Уфимский математический журнал. Том 1. № 2 (2009). С. 53-74.

УДК 517.5

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ ИЗ $\mathbb{C}^n$.

А.С. КРИВОШЕЕВ

Аннотация. В работе изучаются инвариантные относительно операции дифференцирования подпространства пространств функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$. Получен критерий аналитического продолжения функций из произвольных замкнутых главных инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных ограниченных выпуклых областях.

Ключевые слова: инвариантные подпространства, аналитическое продолжение, целая функция, оператор свертки.

1. Введение

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$; $H(D)$ — пространство функций аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D; $H^*(D)$ — сильно сопряженное к $H(D)$ пространство (называемое пространством аналитических функционалов в D); W — нетривиальное ($W \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутое подпространство в $H(D)$. В данной работе будут рассматриваться подпространства, инвариантные относительно операторов частного дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией $\varphi(z)$ они содержат также и ее производные $\partial\varphi/\partial z_1, \dots, \partial\varphi/\partial z_n$. Важным примером инвариантного подпространства является пространство всех решений, аналитических в D однородного уравнения свертки

$$M[\varphi](z) = \mu(\varphi(z+y)) \equiv 0, \mu \in H^*(D). \tag{1}$$

Оператор свертки M корректно определен, поскольку каждый функционал $\mu \in H^*(D)$ продолжается как линейный и непрерывный на пространство функций локально аналитических на некотором компакте из D (см., [1], гл. 3, § 14, п. 2). Этот оператор линейно и непрерывно действует из пространства $H(D)$ в пространство функций, аналитических в окрестности начала координат, и является перестановочным с операторами дифференцирования. Поэтому пространство решений уравнения (1) замкнуто и инвариантно относительно дифференцирования. Также замкнутым и инвариантным относительно дифференцирования является и пространство решений системы уравнений вида (1). Другим примером инвариантного подпространства служит замкнутое множество функций, каждая из которых разлагается в ряд экспонент или экспоненциальных мономов, сходящийся равномерно на компактах из области D:

$$\varphi(z) = \sum_{m=1,|\alpha|=0}^{\infty,k_m} c_{m,\alpha} z^\alpha \exp\langle\lambda(m), z\rangle, z \in D.$$

Krivosheyev A.S. The invariant subspaces in convex domains in $\mathbb{C}^n$.

Поступила 8 мая 2009 г.

Здесь $\langle z, \lambda\rangle = z_1\lambda_1 + \ldots + z_n\lambda_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$. Обобщением этого примера является подпространство, представляющее из себя замыкание в топологии $H(D)$ линейной оболочки системы экспоненциальных многочленов $\{p_\lambda(z) \exp\langle z, \lambda\rangle\}$, $\lambda \in A$, где A — некоторое подмножество $\mathbb{C}^n$.

Основными в теории инвариантных подпространств являются следующие задачи:
1) спектральный синтез, т.е. аппроксимация элементов инвариантного подпространства посредством экспоненциальных многочленов, лежащих в этом подпространстве; 2) фундаментальный принцип, т.е. представление функций из инвариантного подпространства рядами экспонент, интегралами от экспонент, рядами из интегралов от экспонент или экспоненциальных многочленов; 3) аналитическое продолжение функций из инвариантного подпространства. Данная работа посвящена изучению последней задачи. Первоначально она естественным образом возникла из проблемы распространения сходимости рядов экспонент и их частного случая — степенных рядов. Первые результаты по этой проблеме были получены еще в позапрошлом веке (см., например, [2],[3]). В дальнейшем было замечено, что эффект продолжения присущ не только суммам рядов экспонент, но и более общим пределам экспоненциальных многочленов. Оказалось, что функции, аналитические в выпуклой области и являющиеся там пределами экспоненциальных многочленов, могут аналитически продолжаться в более широкую выпуклую область. Поскольку замыкание экспоненциальных многочленов является одним из базовых примеров инвариантных подпространств, то в ее современном виде проблема продолжения формулируется следующим образом. При каких условиях каждая функция из замкнутого инвариантного подпространства в $H(D)$, допускающего спектральный синтез, аналитически продолжается в более широкую выпуклую область (одну и ту же для всех функций). Таким образом, проблема продолжения формулируется лишь для подпространств, допускающих спектральный синтез. В этой связи следует отметить, что проблема спектрального синтеза в случае одной переменной полностью решена в работах [4] и [5]. В случае нескольких переменных доказано, что пространство решений однородного уравнения свертки допускает спектральный синтез в произвольной выпуклой области (см. [6], [7]). Что касается проблемы продолжения, то ее исследование имеет богатую историю. Подробный обзор соответствующих результатов имеется в [8]. Здесь мы отметим лишь, что в случае одной переменной проблема продолжения изучалась в работах [9]–[24] и др. Полное ее решение для $n = 1$ найдено в [25] и [26]. В случае многих переменных исследования проводились в работах [27]–[31], [7], [24], [8] и др. Для $n > 1$ были получены лишь некоторые достаточные условия продолжения. Никаких необходимых условий найдено не было. Кроме того, продолжение осуществлялось только в максимально возможную выпуклую область. В настоящей работе получен критерий продолжения для произвольных главных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях из $\mathbb{C}^n$ при одном естественном ограничении на неограниченные области (термин "главные"мы разъясним несколько ниже). Для ограниченных выпуклых областей проблема продолжения решена полностью. При этом критерий получен для любой области, которая лежит в максимально возможной и содержит исходную. Этот результат содержит в себе как частный случай все результаты по проблеме продолжения, полученные ранее, для одной переменной и все результаты для многих переменных, касающиеся главных инвариантных подпространств. А таковыми являются все предшествующие результаты за исключением тех, которые получены в работе [24].

Введем теперь некоторые понятия и обозначения, необходимые нам в дальнейшем. Известно (см., например, [1], гл. 3, § 12, п. 7), что преобразование Лапласа аналитических функционалов $\mu \in H^*(D)$, задаваемое по формуле $f(z) = (\mu, \exp\langle z, \lambda\rangle)$, устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространством $H^*(D)$ и подпространством целых функций экспоненциального типа P_D, которое представляет из себя индуктивный предел банаховых пространств:

$$P_D = \lim_{m\to\infty} ind B_m,$$

$$B_m = \{g \in H(\mathbb{C}^n) : \sup_{z\in\mathbb{C}^n} |g(z)| \exp[-H_{K_m}(z)] < \infty\}.$$

Здесь $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых компактов из D такая, что $K_m \subset int K_{m+1}$, $m = 1, 2. \dots$ и $\bigcup\limits_m K_m = D$; $intM$ обозначает внутренность множества M и

$$H_M(z) = \sup_{y\in M} \operatorname{Re} \langle z, y\rangle$$

— опорная функция M (точнее комплексно сопряженного к M множества). Функция $H_M(z)$ выпукла, положительно однородна порядка один, полунепрерывна снизу, может принимать значения $+\infty$. Она непрерывна во внутренности того множества, где принимает конечные значения. Если M ограничено, то $H_M(z)$ ограничена и непрерывна (см. [32]).

Пусть $\psi(z)$ – плюрисубгармоническая функция порядка (не выше) один и конечного типа (при порядке один), т.е. $\psi(z) \leqslant b + d|z|$, $z \in \mathbb{C}^n$. Через $h_\psi(z)$ и $\underline{h}_\psi(z)$ обозначим соответственно ее верхний и нижний индикаторы, т.е.

$$h_\psi(z) = \overline{\lim_{w\to z}}\, \overline{\lim_{t\to+\infty}} \psi(tw)/t,$$

$$\underline{h}_\psi(z) = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim}_{t\to+\infty} \frac{1}{\sigma_n \delta^{2n}} \int\limits_{B(z,\delta)} \frac{\psi(ty)}{t} d\sigma(y),$$

где $B(z,\delta)$ — шар с центром в точке z и радиуса δ, $d\sigma$ — мера Лебега, а σ_n — объем единичного шара в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Если $\psi(z) = \ln|f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа (другими словами, для некоторых $A, C > 0$ выполнено неравенство $|f(z)| \leqslant C \exp A|z|$, $z \in \mathbb{C}^n$), то вместо $h_{\ln|f|}$ и $\bar{h}_{\ln|f|}$ будем использовать для простоты обозначения $h_f(z)$ и $\bar{h}_f(z)$. Из определений индикаторов легко следует, что они положительно однородны порядка один, и выполнено неравенство $\bar{h}_f(z) \leqslant h_f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$. Если же в некоторой точке $z \in \mathbb{C}^n$ верно равенство $\bar{h}_f(z) = h_f(z)$, то говорят, что f (точнее плюрисубгармоническая функция $\ln|f|$) имеет (вполне) регулярный рост на луче tz, $t > 0$. Для $n = 1$ индикатор $h_f(z)$ является ограниченной выпуклой, а, следовательно, и непрерывной функцией, для $n > 1$ $h_f(z)$ — разрывная плюрисубгармоническая функция (см., например, [33]). Отметим, что если $f \in P_D$, то из определений h_f и P_D сразу следует, что для некоторого $m \geq 1$ будет выполнено неравенство

$$h_f(z) \leqslant H_{K_m}(z) < H_D(z), \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Обратно, если $h_f(z) < H_D(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, то в силу полунепрерывности сверху h_f и полунепрерывности снизу H_D для некоторого $m \geq 1$ верна оценка $h_f(z) \leqslant H_{K_m}(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}^n$. Тогда из теоремы Хартогса о верхнем пределе для семейств субгармонических функций ([1, гл. 1, § 6, теорема 6.1]) нетрудно получить также оценку

$$|f(z)| \leqslant C \exp H_{K_{m+1}}(z), \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

(где C — некоторая положительная постоянная), которая означает, что $f \in P_D$. Таким образом необходимым и достаточным условием принадлежности целой функции f пространству P_D является неравенство:

$$h_f(z) < H_D(z), \forall z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Пусть W — нетривиальное ($W \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, W^0 — подпространство в $H^*(D)$, состоящее из всех функционалов, обращающихся в нуль на каждом элементе из W. Если

W не тривиально, то и W^0 также не тривиально. Символом I_W обозначим подпространство в P_D, состоящее из преобразований Лапласа всех функционалов из W^0. Пусть $N(W)$ — множество всех общих нулей, а $m(z)$, $z \in I_W$, — их кратности функций из I_W, т.е. для каждого $z \in N(W)$ и каждой $f \in I_W$ верны равенства (здесь $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$)

$$D^\alpha f(z) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} = 0, \ |\alpha| = 0, \ldots, m(z) - 1,$$

и существуют функция $f_z \in I_W$ и вектор $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ такие, что $D^\beta f_z(z) \neq 0$. Рассмотрим систему экспоненциальных мономов

$$E(W) = \{z^\alpha \exp\langle\lambda, z\rangle\}_{\lambda \in N(W), 0 \leqslant |\alpha| < m(\lambda)}.$$

Покажем, что $E(W) \subset W$. Предположим, что функция $z^\alpha \exp\langle\lambda, z\rangle$ из $E(W)$ не принадлежит W. Тогда в силу замкнутости W по теореме Хана-Банаха найдется функционал $\mu \in W^0$ такой, что $(\mu, z^\alpha \exp\langle\lambda, z\rangle) \neq 0$. С другой стороны, если f — преобразование Лапласа μ, то в силу определений $N(W)$ и $m(\lambda)$ имеем:

$$(\mu, z^\alpha \exp\langle\lambda, z\rangle) = (\mu, D^\alpha(\exp\langle\lambda, z\rangle)) = D^\alpha(\mu, \exp\langle\lambda, z\rangle) = D^\alpha f(\lambda) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает требуемое вложение. В дальнейшем будем рассматривать подпространство W, для которого $N(W)$ является аналитическим множеством коразмерности один и, более того, существует целая функция F_W, нулевое множество которой совпадает с $N(W)$, а $m(\lambda)$ является кратностью ее нуля $\lambda \in N(W)$. Подпространство W, обладающее этим свойством, назовем главным инвариантным подпространством. Легко увидеть, что таковым является пространство решений однородного уравнения свертки. Причем в этом случае в качестве F_W можно взять преобразование Лапласа функционала, порождающего оператор свертки, и тогда верно включение $F_W \in I_W$. Главное инвариантное подпространство может также совпадать с пространством решений системы однородных уравнений свертки. В этом случае функция F_W не обязательно принадлежит I_W, более того может иметь бесконечный тип при порядке один, и, таким образом, не будет функцией экспоненциального типа. В случае одной переменной все инвариантные подпространства являются главными. Отметим еще, что функция F_W определяется по W однозначно с точностью до множителя, который является целой функцией, нигде не обращающейся в ноль. Поскольку $N(W)$ является частью нулей (с учетом кратности) целых функций первого порядка, принадлежащих I_W, то этот множитель можно подобрать так (см. [37], гл. 3, §7, теорема 3.30), что F_W будет иметь первый порядок роста (и возможно бесконечный тип). В дальнейшем будем считать, что для каждого главного инвариантного подпространства W выбрана и фиксирована какая-либо функция F_W с отмеченными выше свойствами, которая имеет первый порядок роста.

Будем говорить, что подпространство W допускает спектральный синтез, если система $E(W)$ полна в W. Как уже отмечалось, таким свойством обладает пространство решений однородного уравнения свертки в произвольной выпуклой области. В случае, когда множество $N(W)$ имеет коразмерность больше единицы, запаса функций из системы $E(W)$, вообще говоря, недостаточно для спектрального синтеза в W (см., например, [8]).

Отметим, что если подпространство W допускает спектральный синтез, то множество I_W состоит из тех и только тех функций $f \in P_D$, которые обращаются в нуль, по крайней мере, в точках $\lambda \in N(W)$ с кратностью не меньшей, чем $m(\lambda)$. Действительно, если $f \in I_W$, то по определению I_W верно включение $f \in P_D$, а по определению $N(W)$ и $m(\lambda)$ функция f обращается в нуль в точках $\lambda \in N(W)$ с кратностью не меньшей, чем $m(\lambda)$. Обратно, если функция f принадлежит P_D, то она является преобразованием Лапласа некоторого функционала μ из $H^*(D)$. Если, к тому же, f обращается в нуль в точках $\lambda \in N(W)$ с кратностью не меньшей, чем $m(\lambda)$, то из определения преобразования Лапласа следует, что функционал μ обращается в нуль на всех элементах системы $E(W)$. Пространство W

допускает спектральный синтез, т.е. система $E(W)$ полна в W. Следовательно, μ будет обращаться в нуль на всем подпространстве W, а потому μ принадлежит W^0, а его преобразование Лапласа f принадлежит I_W. Отметим еще, что в случае, когда W — главное инвариантное подпространство, I_W состоит из тех и только тех функций $f \in P_D$, которые делятся на F_W.

В конце данного параграфа сформулируем поточнее задачу, полное решение которой будет найдено в этой работе. Пусть $W \subset H(D)$ – нетривиальное главное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. При каких условиях каждая функция из W аналитически продолжается в некоторую выпуклую область $G \supset D$ и каков класс допустимых областей G?

2. Достаточные условия продолжения

Прежде всего сформулируем и докажем результат, который сводит проблему продолжения функций из инвариантного подпространства к задаче "деления с остатком"из теории целых функций. В той или иной степени этот результат использовался в большинстве работ по продолжению. Мы сохраняем обозначения, которые были введены ранее. Если G — выпуклая область, содержащая D, то через $W(G)$ обозначим замыкание в топологии $H(G)$ линейной оболочки системы $E(W)$. Также, как и W, подпространство $W(G)$ является нетривиальным замкнутым в $H(G)$ и инвариантным относительно дифференцирования, а из определения сразу следует, что оно допускает спектральный синтез. Если W — главное, то и $W(G)$ — главное.

Лемма 1. *Пусть D, G — выпуклые области в $\mathbb{C}^n$ и $D \subset G$; $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Следующие утверждения эквивалентны.*
1. Каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.
2. Для любой функции $h \in P_G$ существуют функции $f \in I_{W(G)}$ и $g \in P_D$ такие, что верно равенство $h = f + g$.

Доказательство. Согласно определению $W(G)$ и полноте системы $E(W)$ в W, оператор сужения R переводит $W(G)$ в W. Очевидно, что этот оператор линеен и непрерывен. По теореме единственности для аналитических функций он инъективен. Утверждение 1. эквивалентно его сюръективности, а следовательно, и его взаимной однозначности. Так как $W(G)$ и W — замкнутые подпространства пространств Фреше $H(G)$ и $H(D)$ (см., например, [1]), то последнее равносильно (см. [34], гл. 8, § 6, п. 18) взаимной однозначности сопряженного оператора $R^* : W^* \to W^*(G)$. Пространства $H(D)$ и $H(G)$ являются еще и пространствами Шварца. Поэтому имеют место изоморфизмы (см. [35]):

$$W^* \cong H^*(D)/W^0,\ W^*(G) \cong H^*(G)/W^0(G).$$

Таким образом, утверждение 1. равносильно тому, что для каждого функционала $\nu \in H^*(G)$ существует единственный класс эквивалентности $[\mu] \in H^*(D)/W^0$ такой, что выполнено равенство

$$(\nu, \varphi) = (\mu, R(\varphi)), \forall \varphi \in W(G).$$

В силу непрерывности функционалов ν, μ и полноты системы $E(W)$ в этом равенстве можно ограничиться лишь функциями φ, принадлежащими $E(W)$. Пусть $h(\lambda)$ и $g(\lambda)$ — преобразования Лапласа соответственно функционалов ν и μ. Тогда по предыдущему имеем:

$$D^\alpha h(\lambda) = (\nu, z^\alpha \exp\langle\lambda, z\rangle) = (\mu, z^\alpha \exp\langle\lambda, z\rangle) = D^\alpha g(\lambda),$$
$$\lambda \in N(W), 0 \leqslant |\alpha| < m(\lambda).$$

Таким образом, утверждение 1. равносильно тому, что для любой функции $h \in P_G$ существует единственный класс эквивалентности $[g] \in P_D/I_W$ такой, что $h - g$ обращается в ноль во всех точках $\lambda \in N(W)$ с кратностью не меньшей чем $m(\lambda)$, т.е. $(h-g) \in I_{W(G)}$. Для завершения доказательства остается заметить, что при выполнении одновременно двух разложений $h = f + g$ и $h = f_1 + g_1$ мы имеем:

$$(g - g_1) = (-f + f_1) \in I_{W(G)}.$$

Отсюда следует включение $(g - g_1) \in I_W$, поскольку $(g - g_1) \in H(D)$. Это означает, что g и g_1 — представители одного и того же класса эквивалентности из пространства P_D/I_W. Лемма доказана.

Следующий результат дает описание максимальной выпуклой области, в которую можно осуществить продолжение функций из W. Предварительно введем еще некоторые обозначения. Пусть $\Delta(F_W)$ — совокупность предельных направлений нулевого множества F_W, т.е. подмножество единичной сферы $S = S(0,1)$, состоящее из пределов всевозможных сходящихся последовательностей вида $\{\lambda_j/|\lambda_j|\}_{j=1}^{\infty}$, где $\lambda_j \in N(W)$, $j = 1, 2, \ldots$ и $|\lambda(j)| \to \infty$ при $j \to \infty$. Для выпуклой области D положим

$$D(W) = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathsf{Re}\,\langle z, \xi\rangle < H_D(\xi), \xi \in \Delta(F_W)\}.$$

Если $\Delta(F_W) = \oslash$, то считаем, что $D(W) = \mathbb{C}^n$. Очевидно, $\Delta(F_W)$ — замкнутое множество. Если $\Delta(F_W)$ совпадает со сферой S, то область $D(W)$ совпадает с D. В общем случае имеет место вложение $D \subseteq D(W)$, которое следует из представления (см., например, [32])

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathsf{Re}\,\langle z, \xi\rangle < H_D(\xi), \xi \in S\}.$$

Поэтому всегда выполнено неравенство

$$H_D(\xi) \leqslant H_{D(W)}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{C}^n.$$

С другой стороны, из определения $D(W)$ легко получаем:

$$H_{D(W)}(\xi) \leqslant H_D(\xi), \xi \in \Delta(F_W).$$

Таким образом, имеет место равенство

$$H_{D(W)}(\xi) = H_D(\xi), \xi \in \Delta(F_W). \tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Предположим, что все функции из W аналитически продолжаются в некоторую выпуклую область $G \supset D$ и аппроксимируются там линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда $G \subseteq D(W)$.*

Доказательство. По лемме 1 для каждой функции $h \in P_G$ существует функция $g \in P_D$ такая, что $h - g \in I_{W(G)}$. По определению пространства P_D найдется номер $m \geq 1$ и $c > 0$, для которых выполнено неравенство

$$|g(\lambda)| \leqslant c \exp H_{K_m}(\lambda), \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Поскольку функции $h(\lambda)$ и $g(\lambda)$ совпадают на множестве $N(W)$, то отсюда получаем оценку

$$|h(\lambda)| \leqslant c \exp H_{K_m}(\lambda), \lambda \in N(W). \tag{3}$$

Предположим, что G не лежит в области $D(W)$. Тогда из определения последней следует, что для некоторых $z_0 \in G$ и $\lambda_0 \in \Delta(F_W)$ имеет место неравенство

$$\mathsf{Re}\,\langle z_0, \lambda_0\rangle \geq H_D(\lambda_0).$$

Согласно выбору точки z_0 функция $\exp\langle z_0, \lambda\rangle$ принадлежит пространству P_G. Поэтому для нее выполнено (3). С другой стороны, в силу последнего неравенства, вложения $K_m \subset D$ и непрерывности функции $H_{K_m}(\lambda)$ найдутся $\varepsilon, \delta > 0$ такие, что

$$|\exp\langle z_0, \lambda\rangle| \geq \exp\{H_{K_m}(\lambda) + \varepsilon|\lambda|\}, \lambda \in B(\lambda_0, \delta).$$

Согласно определению множества $N(W)$ выберем последовательность $\lambda_j \in N(W)$, $j \geq 1$, такую, что $|\lambda_j| \to \infty$ и $\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}$ сходится к λ_0 при $j \to \infty$. Тогда с учетом однородности функции $H_{K_m}(\lambda)$ для всех достаточно больших номеров j в точке $\lambda = \lambda_j$ будет выполнено последнее неравенство. А это противоречит (3). Лемма доказана.

Таким образом, аналитическое продолжение всех функций из W в выпуклую область $G \supset D$ возможно лишь в случае, когда G является подобластью $D(W)$. При этом, в случае главного инвариантного подпространства согласно лемме 1 и сказанному выше относительно пространства I_W, такое продолжение эквивалентно существованию функции $g \in P_D$ (зависящей от $h \in P_G$) такой, что $h - g$ делится на F_W. Для доказательства существования подобной функции g нам необходимо построить специальную срезающую функцию, что и будет сделано в следующей лемме.

Если M – множество в $\mathbb{C}^n$ и $\varepsilon > 0$, то через $M\,[\varepsilon]$ будем обозначать в дальнейшем объединение шаров $B(z, \exp(-\varepsilon|z|))$, когда z пробегает M.

Лемма 3. *Пусть M – множество в $\mathbb{C}^n$ и $\varepsilon > 0$. Существует функция $E_M \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, обладающая свойствами:*

1) $0 \leqslant E_M(z) \leqslant 1$, $z \in \mathbb{C}^n$;
2) $E_M(z) = 1$, $z \in M$;
3) $E_M(z) = 0$, $z \neq M\,[\varepsilon]$;
4) $|\partial E_M(z)/\partial \overline{z}_i| \leqslant C \exp(\varepsilon(|z| + 2))$, $z \in \mathbb{C}^n$, $i = 1, \ldots, n$ *(постоянная C зависит лишь от размерности).*

Доказательство. Пусть

$$M_k = M \bigcap \{z : k - 1 \leqslant |z| \leqslant k\}\,, k = 1, 2, \ldots.$$

$$\Omega_k = M_k + B(0, \exp(-\varepsilon k)).$$

Как обычно (см., например, [36], теорему 1.4.1 и формулу (1.4.2)), мы можем найти функции $e_k \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$0 \leqslant e_k(z) \leqslant 1, z \in \mathbb{C}^n; e_k(z) = 1, z \in M_k;$$

$$e_k(z) = 0, z \neq \Omega_k;$$

$$|\partial e_k(z)/\partial \overline{z}_i| \leqslant c \exp(\varepsilon k), z \in \mathbb{C}^n, i = 1, \ldots, n,$$

где $c > 0$ зависит лишь от размерности n. Положим

$$E_M(z) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty}(1 - e_k(z)).$$

Функция $E_M(z)$ корректно определена, поскольку каждая точка $z \in \mathbb{C}^n$ попадает не более чем в три множества из набора Ω_k, $k = 1, 2, \ldots$, а следовательно, в произведении отличны от единицы не более трех сомножителей. Покажем, что эта функция обладает необходимыми свойствами. Свойство 1) выполнено для $E_M(z)$, т.к. оно выполнено для $e_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $z \in M$. Тогда для некоторого $k \geq 1$ точка z принадлежит множеству M_k. Поэтому верно равенство $e_k(z) = 1$, из которого следует, что $E_M(z)$=1. Это дает нам свойство 2). С учетом определения $E_M(z)$ и свойств функций $e_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, свойство 3) будет выполнено, если мы покажем, что верно вложение $\Omega_k \subset M\,[\varepsilon]$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $z \in \Omega_k$. Выберем $y \in M_k$ такое, что $z \in B(y, \exp(-\varepsilon k))$. Тогда с учетом определения M_k получаем:

$$|y - z| < \exp(-\varepsilon k) \leqslant \exp(-\varepsilon|y|).$$

Это означает, что $z \in M\,[\varepsilon]$. Пусть снова $z \in \Omega_k$. Тогда $|z| + 2 \geq k$. Отсюда с учетом оценки производных функции e_k и равенства $e_k(w) = 0$, $w \neq \Omega_k$, имеем:

$$|\partial e_k(w)/\partial \overline{w}_i| \leqslant c \exp(\varepsilon(2 + |w|)), w \in \mathbb{C}^n, i = 1, \ldots, n,$$

Следовательно,

$$|\partial e_k(w)/\partial \overline{w}_i| \leqslant C \exp(\varepsilon(2+|w|)), w \in \mathbb{C}^n, i = 1, \ldots, n,$$

где $C = 3c$. Лемма доказана.

Прежде чем перейти к основному результату этого параграфа, докажем еще одно техническое утверждение.

Лемма 4. *Пусть $q(z)$ — положительно однородная порядка один и непрерывная в $\mathbb{C}^n$ функция. Для любого $\beta > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполнено неравенство*

$$\sup_{\lambda \in B(z,\delta|z|)} q(\lambda) \leqslant \inf_{\lambda \in B(z,\delta|z|)} q(\lambda) + \beta|z|, z \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство. Фиксируем $\beta > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $q(z)$ на сфере S найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $z \in S$ и всех $\lambda, w \in B(z,\delta)$

$$|q(\lambda) - q(w)| \leqslant \beta.$$

Отсюда с учетом однородности q получаем:

$$\sup_{\lambda \in B(z,\delta|z|)} q(\lambda) = |z| \sup_{\lambda \in B(z/|z|,\delta)} q(\lambda) \leqslant |z| \inf_{\lambda \in B(z/|z|,\delta)} (q(\lambda) + \beta) = \inf_{\lambda \in B(z,\delta|z|)} q(\lambda) + \beta|z| =$$

$$= \inf_{\lambda \in B(z,\delta|z|)} q(\lambda) + \beta|z|$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основного результата данного параграфа — достаточным условиям продолжения функций из главных инвариантных подпространств. Перед этим введем еще одно обозначение. Пусть D и G — выпуклые области в $\mathbb{C}^n$, $D \subset G$. Положим

$$\Xi = \Xi(D,G) = \{z \in \mathbb{C}^n : H_D(z) = H_G(z)\}.$$

Тогда на дополнении Ξ до $\mathbb{C}^n$ имеет место неравенство: $H_D(z) < H_G(z)$. Множество Ξ, вообще говоря, не является ни открытым, ни замкнутым. Если D ограничено, то Ξ — замкнуто.

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, W — нетривиальное замкнутое главное инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез; G — выпуклая подобласть $D(W)$, содержащая D. Предположим, что для любой окрестности V множества $\Xi \bigcup S$ найдется компакт $X \subset V$ такой, что для каждого номера m и любого $\varepsilon > 0$ существуют плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция $\psi(z)$, число $R > 0$, номер p и открытое множество U, удовлетворяющие условиям:*

i) $N(W) \subset U$;

ii) *Для каждого $z \in U[\varepsilon] \setminus B(0,R)$ точка $z/|z|$ принадлежит X;*

iii) $\psi(z) + \ln|F_W(z)| \geq H_{K_m}(z)$, $z \in U[\varepsilon] \setminus U$;

iiii) $\psi(z) + \ln|F_W(z)| \leqslant H_{K_p}(z)$, $z \neq B(0,R)$.

Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, утверждение теоремы будет верным, если для любой функции $h \in P_G$ существует функция $g \in P_D$ такая, что $h - g$ делится на F_W. Другими словами, по функции h мы должны построить функцию g с меньшими оценками на рост, которая совпадает с h в точках $z \in N(W)$ вместе со всеми своими частными производными до порядка $m(z) - 1$ включительно. На первом этапе, используя лемму 3, мы построим подобную функцию, которая аналитична лишь в специальной окрестности множества $N(W)$.

Итак, фиксируем произвольную функцию $h \in P_G$. Согласно определению пространства P_G найдем выпуклый компакт $K \subset G$ и постоянную $c > 0$ такие, что

$$|h(z)| \leqslant c \exp(H_K(z)), z \in \mathbb{C}^n. \tag{4}$$

Так как K компактно вложено в G, то имеет место неравенство

$$H_K(z) < H_G(z), z \in \mathbb{C}^n, z \neq 0.$$

Отсюда с учетом определения множества Ξ получаем:

$$H_K(z) < H_D(z), z \in \Xi, z \neq 0.$$

В силу непрерывности функции H_K и полунепрерывности снизу H_D это неравенство продолжается в некоторую окрестность V множества Ξ . Согласно условию теоремы по окрестности V найдем компакт $X \subset V$. Из последнего неравенства и определения опорной функции следует, что для каждого $z \in X$ существует точка $w(z) \in D$ такая, что

$$H_K(z) < \mathsf{Re} \langle w(z), z \rangle .$$

По непрерывности это неравенство продолжается в некоторую окрестность $\Omega(z)$ точки z. Из покрытия компакта X множествами $\Omega(z)$, $z \in X$, выделим конечное подпокрытие $\Omega(z_1), \ldots, \Omega(z_j)$. Поскольку компакты K_m, $m = 1, 2, \ldots$, исчерпывают область D, то найдется номер s такой, что K_s содержит все точки $w(z_1), \ldots, w(_j)$. Следовательно, будет выполнено неравенство

$$H_K(z) < H_{K_s}(z), z \in X.$$

Отсюда с учетом (4) и однородности опорной функции получаем:

$$|h(tz)| \leqslant c \exp(H_{K_s}(tz)), z \in X, t \geq 0. \tag{5}$$

Так как K_s лежит во внутренности компакта K_{s+1}, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что верна оценка

$$H_{K_s}(z) + \varepsilon|z| \leqslant H_{K_{s+1}}(z), z \in \mathbb{C}^n. \tag{6}$$

Согласно условию теоремы для номера $m = s + 1$ и числа ε найдем плюрисубгармоническую в $\mathbb{C}^n$ функцию $\psi(z)$, постоянную $R > 0$, номер p и открытое множество U, удовлетворяющие условиям i)–iiii). Пусть $E_U(z)$ – функция, построенная в лемме 3 для множества $M = U$ и числа $\varepsilon > 0$. Положим $\varphi(z) = E_U(z)h(z)$. Тогда φ бесконечно дифференцируема, а в силу свойства 2) функции $E_U(z)$ и условия i) h и φ совпадают в окрестности U множества $N(W)$. В частности, это означает, что

$$D^\alpha h(z) = D^\alpha \varphi(z), z \in N(W), |\alpha| = 0, 1, \ldots, m(z) - 1. \tag{7}$$

Кроме того, из свойств 1), 3) функции $E_U(z)$, условия ii) и неравенства (5) следует оценка

$$|\varphi(z)| \leqslant c_1 \exp(H_{K_s}(z)), z \in \mathbb{C}^n, \tag{8}$$

где c_1 — некоторая положительная постоянная.

Для построения искомой функции $g \in P_D$ нам остается "поправить" φ так, чтобы в результате получилась целая функция с подходящими оценками на рост и сохранилось свойство (7). Подобную правку можно осуществить, добавив к φ бесконечно дифференцируемую функцию, которая обращается в ноль во всех точках $z \in N(W)$ с кратностью не меньшей, чем $m(z)$. Поэтому мы будем искать функцию g в виде: $g = \varphi + F_W\eta$, где η — неизвестная пока функция. Поскольку g должна быть целой, то η необходимо искать среди решений уравнения $0 = \overline{\partial} g = \overline{\partial}\varphi + F_W\overline{\partial}\eta$ или

$$\overline{\partial}\eta = -\overline{\partial}\varphi / F_W. \tag{9}$$

Это решение должно иметь подходящую оценку. Чтобы доказать существование подобного решения, нужно вначале оценить правую часть в (9). Прежде всего, заметим, что в силу свойства 3) для $E_U(z)$ функция φ, а вместе с ней и $\overline{\partial}\varphi$ обращаются в ноль вне множества

$U[\varepsilon]$. Кроме того, как отмечалось выше, h и φ совпадают на U. Следовательно, с учетом аналитичности h, имеем: $\overline{\partial}\varphi(z)=0$, $z\in U$. Далее, используя последовательно свойство 4) функции $E_U(z)$, условие ii) теоремы, неравенства (5) и (6), для каждой точки $z\in U[\varepsilon]$ получаем:

$$\left\|\overline{\partial}\varphi(z)\right\|^2=\left\|\overline{\partial}E_U(z)h(z)\right\|^2=|h(z)|^2\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial E_U(z)}{\partial\overline{z}_j}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant c_2\exp 2(H_{K_s}(z)+\varepsilon|z|)\leqslant c_2\exp 2H_{K_{s+1}}(z)=c_2\exp 2H_{K_m}(z),$$

где c_2 — некоторая положительная постоянная. Отсюда и из условия iii) следует, что

$$\left\|\overline{\partial}\varphi(z)/F_W(z)\right\|^2\leqslant c_2\exp 2\psi(z), z\in U[\varepsilon]\setminus U.$$

Таким образом, с учетом сказанного выше относительно формы $\overline{\partial}\varphi$, имеем:

$$\left\|\overline{\partial}\varphi(z)/F_W(z)\right\|^2\leqslant c_2\exp 2\psi(z), z\in\mathbb{C}^n.$$

Эта оценка означает, что для каждого $\tau>0$

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n}\left\|\frac{\overline{\partial}\varphi(z)}{F_W(z)}\right\|^2\exp 2(-\psi(z)-\tau|z|)d\sigma(z)=B<\infty.$$

Тогда, как известно (см., например, [33, гл. 3, § 6, теорема 3.6.2]), в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}^n$ найдется элемент η, который (в обобщенном смысле) удовлетворяет равенству (9) и, кроме того, оценке

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n}|\eta(z)|^2\exp 2(-\psi(z)-\tau|z|)(1+|z|^2)^{-2}d\sigma(z)\leqslant 2^{-1}B. \tag{10}$$

Положим $g=\varphi+F_W\eta$. В силу (9) обобщенные производные g по $\overline{z}_j$, $j=1,\ldots,n$, равны нулю всюду в $\mathbb{C}^n$. Хорошо известно, что это означает аналитичность g в $\mathbb{C}^n$. Докажем включение $g\in P_D$. В силу неравенства о среднем для субгармонических функций имеем:

$$|g(z)|\leqslant\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{B(z,1)}|g(\lambda)|d\sigma(\lambda), z\in\mathbb{C}^n.$$

Отсюда, используя (8) и неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$|g(z)|\leqslant(\sigma(n))^{-1}\int\limits_{B(z,1)}|\varphi(\lambda)+F_W(\lambda)\eta(\lambda)|d\sigma(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant(\sigma(n))^{-1}\int\limits_{B(z,1)}|\varphi(\lambda)|d\sigma(\lambda)+(\sigma(n))^{-1}\int\limits_{B(z,1)}|F_W(\lambda)\eta(\lambda)|d\sigma(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant c_1\exp(\sup_{\lambda\in B(z,1)}H_{K_s}(\lambda))+$$

$$+(\sigma(n))^{-1}\left(\int\limits_{B(z,1)}|F_W(\lambda)\eta(\lambda)|^2\exp 2(-H_{K_p}(\lambda)-2\tau|\lambda|)d\sigma(\lambda)\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{B(z,1)}\exp 2(H_{K_p}(\lambda)+2\tau|\lambda|)d\sigma(\lambda)\right)^{1/2}, z\in\mathbb{C}^n. \tag{11}$$

В силу леммы 4 и неравенства (6) найдется постоянная $c_3 > 0$ такая, что

$$c_1 \exp(\sup_{\lambda \in B(z,1)} H_{K_s}(\lambda)) \leqslant c_3 \exp H_{K_{s+1}}(z) = c_3 \exp H_{K_m}(z), \forall z. \tag{12}$$

Далее, также по лемме 4 получаем:

$$\begin{aligned} &\left(\int\limits_{B(z,1)} \exp 2(H_{K_p}(\lambda) + 2\tau|\lambda|) d\sigma(\lambda) \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \left((\sigma(n)) \exp(2 \sup_{\lambda \in B(z,1)} (H_{K_p}(\lambda) + 2\tau|\lambda|)) \right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant c_4 (\sigma(n))^{1/2} \exp(H_{K_p}(z) + 3\tau|z|), z \in \mathbb{C}^n, \end{aligned} \tag{13}$$

где c_4 – положительная постоянная. Наконец, из условия iiii) теоремы и оценки (10) следует, что для некоторого $B' \geq B/2$

$$\left(\int\limits_{B(z,1)} |F_W(\lambda)\eta(\lambda)|^2 \exp 2(-H_{K_p}(\lambda) - 2\tau|\lambda|) d\sigma(\lambda) \right)^{1/2} \leqslant (B')^{1/2}.$$

Отсюда с учетом (11)-(13) получаем:

$$\begin{aligned} |g(z)| \leqslant c_3 \exp H_{K_m}(z) + c_4 (B'(\sigma(n))^{-1})^{1/2} \exp(H_{K_p}(z) + 3\tau|z|) \leqslant \\ \leqslant c_5 \exp(H_{K_p}(z) + 3\tau|z|), z \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из условий iii), iiii) и вложений $K_j \subset K_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$ Поскольку K_p лежит во внутренности K_{p+1}, то для достаточно малого $\tau > 0$

$$H_{K_p}(z) + 3\tau|z| \leqslant H_{K_{p+1}}(z), z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, верно неравенство

$$|g(z)| \leqslant c_5 \exp H_{K_{p+1}}(z), z \in \mathbb{C}^n,$$

которое означает, что функция g является элементом пространства P_D. Остается показать, что $h - g$ делится на F_W. Для этого вспомним, что $\overline{\partial}\varphi(z) = 0$, $z \in U$. Следовательно, в силу (9) функция $\eta(z)$ аналитична в окрестности U множества $N(W)$. Поэтому верны равенства:

$$D^\alpha(F_W(z)\eta(z)) = 0, z \in N(W), |\alpha| = 0, 1, \ldots, m(z) - 1.$$

Отсюда и из (7) получаем:

$$D^\alpha(h(z) - g(z))) = 0, z \in N(W), |\alpha| = 0, 1, \ldots, m(z) - 1.$$

Последнее означает, что $(h - g)/F_W$ – целая функция. Теорема доказана.

3. Необходимые условия продолжения

Основной целью данного параграфа является получение необходимых условий аналитического продолжения функций из главного инвариантного подпространства $W \subset H(D)$ в выпуклую область G, содержащую D и лежащую в $D(W)$. Прежде всего, докажем несколько вспомогательных утверждений. Первое из них касается геометрии выпуклых областей. Для выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ положим

$$\Theta_D = \{z \in \mathbb{C}^n : H_D(z) = +\infty\}.$$

Если D ограничена, то, очевидно, $\Theta_D = \oslash$. В общем случае Θ_D не будет ни открытым, ни замкнутым. В силу выпуклости и однородности функции H_D множество $\mathbb{C}^n \setminus \Theta_D$ является выпуклым конусом с вершиной в начале координат, который вырождается в луч, когда D – полупространство.

Лемма 5. *Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}^n$, $D \subset G$. Для любых $\xi \in S \setminus \Xi$ $(\Xi = \Xi(D,G))$ и $\gamma > 0$ существует точка $y \in G$ такая,что*

1) $\mathrm{Re}\,\langle y, \xi\rangle = H_D(\xi)$;

2) $\mathrm{Re}\,\langle y, \xi\rangle \leqslant H_D(z) + \gamma|z|$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если утверждение леммы верно для областей D, G, то оно верно и для всех сдвигов этих областей, т.е. для областей вида $x + D$, $x + G$, где x — произвольный фиксированный вектор. Действительно, если $y \in G$ — искомая точка, найденная по направлению ξ для областей D, G, то для их сдвигов таковой будет точка $y + x$, поскольку это преобразование означает добавление к обеим частям соотношений 1), 2) соответственно слагаемых $\mathrm{Re}\,\langle x, \xi\rangle$ и $\mathrm{Re}\,\langle x, z\rangle$, что не меняет истинности этих соотношений. Таким образом, можно считать, что область D содержит начало координат, и тогда имеет место неравенство

$$H_D(\varsigma) > 0, \forall \varsigma \neq 0. \tag{14}$$

Фиксируем $\xi \in S \setminus \Xi$. Отметим, что $\xi \notin \Theta_D$, т.к. $H_D(\xi) < H_G(\xi)$. По определению опорной функции найдем точку $w \in G$ и положительное число α такие, что

$$H_D(\xi) + \alpha < \mathrm{Re}\,\langle w, \xi\rangle\,. \tag{15}$$

Также согласно определению опорной функции найдем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ такую, что

$$0 > \mathrm{Re}\,\langle x_n, \xi\rangle - H_D(\xi) = -\varepsilon_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{16}$$

Поскольку $D \subset G$, то в силу выпуклости G для каждого $n = 1, 2, \ldots$ отрезок $[x_n, w]$ целиком лежит в области G. Кроме того, из (15) и (16) следует, что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ на отрезке $[x_n, w]$ есть точка y_n, для которой имеет место равенство

$$\mathrm{Re}\,\langle y_n, \xi\rangle = H_D(\xi). \tag{17}$$

Фиксируем $\gamma > 0$. Покажем, что в качестве искомой точки y можно взять одну из точек y_n. Для этого с учетом (17) достаточно установить соотношение 2) с $y = y_n$ при некотором n. Выберем $\tau_n \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, такое, что верно представление

$$y_n = \tau_n x_n + (1 - \tau_n)w.$$

Тогда в силу (17) получаем:

$$\mathrm{Re}\,\langle y_n, \xi\rangle = \tau_n \mathrm{Re}\,\langle x_n, \xi\rangle + (1 - \tau_n)\mathrm{Re}\,\langle w, \xi\rangle = H_D(\xi).$$

Отсюда и из (15), (16) следует оценка

$$\tau_n > \alpha/(\alpha + \varepsilon_n), n = 1, 2, \ldots$$

Выберем номер n так, что $\varepsilon_n|w|/(\alpha + \varepsilon_n) < \gamma$. Пусть $\varsigma \in S$. Тогда с учетом (14) и того, что $x_n \in D$, а $\tau_n \in [0, 1]$, имеем:

$$\mathrm{Re}\,\langle y_n, \varsigma\rangle = \tau_n \mathrm{Re}\,\langle x_n, \varsigma\rangle + (1 - \tau_n)\mathrm{Re}\,\langle w, \varsigma\rangle <$$

$$< H_D(\varsigma) + |w|\varepsilon/(\alpha + \varepsilon_n) \leqslant H_D(\varsigma) + \gamma.$$

В силу положительной однородности опорной функции это дает нам соотношение 2) для $y = y_n$. Лемма доказана.

Следующие три утверждения являются некоторыми уточнениями и обобщениями известных результатов об оценке снизу модуля аналитической функции и о делении целых функций конечного порядка и типа.

Лемма 6. *Пусть* $f(z)$ *— функция, аналитическая в шаре* $B(z_0, 2eR)$ *(отличная от константы) такая, что* $f(z_0) = 1$ *и*

$$\ln |f(z)| \leqslant M, \forall z \in B(z_0, 2eR).$$

Тогда для любых $\eta \in (0, 1/9)$, $r \in (0, (1-9\eta)R)$ *и* $\varsigma \in S$ *существует* $\tau \in (r, r+9\eta R)$ *такое, что имеет место оценка*

$$\ln |f(z_0 + \lambda\varsigma)| \geq -(4 - \ln \eta)M, |\lambda| = \tau.$$

Доказательство. Отметим вначале, что по принципу максимума модуля $M > 0$. Фиксируем $\eta \in (0, 1/9)$, $r \in (0, (1 - 9\eta)R)$ и $\varsigma \in S$. Рассмотрим функцию $g(\lambda) = f(z_0 + \lambda\varsigma)$, $\lambda \in B(0, 2eR)$. По теореме об оценке снизу модуля аналитической в круге функции (см. [38, теорема 4.2]) внутри круга $|\lambda| \leqslant R$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, равной $4\eta R$, выполнено неравенство

$$\ln |g(\lambda)| \geq -(2 + \ln(3e/2\eta))M \geq -(4 - \ln \eta)M. \tag{18}$$

Поскольку круговая проекция исключительных кружков на положительную вещественную полуось имеет длину, не превышающую $8\eta R$, то в кольце $r < |\lambda| < r + 9\eta R$ найдется окружность $|\lambda| = \tau$, не пересекающая этих кружков. Поэтому в каждой точке окружности $|\lambda| = \tau$ будет выполнено (18). Это завершает доказательство леммы.

Лемма 7. *Пусть* F *— целая функция порядка (не выше)* ρ *и конечного типа (при порядке* ρ*),* ψ *— плюрисубгармоническая функция, такая, что* $\psi + \ln |F|$ *также имеет порядок (не выше)* ρ *и конечный тип (при порядке* ρ*), т.е*

$$\psi(z) + \ln |f(z)| \leqslant A + B|z|^\rho, \quad \ln |F(z)| \leqslant C + D|z|^\rho, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{19}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\psi(z) \leqslant A + 7C - 8 \ln |F(\xi)| + (7D + B)12^\rho(|z| + 3)^\rho, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где ξ *— произвольная точка на сфере* S *такая, что* $F(\xi) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}^n$. Выберем положительное число R такое, что $|z| + 1 < R < |z|+2$. Поскольку $B(\xi, 4eR) \subset B(0, 4e(|z|+3))$, то в силу (19) и принципа максимума модуля имеем:

$$\ln |F(z')/F(\xi)| \leqslant C - \ln |F(\xi)| + D(4e(|z| + 3))^\rho, \quad \forall z' \in B(\xi, 4eR).$$

Положим $M = C - \ln |F(\xi)| + D(4e(|z|+3))^\rho$, $\eta = e^{-3}$ и выберем $\varsigma \in S$ так, чтобы комплексная прямая $\xi + \lambda\varsigma$ содержала точку z. Тогда по лемме 6 существует $\tau \in (R, 2R)$ такое, что выполнено неравенство

$$\ln |F(\xi + \lambda\varsigma)| - \ln |f(\xi)| \geq -(4 - \ln \eta)M = -7M, |\lambda| = \tau.$$

Заметим, что для всех λ на окружности $|\lambda| = \tau$ верна оценка $|\xi + \lambda\varsigma| \leqslant 2(|z| + 3)$. Поэтому из предыдущего с учетом (19) получаем:

$$\psi(z + \lambda\varsigma) \leqslant A + 7C - 8 \ln |F(\xi)| + (7D + B)12^\rho(|z| + 3)^\rho,$$

где $|\lambda| = \tau$. Согласно выбору числа R и вектора ς для некоторого λ из круга $|\lambda| < \tau$ имеет место представление $z = \xi + \lambda\varsigma$. Следовательно, из предыдущего неравенства и принципа максимума вытекает требуемая оценка. Лемма доказана.

Для точки $\varsigma \in S$ и числа $a \geq 0$ через $\Phi_a(\varsigma)$ обозначим множество последовательностей $\{z_k\} \subset \mathbb{C}^n$, обладающих следующими свойствами:

$$1)|z_k| \to \infty, k \to \infty; \quad 2) \lim_{k\to\infty} z_k/|z_k| = \varsigma; \quad 3)\overline{\lim_{k\to\infty}}|z_{k+1}|/|z_k| \leqslant 1 + a.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z_k\} \in \Phi_a(\varsigma)$ обладает еще и дополнительным свойством: $\{|z_k|\}$ – монотонно возрастающая. Действительно, положим

$k_1 = 1$, а в качестве k_j, $j \geq 2$, выберем минимальный номер k, удовлетворяющий условию $|z_k| > |z_{k_{j-1}}|$. Подпоследовательность z_{k_j} очевидно обладает свойствами 1) и 2). По построению

$$\frac{|z_{k_{j+1}}|}{|z_{k_j}|} = \frac{|z_{k_{j+1}}|}{|z_{k_{j+1}-1}|}\frac{|z_{k_{j+1}-1}|}{|z_{k_j}|} \leqslant \frac{|z_{k_{j+1}}|}{|z_{k_{j+1}-1}|}.$$

Таким образом, $\left\{z_{k_j}\right\} \in \Phi_a(\varsigma)$.

Лемма 8. *Пусть $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа:*

$$\ln|\varphi(z)| \leqslant A + B|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{20}$$

Для каждого положительного числа δ существует $a \geq 0$ такое, что для любого $\varsigma \in S$ на некоторой последовательности $\{z_k\} \in \Phi_\delta(\varsigma)$ имеет место оценка

$$\ln|\varphi(z_k)| \geq -a|z_k|, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Фиксируем $\delta > 0$, $\varsigma \in S$, $k = 1, 2, \ldots$ и какую-нибудь точку $\xi \in S$, где $\varphi(z)$ отлична от нуля. Положим $R_k = (1+2^{-1}\delta)^k$, $\eta = \delta/(20(1+\delta))$ и $r_k = R_k(2+\delta)/(2(1+\delta))$. Тогда верны включения $\eta \in (0, 1/9)$ и $r_k \in (0, (1-9\eta)R_k)$. Следовательно, с учетом (20) по лемме 6 существует $\tau_k \in (r_k, r_k + 9\eta R_k)$ такое, что имеет место оценка

$$\ln|\varphi(\xi + \lambda\varsigma)| - \ln|\varphi(\xi)| \geq -(4 - \ln\eta)M, \quad |\lambda| = \tau_k, \tag{21}$$

где $M = A - \ln|\varphi(\xi)| + 2eBR_k$. Пусть $z_k = \xi + \tau_k\varsigma$. Покажем, что верно включение $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in \Phi_{2\delta}(\varsigma)$. Прежде всего заметим, что

$$\frac{2+\delta}{2(1+\delta)} = 1 - \frac{\delta}{2(1+\delta)} > 1 - \frac{\delta}{2+\delta} = \frac{2}{2+\delta} = \frac{1}{1+\delta/2}.$$

Поэтому с учетом определения чисел R_k и r_k найдется k' такое, что при $k \geq k'$ будут выполнены неравенства

$$R_k > 1 + r_k + 9\eta R_k > 1 + \tau_k \geq |z_k| \geq \tau_k - 1 > r_k - 1 > R_{k-1}. \tag{22}$$

Следовательно, $|z_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Легко видеть, что $z_k/|z_k| \to \varsigma$, $k \to \infty$. Из (22) и определения R_k, r_k следует, что для всех $k \geq k'$ верны оценки

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < \frac{R_{k+1}}{r_k - 1} = \frac{2R_{k+1}(1+\delta)}{R_k(2+\delta)(1-1/r_k)} = \frac{2R_k(1+\delta)(1+\delta/2)}{R_k(2+\delta)(1-1/r_k)} = \frac{(1+\delta)}{(1-1/r_k)}.$$

Таким образом, $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in \Phi_{2\delta}(\varsigma)$.

Пусть $a = 3eB(4-\ln\eta)(1+\delta/2)$ и $\alpha = 5\ln|\varphi(\xi)| - (4-\ln\eta)A$. Тогда в силу (21) и (22) (с учетом неотрицательности B) существует номер k'' такой, что

$$\ln|\varphi(z_k)| \geq \alpha - 2eB(4-\ln\eta)R_k = \alpha - 2eB(1+\delta/2)(4-\ln\eta)R_{k-1} \geq$$
$$\geq \alpha - 2eB(1+\delta/2)(4-\ln\eta)|z_k| \geq -\alpha|z_k|, \quad k \geq k''.$$

Это, очевидно, завершает доказательство леммы.

Прежде чем перейти к основному результату параграфа докажем еще два вспомогательных утверждения, в которых строятся специальные плюрисубгармонические функции с заданным асимптотическим поведением.

Лемма 9. *Пусть F — целая функция в $\mathbb{C}^n$, f — целая функция экспоненциального типа, постоянная $d_1 > 0$ и выпуклый компакт $L \subset \mathbb{C}^n$ таковы, что верна оценка*

$$\ln|f(z)| \leqslant d_1 + H_L(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Предположим, что f делится на F. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта $S_0 \subset S \setminus \Delta(F)$ существуют плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция ψ, окрестность Ω компакта S_0 и постоянные $a_0, T > 0$ такие, что выполнены следующие неравенства:
1) $\ln|F(z)| + \psi(z) \leqslant d_1 + H_L(z) + \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n$;
2) $\ln|F(z)| + \psi(z) \geq -a_0|z|$ *для всех* $z \in \mathbb{C}^n$, *удовлетворяющих условиям:* $z/|z| \in \Omega$, $|z| \geq T$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если компакт S_0 является объединением компактов $S_1, \ldots, S_p$, то, построив для каждого $i = 1, \ldots, p$ плюрисубгармоническую функцию ψ_i, обладающую свойствами 1), 2), где S_0 заменен на S_i, и определив функцию ψ как максимум ψ_i, $i = 1, \ldots, p$, мы тем самым получим искомую функцию, для которой выполнены неравенства 1) и 2) уже на всем S_0. Поэтому мы можем считать, что S_0 достаточно мал. Нам удобно предположить, что компакт S_0 лежит в некотором открытом полупространстве, граничная гиперплоскость которого проходит через начало координат. Эта гиперплоскость содержит комплексную гиперплоскость вида $\{z : g(z) = \langle z, \lambda\rangle = 0\}$, которая в силу своего выбора не пересекает S_0. Можно считать, что точка λ принадлежит сфере S.

Приступим теперь непосредственно к построению функции ψ. Положим

$$\psi'(z) = \ln|f(z)| - \ln|F(z)|.$$

По условию ψ' — плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция. Тогда в силу аналитичности $g(z)$ для каждого положительного δ плюрисубгармонической будет и функция

$$\psi(z) = (\sigma_n\delta^{2n})^{-1} \int\limits_{B(0,\delta)} \psi'(z + g(z)w)d\sigma(w).$$

Делая замену переменной под интегралом $w' = e^{i\varphi}w$, где φ — аргумент комплексного числа $g(z)$, мы получаем формулу

$$\psi(z) = (\sigma_n\delta^{2n})^{-1} \int\limits_{B(0,\delta)} \psi'(z + |g(z)|w)d\sigma(w).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 4 найдем $\delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\sup_{w\in\overline{B(z,\delta|z|)}} H_L(w) \leqslant H_L(z) + \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{23}$$

Так как $S_0 \subset S \setminus \Delta(F)$ и $\Delta(F)$ — замкнутое множество, то, уменьшая при необходимости $\delta > 0$, можно считать, что $S_0^{3\delta}$ (3δ — вздутие компакта S_0) не пересекает $\Delta(F)$. Из покрытия компакта S_0 шарами $B(\varsigma, \delta/3)$, $\varsigma \in S_0$, выделим конечное подпокрытие $B(\varsigma_j, \delta/3)$, $j = 1, \ldots, j_0$. В качестве окрестности Ω компакта S_0 возьмем объединение шаров $B(\varsigma_j, \delta/3)$, $j = 1, \ldots, j_0$. Можно также считать, что $\alpha = \inf\limits_{z\in V} |g(z)| > 0$. По лемме 8 найдем $a \geq 0$ и последовательности $\{z_{j,k}\} \in \Phi_{\delta/4}(\varsigma_j)$, $j = 1, \ldots, j_0$, такие, что имеет место оценка

$$\ln|f(z_{j,k})| \geq -a|z_{j,k}|, k \geq 1, j = 1, \ldots, j_0. \tag{24}$$

Как отмечалось ранее, можно считать, что последовательности $\{|z_{j,k}|\}$, $j = 1, \ldots, j_0$, монотонно возрастая, стремятся к $+\infty$. Согласно определению множества $\Phi_\delta(\varsigma)$ выберем номер k_0 так, что

$$|z_{j,k}/|z_{j,k}| - \varsigma_j| \leqslant \delta/3, |z_{j,k+1}|/|z_{j,k}| \leqslant 1 + \delta/3, k \geq k_0, j = 1, \ldots, j_0. \tag{25}$$

Пусть $T \geq \max\limits_{1\leqslant j\leqslant j_0} |z_{j,k_0}|$. Поскольку $S_0^{3\delta}$ не пересекает $\Delta(F)$, то с учетом определения $\Delta(F)$ число T можно выбрать так, что шар $B(\varsigma, 8\delta|\varsigma|/3)$ не пересекает нулевое множество функции F, если $|\varsigma| \geq T$ и $\varsigma/|\varsigma| \in S_0$. Фиксируем $z \in \Omega \bigcap S$, $t \geq T$, и выберем номера j, k так, чтобы шар $B(\varsigma_j, \delta/3)$ содержал точку z, и выполнялись неравенства:

$$|z_{j,k-1}| \leqslant t \leqslant |z_{j,k}|. \tag{26}$$

Тогда с учетом (25) получаем:

$$|z_{j,k} - tz| \leqslant |z_{j,k} - tz_{j,k}/|z_{j,k}|| + |t\varsigma_j - tz_{j,k}/|z_{j,k}|| + |t\varsigma_j - tz| < t\delta.$$

Следовательно, шар $B(tz,|g(tz)|\delta)$ лежит в шаре $B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)$. Кроме того, в силу (26), (25) и неравенства $|g(tz)|\leqslant|tz||\lambda|=t$ имеют место вложения: $B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)\subseteq\subseteq B(z_{j,k},2t\delta)\subseteq B(z_{j,k},2|z_{j,k}|\delta)\subseteq B(|z_{j,k}|\varsigma,7|z_{j,k}|\delta/3)$. Поскольку $|z_{j,k}|\geq t\geq T$, то отсюда вытекает, что шар $\overline{B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)}$ не пересекает нулевое множество функции F, а потому $\ln|F|$ плюригармонична в этом шаре. Используя неравенство и равенство о среднем соответственно для субгармонических и гармонических функций, получаем:

$$\ln|f(z_{j,k})|\leqslant(\sigma_n(t+|g(tz)|)^{2n}\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)}\ln|f(w)|d\sigma(w)=$$

$$=\frac{\sigma_n|g(tz)|^{2n}\delta^{2n}}{\sigma_n(t+|g(tz)|)^{2n}\delta^{2n}}(\sigma_n|g(tz)|^{2n}\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(tz,|g(tz)|\delta)}(\psi'(w)+\ln|F(w)|)d\sigma(w)+$$

$$+(\sigma_n(t+|g(tz)|)^{2n}\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)\setminus B(tz,|g(tz)|\delta)}\ln|f(w)|d\sigma(w)=$$

$$=\frac{|g(tz)|^{2n}}{(t+|g(tz)|)^{2n}}(\psi(tz)+\ln|F(tz)|)+$$

$$+(\sigma_n(t+|g(tz)|)^{2n}\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)\setminus B(tz,|g(tz)|\delta)}\ln|f(w)|d\sigma(w).$$

Отсюда с учетом (24) и оценки на $\ln|f|$ из условия леммы имеем:

$$-a|z_{j,k}|\leqslant\frac{|g(tz)|^{2n}}{(t+|g(tz)|)^{2n}}(\psi(tz)+\ln|F(tz)|)+d_1+\sup_{w\in B(z_{j,k},(t+|g(tz)|)\delta)}H_L(w).$$

Пусть $b=\sup\limits_{|w|=1}H_L(w)$. Тогда в силу однородности опорной функции и неравенств $|z_{j,k}|\geq\geq t\geq|g(tz)|\geq\alpha t$, $|z_{j,k}|\leqslant t(1+\delta)$ и $\delta<1$ получаем:

$$\psi(z')+\ln|F(z')|\geq-\frac{(t+|g(tz)|)^{2n}}{|g(tz)|^{2n}}(a|z_{j,k}|+d_1+b(|z_{j,k}|+(|g(tz)|+t)\delta))\geq$$

$$\geq-(2/\alpha)^{2n}(a+d/|z_{j,k}|+b(1+2\delta))|z_{j,k}|\geq$$

$$\geq-(2/\alpha)^{2n}(a+d/T+3b)|z_{j,k}|\geq-(2/\alpha)^{2n}(a+d/T+3b)|z'|(1+\delta)\geq$$

$$\geq-a_0|z'|,\quad z'=tz,\quad z\in\Omega\bigcap S,t\geq T,$$

где $a_0=2(2/\alpha)^{2n}(a+d/T+3b)$. Это дает нам неравенство 2) из утверждения леммы.

С другой стороны, в силу (23), неравенства о среднем для субгармонических функций, оценки на $\ln|f|$ из условия леммы, однородности опорной функции и неравенства $|g(z)|\leqslant|z|$ имеем:

$$\psi(z)+\ln|F(z)|=(\sigma_n\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(0,\delta)}\psi'(z+|g(z)|w)d\sigma(w)+\ln|F(z)|\leqslant$$

$$\leqslant(\sigma_n\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(0,\delta)}\psi'(z+|g(z)|w)+\ln|F(z+|g(z)|w)|d\sigma(w)\leqslant$$

$$\leqslant d_1+\sup_{w\in B(z,|g(z)|\delta)}H_L(w)\leqslant d_1+\sup_{w\in B(z,|z|\delta)}H_L(w)\leqslant$$

$$\leqslant d_1+H_L(z)+\varepsilon|z|,\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

Это завершает доказательство леммы.

Следующая лемма является модификацией предыдущей. В предположении дополнительных оценок снизу на $\ln|f(z)|$ в ней приводится неравенство более точное, чем в пункте 2) леммы 9.

Лемма 10. *Пусть F — целая функция, ψ_0 — плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, постоянная $d>0$ и выпуклый компакт $L\subset\mathbb{C}^n$ таковы, что*

$$\psi_0(z)+\ln|F(z)|\leqslant d+H_L(z),\quad z\in\mathbb{C}^n. \tag{27}$$

Пусть далее $\varsigma\in S\setminus\Delta(F)$ и на некоторой последовательности $\{z_k\}\in\Phi_0(\varsigma)$ имеет место оценка

$$\psi_0(z_k)+\ln|F(z_k)|\geq l(z_k), k\geq 1, \tag{28}$$

где $l(z)$ — положительно однородная порядка один и непрерывная функция. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существуют плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция ψ и постоянные $d_1,\delta,T>0$ такие, что верны неравенства:
1) $\ln|F(z)|+\psi(z)\leqslant d_1+H_L(z)+\varepsilon|z|, z\in\mathbb{C}^n$;
2) для всех $z\in B(\varsigma,\delta)\cap S$ и $t\geq T$.

$$\ln|F(tz)|+\psi(tz)\geq H_L(tz)+8^{2n}(l(tz)-3\varepsilon t-H_L(tz)).$$

Доказательство. Выберем точку $\lambda\in S$ такую, что комплексная плоскость $g(z)=\langle z,\lambda\rangle=0$ не пересекает шар $B(\varsigma,1)$. Тогда

$$\inf_{z\in B(\varsigma,1/2)}|g(z)|\geq 1/2. \tag{29}$$

Фиксируем $\varepsilon>0$. По лемме 4 найдем $\delta\in(0,1/2)$, для которого

$$\sup_{w\in B(z,7\delta|z|)}H_L(w)\leqslant H_L(z)+\varepsilon|z|,\quad z\in\mathbb{C}^n, \tag{30}$$

$$\sup_{w\in B(z,4\delta|z|)}l(w)\leqslant l(z)+\varepsilon|z|,\quad z\in\mathbb{C}^n. \tag{31}$$

Можно считать, что $B(\varsigma,6\delta)\bigcap\Delta(F)=\oslash$. Согласно определениям множеств $\Delta(F)$ и $\Phi_0(\varsigma)$ найдется число $T>|z_1|$ такое, что шар $\overline{B(t\varsigma,5t\delta)}$ не пересекает нулевое множество функции F при $t\geq T$, и $|z_k|/|z_{k-1}|<1+\delta$, если $|z_k|\geq T$. Положим

$$\psi(z)=(\sigma_n\delta^{2n})^{-1}\int\limits_{B(0,\delta)}\psi_0(z+|g(z)|w)d\sigma(w).$$

Как и в лемме 9, показывается, что функция $\psi(z)$ является плюрисубгармонической и для нее выполнен пункт 1). Покажем, что имеет место и пункт 2).

Фиксируем точку $z\in B(\varsigma,\delta)\bigcap S$, $t\geq T$ и выберем номер k так, что $|z_{k-1}|\leqslant t\leqslant|z_k|$. Как и в лемме 9, устанавливается неравенство $|z_k-tz|<3t\delta$ и то, что функция $\ln|F|$ плюригармонична в шаре $\overline{B(z_k,(3t+|g(tz)|)\delta)}$. Увеличивая при необходимости число $T>0$, можно считать, что $\varepsilon t\geq d$, если $t\geq T$. Так как $|g(tz)|\leqslant t\leqslant|z_k|$, то в силу (27) и (30) имеем:

$$q(w)=\psi_0(w)+\ln|F(w)|-H_L(tz)-2\varepsilon t\leqslant 0,$$
$$w\in B(z_k,(3t+|g(tz)|)\delta)\subset B(tz,7t\delta).$$

Поэтому, используя (28), неравенство о среднем для субгармонических функций и вложение $B(tz,|g(tz)|\delta)\subset B(z_k,(3t+|g(tz)|)\delta)$ получаем,

$$l(z_k)-H_L(tz)-2\varepsilon t\leqslant q(z_k)\leqslant$$

$$\leqslant(\sigma_n((3t+|g(tz)|)\delta)^{2n})^{-1}\int\limits_{B(z_k,(3t+|g(tz)|)\delta)}q(w)d\sigma(w)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_n(|g(tz)|\delta)^{2n}}{\sigma_n((3t+|g(tz)|)\delta)^{2n}}(\sigma_n(|g(tz)|\delta)^{2n})^{-1} \int\limits_{B(tz,|g(tz)|\delta)} q(w)d\sigma(w).$$

Учитывая (31) и равенство о среднем для гармонических функций, имеем:

$$l(tz) - 3\varepsilon t - H_L(tz) \leqslant l(z_k) - H_L(tz) - 2\varepsilon t \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|g(tz)|^{2n}}{(3t+|g(tz)|)^{2n}}(\psi(tz) + \ln|F(tz)| - H_L(tz) - 2\varepsilon t).$$

Поскольку $|g(tz)| \leqslant t$, а в силу (29) $|g(tz)| \geq t/2$, то окончательно получаем

$$\psi(tz) + \ln|F(tz)| \geq H_L(tz) + 2\varepsilon t + 8^{2n}(l(tz) - 3\varepsilon t - H_L(tz)) \geq$$
$$\geq H_L(tz) + 8^{2n}(l(tz) - 3\varepsilon t - H_L(tz)).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть F — целая функция, D — выпуклая область, S_0 — компактное подмножество сферы S, не имеющее общих точек с $\Delta(F)\bigcup\Theta_D$. Предположим, что для каждой точки $\varsigma \in S_0$ и каждого номера m существует плюрисубгармоническая функция $\psi_{\varsigma,m}$ такая, что*

$$h_{u_{\varsigma,m}}(z) < H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \tag{32}$$

$$\underline{h}_{u_{\varsigma,m}}(\varsigma) \geq H_{K_m}(\varsigma), \tag{33}$$

где $u_{\varsigma,m} = \ln|F| + \psi_{\varsigma,m}$. Тогда для любого номера m существуют плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция ψ, окрестность Ω компакта S_0 и постоянная $T > 0$ такие, что верны неравенства:

1) $h_u(z) < H_D(z)$, $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, где $u = \ln|F| + \psi$;

2) $u(z) \geq H_{K_m}(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условиям: $z/|z| \in \Omega$, $|z| \geq T$.

Доказательство. Фиксируем номер m. Поскольку компакт K_m лежит во внутренности K_{m+1}, то для некоторого $\alpha > 0$ верно неравенство

$$H_{K_m}(z) + \alpha|z| \leqslant H_{K_{m+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{34}$$

Пусть $\varsigma \in S_0$. По условию $H_D(\varsigma) < +\infty$. Тогда, учитывая, что $D = \bigcup K_j$, найдем номер $m(\varsigma) \geq m+1$, для которого

$$H_{K_{m(\varsigma)}}(\varsigma) + 8^{-(2n+1)}\alpha \geq H_D(\varsigma). \tag{35}$$

Также по условию существует плюрисубгармоническая функция $\psi_{\varsigma,m(\varsigma)}$ такая, что для $u_{\varsigma,m(\varsigma)}$ выполнены неравенства (32) и (33). В силу (32) найдутся $d(\varsigma) > 0$ и компакт $L(\varsigma) \subset D$, удовлетворяющие оценке

$$u_{\varsigma,m(\varsigma)}(z) \leqslant d(\varsigma) + H_{L(\varsigma)}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{36}$$

Выберем положительное число $\varepsilon(\varsigma) \leqslant 8^{-(2n+1)}\alpha$ так, что

$$H_{L(\varsigma)}(z) + 2\varepsilon(\varsigma)|z| \leqslant H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{37}$$

В силу (33) по лемме 2.7 из работы [30] для некоторой последовательности $\{z_k\} \in \Phi_0(\varsigma)$ имеет место неравенство

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} u_{\varsigma,m(\varsigma)}(z_k)/|z_k| \geq H_{K_m}(\varsigma).$$

Поскольку опорная функция компакта непрерывна и положительно однородна, то можно считать, что

$$u_{\varsigma,m(\varsigma)}(z_k) \geq H_{K_m}(z_k) - \varepsilon(\varsigma)|z_k|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, все условия леммы 10 выполнены. Согласно ей существуют плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция ψ_ς и постоянные $d_1(\varsigma), \delta(\varsigma), T(\varsigma) > 0$ такие, что

$$u_\varsigma(z) \leqslant d_1(\varsigma) + H_{L(\varsigma)}(z) + \varepsilon(\varsigma)|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{38}$$

где $u_\varsigma = \ln|F| + \psi_\varsigma$, и для всех $z \in B(\varsigma, \delta(\varsigma)) \bigcap S$, $t \geq T(\varsigma)$,

$$u_\varsigma(tz) \geq H_{L(\varsigma)}(tz) + 8^{2n}(H_{K_{m(\varsigma)}}(tz) - 4\varepsilon(\varsigma)t - H_{L(\varsigma)}(tz)).$$

Из (35) следует, что

$$H_{K_{m(\varsigma)}}(\varsigma) - H_{L(\varsigma)}(\varsigma) \geq H_{K_{m(\varsigma)}}(\varsigma) - H_D(\varsigma) \geq -8^{-(2n+1)}\alpha.$$

Поэтому, учитывая непрерывность опорной функции компакта и уменьшая при необходимости число $\delta(\varsigma) > 0$, можно считать, что

$$H_{K_{m(\varsigma)}}(tz) - H_{L(\varsigma)}(tz) \geq -2 \cdot 8^{-(2n+1)}\alpha t, \quad z \in B(\varsigma, \delta(\varsigma)) \bigcap S, \quad t \geq 0.$$

Тогда из предыдущего и выбора $\varepsilon(\varsigma)$ получаем

$$u_\varsigma(tz) \geq H_{L(\varsigma)}(tz) - 6 \cdot 8^{-1}\alpha t, \quad z \in B(\varsigma, \delta(\varsigma)) \bigcap S, \quad t \geq T(\varsigma).$$

С другой стороны, из (33) и (36) следуют соотношения

$$H_{L(\varsigma)} \geq h_{u_{\varsigma,m(\varsigma)}}(\varsigma) \geq \underline{h}_{u_{\varsigma,m(\varsigma)}}(\varsigma) \geq H_{K_{m(\varsigma)}}(\varsigma).$$

Поэтому, вновь уменьшая $\delta(\varsigma) > 0$, можно считать, что

$$H_{L(\varsigma)}(tz) \geq H_{K_{m(\varsigma)}}(tz) - \alpha t/4, \quad z \in B(\varsigma, \delta(\varsigma)) \bigcap S, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, учитывая (34) и вложение $K_{m+1} \subset K_{m(\varsigma)}$ (т.к. $m(\varsigma) \geq m+1$), окончательно получаем

$$u_\varsigma(tz) \geq H_{L(\varsigma)}(tz) - 6 \cdot 8^{-1}\alpha t \geq H_{K_{m(\varsigma)}}(tz) - \alpha t/4 - 3\alpha t/4 \geq$$
$$\geq H_{K_{m(\varsigma)}}(tz) - \alpha t \geq H_{K_m}(tz), \quad z \in B(\varsigma, \delta(\varsigma)) \bigcap S, \quad t \geq T(\varsigma). \tag{39}$$

Перейдем теперь к построению функции ψ. Из покрытия компакта S_0 шарами $B(\varsigma, \delta(\varsigma))$, $\varsigma \in S_0$, выделим конечное подпокрытие $B(\varsigma_j, \delta(\varsigma_j))$, $j = 1, \ldots, p$. Положим

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{p} B(\varsigma_j, \delta(\varsigma_j)), \quad T = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} T(\varsigma_j), \quad \psi(z) = \max_{1 \leqslant j \leqslant p} \psi_{\varsigma_j}(z).$$

Тогда в силу (37) и (38) для функции $u(z)$ выполнен пункт 1) из утверждения следствия, а в силу (39) и пункт 2). Следствие доказано.

Сформулируем и докажем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 2. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, W — нетривиальное замкнутое главное инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез; G — выпуклая подобласть $D(W)$, содержащая D. Предположим, что каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется там линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда для любой точки $\xi \in S \setminus \Xi$ и любого номера m существуют плюрисубгармоническая функция ψ, номер p и числа $d, R, \delta > 0$, обладающие следующими свойствами:*
1) $\psi(z) + \ln|F_W(z)| \leqslant d + H_{K_p}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$;
2) $\psi(z) + \ln|F_W(z)| \geq H_{K_m}(z)$, $\forall z : z/|z| \in B(\xi, \delta)$, $|z| > R$.

Доказательство. Фиксируем номер m и точку $\xi \in S \setminus \Xi$. Поскольку K_m – компакт в D, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$H_{K_m}(z) + \varepsilon|z| \leqslant H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{40}$$

Подпространство W не тривиально, поэтому нетривиальным будет также подпространство I_W. Пусть φ_1 — некоторый ненулевой элемент $I_W \subset P_D$. По определению пространства P_D найдутся выпуклый компакт $L \subset D$ и постоянные $d_1, \alpha > 0$ такие, что

$$\ln|\varphi_1(z)| \leqslant d_1 + H_{L_1}(z) + 3\alpha|z| \leqslant d_1 + H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{41}$$

Так как φ_1 делится на F_W (в силу того, что пространство W допускает спектральный синтез), то по лемме 9 существуют плюрисубгармоническая в $\mathbb{C}^n$ функция ψ_1, число $\delta' \in (0,1)$ и постоянные $a_0, T > 0$ такие, что

$$\ln|F_W(z)| + \psi_1(z) \leqslant d_1 + H_{L_1}(z) + \alpha|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n; \tag{42}$$

$$\ln|F_W(z)| + \psi_1(z) \geq -a_0|z|, \quad z/|z| \in B(\xi, \delta'), |z| \geq T. \tag{43}$$

С учетом (40) выберем $\tau \in (0,1)$ из условий:

$$(1-\tau)H_D(\xi) > H_{K_m}(\xi) + 3\varepsilon/4. \tag{44}$$

Пусть $\gamma > 0$ такое, что

$$(1-\tau)\gamma - \tau\alpha < 0. \tag{45}$$

По лемме 5 найдем точку $y \in G$, для которой выполнены пункты 1) и 2) из утверждения этой леммы. Тогда функция $h(z) = \exp\langle y, z\rangle$ принадлежит пространству P_G. Следовательно, по лемме 1 существуют функции $\varphi_2 \in I_{W(G)}$ и $g \in P_D$ такие, что верно равенство $h = \varphi_2 + g$. В силу включения $g \in P_D$ найдется выпуклый компакт $L \subset D$ и постоянная $d' > 0$, удовлетворяющие неравенству:

$$\ln|g(z)| \leqslant d' + H_L(z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{46}$$

Пусть L_2 – выпуклая оболочка множества $L \bigcup \{y\}$ и $d_2 = 1 + d'$. Тогда с учетом вложения $L \subset D$ и пункта 2) леммы 5 имеем:

$$\begin{aligned}\ln|\varphi_2(z)| = \ln|h(z) - g(z)| \leqslant \ln(|h(z)| + |g(z)|) \leqslant \ln 2 + \\ + \ln(\max[|h(z)|, |g(z)|]) \leqslant 1 + d + \max[\mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle, H_L(z)] = \\ = d_2 + H_{L_2}(z) \leqslant d_2 + H_D(z) + \gamma|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n.\end{aligned} \tag{47}$$

Положим $\psi_2(z) = \ln|\varphi_2(z)| - \ln|F_W(z)|$. Поскольку пространство $W(G)$ допускает спектральный синтез, то функция $\varphi_2 \in I_{W(G)}$ делится на F_W. Следовательно, $\psi_2(z)$ — плюрисубгармоническая функция. Пусть

$$\psi(z) = \tau\psi_1(z) + (1-\tau)\psi_2(z).$$

Из (42), (47), (41) и (45) получаем:

$$\begin{aligned}\ln|F_W(z)| + \psi(z) = \tau(\ln|F_W(z)| + \psi_1(z)) + (1-\tau)\ln|\varphi_2(z)| \leqslant \\ \leqslant \tau(d_1 + H_{L_1}(z) + \alpha|z|) + (1-\tau)(d_2 + H_{L_2}(z)) \leqslant \\ \leqslant \tau(d_1 + H_D(z) - 2\alpha|z|) + (1-\tau)(d_2 + H_D(z) + \gamma|z|) \leqslant \\ \leqslant d + H_D(z) - \tau\alpha|z|, \quad z \in \mathbb{C}^n,\end{aligned}$$

где $d = \tau d_1 + (1-\tau)d_2$. Поскольку $\{K_j\}$ — последовательность компактов, исчерпывающая область D, то с учетом определения опорной функции и последних оценок нетрудно показать, что для некоторого номера p верно неравенство

$$\ln|F_W(z)| + \psi(z) \leqslant d + H_{K_p}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Это дает нам пункт 1) из утверждения теоремы.

По пункту 1) леммы 5 (с учетом того, что L — компакт в области D) выполнены соотношения:

$$\mathsf{Re}\,\langle y, \xi\rangle = H_D(\xi) > H_L(\xi).$$

Поэтому в силу непрерывности опорной функции компакта найдется $\delta \in (0, \delta')$ и $\beta > 0$ такое, что имеет место неравенство

$$\mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle > H_L(z) + \beta|z|, \quad z \in B(\xi, \delta), \tag{48}$$

а с учетом (44) еще и неравенство

$$(1-\tau)\mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle > H_{K_m}(z) + \varepsilon|z|/2, \quad z \in B(\xi, \delta). \tag{49}$$

В силу (46) и (48) для некоторого $R > T$ получаем:

$$\ln|\varphi_2(z)| = \ln|\exp\langle y, z\rangle - g(z)| \geq \ln(\exp \mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle - |g(z)|) \geq$$
$$\geq \ln(\exp \mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle - \exp(d' + H_L(z))) \geq$$
$$\geq \mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle + \ln(1 - \exp(d' + H_L(z) - \mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle)) \geq$$
$$\geq \mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle - \varepsilon|z|/4, \quad z/|z| \in B(\xi, \delta), \quad |z| > R.$$

Отсюда и из (49) следует, что

$$(1-\tau)\ln|\varphi_2(z)| \geq (1-\tau)\mathsf{Re}\,\langle y, z\rangle - (1-\tau)\varepsilon|z|/4 \geq$$
$$\geq H_{K_m}(z) + \varepsilon|z|/2 - \varepsilon|z|/4 = H_{K_m}(z) + \varepsilon|z|/4, \quad z/|z| \in B(\xi, \delta), \quad |z| > R.$$

Учитывая еще (43) и (44), имеем оценку:

$$\psi(z) + \ln|F_W(z)| = \tau(\psi_1(z) + \ln|F_W(z)|) + (1+\tau)\ln|\varphi_2(z)| \geq$$
$$\geq (-\tau a_0 + \varepsilon/4) + H_{K_m}(z) \geq H_{K_m}, \quad z/|z| \in B(\xi, \delta), \quad |z| > R.$$

Таким образом, пункт 2) также выполнен, и теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982.
2. J. Hadamard *Essai sur l'etude des functions donnes par leur developpement de Taylor* // J. Math. Pures Appl. Ser., 4:8, 1892, P. 101–106.
3. E. Fabry *Sur les points singuliers d'une function donnee par son developpement de Taylor* // Ann. Ecole Norm. Sup., 13, 1896, P. 367–399.
4. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях* // Матем. сб. Т. 87. Вып.4. 1972. С. 459–489.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. Т. 88. Вып. 1. 1972. С. 3–30.
6. Юлмухаметов Р.С. *Однородные уравнения свертки* // ДАН СССР. Т. 316. Вып. 2. 1991. С. 312–315.
7. Кривошеев А.С., Напалков В.В. *Комплексный анализ и операторы свертки* // Усп. матем. наук. Т. 47. Вып. 6. 1992. С. 3–58.
8. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез и аналитическое продолжение* // УМН. Т. 58. Вып. 1. 2003. С. 33–112.
9. G. Polya *Uber die Exstenz unendlich vieler singularer Punkte auf der Konvergenzgeraden gewisser Dirichlet'sher Reihen* // Sitzungber. Preu. Akad. Wiss.. 1923. P. 45–50.
10. G. Polya *Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Luckensatzes* // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl. 2. 1927. P. 187–195.
11. V. Bernstein *Lecons sur les progress de la theorie des series de Dirichlet* // Paris: Gauthier-Villars. 1933.
12. A. Ostrowski *Uber die analytishe Fortsetzung von Taylorshen und Dirichlet'sher Reihen* // Math. Ann. 129. 1955. P. 1–43.
13. Леонтьев А.Ф. *О классе функций, определенных рядом полиномов Дирихле* // УМН. Т. 3. Вып. 4. 1948. С. 3–58.
14. Леонтьев А.Ф. *Ряды полиномов Дирихле и их обобщения* // Труды МИАН. Т. 39. 1951. С. 1–215.
15. J.P. Kahane *Sur quelques problemes d'unicite et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles* // Ann. Inst. Fourier. 5. 1953–1954. P. 39–130.
16. Леонтьев А.Ф. *О сходимости последовательности полиномов Дирихле* // ДАН СССР. Т. 108. Вып. 1. 1956. С. 23–26.
17. Леонтьев А.Ф. *Новое доказательство одной теоремы о сходимости последовательностей полиномов Дирихле* // УМН. Т. 12. Вып. 3. 1957. С. 165–170.
18. Леонтьев А.Ф. *О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси* // ИАН СССР. Сер. матем. Т. 29. Вып. 2. 1965, С. 261–328.
19. L. Schwartz *Etude des sommes d'exponentielles* // Paris: Hermann. 1959.

20. A. Baillette *Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles* // C.R. Acad. Sci. Paris. 249. 1959. P. 2470–2471.
21. A. Baillette *Fonctions approchfbles par des sommes d'exponentielles* // J. Anal. Math. 10. 1962–1963. P. 91–115.
22. Красичков-Терновский И.Ф. *Сходимость полиномов Дирихле* // Сиб.матем. жур. №7. 1966. С. 1039–1058.
23. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение* // Изв. АН СССР. Сер. матем. Т. 37. Вып. 4. 1973. С. 933–947.
24. Кривошеев А.С. *Аналитическое продолжение функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 62. Вып. 2. 1998. С. 75–102.
25. Кривошеев А.С. *Аналитическое продолжение функций из инвариантных подпространств* // Докл. РАН. Т. 386. Вып. 4. 2002. С. 450–452.
26. Кривошеев А.С. *Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости* // Известия РАН. Серия математическая. Т. 68. Вып. 1. 2004. С. 45–81.
27. C.O. Kiselman *Prolongement des solutions d'une equation aux derivees partielles a coefficieents constants* // Bull.Soc. Math. France. 97. 1969. P. 329–354.
28. A. Sebbar *Prolongements des solutions holomorphes de certains operateurs differentiel d'ordre infini a coefficients constants* // Lecture Notes in Math. 822. 1980. P. 199–220.
29. A. Meril, D.C. Struppa *Convolutors of holomorphic functions* // Lecture Notes in Math. 1276. 1987. P. 253–275.
30. Кривошеев А.С.*Об индикаторах целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки* // Матем. сб. Т. 184. Вып. 8. 1993. С. 81–108.
31. R. Ishimura, Y. Okada *The existence and the continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains* // Bull.Soc. Math. France. 122. 1994. P. 413–433.
32. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: Наука. 1985.
33. Ронкин Л.И. *Введение в теорию целых функций многих переменных.* М.: Наука. 1971.
34. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1969.
35. Гротендик А.О. *О пространствах* (F) *и* (DF) // Сб. Математика. Т. 2. Вып. 3. 1958. С. 81–127.
36. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир. 1986.
37. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных.* М.: Мир. 1989.
38. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983.
39. Юлмухаметов Р.С. *Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности* // Известия РАН. Сер. матем. Т. 60. Вып. 4. 1996. С. 205–224.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`