}(T_C)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $H_M(T_C)$ и $V_b(T_C)$ становятся линейными пространствами. Наделим $H_M(T_C)$ ($V_b(T_C)$) топологией индуктивного предела пространств $H_m(T_C)$ ($V_{b,m}(T_C)$).

Преобразование Фурье-Лапласа функционала $\Phi \in S^*(U)$ ($\Phi \in G^*_M(U)$) определим по формуле $\hat{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i<\xi,z>}),\ z \in T_C$.

Преобразование Лапласа функционала $\Phi \in E^*(U)$ определим по формуле

$$\tilde{\Phi}(z) = (\Phi, e^{i<\lambda,z>}),\ z \in T_C.$$

По описанию сопряжённых пространств получены следующие результаты.

Теорема 2. *Преобразование Фурье-Лапласа* $\mathcal{F} : S^*(U) \to V(T_C)$, *действующее по правилу* $\mathcal{F}(T) = \hat{T}$, *— топологический изоморфизм.*

Для случая, когда $b(y) = a\|y\|(a \geq 0)$, — это результат В.С. Владимирова [1, с. 170]. По существу, в теореме 2 требовалось показать лишь, что $\mathcal{F}$ — отображение "в".

Теорема 3. *Преобразование Фурье-Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $G_M^*(U)$ и $H_M(T_C)$.*

Теорема 4. *Преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $E^*(U)$ и $H_M(T_C)$.*

Доказательство теоремы 1 приведено в третьем разделе, теоремы 2 — в четвёртом, теоремы 3 — в пятом, теоремы 4 — в шестом разделе. В разделе 2 изучены некоторые свойства функциий, ассоциированных с последовательностями M и K. Простой пример множества $U(b, C)$ имеется в [3].

Замечание 1. Определение пространств $G_M(U)$ и $H_{b,M}(T_C)$ не зависит от выбора последовательности $(\varepsilon_m)_{m=1}^{\infty}$. Считаем далее, что $\varepsilon_m = H_2^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\omega_m(r) = \omega_M(H_2^m r)$, $r \geq 0$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Для любых $x > 0, s > 1$*

$$x \leq \ln \frac{s}{s-1} + \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(sx)^m}{m!} .$$

Доказательство. Пусть $x > 0, s > 1$. Имеем

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(sx)^m}{m!} \frac{1}{s^m} \leq \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(sx)^m}{m!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{s^m} = \frac{s}{s-1} \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{(sx)^m}{m!} .$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $s > 1$. Тогда для любого $r \geq 0$*

$$w_M(sr) + r \leq w_M(sH_2 r) + \ln \frac{a_1 H_1 s}{s-1} .$$

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы верно при $r = 0$. Пусть теперь $r > 0$. Тогда для $s > 1$

$$w_M(sr) + r \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(sr)^k}{M_k} + \ln \frac{s}{s-1} + \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(sr)^m}{m!} \leq$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(sr)^k}{M_k} + \ln \frac{s}{s-1} + \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{a_1 (sr)^m}{M_m} = \sup_{k,m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(sr)^{k+m}}{M_k M_m} + \ln \frac{a_1 s}{s-1} \leq$$

$$\leq \sup_{k,m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{H_1 (sH_2 r)^{k+m}}{M_{k+m}} + \ln \frac{a_1 s}{s-1} \leq w_M(sH_2 r) + \ln \frac{a_1 H_1 s}{s-1} .$$

Лемма 2 доказана.

Применяя лемму 2 с $s = H_2^m$ $(m \in \mathbb{N})$, имеем для всех $r \geq 0$

$$w_M(H_2^m r) + r \leq w_M(H_2^{m+1} r) + \ln \frac{a_1 H_1 H_2^m}{H_2^m - 1} \leq w_M(H_2^{m+1} r) + \ln \frac{a_1 H_1 H_2}{H_2 - 1} .$$

Полагая $Q = \ln \dfrac{a_1 H_1 H_2}{H_2 - 1}$ и учитывая обозначения, имеем $\forall m \in \mathbb{N}$

$$w_m(r) + r \leq w_{m+1}(r) + Q, \ r \geq 0. \tag{1}$$

Определим функцию $\mathcal{N}$ на $[0, \infty)$ следующим образом:

$$\mathcal{N}(r) = \min \left\{ k \in \mathbb{Z}_+ : w_M(r) = \ln \frac{r^k}{M_k} \right\}, \ r > 0; \mathcal{N}(0) = 0.$$

Легко проверяется, что при $r \in (\frac{M_k}{M_{k-1}}, \frac{M_{k+1}}{M_k}]$ $(k \in \mathbb{N})$ $w_M(r) = \ln \dfrac{r^k}{M_k}$, $\mathcal{N}(r) = k$; $w(r) = 0$, $\mathcal{N}(r) = 0$ при $r \in (0, M_1]$. Отметим, что $w_M \in C[0, \infty)$. Ясно, что и функция w_K также непрерывна на $[0, \infty)$.

Из условия $i_4)$ на последовательность M следует, что найдётся постоянная $A_\gamma > 0$ такая, что

$$w_M(r) \le A_\gamma r^{\frac{1}{\gamma}}, \ r \ge 0. \tag{2}$$

Пользуясь условием $i_3)$ на последовательность M и леммой 1, имеем при любом $\varepsilon \in (0,1)$

$$w_M(r) \ge \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{a_{\varepsilon^2} \varepsilon^{2k} k!} \ge \frac{r}{\varepsilon} - \ln \frac{a_{\varepsilon^2}}{1-\varepsilon} \ , \ r > 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{w_M(r)}{r} = +\infty.$$

Оценим ещё рост функции $\mathcal{N}(r)$. Пользуясь представлением

$$w_M(r) = \int_0^r \frac{\mathcal{N}(t)}{t} \, dt, \ r \ge 0, \tag{3}$$

имеем

$$w_M(er) \ge \int_r^{er} \frac{\mathcal{N}(t)}{t} \, dt \ge \mathcal{N}(r).$$

Отсюда и из оценки (2) следует, что

$$\mathcal{N}(r) \le A_\gamma (er)^{\frac{1}{\gamma}}, \ r \ge 0. \tag{4}$$

Лемма 3. *Для любых* $r_1, r_2 \ge 0$

$$|w_M(r_2) - w_M(r_1)| \le A_\gamma e^{\frac{1}{\gamma}} (r_1 + r_2)^{\frac{1}{\gamma} - 1} |r_2 - r_1|.$$

Доказательство. Пусть $r_2 \ge r_1 \ge 0$. Пользуясь (3) и (4), имеем

$$w_M(r_2) - w_M(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathcal{N}(t)}{t} \, dt \le \gamma A_\gamma e^{\frac{1}{\gamma}} ({r_2}^{\frac{1}{\gamma}} - {r_1}^{\frac{1}{\gamma}}) \le$$

$$\le A_\gamma e^{\frac{1}{\gamma}} (r_1 + r_2)^{\frac{1}{\gamma} - 1} (r_2 - r_1).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$

$$w_K(r) + N \ln r \le w_K(er) + \ln K_N, \ r > 0.$$

Доказательство. Отметим вначале, что в силу логарифмической выпуклости последовательности M для любых $p, q \in \mathbb{Z}_+$ $M_{p+q} \ge M_p M_q$. Поэтому

$$K_{p+q} = \frac{(p+q)!}{M_{p+q}} \le e^{p+q} \frac{p! q!}{M_p M_q} = e^{p+q} K_p K_q \ , p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $r > 0$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$

$$w_K(r) + N \ln r \le \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^m}{K_m} + \ln r^N = \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^{m+N}}{K_m} \le$$

$$\le \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(er)^{m+N} K_N}{K_{m+N}} \le w_K(er) + \ln K_N.$$

Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 следует, что для любых $N \in \mathbb{N}$, $\mu > 0$ и $A > 0$

$$w_K(\mu r) + N \ln(1 + Ar) \le w_K(e\mu r) + N \ln\left(1 + \frac{A}{\mu}\right) + \ln K_N, \ r \ge 0. \tag{5}$$

Лемма 5. *Справедливо неравенство*

$$2w_K(r) \le w_K(er), \ r \ge 0.$$

Доказательство. При $r = 0$ неравенство выполнено. При $r > 0$ имеем

$$2w_K(r) = 2 \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^m}{K_m} = \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^{2m}}{K_m^2} \le \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(er)^{2m}}{K_{2m}} \le w_K(er).$$

3. Изоморфизм пространств $G_M(U)$ и $E(U)$

Теорема 1. *Пространства $G_M(U)$ и $E(U)$ топологически изоморфны.*

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $G_M(U)$. Тогда при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$

$$|(D^\alpha f)(x)| \le p_{m,\varepsilon}(f) \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}{(1 + \|x\|)^m} \ , \ x \in V. \tag{6}$$

Из оценки (6) следует, что каковы бы ни были точки $x, x_0 \in V$, справедливо представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

причём ряд, стоящий справа, сходится равномерно на компактных подмножествах V к f [6].

Построим отображение $T : G_M(U) \to E(U)$ следующим образом. Пусть $x_0 \in V$. В силу оценки (6) и условия $i_3)$ на M функция

$$F_{x_0}(z) = \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!} (z - x_0)^\alpha \ , \ z \in \mathbb{C}^n,$$

является целой. Причём, для $x \in V \quad F_{x_0}(x) = f(x)$. Отсюда следует, что для любых $x_1, x_2 \in V \quad F_{x_1}(z) = F_{x_2}(z), \ z \in \mathbb{C}^n$. Тем самым определена функция $F \in H(\mathbb{C}^n)$ такая, что для каждого $\xi \in V$ всюду в $\mathbb{C}^n \quad F(z) = F_\xi(z)$ и $F(x) = f(x), \ x \in V$. Через T обозначим отображение, которое каждой функции из $G_M(U)$ ставит в соответствие её голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$. Очевидно, отображение T взимнооднозначно и линейно.

Пусть $f \in G_M(U)$. Оценим рост функции $F = T(f)$. Пусть $z = x + \ iy, \ x \in V, y \in \mathbb{R}^n$. Так как

$$F(z) = \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} (iy)^\alpha \ ,$$

то при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| \le p_{m,\varepsilon}(f) \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \|y\|^{|\alpha|}}{(1 + \|x\|)^m \alpha!} = \frac{p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N M_N \|y\|^N \sum_{|\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!} =$$

$$= \frac{p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N M_N \|y\|^N \frac{n^N}{N!} \le \frac{2t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \frac{(2\varepsilon n t_2 \|y\|)^N}{K_N} =$$

$$= \frac{2t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|x\|)^m} e^{w_K(2\varepsilon n t_2 \|y\|)}. \tag{7}$$

Теперь оценим сверху $|F(z)|$ в точках $z = x + iy$, для которых $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$. Пусть ξ — произвольная точка множества V. Тогда из представления

$$F(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!}(z - \xi)^\alpha$$

имеем при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| \leq p_{m,\varepsilon}(f) \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}{(1 + \|\xi\|)^m \alpha!} \|z - \xi\|^{|\alpha|} =$$

$$= \frac{p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|\xi\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^N M_N \|z - \xi\|^N n^N}{N!} \leq \frac{t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|\xi\|)^m} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon n t_2 \|z - \xi\|)^N}{K_N} \leq$$

$$\leq \frac{2t_1 p_{m,\varepsilon}(f)}{(1 + \|\xi\|)^m} e^{w_K(2\varepsilon n t_2 \|z - \xi\|)}.$$

Таким образом, в этом случае при любых $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$

$$|F(z)| \leq 2t_1 p_{m,\varepsilon}(f) \inf_{\xi \in V} \frac{e^{w_K(2\varepsilon n t_2 \|z - \xi\|)}}{(1 + \|\xi\|)^m}. \tag{8}$$

Для $m \in \mathbb{N}$ и $s > 0$ пусть $g_{m,s}(z) = \inf\limits_{\xi \in V} (w_K(s\|z - \xi\|) - m \ln(1 + \|\xi\|))$, где $z = x + iy$, причём $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$. Так как

$$w_K(s\|z - \xi\|) - m \ln(1 + \|\xi\|) \leq w_K(2s\|x - \xi\|) - m \ln(1 + \|\xi\|) + w_K(2s\|y\|) \leq$$

$$\leq w_K(2s\|x - \xi\|) + m \ln(1 + \|x - \xi\|) + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|),$$

то

$$g_{m,s}(z) \leq w_K(2s d_U(x)) + m \ln(1 + d_U(x)) + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|).$$

Пользуясь неравенством (5) и полагая $d_{m,s} = m \ln(1 + \frac{1}{2s}) + \ln K_m$, имеем для $z = x + iy$ с $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$

$$g_{m,s}(z) \leq w_K(2es d_U(x)) + w_K(2s\|y\|) - m \ln(1 + \|x\|) + d_{m,s}. \tag{9}$$

Возвращаясь к (8) и пользуясь (9) с $s = 2\varepsilon n t_2$, выводим, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ в точках $z = x + iy$ с $x \notin V, y \in \mathbb{R}^n$, справедлива оценка

$$|F(z)| \leq A_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f) e^{w_K(4\varepsilon e n t_2 d_U(x)) + w_K(4\varepsilon n t_2 \|y\|) - m \ln(1 + \|x\|)}, \tag{10}$$

где $A_{m,\varepsilon} = 2t_1 e^{d_{m,s}}$. А принимая во внимание неравенство (7), делаем вывод, что оценка (10) справедлива всюду в $\mathbb{C}^n$.

Продолжим оценку (10). Для любого $z \in \mathbb{C}^n$

$$|F(z)| \leq A_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f) e^{w_K(4\varepsilon e n t_2 d_U(x)) + w_K(4\varepsilon n t_2 \|y\|) - m \ln(1 + \|z\|) + m \ln(1 + \|y\|)}.$$

Снова пользуясь неравенством (5) и полагая $B_{m,\varepsilon} = K_m A_{m,\varepsilon} (1 + \frac{1}{4\varepsilon n t_2})^m$, имеем для любых $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$|F(z)| \leq B_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f) e^{w_K(4\varepsilon e n t_2 d_U(x)) + w_K(4e\varepsilon n t_2 \|y\|) - m \ln(1 + \|z\|)}, \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$q_{m, 4e\varepsilon n t_2}(T(f)) \leq B_{m,\varepsilon} p_{m,\varepsilon}(f).$$

Таким образом, T – непрерывное отображение из $G_M(U)$ в $E(U)$.

Покажем теперь, что обратное отображение T^{-1} непрерывно. Пусть F — произвольная функция из $E(U)$. Покажем, что функция $f = F_{|U}$ принадлежит пространству $G_M(U)$. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$, $R > 0$ произвольны. Пусть $x \in V$. Для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(1+\|x\|)^m (D^\alpha f)(x) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int \cdots \int_{L_R(x)} \frac{(1+\|x\|)^m F(\zeta)}{(\zeta_1 - x_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - x_n)^{\alpha_n+1}} \, d\zeta,$$

где $L_R(x) = \{\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - x_j| = R, j = 1, \dots, n\}$, $d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$. Отсюда

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} \max_{\zeta \in L_R} (1+\|\zeta - x\|)^m (1+\|\zeta\|)^m |F(\zeta)| \le$$

$$\le \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} (1+\sqrt{n}R)^m q_{m,\varepsilon}(F) \max_{\zeta=\xi+i\eta \in L_R} e^{w_K(\varepsilon d_U(\xi)) + w_K(\varepsilon\|\eta\|)} \le$$

$$\le \frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}} q_{m,\varepsilon}(F) e^{2w_K(\varepsilon\sqrt{n}R) + m\ln(1+\sqrt{n}R)}.$$

Пользуясь леммой 5, имеем

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \frac{|\alpha|!}{R^{|\alpha|}} q_{m,\varepsilon}(F) e^{w_K(e\varepsilon\sqrt{n}R) + m\ln(1+\sqrt{n}R)}.$$

Теперь, привлекая неравенство (5), получаем

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \frac{|\alpha|!}{R^{|\alpha|}} K_m q_{m,\varepsilon}(F) e^{w_K(e^2\varepsilon\sqrt{n}R) + m\ln(1+\frac{1}{e\varepsilon})}.$$

Переходя к точной нижней грани по $R > 0$, получаем

$$(1+\|x\|)^m |(D^\alpha f)(x)| \le \frac{|\alpha|!}{K_{|\alpha|}} K_m (e^2\varepsilon\sqrt{n})^{|\alpha|} \left(1 + \frac{1}{e\varepsilon}\right)^m q_{m,\varepsilon}(F) \le$$

$$\le t_1 (e^2 r_2 \varepsilon\sqrt{n})^{|\alpha|} M_{|\alpha|} K_m \left(1 + \frac{1}{e\varepsilon}\right)^m q_{m,\varepsilon}(F).$$

Отсюда следует, что

$$p_{m, e^2 t_2 \varepsilon\sqrt{n}}(f) \le t_1 K_m \left(1 + \frac{1}{e\varepsilon}\right)^m q_{m,\varepsilon}(F).$$

Это неравенство означает, что отображение T^{-1} непрерывно.

Таким образом, доказано, что пространства $G_M(U)$ и $E(U)$ топологически изоморфны.

4. Описание пространства $S^*(U)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа

Пусть $C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^m : <\xi, x> \ge 0, \forall x \in C\}$ – конус, сопряженный к конусу C, $pr\ C$ – пересечение C с единичной сферой. Для $r \ge 0$ пусть $B_r = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| \le r\}$, $\widetilde{B}_r$ – внешность шара B_r.

Лемма 6. *Для $y \in C, m \in \mathbb{N}$ пусть $g(\xi) = -<\xi, y> + m\ln(1+\|\xi\|)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда найдётся число $d > 0$, не зависящее от y, такое, что*

$$\sup_{\xi \in U} g(\xi) \le b(y) + dm + 3m\ln\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right) + 2m\ln(1+\|y\|).$$

Доказательство. В силу непрерывности и позитивной однородности b на $\overline{C}$ найдётся число $r > e$ такое, что $|b(y)| \le r\|y\|$ для $y \in \overline{C}$. Отсюда следует, что $U \subset C^* + B_r$. Найдётся и число $R_0 > 0$ такое, что для всех $R > R_0$ множество $U_R = U \cap B_R$ непусто. Положим $\widetilde{U}_R = U \setminus U_R$, $I_R = (C^* + \ B_r) \cap B_R$, $\widetilde{I}_R = (C^* + \ B_r) \setminus I_R$.

Пусть ξ_0 — произвольная точка из V. Покажем, что для каждого $y \in C$ найдётся число $R_1 > R_0$ такое, что $\sup\limits_{\xi \in \widetilde{I}_{R_1}} g(\xi) < g(\xi_0)$. Отметим, что, если $R > R_2 = \max(R_0, 2r + \frac{m}{\Delta_C(y)})$, то

$$\sup_{\xi \in \widetilde{I}_R} g(\xi) \leq \sup_{\xi_1 \in C^* \cap \widetilde{B}_{R-r}} g(\xi_1) + \sup_{\xi_2 \in B_r} g(\xi_2) =$$

$$= \sup_{\sigma \in pr\ C^*} \sup_{t > R-r} (-t < \sigma, y > +m \ln(1+t)) + \sup_{\xi_2 \in B_r} g(\xi_2) =$$

$$\leq \sup_{\sigma \in pr\ C^*} (-(R-r) < \sigma, y >) + m \ln(1 + R - r) + r\|y\| + m \ln(1+r) =$$

$$= -(R-r)\Delta_C(y) + m \ln(1 + R - r) + r\|y\| + m \ln(1+r). \tag{11}$$

Покажем теперь, что для каждого $y \in C$ можно найти число $R_3 > 0$ так, что для $R \geq R_3$ будет выполнено неравенство

$$-(R-r)\Delta_C(y) + (2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|) \ln(1 + R - r) < 0. \tag{12}$$

Тогда тем более будет справедливо неравенство

$$-(R-r)\Delta_C(y) + m \ln(1 + R - r) + r\|y\| + m \ln(1+r) < g(\xi_0). \tag{13}$$

Отметим, что множество решений неравенства $x - \lambda \ln(1+x) > 0$ с параметром $\lambda > 1$ содержит интервал $[\lambda^2, \infty)$. В качестве λ возьмём число $\frac{2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|}{\Delta_C(y)}$. Поскольку $r > 1$, то $\lambda > 1$. Таким образом, неравенство (12) будет выполнено для всех $R \geq R_3 = r + \left(\frac{2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|}{\Delta_C(y)}\right)^2$. Положим теперь $R_1 = 3r + R_0 + \frac{m}{\Delta_C(y)} + \left(\frac{2m + (r + \|\xi_0\|)\|y\|}{\Delta_C(y)}\right)^2$. Тогда, из (11) и (13) следует, что $\sup\limits_{\xi \in \widetilde{U}_{R_1}} g(\xi) < g(\xi_0)$. Значит, $\sup\limits_{\xi \in U} g(\xi) = \sup\limits_{\xi \in U_{R_1}} g(\xi)$. Таким образом, точка $\tilde{\xi}$, в которой достигается точная верхняя грань функции g на U, принадлежит U_{R_1}. Проводя элементарные оценки, найдём постоянную $d > 0$, зависящую от r, R_0, m и ξ_0, такую, что

$$\ln(1 + \|\tilde{\xi}\|) \leq d + 3 \ln\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right) + 2 \ln(1 + \|y\|).$$

Следовательно,

$$\sup_{\xi \in U} g(\xi) = g(\tilde{\xi}) = - < \tilde{\xi}, y > +m \ln(1 + \|\tilde{\xi}\|) \leq$$

$$\leq b(y) + dm + 3m \ln\left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right) + 2m \ln(1 + \|y\|).$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть Φ — произвольный функционал из $S^*(U)$. Хорошо известно, что функция $\hat{\Phi}$ голоморфна в T_C (см. [1], [2], [5], [7], [8]). Далее найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что

$$|(\Phi, f)| \leqslant c\|f\|_{m,U}, \ f \in S(U).$$

Полагая $f(\xi) = e^{i<\xi,z>}$, где $z = x + iy, x \in \mathbb{R}^n, y \in C$, имеем

$$|\hat{\Phi}(z)| \leqslant c \sup_{\xi \in V, |\alpha| \leq m} |(iz)^\alpha e^{i<\xi,z>}|(1 + \|\xi\|)^m \leq$$

$$\leq c(1 + \|z\|)^m e^{\sup\limits_{\xi \in V}(-<\xi,y>+m\ln(1+\|\xi\|))}.$$

Воспользовавшись леммой 6, получаем

$$|\hat{\Phi}(z)| \leq c(1 + \|z\|)^{3m} e^{b(y)+dm} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}, \ z \in T_C.$$

Таким образом, отображение $\mathcal{F}$, ставящее каждому функционалу Φ из $S^*(U)$ его преобразование Фурье-Лапласа $\hat{\Phi}$, действует из $S^*(U)$ в $V_b(T_C)$.

Как известно, $S^*(U)$ (см., например, [5, с. 20]) есть индуктивный предел возрастающей последовательности банаховых пространств $S_p^*(U)$, где $S_p^*(U)$ — сильное сопряжённое к пространству $S_p(U)$. Если $\Phi \in S_m^*(U)$, то

$$|(\Phi, f)| \leqslant \|\Phi\|_{-m,U} \|f\|_{m,U}, \ f \in S(U),$$

где $\|\Phi\|_{-m,U}$ — норма функционала Φ в $S_m^*(U)$, $m \in \mathbb{N}$. Отсюда, пользуясь леммой 6, получаем

$$N_{3m}(\hat{\Phi}) \leq e^{dm} \|\Phi\|_{-m,U}.$$

Из этого неравенства следует непрерывность $\mathcal{F}$.

Доказательство биективности отображения $\mathcal{F}$, непрерывности $\mathcal{F}^{-1}$ такое же, как в [1, с. 170–173]. Таким образом, $\mathcal{F}$ — изоморфизм.

Замечание 2. Рассуждения Роевера в конце работы [9] позволяют получить следующую оценку преобразования Фурье-Лапласа функционала $\Phi \in S^*(U)$:

Пусть $\varepsilon > 0$, $\eta \in prC$. Тогда найдутся числа $C_\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ (не зависящее от $\varepsilon > 0$) такие, что $|\hat{\Phi}(z)| \leq C_\varepsilon (1 + \|z\|)^m e^{b(y)}, \ z = x + iy, y \in \varepsilon\eta + C$.

5. Пространство $G_M(U)$ и сопряженное к нему

Пользуясь теоремой Арцела-Асколи, нетрудно показать, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ единичный шар пространства $G_{m+1}(U)$ относительно компактен в $G_m(U)$. Поэтому $G_M(U)$ — пространство (M^*) (о пространствах (M^*) см. [10], [11]).

Далее понадобится общий вид функционала из $G'_M(U)$. Пусть

$$C_m(U) = \{f \in C(U) : \widetilde{p}_m(f) = \sup_{x \in U} |f(x)|(1 + \|x\|)^m < \infty\}, \ m \in \mathbb{N}.$$

По стандартной схеме (см., [4, Предложения 2.10, 2.11, Следствие 2.12]) доказывается

Лемма 7. *Пусть функционал $T \in G'_M(U)$, числа $c > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ таковы, что*

$$|(T, f)| \leqslant c p_m(f), \ f \in G_M(U).$$

Тогда найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_m(U)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$) такие, что

$$|(T_\alpha, f)| \leqslant \frac{C\widetilde{p}_m(f)}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \ , \ f \in C_m(U),$$

и $(T, f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (T_\alpha, D^\alpha f), \ f \in G_M(U).$

Лемма 8. *Пусть $S \in G'_M(U)$. Тогда $\hat{S} \in H_M(T_C)$.*

Доказательство. Отметим вначале, что для любого $z = x + iy \in T_C$ ($x \in \mathbb{R}^n, y \in C$) функция $f_z(\xi) = e^{i<\xi,z>}$ принадлежит пространству $G_M(U)$. Действительно, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$p_m(f_z) = \sup_{\xi \in V, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(iz)^\alpha e^{i<\xi,z>}|(1 + \|\xi\|)^m}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\|z\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \cdot \sup_{\xi \in V} e^{-<\xi,y> + m \ln(1+\|\xi\|)} = e^{\omega_m(\|z\|) + \sup\limits_{\xi \in V}(-<\xi,y> + m \ln(1+\|\xi\|))}.$$

Пользуясь леммой 6 и неравенством (1), найдем постоянную $A > 0$, зависящую только от m, такую, что

$$p_m(f_z) \leq A e^{\omega_{m+[r]+1}(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}, \tag{14}$$

где r — число, определенное в ходе доказательства леммы 6.

Пусть теперь $S \in G'_M(U)$. В силу выше написанного на T_C корректно определена функция $\hat{S}(z) = (S, e^{i<\xi,z>})$. Пользуясь леммами 7 и 6, условием i_4), легко показать, что $\hat{S} \in H(T_C)$. Далее найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что

$$|(S,f)| \leqslant cp_m(f), \quad f \in G_M(U).$$

Отсюда и из (14) получаем

$$|\hat{S}(z)| \leqslant cAe^{\omega_{m+[r]+1}(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} .$$

Лемма 8 доказана.

Пользуясь теоремой Монтеля и неравенством (1), получаем, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ вложения $j_m : H_{b,m}(T_C) \to H_{b,m+1}(T_C)$ вполне непрерывны. Это означает, что $H_M(T_C)$ — пространство (LN^*) (о пространствах (LN^*) см. [10], [11]).

В леммах 9 и 10 будут использованы следующие обозначения. Точку $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ $(k = 2, 3, \dots)$ будем записывать в виде $z = (z', z_k)$, где $z' = (z_1, \dots, z_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1}$.

Если в $\mathbb{C}^n$ определена функция φ, то при $k = 1, \dots, n-1$ для $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ и $\zeta \in \mathbb{C}^n$ пусть $\varphi_k(z,\zeta) = \varphi(z_1+\zeta_1, \dots, z_k+\zeta_k, \zeta_{k+1}, \dots, \zeta_n)$, для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $\zeta \in \mathbb{C}^n$ пусть $\varphi_n(z,\zeta) = \varphi(z_1+\zeta_1, \dots, z_n+\zeta_n)$.

Для формы $f = \sum_{k=1}^m f_k d\overline{z}_k$ типа (0, 1), где $f_1, \dots, f_m$ — функции в $\mathbb{C}^m$, положим $\|f(z)\|^2 = \sum_{k=1}^m |f_k(z)|^2$.

Для $u \in C^1(\Omega)$ (Ω – открытое множество в $\mathbb{C}^m$) $\overline{\partial} u = \sum_1^m \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$. Определение оператора $\overline{\partial}$ на формах имеется в [12].

Через λ_m обозначаем меру Лебега в $\mathbb{C}^m$.

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{O}$ — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть функция $\varphi \in psh(\mathbb{C}^n)$ при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$ удовлетворяет условию $|\varphi(z) - \varphi(t)| \leqslant c_\varphi$ для всех $z, t \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\|z-t\| \leqslant \frac{1}{(1+\|t\|)^\nu}$, а функция $h \in psh(\mathcal{O})$ при некотором $c_h > 0$ удовлетворяет условию $|h(z) - h(t)| \leqslant c_h$ для всех $z, t \in \mathcal{O}$ таких, что $\|z - t\| \leqslant \min\left(1, \frac{\Delta_{\mathcal{O}}(t)}{4}\right)$.*

Пусть функция $f \in H(\mathbb{C}^{k-1} \times \mathcal{O})$ (где $k = 2, \dots, n$) удовлетворяет в $\mathbb{C}^{k-1} \times \mathcal{O}$ при некоторых $c_f > 0, m_{k-1} \geq 0$ неравенству

$$|f(z',\zeta)| \leqslant c_f(1 + \|(z',\zeta)\|)^{m_{k-1}} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_{k-1}} e^{\varphi_{k-1}(z',\zeta)+h(\zeta)}.$$

Тогда существует функция $F \in H(\mathbb{C}^k \times \mathcal{O})$ такая, что $F(z', 0, \zeta) = f(z', \zeta)$ для $z' \in \mathbb{C}^{k-1}, \zeta \in \mathcal{O}$, и при некоторых $C > 0$ и $m_k \geq 0$ для $z = (z', z_k) \in \mathbb{C}^k, \zeta \in \mathcal{O}$

$$|F(z,\zeta)| \leqslant C(1 + \|(z,\zeta)\|)^{m_k} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_k} e^{\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Доказательство. Пусть функция $\mu \in C^\infty[0,\infty)$ такова, что при $t \geq 0$ $0 \leqslant \mu(t) \leqslant 1$ и $|\mu'(t)| \leqslant 4$, $\mu(t) = 1$ при $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $\mu(t) = 0$ при $t \geq 1$. Для $z \in \mathbb{C}^k$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ пусть

$$\mathcal{H}_k(z,\zeta) = \mu((1 + \sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^\nu |z_k|).$$

Отметим, что $\mathcal{H}_k(z,\zeta) = 0$ вне множества

$$\Omega_k = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^{k+n} : (1 + \sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^\nu |z_k| < 1\}.$$

При $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \overline{\zeta}_j}(z,\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\nu|z_k|\mu'((1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^\nu|z_k|)(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu-1}\frac{\zeta_j}{\|(z',\zeta)\|}.$$

Для каждого $j = 1, \dots, k-1$
$$\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \overline{z}_j}(z,\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\nu |z_k| \mu'((1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu}|z_k|)(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu-1}\frac{z_j}{\|(z',\zeta)\|}.$$
Далее
$$\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \overline{z}_k}(z,\zeta) = \frac{1}{2}\mu'((1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu}|z_k|)(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu}\frac{z_k}{|z_k|}.$$
Пусть
$$W_k = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^{n+k} : \frac{1}{3} < (1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu}|z_k| < 1\}.$$
Очевидно, $\overline{\partial} H_k(z,\zeta) = 0$ вне W_k. Если $(z,\zeta) \in W_k$, то
$$\|\overline{\partial}\mathcal{H}_k(z,\zeta)\|^2 = \sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \overline{z}_j}(z,\zeta)\right|^2 + \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial \mathcal{H}_k}{\partial \overline{\zeta}_j}(z,\zeta)\right|^2 =$$
$$= \frac{(\mu'(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|^{\nu}|z_k|)(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu})^2}{4}\left(\frac{2\nu^2|z_k|^2}{(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^2}+1\right) \leqslant$$
$$\leqslant 4(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{2\nu}\left(\frac{2\nu^2}{(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{2+2\nu}}+1\right) \leqslant$$
$$\leq 4(2\nu^2+1)(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{2\nu}.$$
Итак, всюду в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$
$$\|\overline{\partial}\mathcal{H}_k(z,\zeta)\|^2 \leqslant 4(2\nu^2+1)(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{2\nu}.$$
Выберем функцию $v_k \in C^{\infty}(\mathbb{C}^k \times \mathcal{O})$ с подходящми оценками так, чтобы функция
$$F(z,\zeta) = f(z',\zeta)\mathcal{H}_k(z,\zeta) - z_k v_k(z,\zeta), \ (z,\zeta) \in \mathbb{C}^k \times \mathcal{O},$$
(для которой $F(z',0,\zeta) = f(z',\zeta)$, если $(z',\zeta) \in \mathbb{C}^{k-1} \times \mathcal{O}$) была голоморфна на $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$. Итак, функция $v_k \in C^{\infty}(\mathbb{C}^k \times \mathcal{O})$ должна удовлетворять уравнению
$$\overline{\partial} v_k(z,\zeta) = \frac{f(z',\zeta)\overline{\partial}\mathcal{H}_k(z,\zeta)}{z_k}, \ (z,\zeta) \in \mathbb{C}^k \times \mathcal{O}. \tag{15}$$
Форму типа $(0,1)$, стоящую справа в (15), обозначим $g_k(z,\zeta)$. Отметим, что $g_k(z,\zeta)$ — нулевая форма вне W_k. Непосредственно проверяется, что $\overline{\partial} g_k(z,\zeta) = 0$ в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$. Если $(z,\zeta) \in W_k$, то
$$\|g_k(z,\zeta)\|^2 = \frac{|f(z',\zeta)|^2\|\overline{\partial}\mathcal{H}_k(z,\zeta)\|^2}{|z_k|^2} \leqslant$$
$$\leq 36(2\nu^2+1)c_f^2 4^{\nu}(1+\|(z',\zeta)\|)^{2m_{k-1}+4\nu}e^{2(\varphi_{k-1}(z',\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}.$$
Полагая $A_1 = 36(2\nu^2+1)c_f^2 4^{\nu}$, имеем в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$
$$\|g_k(z,\zeta)\|^2 \leqslant A_1(1+\|(z',\zeta)\|)^{2m_{k-1}+4\nu}e^{2(\varphi_{k-1}(z',\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}.$$
Отметим, что для $(z,\zeta) \in \Omega_k$
$$\|(z_1+\zeta_1,\dots,z_k+\zeta_k,\zeta_{k+1},\dots,\zeta_n) - (z_1+\zeta_1,\dots,z_{k-1}+\zeta_{k-1},\zeta_k,\dots,\zeta_n)\| \leqslant$$
$$\leq \frac{1}{(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^{\nu}} \leq \frac{1}{(1+\|(z_1+\zeta_1,\dots,z_{k-1}+\zeta_{k-1},\zeta_k,\dots,\zeta_n)\|)^{\nu}}.$$
Поэтому для $(z,\zeta) \in \Omega_k$ $|\varphi_k(z,\zeta) - \varphi_{k-1}(z',\zeta)| \leqslant c_{\varphi}$.

Далее получим интегральные оценки на $\|g_k(z,\zeta)\|$. Имеем
$$\int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{\|g_k(z,\zeta)\|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}}d\lambda_{n+k}(z,\zeta) =$$

$$= \int_{W_k} \frac{\|g_k(z,\zeta)\|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}} d\lambda_{n+k}(z,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \int_{W_k} \frac{(1+\|(z',\zeta)\|)^{2\nu} e^{2(\varphi_{k-1}(z',\zeta)-\varphi_k(z,\zeta))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+k)-1}} d\lambda_{n+k}(z,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant A_1 e^{2c_\varphi} \int_{W_k} \frac{(1+\|(z',\zeta)\|)^{2\nu}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+k)-1}} d\lambda_{n+k}(z,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant A_1 e^{2c_\varphi} \int\limits_{\mathbb{C}^{n+k-1}} \int\limits_{|z_k|<\frac{1}{(1+\sqrt{2}\|(z',\zeta)\|)^\nu}} \frac{(1+\|(z',\zeta)\|)^{2\nu}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+k)-1}} d\lambda_1(z_k) d\lambda_{n+k-1}(z',\zeta) =$$

$$= \pi A_1 e^{2c_\varphi} \int_{\mathbb{C}^{n+k-1}} \frac{d\lambda_{n+k-1}(z',\zeta)}{(1+\|(z',\zeta)\|)^{2(n+k-1)+1}} < \infty.$$

Пользуясь теоремой 2.2.1$'$ из [13] найдём решение $v_k \in C^\infty(\mathbb{C}^k \times \mathcal{O})$ уравнения (15) такое, что

$$2 \int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{|v_k(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}(1+\|(z,\zeta)\|^2)^2} \, d\lambda_{n+k}(z,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{|v_k(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}} \, d\lambda_{n+k}(z,\zeta).$$

Найдём интегральные оценки на F. Имеем

$$\int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{|F(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}(1+\|(z,\zeta)\|^2)^3} \, d\lambda_{n+k}(z,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{|f(z',\zeta)|^2 |H_k(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}(1+\|(z,\zeta)\|^2)^3} \, d\lambda_{n+k}(z,\zeta) +$$

$$+ 2 \int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{|z_k|^2 |v_k(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}(1+\|(z,\zeta)\|^2)^3} \, d\lambda_{n+k}(z,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_f^2 \int_{\Omega_k} \frac{e^{2(\varphi_{k-1}(z',\zeta)-\varphi_k(z,\zeta))}}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+k+\nu)-1}(1+\|(z,\zeta)\|^2)^3} \, d\lambda_{n+k}(z,\zeta) +$$

$$+ 2 \int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{|v_k(z,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta))+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))} d\lambda_{n+k}(z,\zeta)}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}(1+\|(z,\zeta)\|^2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2c_f^2 e^{2c_\varphi} \int_{\mathbb{C}^{n+k}} \frac{d\lambda_{n+k}(z,\zeta)}{(1+\|(z,\zeta)\|^2)^{n+k+\nu+2}} +$$

$$+ \int_{\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}} \frac{\|g_k(z,\zeta)\|^2 e^{-2(\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta))+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}))} d\lambda_{n+k}(z,\zeta)}{(1+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)-1}} = A_2 < \infty.$$

От интегральных оценок на F стандартным образом (см., например, [14, с. 205]) переходим к равномерным. Пусть $R = \min(\frac{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}{4}, \frac{1}{2(1+\sqrt{2}\|(z,\zeta)\|)^\nu})$. Пользуясь плюрисубгармоничностью $|F(z,\zeta)|^2$ в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$ и, далее, интегральными оценками на F, имеем

$$|F(z,\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\nu_{n+k}(R)} \int\limits_{B_R(z,\zeta)} |F(t,w)|^2 \, d\lambda_{n+k}(t,w) \leq$$

$$\leqslant A_2 \sup_{(t,w)\in B_R(z,\zeta)} (e^{2(\varphi_k(t,w)+h(w)+m_{k-1}\ln(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(w)}))}(1+\|(t,w)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)+5}). \qquad (16)$$

Так как $\|w-\zeta\| \leqslant \min\left(1, \frac{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}{4}\right)$, то $|h(w) - h(\zeta)| \leqslant c_h$. Отметим ещё, что для $(t,w) \in B_R(z,\zeta)$

$$\|(t_1+w_1,\ldots,t_k+w_k,w_{k+1},\ldots,w_n)-(z_1+\zeta_1,\ldots,z_k+\zeta_k,\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n)\| =$$
$$= \|(t_1,\ldots,t_k,0,\ldots,0)+w-(z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0)-\zeta\| \leqslant \|t-z\|+\|w-\zeta\| \leqslant$$
$$\leq 2R \leq \frac{1}{(1+\sqrt{2}\|(z,\zeta)\|)^\nu} \leqslant \frac{1}{(1+\|(z_1+\zeta_1,\ldots,z_k+\zeta_k,\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n)\|)^\nu}.$$

Поэтому для $(t,w) \in B_R(z,\zeta)$ имеем $|\varphi_k(t,w)-\varphi_k(z,\zeta)| \leqslant c_\varphi$. Отсюда и из (16) имеем $\forall (z,\zeta) \in \mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$

$$|F(z,\zeta)|^2 \leqslant \frac{A_2}{\nu_{n+k}(1)}(2+\|(z,\zeta)\|)^{2(n+m_{k-1}+k+\nu)+5}\left(1+\frac{2}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{2m_{k-1}} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{4}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}+2(1+\sqrt{2}\|(z,\zeta)\|)^\nu\right)^{2(n+k)} e^{2(c_\varphi+c_h)}e^{\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Таким образом, найдётся постоянная $C>0$ такая, что всюду в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$

$$|F(z,\zeta)| \leqslant C(1+\|(z,\zeta)\|)^{m_k}\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_k} e^{\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)},$$

где $m_k = (n+k)(\nu+1)+m_{k-1}+3$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $\mathcal{O}$ — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть функция $\varphi \in psh(\mathbb{C}^n)$ при некоторых $c_\varphi > 0$ и $\nu > 0$ удовлетворяет условию $|\varphi(z)-\varphi(t)| \leqslant c_\varphi$ для всех $z,t \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\|z-t\| \leqslant \frac{1}{(1+\|t\|)^\nu}$, а функция $h \in psh(\mathcal{O})$ при некотором $c_h > 0$ удовлетворяет условию $|h(z)-h(t)| \leqslant c_h$ для всех $z,t \in \mathcal{O}$ таких, что $\|z-t\| \leqslant \min\left(1, \frac{\Delta_{\mathcal{O}}(t)}{4}\right)$.*

Пусть функция $f \in H(\mathcal{O})$ удовлетворяет при некотором $c_f > 0$ неравенству

$$|f(\zeta)| \leqslant c_f e^{\varphi(\zeta)+h(\zeta)}, \ \zeta \in \mathcal{O}.$$

Тогда существует функция $F \in H(\mathbb{C}^n \times \mathcal{O})$ такая, что для $\zeta \in \mathcal{O}$ $F(\zeta,\zeta) = f(\zeta)$ и при некоторых $C>0$ и $N \geq 0$

$$|F(z,\zeta)| \leqslant C(1+\|(z,\zeta)\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^N e^{\varphi(z)+h(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in \mathcal{O}.$$

Доказательство. Пусть функция $\mu \in C^\infty[0,\infty)$ такова, что при $t \geq 0$ $0 \leqslant \mu(t) \leqslant 1$ и $|\mu'(t)| \leqslant 4$, $\mu(t) = 1$ при $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $\mu(t) = 0$ при $t \geq 1$. На $\mathbb{C} \times \mathcal{O}$ рассмотрим функцию $\mathcal{H}_1(z_1,\zeta) = \mu((1+\|\zeta\|)^\nu |z_1|)$. Отметим, что $\mathcal{H}_1(z_1,\zeta) = 0$ вне множества

$$\Omega_1 = \{(z_1,\zeta) \in \mathbb{C}^{n+1} : (1+\|\zeta\|)^\nu |z_1| < 1\}.$$

Пусть

$$W_1 = \{(z_1,\zeta) \in \mathbb{C}^{n+1} : \frac{1}{3} < (1+\|\zeta\|)^\nu |z_1|) < 1\}.$$

Для любого $(z_1,\zeta) \in \mathbb{C} \times \mathcal{O}$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \bar{\zeta}_j}(z_1,\zeta) = \frac{1}{2}\mu'((1+\|\zeta\|)^\nu |z_1|)\nu |z_1|(1+\|\zeta\|)^{\nu-1}\frac{\zeta_j}{\|\zeta\|}\ , \ j=1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \bar{z}_1}(z_1,\zeta) = \frac{1}{2}\mu'((1+\|\zeta\|)^\nu |z_1|)(1+\|\zeta\|)^\nu \frac{z_1}{|z_1|}.$$

Очевидно, $\overline{\partial}\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)=0$ вне W_1. Для $(z_1,\zeta)\in W_1$

$$\|\overline{\partial}\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)\|^2=\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)}{\partial\zeta_j}\right|^2+\left|\frac{\partial\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)}{\partial\overline{z}_1}\right|^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\mu'((1+\|\zeta\|)^\nu|z_1|)(1+\|\zeta\|)^\nu)^2\left(\frac{\nu^2|z_1|^2}{(1+\|\zeta\|)^2}+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant 4(1+\|\zeta\|)^{2\nu}\left(\frac{\nu^2}{(1+\|\zeta\|)^{2+2\nu}}+1\right)\leqslant 4(\nu^2+1)(1+\|\zeta\|)^{2\nu}.$$

Итак, всюду в $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$

$$\|\overline{\partial}\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)\|^2\leqslant 4(\nu^2+1)(1+\|\zeta\|)^{2\nu}.$$

Выберем функцию $v_1\in C^\infty(\mathbb{C}\times\mathcal{O})$ с нужными оценками так, чтобы функция

$$F_1(z_1,\zeta)=f(\zeta)\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)-z_1v_1(z_1,\zeta)$$

была голоморфна на $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$. Очевидно, функция F_1 будет удовлетворять условию: $F_1(0,\zeta)=f(\zeta),\zeta\in\mathcal{O}$. Итак, $v_1\in C^\infty(\mathbb{C}\times\mathcal{O})$ должна удовлетворять уравнению

$$\overline{\partial}v_1(z_1,\zeta)=\frac{f(\zeta)\overline{\partial}\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)}{z_1},\ (z_1,\zeta)\in\mathbb{C}\times\mathcal{O}. \tag{17}$$

Форму, стоящую справа в (17), обоначим через $g_1(z_1,\zeta)$. Легко проверить, что $\overline{\partial}g_1(z_1,\zeta)=0$ всюду в $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$. Ясно, что $g_1(z_1,\zeta)$ — нулевая форма типа $(0,1)$ вне W_1. Если $(z_1,\zeta)\in W_1$, то

$$\|g_1(z_1,\zeta)\|^2=\frac{|f(\zeta)|^2}{|z_1|^2}\|\overline{\partial}\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)\|^2\leqslant c_f^2e^{2(\varphi(\zeta)+h(\zeta))}36(\nu^2+1)(1+\|\zeta\|)^{4\nu}.$$

Итак, полагая $B_1=36(\nu^2+1)c_f^2$, всюду в $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$

$$\|g_1(z_1,\zeta)\|^2\leqslant B_1e^{2(\varphi(\zeta)+h(\zeta))}(1+\|\zeta\|)^{4\nu}.$$

Напомним, что для $(z_1,\zeta)\in\mathbb{C}^{n+1}$ $\varphi_1(z_1,\zeta)=\varphi(\zeta_1+z_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)$ и если $(z_1,\zeta)\in\Omega_1$, то $|\varphi_1(z_1,\zeta)-\varphi(\zeta)|\leqslant c_\varphi$.

Далее

$$\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}}\frac{\|g_1(z_1,\zeta)\|^2e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+1+2\nu}}d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)=$$

$$=\int_{W_1}\frac{\|g_1(z_1,\zeta)\|^2e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+1+2\nu}}d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant B_1\int_{W_1}\frac{(1+\|\zeta\|)^{2\nu}e^{2(\varphi(\zeta)-\varphi_1(z_1,\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+1}}d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant B_1e^{2c_\varphi}\int_{W_1}\frac{(1+\|\zeta\|)^{2\nu}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+1}}d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant B_1e^{2c_\varphi}\int_{\mathbb{C}^n}\frac{(1+\|\zeta\|)^{2\nu}}{(1+\|\zeta\|)^{2n+1}}\left(\int_{|z_1|<\frac{1}{(1+\|\zeta\|)^\nu}}d\lambda_1(z_1)\right)d\lambda_n(\zeta)=$$

$$=\pi B_1e^{2C_\varphi}\int_{\mathbb{C}^n}\frac{d\lambda_n(\zeta)}{(1+\|\zeta\|)^{2n+1}}<\infty.$$

Пользуясь теоремой 2.2.1′ из [13] найдём решение $v_1\in C^\infty(\mathbb{C}\times\mathcal{O})$ уравнения (17) такое, что

$$2\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}}\frac{|v_1(z_1,\zeta)|^2e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^2}d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)\leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}} \frac{\|g_1(z_1,\zeta)\|^2 e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta).$$

Оценим рост функции $F_1(z_1,\zeta)$. Имеем

$$\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}} \frac{|F_1(z_1,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^3} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}} \frac{|f(\zeta)|^2|\mathcal{H}_1(z_1,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^3} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)+$$

$$+2\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}} \frac{|z_1|^2|v_1(z_1,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^3} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_f^2\int_{\Omega_1} \frac{e^{2(\varphi(\zeta)-\varphi_1(z_1,\zeta)))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^3} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)+$$

$$+2\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}} \frac{|v_1(z_1,\zeta)|^2 e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^2} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant 2c_f^2 e^{2c_\varphi}\int_{\mathbb{C}^{n+1}} \frac{d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta)}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+1}}+$$

$$+\int_{\mathbb{C}\times\mathcal{O}} \frac{\|g_1(z_1,\zeta)\|^2 e^{-2(\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta))}}{(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+1}(1+\|(z_1,\zeta)\|^2)^3} d\lambda_{n+1}(z_1,\zeta) = B_2 < \infty.$$

Найдём равномерные оценки на F_1. Пусть $(z_1,\zeta)\in\mathbb{C}\times\mathcal{O}$ и $R=\min\left(\frac{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}{4}, \frac{1}{2(1+\sqrt{2}\|(z_1,\zeta)\|)^\nu}\right)$. Ввиду плюрисубгармоничности функции $|F_1(z_1,\zeta)|^2$ в $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$ справедливо неравенство

$$|F_1(z_1,\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\nu_{n+1}(R)}\int_{B_R(z_1,\zeta)} |F_1(t_1,w)|^2 d\lambda_{n+1}(t_1,w).$$

Пользуясь им, имеем

$$|F_1(z_1,\zeta)|^2 \leqslant \frac{B_2}{\nu_{n+1}(1)}\left(\frac{4}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}+2(1+\sqrt{2}\|(z_1,\zeta)\|)^\nu\right)^{2(n+1)}\cdot$$

$$\cdot(2+\|(z_1,\zeta)\|)^{2n+2\nu+7} e^{\sup\limits_{(t_1,w)\in B_R(z_1,\zeta)} 2(\varphi_1(t_1,w)+h(w))}.$$

Так как $\|w-\zeta\|\leqslant\min(1,\frac{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}{4})$, то $|h(w)-h(\zeta)|\leqslant c_h$. Кроме того, для $(t_1,w)\in B_R(z_1,\zeta)$

$$\|(t_1+w_1,w_2,\dots,w_n)-(z_1+\zeta_1,\zeta_1,\dots,\zeta_n)\| \le |t_1-z_1|+\|w-\zeta\| \leqslant$$

$$\leqslant 2R \le \frac{1}{(1+\sqrt{2}\|(z_1,\zeta)\|)^\nu} \leqslant \frac{1}{(1+\|(z_1+\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)\|)^\nu},$$

поэтому,

$$|\varphi_1(t_1,w)-\varphi_1(z_1,\zeta)| = |\varphi(t_1+w_1,w_2,\dots,w_n)-\varphi(z_1+\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)| \leqslant c_\varphi.$$

Пользуясь этими неравенствами, найдём постоянную $C_1>0$ такую, что для любых $(z_1,\zeta)\in\mathbb{C}\times\mathcal{O}$

$$|F_1(z_1,\zeta)| \leqslant C_1(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{n+(n+2)\nu+4}\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{n+1} e^{\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Далее $(n-1)$ раз применяя последовательно лемму 9, построим функцию $F_n\in H(\mathbb{C}^n\times\mathcal{O})$ такую, что $F_n(0,\dots,0,\zeta)=f(\zeta)$ для $\zeta\in\mathcal{O}$ и при некоторых $C_n>0$ и $N\ge 0$ всюду в $\mathbb{C}^n\times\mathcal{O}$

$$|F_n(z,\zeta)| \leqslant C_n(1+\|(z,\zeta)\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^N e^{\varphi_n(z,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Для $(z,\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathcal{O}$ положим $F(z,\zeta)=F_n(z-\zeta,\zeta)$. Тогда $F\in H(\mathbb{C}^n\times\mathcal{O})$, $F(\zeta,\zeta)=f(\zeta)$ для $\zeta\in\mathcal{O}$ и

$$|F(z,\zeta)|\leqslant C(1+\|(z,\zeta)\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^N e^{\varphi(z)+h(\zeta)},\ \ z\in\mathbb{C}^n,\ \ \zeta\in\mathcal{O},$$

где $C=(1+\sqrt{2})^N C_n$.

Лемма доказана.

Замечание 3. Определение функций $\mathcal{H}_k$ в леммах 9, 10 навеяно работой [15].

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{O}$ — область голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Пусть функция $\varphi\in psh(\mathbb{C}^n)$ при некоторых $c_\varphi>0$ и $\nu>0$ удовлетворяет условию $|\varphi(z)-\varphi(t)|\leqslant c_\varphi$ для всех $z,t\in\mathbb{C}^n$ таких, что $\|z-t\|\leqslant\frac{1}{(1+\|t\|)^\nu}$, а функция $h\in psh(\mathcal{O})$ при некотором $c_h>0$ удовлетворяет условию $|h(z)-h(t)|\leqslant c_h$ для всех $z,t\in\mathcal{O}$ таких, что $\|z-t\|\leqslant\min\left(1,\frac{\Delta_{\mathcal{O}}(t)}{4}\right)$.*

Пусть функция $S\in H(\mathbb{C}^n\times\mathcal{O})$ удовлетворяет неравенству

$$|S(z,\zeta)|\leqslant e^{\varphi(z)+h(\zeta)},\ z\in\mathbb{C}^n,\zeta\in\mathcal{O},$$

и $S(\zeta,\zeta)=0,\ \zeta\in\mathcal{O}$.

Тогда существуют функции $S_1,\dots,S_n\in H(\mathbb{C}^n\times\mathcal{O})$, числа $C>0$ и $N\geq 0$ такие, что для $(z,\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathcal{O}$:

a) $S(z,\zeta)=\sum\limits_{j=1}^{n}S_j(z,\zeta)(z_j-\zeta_j)$;

b) при любых $j=1,\dots,n$

$$|S_j(z,\zeta)|\leqslant C(1+\|(z,\zeta)\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^N e^{\varphi(z)+h(\zeta)}.$$

Доказательство. Пусть $L(z,\zeta)=S(z+\zeta,\zeta),\ z\in\mathbb{C}^n,\zeta\in\mathcal{O}$. Пользуясь условием на S, имеем

$$|L(z,\zeta)|\leqslant e^{\varphi_n(z,\zeta)+h(\zeta)},\ (z,\zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathcal{O}\tag{18}$$

и $L(0,\zeta)=S(\zeta,\zeta)=0$ для $\zeta\in\mathcal{O}$.

Для $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}^n$, $\zeta\in\mathcal{O}$ пусть $L_1(z_1,\zeta)=L(z_1,0,\dots,0,\zeta)$, $L_2(z_1,z_2,\zeta)=L(z_1,z_2,0,\dots,0,\zeta)$, ... , $L_n(z,\zeta)=L(z,\zeta)$. Из (18) при $k=1,\dots,n$

$$|L_k(z,\zeta)|\leq e^{\varphi_k(z,\zeta)+h(\zeta)},\ (z,\zeta)\in\mathbb{C}^k\times\mathcal{O}.\tag{19}$$

Так как $L_1(0,\zeta)=0\ \forall\zeta\in\mathcal{O}$, то функция

$$\psi_1^{(1)}(z_1,\zeta)=\frac{L_1(z_1,\zeta)}{z_1}$$

голоморфна в $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$. Оценим её рост. Для $\zeta\in\mathcal{O}$, $|z_1|\geq\frac{1}{(1+\|\zeta\|)^\nu}$,

$$|\psi_1^{(1)}(z_1,\zeta)|\leqslant(1+\|\zeta\|)^\nu e^{\varphi_1(z,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Для $\zeta\in\mathcal{O}$, $|z_1|<\frac{1}{(1+\|\zeta\|)^\nu}$

$$|\psi_1^{(1)}(z_1,\zeta)|\leqslant\max_{|t_1|=\frac{1}{(1+\|\zeta\|)^\nu}}\left|\frac{L_1(t_1,\zeta)}{t_1}\right|\leq e^{2c_\varphi}(1+\|\zeta\|)^\nu e^{\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Итак, полагая $A_1=e^{2c_\varphi},m_1=\nu$, имеем при любых $z_1\in\mathbb{C},\zeta\in\mathcal{O}$

$$|\psi_1^{(1)}(z_1,\zeta)|\leqslant A_1(1+\|(z_1,\zeta)\|)^{m_1}\left(1+\frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_1}e^{\varphi_1(z_1,\zeta)+h(\zeta)}.$$

Кроме того, всюду в $\mathbb{C}\times\mathcal{O}$ $\ L_1(z_1,\zeta)=\psi_1^{(1)}(z_1,\zeta)z_1$.

Пусть для $k = 2, \dots, n$ найдены функции $\psi_j^{(k-1)} \in H(\mathbb{C}^{k-1} \times \mathcal{O})$ $(j = 1, \dots, k-1)$ такие, что

$$L_{k-1}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta) = \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j^{(k-1)}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta) z_j$$

и при некоторых $A_{k-1} > 0$ и $m_{k-1} \in \mathbb{N}$ для всех $z' \in \mathbb{C}^{k-1}, \zeta \in \mathcal{O}, j = 1, \dots, k-1$

$$|\psi_j^{(k-1)}(z', \zeta)| \leqslant A_{k-1}(1 + \|(z', \zeta)\|)^{m_{k-1}} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_{k-1}} e^{\varphi_{k-1}(z', \zeta) + h(\zeta)}.$$

По лемме 9 для каждого $j = 1, \dots, k-1$ существует функция $\psi_j^{(k)}$, голоморфная в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$, такая, что для $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathcal{O}$

$$\psi_j^{(k)}(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, \zeta) = \psi_j^{(k-1)}(z_1, \dots, z_{k-1}, \zeta)$$

и при некоторых $B_k > 0$ и $\tilde{m}_k \geq 0$ для $z = (z', z_k) \in \mathbb{C}^k, \zeta \in \mathcal{O}$ и всех $j = 1, \dots, k-1$

$$|\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| \leqslant B_k(1 + \|(z, \zeta)\|)^{\tilde{m}_k} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{\tilde{m}_k} e^{\varphi_k(z, \zeta) + h(\zeta)}. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$Y_k(z, \zeta) = L_k(z, \zeta) - \psi_1^{(k)}(z, \zeta) z_1 - \dots - \psi_{k-1}^{(k)}(z, \zeta) z_{k-1},\ z \in \mathbb{C}^k, \zeta \in \mathcal{O}.$$

Пользуясь (19) и (20), найдём постоянную $C_k > 0$ такую, что

$$|Y_k(z, \zeta)| \leqslant C_k(1 + \|(z, \zeta)\|)^{\tilde{m}_k + 1} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{\tilde{m}_k} e^{\varphi_k(z, \zeta) + h(\zeta)}.$$

Отметим ещё, что для $z_1, \dots, z_{k-1} \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathcal{O}$ $\ Y_k(z_1, \dots, z_{k-1}, 0, \zeta) = 0$. Поэтому функция

$$\psi_k^{(k)}(z, \zeta) = \frac{Y_k(z, \zeta)}{z_k}$$

голоморфна в $\mathbb{C}^k \times \mathcal{O}$. Оценим рост функции $\psi_k^{(k)}$. Пусть $R_k = \frac{1}{2(1+\sqrt{2}\|(z', \zeta)\|)^{\nu}}$. Для $z' \in \mathbb{C}^{k-1}$, $\zeta \in \mathcal{O}$, $|z_k| \geq R_k$

$$|\psi_k^{(k)}(z, \zeta)| < 2^{\nu+1} C_k (1 + \|(z, \zeta)\|)^{\tilde{m}_k + \nu + 1} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{\tilde{m}_k} e^{\varphi_k(z, \zeta) + h(\zeta)}.$$

Для $z' \in \mathbb{C}^{k-1}$, $\zeta \in \mathcal{O}$, $|z_k| < R_k$

$$|\psi_k^{(k)}(z', z_k, \zeta)| \leqslant \max_{|t_k| = R_k} \left| \frac{Y_k(z', t_k, \zeta)}{t_k} \right| \leq$$

$$\leq 2^{\nu + \tilde{m}_k + 2} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{\tilde{m}_k} e^{2c_\varphi} (1 + \|(z, \zeta)\|)^{\tilde{m}_k + \nu + 1} e^{\varphi_k(z, \zeta) + h(\zeta)}.$$

Положим $m_k = \widetilde{m}_k + \nu + 1$. Из оценок роста функции $\psi_k^{(k)}$ и (20) следует, что найдётся постоянная $A_k > 0$ такая, что для всех $j = 1, \dots, k$

$$|\psi_j^{(k)}(z, \zeta)| \leqslant A_k(1 + \|(z, \zeta)\|)^{m_k} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_k} e^{\varphi_k(z, \zeta) + h(\zeta)}.$$

При этом

$$L_k(z, \zeta) = \psi_1^{(1)}(z, \zeta) z_1 + \dots + \psi_k^{(k)}(z, \zeta) z_k,\ z \in \mathbb{C}^k, \zeta \in \mathcal{O}.$$

При $k = n$ получаем

$$L_n(z, \zeta) = L(z, \zeta) = \psi_1^{(n)}(z, \zeta) z_1 + \dots + \psi_n^{(n)}(z, \zeta) z_n,\ z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathcal{O}.$$

Причем для любых $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathcal{O}$ и $j = 1, \ldots, n$

$$|\psi_j^{(n)}(z,\zeta)| \leqslant A_n(1 + \|(z,\zeta)\|)^{m_n} \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^{m_n} e^{\varphi_n(z,\zeta)+h(\zeta)}. \quad (21)$$

Отсюда

$$S(z,\zeta) = \psi_1^{(n)}(z-\zeta,\zeta)(z_1-\zeta_1) + \ldots + \psi_n^{(n)}(z-\zeta,\zeta)(z_n-\zeta_n), \ z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathcal{O}.$$

Пусть для $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathcal{O}$ $S_j(z,\zeta) = \psi_j^{(n)}(z-\zeta,\zeta)$. Тогда

$$S(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} S_j(z,\zeta)(z_j-\zeta_j), \ z \in \mathbb{C}^n, \ \zeta \in \mathcal{O}.$$

Полагая $N = m_n$, $C = A_n 2^{m_n}$, имеем из неравенства (21): при любых $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathcal{O}$ и $j = 1, \ldots, n$

$$|S_j(z,\zeta)| \leqslant C(1 + \|(z,\zeta)\|)^N \left(1 + \frac{1}{\Delta_{\mathcal{O}}(\zeta)}\right)^N e^{\varphi(z)+h(\zeta)}.$$

Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 3. По лемме 8 линейное отображение $L : S \in G_M^*(U) \to \hat{S}$ действует из $G_M^*(U)$ в $H_M(T_C)$.

Прежде чем показать непрерывность L, заметим, что топология пространства $G_M^*(U)$ может быть описана следующим образом. Пусть $W_k = \{f \in G_M(U) : \ p_k(f) \leqslant 1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $W_k^0 = \{F \in G'_M(U) : |(F,f)| \leqslant 1, \ \forall f \in W_k\}$ — поляра в $G'_M(U)$ окрестности W_k. Пусть $E_k = \bigcup\limits_{\alpha>0}(\alpha W_k^0)$ — векторное подпространство в $G'_M(U)$, порожденное полярой $W_k^0, k = 1, 2, \ldots$ Наделим E_k топологией, введя в E_k норму

$$q_k(F) = \sup_{f \in W_k} |(F,f)|, \ F \in E_k.$$

Заметим, что $G'_M(U) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Определим в $G'_M(U)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств E_k. Поскольку $G_M(U)$ — пространство (M^*), то $G_M(U)$ — монтелевское, а значит и рефлексивное пространство. Но тогда сильная топология в $G'_M(U)$ совпадает с топологией λ [16, с. 699-700].

Пусть теперь $S \in E_m, \ m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|(S,f)| \leqslant q_m(S), \ \forall f \in W_m.$$

Отсюда следует, что

$$|(S,f)| \leqslant q_m(S) p_m(f), \ f \in G_M(U).$$

Полагая в последнем неравенстве $f(\xi) = \exp(i < \xi, z >)$ с $z \in T_C$, и пользуясь (14), получаем

$$|\hat{S}(z)| \leqslant q_m(S) A e^{\omega_{m+[r]+1}(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m}, \quad (22)$$

где постоянная $A > 0$ не зависит от $z \in T_C$. Пусть $N(m) = \max(m + [r] + 1, 3m)$. Тогда из неравенства (22) имеем

$$\|\hat{S}\|_{N(m)} \leqslant A q_m(S), \ S \in E_m \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что L непрерывно.

Докажем биективность отображения L, действуя по схеме из [4].

Покажем вначале, что L сюръективно. Пусть $F \in H_M(T_C)$, то есть, $F \in H(T_C)$ и при некоторых $c > 0, m \in \mathbb{N}$ функция F удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leqslant c e^{\omega_m(\|z\|)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^m.$$

Так как при некотором $r > e$ $|b(y)| \le r\|y\|$ для $y \in \overline{C}$, то справедливо неравенство

$$|F(z)| \leqslant ce^{b(y)+\omega_m(\|z\|)+r\|z\|}\left(1+\frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^m .$$

Пользуясь неравенством (1) и полагая $c_1 = ce^{([r]+1)Q}$, $k = m + [r] + 1$, имеем

$$|F(z)| \leqslant c_1 e^{\omega_k(\|z\|)} e^{b(Imz)}\left(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(z)}\right)^m .$$

Покажем теперь, что найдется функционал $T \in G'_M(U)$ такой, что $\hat{T} = F$. Функции $\varphi(z) = \omega_k(\|z\|)$ и $h(\zeta) = b(Im\zeta) + m\ln(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)})$, где $z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \in T_C$, удовлетворяют условиям леммы 10. Поэтому найдётся функция $\Phi \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такая, что $\Phi(\zeta,\zeta) = F(\zeta)$ для $\zeta \in T_C$ и при некоторых $c_2 > 0$ и $N \ge 0$ для $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in T_C$

$$|\Phi(z,\zeta)| \leqslant c_2(1+\|(z,\zeta)\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}\right)^N e^{b(Im\zeta)}e^{\omega_k(\|z\|)}. \qquad (23)$$

Так как $\Phi(z,\zeta)$ – целая по z, то разлагая $\Phi(z,\zeta)$ по степеням z, имеем $\Phi(z,\zeta) = \sum\limits_{|\alpha|\ge 0} C_\alpha(\zeta)z^\alpha,\ \zeta \in T_C,\ z \in \mathbb{C}^n$. По формуле Коши

$$C_\alpha(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|z_1|=R}\cdots\int_{|z_n|=R}\frac{\Phi(z,\zeta)}{z_1^{\alpha_1+1}\ldots z_n^{\alpha_n+1}}\,dz_1\ldots dz_n,$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $R > 0$ – любое. Отсюда следует, что $C_\alpha \in H(T_C)$. Воспользовавшись (23), имеем для $\zeta \in T_C$

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant \frac{c_2(1+\sqrt{n}R)^N(1+\|\zeta\|)^N e^{b(Im\zeta)+\omega_k(\sqrt{n}R)}\left(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}\right)^N}{R^{|\alpha|}} .$$

Пользуясь леммой 1, найдём постоянную $c_3 > 0$ такую, что $\forall R > 0$

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant c_3\frac{e^{\omega_{k+1}(\sqrt{n}R)}}{R^{|\alpha|}}(1+\|\zeta\|)^N e^{b(Im\zeta)}\left(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}\right)^N,\ \zeta \in T_C.$$

Следовательно, для $\zeta \in T_C$

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant c_3\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|}\left(\inf_{R>0}\frac{e^{\omega_M(r)}}{r^{|\alpha|}}\right)e^{b(Im\zeta)}(1+\|\zeta\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}\right)^N .$$

Так как (см. [17; гл. 1. п. 8])

$$\inf_{R>0}\frac{e^{\omega_M(r)}}{r^k} = \frac{1}{M_k}\ ,\ k = 0,1,\ldots,$$

то для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \zeta \in T_C$ справедлива оценка

$$|C_\alpha(\zeta)| \leqslant c_3\left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|}\frac{e^{b(Im\zeta)}}{M_{|\alpha|}}(1+\|\zeta\|)^N\left(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}\right)^N . \qquad (24)$$

Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $C_\alpha \in V(T_C)$. По теореме 2 найдутся функционалы $S_\alpha \in S^*(U)$ такие, что $\hat{S_\alpha} = C_\alpha$.

Из (24) и свойств пространств (LN^*) следует, что множество $\{M_{|\alpha|}\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\sqrt{n}}\right)^{|\alpha|}C_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $V(T_C)$. Но тогда ввиду топологического изоморфизма пространств $S^*(U)$

и $V(T_C)$ множество $\mathcal{A} = \{M_{|\alpha|}\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{\sqrt{n}}\right)^{|\alpha|} S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $S^*(U)$. А значит, и слабо ограничено. По теореме Шварца [1, с. 93] найдутся числа $c_4 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|(F, f)| \leqslant c_4 \|f\|_{p,U}, \ F \in \mathcal{A}, \ f \in S(U).$$

Итак, для любых $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $f \in S(U)$

$$|(S_\alpha, f)| \leqslant c_4 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|} \frac{\|f\|_{p,U}}{M_{|\alpha|}} . \tag{25}$$

Определим функционал T на $G_M(U)$ по правилу:

$$(T, f) = \sum_{|\alpha|\geq 0} (S_\alpha, (-i)^{|\alpha|} D^\alpha f), \ f \in G_M(U). \tag{26}$$

Покажем, что он корректно определён. Пользуясь (25), имеем для любых $f \in G_M(U)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $s \in \mathbb{N}$

$$|(S_\alpha, D^\alpha f)| \leqslant c_4 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{M_{|\alpha|}} \sup_{x\in U, |\beta|\leqslant p} |(D^{\alpha+\beta} f)(x)|(1+\|x\|)^p \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{M_{|\alpha|}} \sup_{x\in U, |\beta|\leqslant p} \frac{p_s(f)\varepsilon_s^{|\alpha|+|\beta|} M_{|\alpha|+|\beta|}(1+\|x\|)^p}{(1+\|x\|)^s} .$$

Пользуясь условием i_2), при $s \geq p$, имеем

$$|(S_\alpha, D^\alpha f)| \leqslant c_4 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|} p_s(f) \sup_{|\beta|\leqslant p} \varepsilon_s^{|\alpha|+|\beta|} H_1 H_2^{|\alpha|+|\beta|} M_{|\beta|} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|} H_1 M_p H_2^{|\alpha|} p_s(f) \varepsilon_s^{|\alpha|} = c_4 H_1 M_p \left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon_s H_2}{\varepsilon_{k+1}}\right)^{|\alpha|} p_s(f).$$

Выберем теперь s настолько большим, что $\tau_s = \frac{\sqrt{n}\varepsilon_s H_2}{\varepsilon_{k+1}} < 1$. Итак, для любых $f \in G_M(U), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(S_\alpha, D^\alpha f)| \leqslant c_5 \tau_s^{|\alpha|} p_s(f),$$

где $c_5 = c_4 H_1 M_p$. Отсюда следует, что ряд в правой части в (26) сходится. Причём,

$$|(T, f)| \leqslant \frac{c_4}{(1-\tau_s)^n} p_s(f), \ f \in G_M(U).$$

Следовательно, линейный функционал T корректно определен и непрерывен. Кроме того, $\hat{T} = F$. Действительно, для любого $z \in T_C$

$$\hat{T}(z) = \sum_{|\alpha|\geq 0} (S_\alpha, (-i)^{|\alpha|} D^\alpha (e^{i<\zeta,z>})) = \sum_{|\alpha|\geq 0} (S_\alpha, (-i)^{|\alpha|} (iz)^\alpha (e^{i<\zeta,z>})) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geq 0} z^\alpha (S_\alpha, (e^{i<\zeta,z>})) = \sum_{|\alpha|\geq 0} C_\alpha(z) z^\alpha = \Phi(z,z) = F(z).$$

Таким образом, отображение L сюръективно.

Покажем, что отображение L инъективно. Пусть для $T \in G'_M(U)$ $\hat{T} \equiv 0$. Покажем, что T — нулевой функционал. Найдутся числа $m \in \mathbb{N}$ и $c_T > 0$ такие, что

$$|(T, f)| \leqslant c_T p_m(f), \ f \in G_M(U).$$

По лемме 7 найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_m(U)$ ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$) такие, что

$$(T, f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} (T_\alpha, D^\alpha f), \ f \in G_M(U),$$

и
$$|(T_\alpha, g)| \leqslant \frac{c_T}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \widetilde{p}_m(g), \ g \in C_m(U). \tag{27}$$
Отсюда для любого $z \in T_C$
$$\hat{T}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} (T_\alpha, (iz)^\alpha e^{i<\zeta,z>}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} i^{|\alpha|} (T_\alpha, e^{i<\zeta,z>}) z^\alpha.$$
Пусть $\mathcal{V}_\alpha(z) = i^{|\alpha|}(T_\alpha, e^{i<\xi,z>})$. Очевидно $\mathcal{V}_\alpha \in H(T_C)$. Пользуясь (27) и леммой 6, получаем оценку
$$|\mathcal{V}_\alpha(z)| \leqslant \frac{d_1}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} (1 + \|z\|)^{2m} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{b(y)}, \tag{28}$$
где $d_1 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от $z = x + iy \in T_C$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Рассмотрим функцию $S(u, z) = \sum\limits_{|\alpha| \geq 0} \mathcal{V}_\alpha(z) u^\alpha, \ z \in T_C, u \in \mathbb{C}^n$. Оценим $|S(u, z)|$ сверху, пользуясь (28). Имеем
$$|S(u, z)| \leqslant \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{d_1 \|u\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} (1 + \|z\|)^{2m} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{b(y)} =$$
$$= d_1 \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{b(y)} \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\|u\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_{m+1}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m}\right)^{|\alpha|} \leqslant$$
$$\leqslant d_1 e^{b(y)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\|u\|^{|\alpha|}}{\varepsilon_{m+1}^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sum_{|\alpha| \geq 0} \left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m}\right)^{|\alpha|} \leqslant$$
$$\leqslant d_1 e^{b(y)} \left(1 + \frac{1}{\Delta_C(y)}\right)^{3m} e^{\omega_{m+1}(\|u\|)} \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}}\right)^n.$$
Отметим, что $S(z, z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \mathcal{V}_\alpha(z) z^\alpha = 0, \ \forall z \in T_C$. Тогда по лемме 11 найдутся функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times T_C)$ такие, что
$$S(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(z, \zeta)(z_j - \zeta_j), \ z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in T_C,$$
и при некоторых $d_2 > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ для любых $j = 1, 2, \ldots, n$, $z \in \mathbb{C}^n, \zeta \in T_C$
$$|S_j(z, \zeta)| \leqslant d_2 (1 + \|(z, \zeta)\|)^N \left(1 + \frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}\right)^N e^{\omega_{m+1}(\|z\|) + b(Im \zeta)}. \tag{29}$$
Разложим S_j в ряд Тейлора по степеням z:
$$S_j(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in T_C.$$
Из (29) по формуле Коши для коэффициентов степенного ряда (и принимая во внимание неравенство (1)) имеем при некотором $d_3 > 0$
$$|S_{j,\alpha}(\zeta)| \leqslant \inf_{R>0} \frac{\max\limits_{|z_1|=R, \ldots, |z_n|=R} |S_j(z, \zeta)|}{R^{|\alpha|}} \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{R>0} \frac{d_3 e^{\omega_{m+2}(\sqrt{n}R)} e^{b(Im\zeta) + N \ln(1 + \frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}) + N \ln(1 + \|\zeta\|))}}{R^{|\alpha|}} =$$
$$= d_3 e^{b(Im\zeta)} e^{N \ln(1 + \frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)}) + N \ln(1 + \|\zeta\|)} \inf_{R>0} \frac{e^{\omega(R)} \sqrt{n}^{|\alpha|}}{(R \varepsilon_{m+2})^{|\alpha|}} =$$

$$= d_3 e^{b(Im\zeta)} e^{N\ln(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)})+N\ln(1+\|\zeta\|)} \frac{1}{M_{|\alpha|}} \left(\frac{\sqrt{n}}{\varepsilon_{m+2}}\right)^{|\alpha|} .$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что $\varepsilon_k\sqrt{n} < \varepsilon_{m+2}$. Тогда

$$|S_{j,\alpha}(\zeta)| \leqslant \frac{d_3 e^{b(Im\zeta)} e^{N\ln(1+\frac{1}{\Delta_{T_C}(\zeta)})+N\ln(1+\|\zeta\|)}}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \ \zeta \in T_C. \tag{30}$$

Поскольку преобразование Фурье-Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между $S^*(U)$ и $V(T_C)$, то найдутся функционалы $\psi_{j,\alpha} \in S^*(U)$ такие, что $\hat{\psi}_{j,\alpha} = S_{j,\alpha}$. Из (30) следует, что множество $\{S_{j,\alpha}\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $V(T_C)$. Но тогда множество $\Psi = \{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}\psi_{j,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n, j=1,\dots,n}$ ограничено в $S^*(U)$. А значит, и слабо ограничено. По теореме Шварца [1, с. 93] найдутся числа $d_4 > 0$ и $p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|(F,\varphi)| \leqslant d_4 |\|\varphi\||_{p,U}, \ F \in \Psi, \ \varphi \in S(U).$$

Таким образом, $\forall j = 1, \dots, n, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(\Psi_{j,\alpha}, f)| \leqslant \frac{d_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \|f\|_{p,U}, \ f \in S(U). \tag{31}$$

Для $j = 1, \dots, n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ хотя бы с одной отрицательной компонентой пусть $\Psi_{j,\alpha}$ — нулевой функционал из $S^*(U)$ и $S_{j,\alpha}(z) = 0, \ \ \forall z \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$S(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} S_j(z,\zeta)(z_j - \zeta_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|\geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha (z_j - \zeta_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|\geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z_1^{\alpha_1} \dots z_j^{\alpha_j+1} \dots z^{\alpha_n} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|\geq 0} S_{j,\alpha}(\zeta) z^\alpha \zeta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|\geq 0} (S_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(\zeta) - S_{j,\alpha}(\zeta)\zeta_j) z^\alpha, \ \ z \in \mathbb{C}^n, \ \zeta \in T_C.$$

Учитывая, что $S(z,\zeta) = \sum \mathcal{V}_\alpha(\zeta) z^\alpha, \ \ \forall \zeta \in T_C, \ \ z \in \mathbb{C}^n$, имеем $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\mathcal{V}_\alpha(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} (S_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}(\zeta) - S_{j,\alpha}(\zeta)\zeta_j). \tag{32}$$

Правая часть в (32) может быть представлена в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\hat{\Psi}_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}(\zeta) + i(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j}(e^{i<\xi,\zeta>}))).$$

То есть, правая часть – преобразование Фурье-Лапласа функционала, действующего по правилу

$$f \in S(U) \to \sum_{j=1}^{n} (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, f) + i(\Psi_{j,\alpha}, (\frac{\partial}{\partial \xi_j} f)).$$

Значит, $(T_\alpha, f) = (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{n} (i(\Psi_{j,\alpha}, (\frac{\partial}{\partial \xi_j} f)) + (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, f))$. Таким образом, для $f \in G_M(U)$

$$(T, f) = \sum_{|\alpha|\geq 0} (T_\alpha, D^\alpha f) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geq 0} (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{n} (i(\Psi_{j,\alpha}, (\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f)) + (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, D^\alpha f).$$

Для произвольных $N \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, n$) определим множества

$$B_N = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_n \leqslant N\},$$
$$R_{N,j} = \{\alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_j = N, \dots, \alpha_n \leqslant N, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$$

и функционал T_N на $G_M(U)$ по правилу

$$(T_N, f) = \sum_{\alpha \in B_N} (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{n} (i(\Psi_{j,\alpha}, (\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f)(\xi)) + (\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\dots,\alpha_n)}, D^\alpha f).$$

Тогда $(T, f) = \lim\limits_{N \to \infty} (T_N, f), \quad f \in G_M(U)$.

Из представления

$$(T_N, f) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{\alpha \in B_N} ((-i)^{|\alpha|} i(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f) +$$
$$+ \sum_{\beta \in B_N} (-i)^{|\beta|} (\Psi_{j,(\beta_1,\dots,\beta_{j-1},\dots,\beta_n)}, D^\beta f)).$$

видно, что для фиксированного $j \in \{1, \dots, n\}$ слагаемые, соответствующие мультииндексу α с $\alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_j \leqslant N-1, \dots, \alpha_n \leqslant N$, и слагаемые, соответствующие мультииндексу $\beta = (\beta_1, \dots, \dots, \beta_n) = \alpha_n$ с $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_j = \alpha_j + 1, \dots, \beta_n = \alpha_n$, взаимно уничтожают друг друга. Поэтому

$$(T_N, f) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} (-i)^{|\alpha|} i(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f), \ f \in G_M(U).$$

Далее, принимая во внимание (31), $\forall f \in G_M(U)$, имеем

$$|(T_N, f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} |(\Psi_{j,\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{d_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in U, |\gamma| \leqslant p} (|D^\gamma (\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f)(\xi)| (1 + \|\xi\|)^p) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{d_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in U, |\gamma| \leqslant p} (|(D^{(\alpha_1+\gamma_1, \dots \alpha_j+\gamma_j+1, \dots, \alpha_n+\gamma_n)} f)(\xi)| (1 + \|\xi\|)^p)).$$

Выберем натуральное $s > k$ так, что $q = \frac{\varepsilon_s H_2}{\varepsilon_k} < 1$. Тогда $\forall f \in G_M(U)$

$$|(T_N, f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{d_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} p_s(f) \sup_{\xi \in U, |\gamma| \leqslant p} \frac{\varepsilon_s^{|\alpha|+|\gamma|+1} M_{|\alpha|+|\gamma|+1}}{(1 + \|\xi\|)^{s-p}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} \frac{d_4}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} p_s(f) \varepsilon_s^{|\alpha|} \sup_{|\gamma| \leqslant p} \varepsilon_s^{|\gamma+1|} H_1 H_2^{|\alpha|+|\gamma|+1} M_{|\alpha|} M_{|\gamma|+1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in R_{N,j}} d_4 M_{p+1} p_s(f) \left(\frac{\varepsilon_s H_2}{\varepsilon_k} \right)^{|\alpha|} <$$
$$< d_4 M_{p+1} p_s(f) n q^N (N+1)^{n-1}.$$

Отсюда следует, что $(T_N, f) \to 0$ при $N \to \infty$, $\forall f \in G_M(U)$. Значит $(T, f) = 0, \forall f \in G_M(U)$. Итак, T — нулевой функционал. Взаимнооднозначность отображения L доказана.

По теореме об открытом отображении [14, с. 12], [18, с. 230] отображение L^{-1} непрерывно. Таким образом, L — топологический изоморфизм.

Теорема 3 доказана.

6. О сопряженном к пространству $E(U)$

Пусть $S \in G'_M(U)$. Определим функционал T на $E(U)$ по формуле

$$(T, F) = (S, f), \ F \in E(U), \ f = F_{|}U.$$

Очевидно, T — линейный непрерывный функционал на $E(U)$. Таким образом, построено линейное отображение $\mathcal{B}$, действующее из $G'_M(U)$ в $E'(U)$ по правилу $A(S) = T$. Оно взаимнооднозначно ввиду изоморфизма между $G_M(U)$ и $E(U)$. Легко видеть, что отображение $\mathcal{B}$ осуществляет топологический изоморфизм пространств $S \in G^*_M(U)$ и $E^*(U)$.

Отсюда, пользуясь теоремой 3, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм пространств $E^*(U)$ и $H_M(T_C)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука. 1979. 318 с.
2. J.W. de Roever *Complex Fourier transformation and analytic functionals with unbounded carriers.* Amsterdam: Mathematisch Centrum. 1977. 202 p.
3. Мусин И.Х., Федотова П.В. *Теорема типа Пэли-Винера для ультрараспределений* // Матем. заметки. Т. 85. Вып. 6. 2009. С. 894-–914.
4. Taylor B.A. *Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions* // Communications on pure and applied mathematics. V. 24. № 1. 1971. P. 39–51.
5. Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенные функций.* М.: Наука. 1986. 304 с.
6. Мусин И.Х., Федотова П.В. *Об одном классе бесконечно дифференцируемых функций, допускающих голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Вып. 1. 2008. Издательство РИЦ БашГУ. 2008. С. 165–172.
7. Владимиров В.С. *Функции, голоморфные в трубчатых конусах* // Известия АН СССР. Сер. матем. Т. 27. № 1. 1963. С. 75–100.
8. Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука. 1964. 412 с.
9. J.W. de Roever *Analytic representation and Fourier transforms of analytic functional in Z' carried by the real space* // SIAM J. Math. Anal. V. 9. № 6. 1978. P. 996–1019.
10. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Сборник переводов иностранных статей. Математика. Т 1. № 1. 1957. С. 60–77.
11. Жаринов В.В. *Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS* // УМН. Т. 344. № 4. 1979. С. 97–131.
12. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир. 1966. 279 с.
13. Хёрмандер Л. *Оценки в L^2 и теоремы существования для оператора $\overline{\partial}$* // Сборник переводов иностранных статей. Математика. Т 10. № 2. 1966. С. 59–116.
14. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
15. Юлмухаметов Р.С. *Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 60. № 4. 1996. С. 205—224.
16. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1972. 1071 с.
17. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения.* М.: ИЛ. 1955. 268 с.
18. Робертсон А., Робертсон В. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир. 1967. 257 с.

Ильдар Хамитович Мусин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin@matem.anrb.ru

Полина Владимировна Федотова,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: polina81@rambler.ru