Уфимский математический журнал. Том 1. № 2 (2009). С. 29-52.

УДК 517.956.226

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБ АСИМПТОТИКЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Л.А. КАЛЯКИН

Аннотация. Рассматривается нелинейная неавтономная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что уравнения, соответствующие главной части в асимптотике на бесконечности, записаны в переменных действие-угол. В случае, когда младшие члены в уравнениях имеют периодическую зависимость от угла, построено асимптотическое разложение на бесконечности для двухпараметрического семейства решений.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, асимптотики, усреднение.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$t^{-k}\frac{dr}{dt} = f(r,\psi,t), \quad t^{-k}\frac{d\psi}{dt} = \omega(r) + g(r,\psi,t), \quad t>0. \tag{1}$$

Число k считается целым неотрицательным: $k\in\mathbb{Z},\ k\geq 0$. В работе исследуется асимптотика при $t\to\infty$ для двухпараметрического семейства решений.

Функции $f, g(r,\psi,t)$, заданные в области $\{r\in\mathcal{R}\subseteq\mathbb{R},\ \psi\in\mathbb{R},\ t>0\}$, предполагаются бесконечно дифференцируемыми, 2π-периодическими по ψ. Специфика задачи определяется структурой исходных данных в асимптотике на бесконечности:

$$f(r,\psi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r,\psi)t^{-n},\ g(r,\psi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r,\psi)t^{-n}, \quad t\to\infty. \tag{2}$$

Как видим, r,ψ соответствуют переменным типа действие-угол для главной части уравнений, что проявляется в независимости функции $\omega(r)$ от угла ψ. Эта функция, называемая частотой, считается отличной от нуля: $\omega(r)\neq 0,\ \forall\, r\in\mathcal{R}$. Переменную r будем называть амплитудой.

1.2. Результаты. Для дифференциальных уравнений постановка задачи об асимптотике решений по независимой переменной является классической. Большое внимание уделяется трудным вопросам изучения решений вблизи особых точек, в частности, на бесконечности. Обычно исследуются решения, асимптотика которых представляется в виде рядов по степеням и логарифмам t с постоянными коэффициентами. Для решений такого типа разработан подход, который дает исчерпывающие результаты при идентификации главного члена асимптотики [1]. Современное состояние общей теории освещено в монографии [2]. Мы рассматриваем другие решения, асимптотика которых описываются степенными рядами с осциллирующими по t коэффициентами. Подобные конструкции

Kalyakin L.A. Averaging method for the problems on asymptotics at infinity.

Работа поддержана: РФФИ (грант 09-01-92436), Научные Школы (грант НШ-2215.2008.01).
Поступила 8 мая 2009 г.

часто ассоциируются с ВКБ приближениями [3, 4]. Осциллирующие асимптотики характерны для двухпараметрических (общих) решений. Примеры таких разложений хорошо известны для трансцендентов Пенлеве [5]. Для общих нелинейных уравнений задача об осциллирующих асимптотиках рассматривалась в [6], где был изложен метод построения полного асимптотического разложения. Для ориентировки приведем один из результатов.

Теорема 1. *Для гамильтоновых уравнений типа* (1) *с* $f = \partial_\psi H(r,\psi,t)$, $g = -\partial_r H(r,\psi,t)$ *существует двухпараметрическое решение с ограниченной амплитудой, которое имеет асимптотическое разложение по целым отрицательным степеням:*

$$r(t;r_0,\varphi_0) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} r_n(S;r_0),\ \ \varphi(t;r_0,\varphi_0) = S + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}\varphi_n(S;r_0),\ \ t\to\infty,$$

равномерное по параметрам $\varphi_0\in\mathbb{R},\ \ r_0\in\mathcal{K}$ *на любом компакте* $\mathcal{K}\subset\mathcal{R}$. *Коэффициенты являются* 2π*-периодическими функциями с нулевым средним значением по переменной*

$$S = \varphi_0 + \phi_0\ln t + \sum_{j=1}^{k+1}\phi_j t^j, \quad \phi_j(r_0) = \mathrm{const},\ \ \phi_{k+1} = \omega(r_0)/(k+1). \tag{3}$$

Похожие утверждения для негамильтоновых систем с $k>0$ составляют основные достижения данной работы; они содержатся в теоремах 3 и 4. Одним из результатов является вывод усредненного уравнения для главного члена амплитуды $r_0 = r_0(t)$. На таком уровне содержание работы состоит в описании перехода от системы (1) к скалярному уравнению, для которого асимптотику можно исследовать известными способами [1, 2].

Как обычно в подобных исследованиях, все предъявляемые ряды являются асимптотическими, вопрос их сходимости не обсуждается.

2. Связь с асимптотиками по малому параметру

Предлагаемые ниже конструкции основаны на идеях усреднения. Эти идеи весьма популярны в математических исследованиях, и поэтому следует более точно указать место рассматриваемой здесь задачи.

В теории динамических систем метод усреднения известен как мощное средство исследования нелинейных колебаний [7]. Он используется для приближенного анализа математических моделей и в грубой интерпретации представляет собой один из рецептов упрощения сложных уравнений до приемлимого уровня. Упрощение основано на использовании малого параметра, присутствие которого отражает существо постановки задачи.

Физические явления, математические модели которых допускают усреднение, характеризуются наличием процессов с разными масштабами. Многомасштабность в динамике означает, что отношение характерных скоростей для разных процессов является малой величиной. Это отношение определяет безразмерный малый параметр. При математической формализации такой параметр обнаруживается в уравнениях, и как раз учет его малости позволяет упростить исходную задачу. Простейший пример дает уравнение гармонических колебаний с малым возмущением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\Big(x, \frac{dx}{dt}\Big), \quad 0<\varepsilon\ll 1.$$

Связь малого параметра с многомасштабностью не всегда очевидна. Обычно наличие в решении разных масштабов выявляется в структуре асимптотических приближений при $\varepsilon\to 0$. Для приведенного примера приближенное решение описывается формулой (см. [7])

$$x(t;\varepsilon) = r(\varepsilon t)\cos(t + s(\varepsilon t)) + \mathcal{O}(\varepsilon),\ \ \varepsilon\to 0,\ \ \forall\,|t|\leqslant\varepsilon^{-1}.$$

Главный член асимптотики представляет собой быстрые гармонические колебания с медленно меняющимися амплитудой и сдвигом фазы: $r(\tau), s(\tau)$. Явное присутствие в исходных уравнениях медленного времени $\tau = \varepsilon t$, например, $\omega(\tau)$, $f(x, \dot{x}, \tau)$ возможно, но не обязательно для проявления медленного масштаба в решении[1].

Метод усреднения применительно к подобным уравнениям направлен на выявление зависимости от медленного времени в асимптотических конструкциях как для главного члена, так и в полном асимптотическом разложении решения. Известны разные подходы к такого типа задачам; многие из них описаны в книге А. Найфэ [8]. Отличия между разными вариантами метода усреднения не принципиальны и обычно содержатся либо в форме исходных уравнений, либо в конструкциях старших членов асимптотики [9, 10, 11, 12]. Наиболее простыми и прозрачными представляются подходы, основанные на записи возмущенных уравнений в переменных, которые соответствуют переменным типа действие-угол для невозмущенных уравнений [13, 14]. Такие уравнения в масштабе медленного времени имеют вид

$$\frac{dr}{d\tau} = f(r, \psi, \tau; \varepsilon), \ \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(r)}{\varepsilon} + g(r, \psi, \tau; \varepsilon). \tag{4}$$

Правые части представлены функциями, гладкими по всем переменным, периодическими по ψ. В этом случае главные члены асимптотики

$$r(\tau; \varepsilon) = r_0(\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \psi(\tau; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int \omega(r_0(\tau))\, d\tau + \mathcal{O}(1), \quad 0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(1)$$

извлекаются из уравнений, полученных путем усреднения исходной системы (4) по ψ.

Рассматриваемые нами уравнения (1) по форме похожи на (4). Широко распространено убеждение, что задача об асимптотике на бесконечности для (1) эквивалентна задаче об асимптотике по малому параметру для системы типа (4), которая получается из (1) при подходящей замене времени. Такая гипотеза подтверждается совпадением формул для так называемых ВКБ приближений, которые выписываются в асимптотике на бесконечности и в асимптотике по малому параметру [3].

В самом деле, в случае $k = 0$ после замены $t = \tau/\varepsilon$ уравнения (1) приобретают форму, которая соответствует (4):

$$\frac{dr}{d\tau} = \varepsilon^{-1} f(r, \psi, \tau/\varepsilon), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(r)}{\varepsilon} + \varepsilon^{-1} g(r, \psi, \tau/\varepsilon).$$

Правые части здесь являются ограниченными гладкими функциями при $\tau \geq 1$ с асимптотикой при $\varepsilon \to 0$:

$$\varepsilon^{-1} f = \tau^{-1} f_1(r, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_{n+1}(r, \psi) \tau^{-n}, \ \ \varepsilon^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n g_{n+1}(r, \psi) \tau^{-n-1}.$$

Обычным методом усреднения строится асимптотика решения по малому параметру в виде рядов

$$r(\tau; \varepsilon) = r_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n r_n(S, \tau), \quad \psi(\tau; \varepsilon) = S + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n(S, \tau)$$

с коэффициентами, периодическими по S. Быстрая переменная в главном члене вычисляется через интеграл

$$S = \varepsilon^{-1} \int \omega(r_0(\tau))\, d\tau + \mathcal{O}(1), \ \varepsilon \to 0, \ \forall\, \tau = \mathcal{O}(1).$$

[1] Переменную $\tau = \varepsilon t$ принято называть медленным временем в отличии от быстрого времени t.

Главный член асимптотики для амплитуды $r_0(\tau)$ определяется из усредненного уравнения

$$\frac{dr_0}{d\tau} = \tau^{-1}\langle f_1(r_0,\psi)\rangle, \quad \text{где} \ \ \langle f_1(r_0,\psi)\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(r_0,\psi)\,d\psi.$$

Уго́льными скобками всюду обозначается среднее значение периодической функции. Главный член амплитуды $r_0(\tau)$ не зависит от быстрой переменной. Эта функция используется в рекуррентных формулах при вычислении старших коэффициентов асимптотики $r_n, \psi_n(S,\tau)$.

Если правая часть обладает свойством $\langle f_1(r_0,\psi)\rangle \equiv 0$, то усредненное уравнение имеет тривиальное решение $r_0(\tau) \equiv C$, $\forall\, C = \mathrm{const}$, и конструкция оказывается наиболее простой[1]. В этом случае построенные асимптотики после замены $\tau = \varepsilon t$ переходят в ряды

$$r(t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} R_n(S;C), \ \ \psi(t) = S + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}\Psi_n(S;C);$$

$$S = \omega(C)t + \gamma(C)\ln t + s_0, \ \forall\, s_0 = \mathrm{const},$$

которые не содержат искусственно введенного параметра ε. Такой переход возможен при учете специфической (степенной) зависимости от τ в исходных уравнениях и в коэффициентах $r_n, \psi_n(S,\tau)$. Полученные ряды представляют собой асимптотику на бесконечности (при $t \to \infty$) для решений уравнений (1).

Если в исходных уравнениях (1) $k = 0$ и $\langle f_1(r_0,\psi)\rangle \not\equiv 0$, то ситуация несколько усложняется. В общем решении усредненного уравнения $r_0(\tilde{C}\tau)$ произвольная константа $\tilde{C}$ содержится в аргументе в качестве множителя. Это свойство позволяет снова исключить параметр ε из разложения при замене $\tau = \varepsilon t$, переобозначив константу интегрирования $\tilde{C}\varepsilon = C$. Однако, теперь главный член асимптотики зависит от времени

$$r(t) = r_0(Ct) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} R_n(S;C,t), \ \ \psi(t) = S + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}\Psi_n(S;C,t), \ \forall\, C = \mathrm{const}.$$

Коэффициенты старших членов $R_n, \Psi_n(S;C,t)$ получают дополнительную зависимость от t посредством $r_0(Ct)$. Асимптотику функции $r_0(Ct)$ при $t \to \infty$ следует выявлять из анализа усредненного уравнения[2]. Кроме того, для полученных таким способом рядов требуется доказать асимптотическую структуру при $t \to \infty$. Описанная здесь ситуация встречается, например, при анализе асимптотики трансцендентов Пенлеве. Впрочем, в известных конструкциях для уравнений Пенлеве [15, 16, 5] переход к задаче с малым параметром не используется. Такой подход не применяется даже в линейных уравнениях [3].

Более сомнительным выглядит переход от уравнений (1) к задаче с малым параметром в случае $k > 0$, когда описанный выше способ приводит к системе

$$\frac{dr}{d\tau} = \varepsilon^{-k-1}\tau^k f(r,\psi,\tau/\varepsilon), \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \tau^k\frac{\omega(r)}{\varepsilon^{k+1}} + \varepsilon^{-k-1}\tau^k g(r,\psi,\tau/\varepsilon).$$

Теперь правые части $\varepsilon^{-k-1}f(r,\psi,\tau/\varepsilon)$, $\varepsilon^{-k-1}g(r,\psi,\tau/\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-k})$, $\varepsilon \to 0$ не ограничены при $\varepsilon \to 0$, $\tau = \mathcal{O}(1)$. Известные асимптотические конструкции по малому параметру оказываются здесь не применимы. Подобные системы, видимо, не встречались в теории нелинейных колебаний, и асимптотики их решений не исследовались.

Ниже для построения асимптотики на бесконечности предлагаются конструкции, которые используют идеи усреднения, но выполняются без обращения к задачам с малым

[1] В подобных задачах величина, сохраняющаяся в главном члене асимптотики, иногда называется адиабатическим инвариантом.

[2] В качестве функции $r_0(\tau)$ могут встречаться любые степени τ^α и логарифмы $\ln\tau$, как это случается, например, в уравнении $\dot{r}_0 = \alpha\tau^{-1}r_0$, $(\alpha = \mathrm{const})$.

параметром. Основные новые результаты относятся к уравнениям (1) с положительным значением $k > 0$.

3. Происхождение исходных уравнений

Нелинейные неавтономные уравнения (1) с указанной структурой на бесконечности (2) возникают во многих задачах. Одним из источников такого типа систем являются задачи об асимптотике трансцендентов Пенлеве. Рассмотрим для примера первое уравнение Пенлеве
$$\frac{d^2u}{dz^2} = 6u^2 - 6z.$$

3.1. Выделение главных членов асимптотики. Конструкция асимптотики на бесконечности, которая в свое время была предложена П. Бутру [15], основана на выделении в уравнении главной части, интегрируемой в эллиптических функциях. Так, после замены переменных
$$t = \frac{4}{5}z^{5/4},\ u(z) = \sqrt{z}x(t)$$
уравнение принимает вид
$$\ddot{x} - 6x^2 + 6 = -t^{-1}\dot{x} + t^{-2}\frac{4}{25}x. \tag{5}$$
Если здесь правую часть, убывающую при $t \to \infty$, заменить нулем, то получившееся автономное уравнение интегрируется. При этом удобно использовать пару функций $x_0(t,E), y_0(t,E)$, которая является решением соответствующей системы
$$\dot{x}_0 = y_0,\ \dot{y}_0 = 6x_0^2 - 6.$$
В качестве константы интегрирования E можно взять энергию – первый интеграл, записанный в виде
$$\frac{1}{2}y_0^2 - 2x_0^3 + 6x_0 + 4 = E.$$
В автономной системе имеются две неподвижные точки $x_0 \equiv \mp 1,\ y_0 \equiv 0$ со значениями $E = 0$ и $E = 8$. При $0 < E < 8$ решения $x_0(t,E), y_0(t,E)$ оказываются периодическими, они соответствуют замкнутым траекториям на фазовой плоскости вблизи центра $x_0 = -1,\ y_0 = 0$. Период зависит от энергии и вычисляется через интеграл
$$T(E) = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2E + 4x^3 - 12x}}\ .$$
Здесь $x_\pm(E)$ – корни уравнения $4x^3 - 12x + 2E = 0$ на промежутке $x < 1$. Величина $\omega(E) = 2\pi/T(E)$ называется частотой.

Конструкцию в виде функций $x_0(t,E)$ можно рассматривать как первый этап построения асимптотики при $t \to \infty$ для решения неавтономного уравнения (5). Так, если в качестве главного члена взять константы $x_0 = \pm 1$, соответствующие неподвижным точкам, то для уравнения (5) легко построить полное асимптотическое разложение в виде бесконечного ряда
$$x_\pm(t) = \pm 1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n^\pm t^{-n}, \quad t \to \infty$$
с постоянными коэффициентами $x_n^\pm$. Такие асимптотики соответствуют либо изолированному решению $x_-(t)$, либо однопараметрическому семейству экспоненциально совпадающих решений уравнения (5), [2].

Иная ситуация складывается с двухпараметрическим семейством периодических функций $x_0(t+t_0,E)$. При постоянных значениях параметров $\forall\, t_0, E = \mathrm{const},\ (0 < E < 8)$ они не представляют главный член асимптотики ни для какого решения исходного неавтономного уравнения (5). Намек на такой факт можно усмотреть в том, что попытка построения полного разложения в виде степенного ряда с периодическими коэффициентами оказывается нереализуемой. Во всех поправках, начиная с первой, возникают непериодические секулярные слагаемые.

3.2. Метод Ляпунова. Присутствие в уравнении (5) слагаемого с первой производной $-t^{-1}\dot{x}$ указывает на наличие диссипации, которая обычно приводит к затуханию колебаний. Из этих соображений естественно пытаться доказать, используя метод Ляпунова, что положение равновесия автономной системы $x=-1,\ y=0$ является аттрактором для двухпараметрического семейства решений неавтономного уравнения (5). Для изолированного решения $x_-(t)$ это свойство следует из построенной выше асимптотики. Сама точка $x=-1,\ y=0$ не является положением равновесия неавтономной системы, соответствующей (5). Поэтому в методе Ляпунова используется решение $x_-(t)$. Вопрос об асимптотической устойчивости такого решения сводится к исследованию устойчивости точки покоя для системы, которая получается для остатка $x-x_-,\ y-y_-$. Если для разностей использовать старые обозначения: $x-x_-\Rightarrow x,\ y-y_-\Rightarrow y$, то уравнения для остатка принимают вид

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=6x^2+12x_-(t)\cdot x-t^{-1}y+t^{-2}\frac{4}{25}x.$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим выражение

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2}y^2+6x^2-2x^3+\frac{1}{2}t^{-1}yx.$$

Очевидно, при всех $t\geq 1$ такая функция является положительной в окрестности точки $x=0,\ y=0$ и обращается в нуль в этой точке. На траекториях решений неавтономного уравнения (5) полная производная этой функции выражается по формуле

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}U(x,y,t)=-t^{-1}y^2+t^{-2}\frac{4}{25}xy+12xy(1+x_-)+\\ +\frac{1}{2}t^{-1}[y^2+x(6x^2+12xx_--t^{-1}y+\frac{4}{25}t^{-2}x)]-\frac{1}{2}t^{-2}xy.\end{gathered}\tag{6}$$

Если учесть, что $x_-(t)=-1+\mathcal{O}(t^{-2})$, то в правой части этого соотношения можно выделить главную часть асимптотики

$$\frac{d}{dt}U(x,y,t)=-t^{-1}\big[\frac{1}{2}y^2+6x^2-3x^3\big][1+\mathcal{O}(t^{-1})],\ t\to\infty,$$

которая будет отрицательной в окрестности точки $x=-1,\ y=0$. Таким образом, $U(x,y)$ является функцией Ляпунова: она положительна и ее значение убывает вдоль фазовой траектории. Следовательно, траектории всех решений, которые стартуют из достаточно малой окрестности точки $x=y=0$, остаются в этой окрестности. Более того, можно показать, что траектории неограниченно приближаются к точке $x=y=0$ при $t\to\infty$. Для этого следует рассмотреть соотношение (6) как уравнение для функции $V(t)=U(x,y,t)$, определенной вдоль траектории:

$$\frac{d}{dt}V(t)=-t^{-1}\big[V(t)-x^3(t)\big]+\mathcal{O}(t^{-2}),\ t\to\infty.$$

Поскольку $x^3(t)=\mathcal{O}(V^{3/2})+\mathcal{O}(t^{-1})$ при $V\to 0,\ t\to\infty$, то нетрудно выписать асимптотику решения такого уравнения в виде

$$V(t)=t^{-1}[C+o(1)]\to 0,\ t\to\infty.$$

Константа C зависит от выбора траектории. Таким образом, вдоль любой траектории функция $U(x,y,t)$ стремится к нулю и, следовательно, траектория приближается к точке

$x = y = 0$. Отсюда вытекает, что решение $x_-(t)$ асимптотически устойчиво. Следовательно предельная точка $x = -1$ является аттрактором для двухпараметрического семейства решений уравнения (5).

Похожая ситуация складывается и для некоторых других уравнений, рассматриваемых ниже: в качестве функции Ляпунова обычно подходит первый интеграл автономной системы с небольшой добавкой.

Из поведения функции Ляпунова на траектории можно извлечь главный член асимптотики для двухпараметрического решения $u(z; C, s_0)$, которое представляет собой медленно затухающие колебания вблизи растущей функции: $|u(z; C, s_0) + \sqrt{z}| = Cz^{-1/8} + o(1)$, $z \to +\infty$. Более детальная асимптотика решения, в частности, фаза колебаний на этом пути не определяется. Для уточнения асимптотики используется другой подход.

3.3. Переменные типа действие-угол для уравнений Пенлеве. Для описания двухпараметрического семейства осциллирующих асимптотик выгодно использовать общие периодические решения соответствующей автономной системы [7, 17, 18]. В частности, для рассмотренного примера Пенлеве-1 в форме (5) при описании главного члена асимптотики осциллирующих решений можно пользоваться формулой

$$x(t) = x_0(\psi(t)/\omega(\hat{E}), \hat{E}(t)) + \mathcal{O}(t^{-1}),$$

в которой надо подходящим образом подобрать фазу и энергию $\psi(t), \hat{E}(t)$ как функции времени[1]. Основанием для выбора функций $\psi(t), \hat{E}(t)$ служит соображение о возможности построения последующих поправок в асимптотике решения. Формально эти функции извлекаются из уравнений, вывод которых связан с усреднением.

Наиболее простой способ получения усредненных уравнений для $\psi(t), \hat{E}(t)$ основан на записи исходной системы в форме (1). В рассматриваемом случае Пенлеве-1 для этого надо сделать замену переменных

$$x = X(\psi, E),\ y = Y(\psi, E),$$

используя 2π-периодические по ψ функции

$$X(\psi, E) = x_0(\psi/\omega(E), E),\ Y(\psi, E) = y_0(\psi/\omega(E), E).$$

Такой подход напоминает метод вариации произвольных постоянных. Якобиан такого преобразования $\partial(X, Y)/\partial(\psi, E) = 1/\omega(E)$ отличен от нуля, и для новых функций $\psi(t), E(t)$ получается система

$$\frac{dE}{dt} = -t^{-1}Y^2 + t^{-2}\frac{4}{25}XY,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(E)\big[1 + (t^{-1}Y - t^{-2}\frac{4}{25}X)\partial_E X\big].$$

Правые части в этих уравнениях представлены через известные 2π–периодические по ψ функции, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\omega(E)\partial_\psi X = Y,\ \omega(E)\partial_\psi Y = 6X^2 - 6 \ \text{ при } \ \frac{1}{2}Y^2 - 2X^3 + 6X + 4 = E.$$

Поскольку полученные уравнения соответствуют (1) для случая $k = 0$, то дело можно свести к задаче с малым параметром и использовать обычный метод усреднения. Для энергии главный член асимптотики $E(t) = \hat{E}(t) + \mathcal{O}(t^{-1})$ определяется из уравнения

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -t^{-1}\langle Y^2(\psi, \hat{E})\rangle. \tag{7}$$

[1]Исходная асимптотическая формула может допускать дальнейшее упрощение на основе информации о функциях $\psi(t), \hat{E}(t)$. В частности, на этом пути иногда возможен переход от эллиптических функций к тригонометрическим, как это случается для трансцендентов Пенлеве.

В точности такое же усреднение получается в конструкции для второго уравнения Пенлеве
$$\frac{d^2u}{dz^2} = 2u^3 - 2zu + 2a/3, \ (a = \text{const}).$$
Выделение интегрируемой части здесь делается с помощью замены
$$t = \frac{2}{3}z^{3/2}, \ u(z) = \sqrt{z}x(t),$$
которая приводит к системе
$$\dot{x} - y = 0, \ \dot{y} - 2x^3 + 2x = t^{-1}(a - y) + t^{-2}\frac{1}{9}x.$$
Отметим, что в случае $a = 0$ легко строится функция Ляпунова
$$U(x, y) = 2x^2 + y^2 - x^4 + t^{-1}xy,$$
которая показывает, что точка $x = y = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия. Более детальная асимптотика решений вблизи этой точки в общем случае $a \neq 0$ извлекается другим способом, с использованием перехода к системе типа (1). Для этого делается замена переменных $x = X(\psi, E), \ y = Y(\psi, E)$. Уравнения в новых переменных соответствуют (1) с $k = 0$:
$$\frac{dE}{dt} = t^{-1}(a - Y)Y + t^{-2}\frac{1}{9}XY,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(E)\big[1 - \big(t^{-1}(a - Y) + t^{-2}\frac{1}{9}X\big)\partial_E X\big].$$
Правые части в этих соотношениях представлены через известные 2π-периодические по ψ функции, которые удовлетворяют автономным уравнениям:
$$\omega(E)\partial_\psi X = Y, \ \omega(E)\partial_\psi Y = 2X^3 - 2X \quad \text{при} \quad \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}X^4 + X^2 = E.$$
Частота здесь $\omega(E) = 2\pi/T(E)$ при $0 < E < 1/2$ вычисляются через период
$$T(E) = 4\int_0^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2E + x^4 - x^2}}, \quad x_+(E) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 2E}}.$$

Похожие результаты получаются для третьего уравнения Пенлеве в его частной форме
$$\ddot{x} + \sin x = -t^{-1}\dot{x}.$$
Усредненное уравнение имеет тот же вид (7). Отличие содержится в структуре функции $Y(\psi, E)$, которая теперь определяется через периодическое решение уравнения математического маятника
$$\omega(E)\partial_\psi X = Y, \ \omega(E)\partial_\psi Y = -\sin X \quad \text{при} \quad \frac{1}{2}Y^2 - \cos X + 1 = E, \ (0 < E < 2).$$

Таким образом, задача о построении асимптотики для двухпараметрического семейства трансцендентов Пенлеве сводится к задаче об асимптотике решений для системы типа (1). Требуется исследовать решения с ограниченной амплитудой. Свойство ограниченности амплитуды (точнее, энергии в рассмотренных примерах $E(t) \equiv r(t)$) гарантирует обоснованность выполненных преобразований с использованием периодических функций $X, Y(\psi, E)$. Впрочем, приведенные примеры с уравнениями Пенлеве носят иллюстративный характер. Главные члены асимптотики для трансцендентов Пенлеве известны [5], а построение полного разложения не содержит принципиальных новшеств. Иная ситуация складывается для неинтегрируемых уравнений главного резонанса.

Все приведенные выше примеры примечательны тем, что уравнения, записанные в переменных типа действие-угол, имеют вид (1) с показателем $k = 0$. Это свойство позволяет использовать обычный метод усреднения для получения главных членов асимптотики и, в частности, для выписывания усредненного уравнения (7).

3.4. Переменные типа действие-угол для уравнений главного резонанса. Примеры другого типа с $k>0$ дают уравнения главного резонанса

$$\frac{d\varrho}{dt}=\sin\phi,\quad \varrho\Big[\frac{d\phi}{dt}-\lambda t+\varrho^2\Big]=\cos\psi,\quad (\lambda=\mathrm{const}>0). \tag{8}$$

Такие системы возникают, например, в задачах астрофизики [19, 20, 21] и при описании явления авторезонанса в разных физических ситуациях [22, 23]. Переменные $r(t),\psi(t)$ обычно имеют смысл медленно меняющихся амплитуды (энергии) и сдвига фазы быстрых колебаний. Система (8) записывается в форме (1) с данными:

$$k=1,\ \omega=\lambda,\ f=t^{-1}\sin\psi,\ g=t^{-1}[-r^2+r^{-1}\cos\psi].$$

Вопрос об асимптотике решения на бесконечности связан с исследованием проблемы резонансного захвата (см. [21, 24, 25]). Такая задача не решается обычным методом усреднения, поскольку при $k=1$ заменой времени невозможно получить уравнения с малым параметром в стандартной форме[1]

Более сложные примеры систем типа (1) со значением $k>1$ возникают в задачах об авторезонансе, когда в системе типа (8) ищутся решения с неограниченно растущей амплитудой. Так, в работах [26, 27] показано, что уравнения (8) редуцируются к системе (1) с $k=2$.

Рассмотрим более детально похожую задачу, в которой появляется система (1) с $k=6$. Исходные уравнения главного резонанса

$$\frac{d\varrho}{dt}=f(t)\sin\phi-\beta\varrho,\quad \varrho\Big[\frac{d\phi}{dt}+\lambda t-\varrho^2\Big]=f(t)\cos\phi;\quad (\beta,\lambda=\mathrm{const}>0) \tag{9}$$

возникают при исследовании нелинейных колебательных процессов, в которых учитываются эффекты диссипации и растущей амплитуды накачки. Присутствие диссипации связывается с положительным коэффициентом β, растущая амплитуда накачки соответствует функции $f(t)=f_0-f_1t$ с коэффициентом $f_1>0$. Уравнения в форме (9) совпадают с (1) в случае $k=1$, и их можно использовать для исследования решений с ограниченной амплитудой $\varrho(t)$, как это делается в [26, 27].

Асимптотические решения с растущей амплитудой проще всего строятся в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами:

$$\varrho(\theta)=\sqrt{\lambda\theta}+\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\theta^{-k/2},\quad \psi(\theta)=\psi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\theta^{-k/2}. \tag{10}$$

Подстановка этого анзатца в уравнения и приравнивание выражений при одинаковых степенях дает рекуррентные формулы для определения коэффициентов. На исходном шаге получается тривиальное уравнение $\sin\psi_0=0$, которое имеет два корня $\psi_0=0$ и $\psi_0=\pi$. Все последующие коэффициенты ρ_k,ψ_k находятся однозначно и зависят от выбора ψ_0. В частности, $\rho_0=\mp g_1/2\lambda,\ \psi_1=\pm\beta\sqrt{\lambda}/f_1,\ \rho_1=\pm 3g_1^3/16\lambda^{7/2}$. Таким способом строятся два асимптотических решения. Одно из них соответствует единственному точному решению, другое соответствует однопараметрическому семейству точных решений, которые экспоненциально близки при $\theta\to\infty$ (см. [2]).

[1]Здесь не обсуждаются задачи об асимптотике по малому параметру $\lambda\to 0$, когда применим один из вариантов обычного метода усреднения [21]; соответствующие приближения иногда называют адиабатическими. Они не имеют отношения к асимптотике при $t\to\infty$.

Однако, таких результатов не достаточно для предсказания явления авторезонанса. В физических экспериментах явление обнаруживается лишь в тех случаях, когда в математической модели ему соответствует достаточно богатое семейство решений. В рассматриваемой системе авторезонанс идентифицируется с наличием двухпараметрического семейства решений, амплитуды которых $\varrho(t)$ неограниченно растут при $t \to \infty$. Такая задача об авторезонансе сводится к исследованию решений с ограниченной амплитудой для системы типа (1) следующим образом. Исходные уравнения (9) преобразуются путем выделения из амплитуды главной, растущей части асимптотики аналогично тому, как это делается для трансцендентов Пенлеве:

$$\varrho(t) = \sqrt{\lambda t} + t^{1/4}\alpha \cdot a(t), \quad \alpha = \sqrt{f_1}/(4\lambda)^{1/4} = \mathrm{const}. \tag{11}$$

При указанной нормировке остатка $a(t)$ уравнения приобретают форму, удобную для дальнейшего асимптотического анализа

$$\frac{da}{dt} + \nu t^{3/4}\sin\phi = F(\phi, t), \quad \frac{d\phi}{dt} - \nu t^{3/4} a = G(a, \phi, t). \tag{12}$$

Здесь $\nu = \sqrt{-2f_1} \cdot \lambda^{1/4}$, и правые части определяются выражениями

$$\begin{gathered} F(\phi, t) = -t^{1/4}(\beta + \frac{1}{2}t^{-1})\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha} - (\beta + \frac{1}{4}t^{-1})a + t^{-1/4}\frac{f_0}{\alpha}\sin\phi, \\ G(a, \phi, t) = t^{1/2}\alpha^2 a^2 + t^{1/2}\frac{g_1 + g_0 t^{-1}}{\sqrt{\lambda} + t^{-1/4}\alpha a}\cos\phi. \end{gathered} \tag{13}$$

Главная часть в уравнениях (12) соответствует математическому маятнику. Подобные системы возникают и в других задачах об авторезонансе [26, 27]. Исследование асимптотики решений $a(t), \phi(t)$ при $t \to \infty$ можно выполнять разными способами. Для решений с ограниченными $a(t)$ наиболее коротким и ясным выглядит подход, основанный на стандартном переходе к переменным типа действие-угол в главной части уравнений. Для этой цели используется пара функций, которые являются общим решением автономной системы математического маятника

$$\frac{da_0}{d\eta} + \sin\phi_0 = 0, \quad \frac{d\phi_0}{d\eta} - a_0 = 0.$$

Считается, что такое решение $a_0, \phi_0(\eta; E)$ параметризовано первым интегралом (энергией) $a_0^2/2 - \cos\phi_0 + 1 = E$. Рассматриваются значения энергии $0 < E < 2$, соответствующие периодическим решениям. Как обычно, частота $\omega(E) = 2\pi/T(E) > 0$ зависит от энергии и вычисляется через период

$$T(E) = 4\int_0^{\phi_+} \frac{d\phi}{\sqrt{2(E + \cos\phi)}}, \quad \phi_+ = \phi_+(E) = \arccos(E) > 0.$$

Путем перенормировки независимой переменной из этих решений строятся функции двух переменных, 2π-периодические по ψ:

$$A(\psi, E) = a_0(\psi/\omega(E); E), \quad \Phi(\psi, E) \equiv \phi_0(\psi/\omega(E); E).$$

Они используются для замены переменных в уравнениях (12) по формулам

$$a = A(\psi, E), \quad \phi = \Phi(\psi, E).$$

В силу тождеств

$$\omega\partial_\psi A = -\sin\Phi, \quad \omega\partial_\psi\Phi = A, \quad A^2/2 - \cos\Phi + 1 = E, \tag{14}$$

якобиан преобразования $\partial(A,\Phi)/\partial(E,\psi) = 1/\omega(E)$ отличен от нуля. Уравнения для новых переменных $E(t), \psi(t)$ записываются в форме:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= F(\Phi,t)A + G(A,\Phi,t)\sin\Phi, \quad (A,\Phi = A,\Phi(\psi,I)), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(E)\big[\nu t^{3/4} - F(\Phi,t)\partial_E\Phi + G(A,\Phi,t)\partial_E A\big]. \end{aligned} \tag{15}$$

В отличии от примеров с уравнениями Пенлеве здесь правые части неограниченно растут при $t \to \infty$. Для дальнейшего анализа удобно избавиться от дробных степеней, сделав замену независимой переменной $t^{1/4} \Rightarrow t$. В результате уравнения приводятся к виду (1) со значением $k = 6$.

3.5. Недостатки переменных типа действие-угол. Якобиан перехода от переменных a,ϕ к переменным E,ψ отличен от нуля. Однако, функции замены имеют слабую особенность $A,\Phi(\psi,E) \approx \sqrt{E},\ E \to 0$ в точке, которая соответствует положению равновесия для невозмущенного маятника: $a_0 = \phi_0 = 0$. В результате, правая часть в уравнении для угла (15) имеет особенность типа $E^{-1/2}$ при $E \to 0$. Попытка использовать вместо энергии E аналог амплитуды $r = \sqrt{E}$ приводит к якобиану с нулем в точке равновесия, и структура уравнений оказывается схожей с (9): уравнение для угла вырождается при $r = 0$. Эта особенность при $r \to 0$ отражает специфику перехода от декартовых координат к полярным. Очевидно, в точке равновесия $a_0 = \phi_0 = 0$ преобразование к переменным типа действие-угол не пригодно. В асимптотических конструкциях это обстоятельство может привести к потере одного из решений уравнений (12). Дело в том, что в предлагаемых ниже конструкциях предъявляется асимптотика для двухпараметрического семейства осциллирующих решений. В этой семействе формально не содержится изолированное неосциллирующее решение. Соответствующее разложение в виде степенного ряда с постоянными коэффициентами (10) должно строиться отдельно, например, прямо из исходной системы (9) либо из (12), как это делается в [1, 2].

4. Формальное асимптотическое решение

Наличие в исходных уравнениях (1) функций, периодических по углу ψ, неизбежно приводит к осциллирующим по времени решениям. В асимптотике, которая строится в форме степенных рядов по t, эти осцилляции проявляются в коэффициентах, зависящих от времени. Описываемая ниже асимптотическая конструкция основана на идеях усреднения [7]. Здесь, в частности, выписывается аналог усредненных уравнений, которые определяют главные члены асимптотики для амплитуды $r(t)$ и фазы $\psi(t)$. Чтобы прояснить предлагаемый подход, полезно проанализировать несколько простых примеров.

4.1. Модельные примеры.

Пример 1.

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 t^{-1}\cos\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = 1.$$

Общее решение, зависящее от двух констант C, s_0, представимо в виде

$$\psi(t) = t + s_0,\ r(t) = C\cdot\Big(1 + C\int_\infty^t \frac{\cos(\eta+s_0)}{\eta}\,d\eta\Big)^{-1}.$$

Для амплитуды асимптотика на бесконечности описывается формулой, которая получается путем взятия интеграла по частям:

$$\begin{aligned} r(t) = C\Big[1 - t^{-1}C\sin\psi + t^{-2}\big(C\cos\psi + C^2\sin^2\psi\big) + \\ + t^{-3}(C\sin\psi - C^2 2\sin\psi\cos\psi - C^3\sin^3\psi) + \mathcal{O}(t^{-4})\Big]. \end{aligned} \tag{16}$$

В этом представлении старшие поправки содержат отличные от нуля средние значения. Все эти средние значения можно собрать в виде разложения одной функции и переписать асимптотику в виде двух формул:

$$\hat r(t, C) = C\big[1 + t^{-2}\frac{1}{2}C^2 + \mathcal{O}(t^{-4})\big],$$

$$r(t) = \hat r(t, C) - t^{-1}C^2\sin\psi + t^{-2}\big(C^2\cos\psi - \frac{1}{2}C^3\cos 2\psi\big) +$$
$$+ t^{-3}\big(C^2\sin\psi - C^3\sin 2\psi - C^4\sin^3\psi\big) + \mathcal{O}(t^{-4})\big].$$

В осциллирующих слагаемых зависимость от константы интегрирования C можно заменить на $\hat r(t, C)$ в силу первого соотношения:

$$C = \hat r \cdot \big[1 - t^{-2}\frac{1}{2}\hat r^2 + \mathcal{O}(t^{-4})\big].$$

В итоге разложение для амплитуды принимает форму

$$\begin{aligned} r(t) = \hat r - t^{-1}\hat r^2\sin\psi + t^{-2}\big[\hat r^2\cos\psi - \frac{1}{2}\hat r^3\cos(2\psi)\big] + \\ + t^{-3}\big[(\hat r^2 + \hat r^3)\sin\psi - \hat r^3\sin 2\psi - \hat r^4\sin^3\psi\big] + \mathcal{O}(t^{-4}), \end{aligned} \tag{17}$$

в которой выделено среднее значение $\hat r = \hat r(t, C)$, а в старших членах асимптотики все коэффициенты имеют нулевое среднее по ψ и гладко зависят от $\hat r$.

Функция $\hat r = \hat r(t, C)$ здесь имеет степенное разложение при $t \to \infty$, и не видно каких-либо преимуществ формулы (17) перед исходным разложением (16). Иначе обстоит дело в другом примере.

Пример 2.

$$\frac{dr}{dt} = -r^2 t^{-1}[1 + \cos\psi], \quad \frac{d\psi}{dt} = 1.$$

Общее точное решение представляется в форме

$$\psi(t) = t + s_0, \ r(t) = \Big(\ln|Ct| + \int_\infty^t \frac{\cos(\eta + s_0)}{\eta}\,d\eta\Big)^{-1}, \ \forall\, C, s_0 = \mathrm{const}.$$

Асимптотика на бесконечности описывается формулой, которая содержит логарифмы

$$\begin{aligned} r(t) = \ln^{-1}|Ct|\Big[1 - t^{-1}\ln^{-1}|Ct|\cdot\sin\psi + t^{-2}\big(\ln^{-1}|Ct|\cdot\cos\psi + \ln^{-2}|Ct|\cdot\sin^2\psi\big) + \\ + t^{-3}\big(\ln^{-1}|Ct|\cdot\sin\psi + \ln^{-2}|Ct|\cdot 2\sin\psi\cos\psi - \ln^{-3}|Ct|\cdot\sin^3\psi\big) + \mathcal{O}(t^{-4})\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

Если теперь выделить полное среднее значение амплитуды

$$\hat r(t, C) = (\ln|Ct|)^{-1}\cdot[1 + \frac{1}{2}(t\ln|Ct|)^{-2} + \mathcal{O}(t^{-4})], \tag{19}$$

то асимптотика амплитуды описывается формулой (17), которая не содержит логарифмов. Логарифмы оказываются "спрятанными"в функции среднего значения $\hat r = \hat r(t, C)$.

В приведенных примерах асимптотика извлекается из интегрального представления точного решения, и поэтому переписывание одних формул в другие имеет мало смысла. Более того, разложение в форме (17) требует дополнительной информации о среднем, например, в виде (19). Пара формул (17), (19) выглядит излишне сложной по сравнению с разложением (18). Преимущество разложений типа (17), (19) обнаруживается в асимптотических конструкциях, когда явное представление точного решения не известно. Это преимущество состоит в том, что задачу по вычислению той части асимптотики, которая имеет нулевое среднее (17), можно отделить от вычисления асимптотики среднего значения (19). При этом нет нужды немедленно вскрывать в формулах типа (17) ту часть структуры асимптотики, которая обязана среднему значению, например, присутствие логарифмов или дробных степеней. Такой подход особенно эффективен для систем (1) с большими значениями k, когда для получения усредненного уравнения приходится вычислять большое число осциллирующих слагаемых. Асимптотика типа (19) для среднего значения вскрывается отдельно. Для этого используется скалярное (усредненное) уравнение, которое выписывается после вычисления осциллирующей части.

Понятно, что имея разложения типа (17) и (19), можно выписать асимптотику в виде единой формулы типа (18). При этом выясняется окончательная структура асимптотики, в частности, наличие дробных степеней и логарифмов. Для трансцендентов Пенлеве на этом этапе происходит упрощение главного члена асимптотики до тригонометрических функций с уточнением асимптотики для амплитуды в виде дробной степени t.

4.2. Асимптотическое разделение переменных. Предлагаемая асимптотическая конструкция основана на специфике исходной системы (1). Отличия в уравнениях для амплитуды и угла указывают на разную по порядку величины $t \to \infty$ скорость изменения функций $r(t)$ и $\psi(t)$. Так же, как в похожих задачах с малым параметром, это свойство дает возможность выделить в структуре асимптотики быструю и медленную переменные и разделить уравнения. В анзатце для амплитуды удобно использовать в качестве быстрой переменной угол $\psi = \psi(t)$ и искать решение в виде функции двух переменных $r = r(\psi, t)$. Оставшаяся зависимость от t считается медленной по сравнению с $\psi(t)$. Это означает, что амплитуда строится в классе функций, обладающих свойством $\partial_t r(\psi, t) = o(\psi'(t)),\ t \to \infty$.

На первом этапе функция $\psi = \psi(t)$ в такой конструкции остается неизвестной и в амплитуду входит в качестве независимой переменной. Уравнение для искомой функции двух переменных $r(\psi, t)$ выписывается в силу исходной системы:

$$\partial_\psi r[\omega(r) + g(r, \psi, t)] + t^{-k}\partial_t r = f(r, \psi, t).$$

Это уравнение можно использовать для построения формального асимптотического решения $r(\psi, t)$ в виде ряда по обратным степеням t с периодическими по ψ коэффициентами.

На втором этапе интегрируется уравнение для угла ψ, соответствующее исходному (1). Если для функции $r = r(\psi, t)$ известна асимптотика при $t \to \infty$, то асимптотическое интегрирование скалярного уравнения для $\psi(t)$ не вызывает проблем.

Обсуждаемый подход можно интерпретировать как асимптотическое разделение переменных: то есть переменные r, ψ разделяются при построении асимптотики решения. Однако, это не означает разделения переменных в обычном смысле. Результаты об асимптотике на бесконечности не дают никаких формул для решения на конечном времени.

4.3. Усреднение для амплитуды. Сначала уточним анзатц для амплитуды. Такое уточнение необходимо, поскольку структура асимптотики может оказаться далеко не тривиальной.

Вид исходных уравнений наводит на мысль о разложении решений по целым степеням t^{-n}. Однако, как уже указано, в коэффициентах рядов приходится допускать зависимость от t, в виде так называемой быстрой переменной $\psi = \psi(t)$. Еще одно обстоятельство, которое может привести к усложнению асимптотики, связано со структурой усредненного уравнения. Поскольку скорость изменения для амплитуды меньше, чем для угла, то можно догадаться, что в главном члене асимптотики амплитуда не зависит от угла: $r(\psi,t)\approx\hat{R}(t)$. Уравнение для $\hat{R}(t)$ можно попытаться выписать формально[1], усреднив по углу исходное уравнение (1):

$$\frac{d\hat{R}}{dt}=t^k\langle f(\hat{R},\psi,t)\rangle. \tag{20}$$

Если $\langle f\rangle\equiv 0$, как это случается в гамильтоновых системах, то очевидно $\hat{R}(t)\equiv r_0$, $\forall\, r_0=\mathrm{const}$. Если $t^k\langle f\rangle=\mathcal{O}(t^{-2})$, то произвольная константа представляет главный член асимптотики $\hat{R}(t)=r_0+\mathcal{O}(t^{-1})$. В общей ситуации асимптотика амплитуды может оказаться нестепенной. Например, уравнения $\dot{r}=t^{-1}$, $\dot{\psi}=r$ по своему виду соответствуют системе (1). Общее решение имеет амплитуду, которая логарифмически растет на бесконечности: $r=r_0+\ln t$. В других примерах возможно появление любых дробных степеней в асимптотике общего решения. Таким образом, асимптотика для амплитуды может значительно отличаться от тривиального разложения по целым степеням, а главное, что ее структура заранее не известна и не определяется структурой асимптотики правой части уравнений.

Приведенные примеры служат основанием для уточнения анзатца в следующей форме. Амплитуда строится в виде функции от трех переменных:

$$r(t)=\hat{r}+\rho(\hat{r},\psi,t).$$

Быстрая переменная отождествляется с углом $\psi=\psi(t)$ и содержится лишь в осциллирующей части, которая имеет нулевое среднее $\langle\rho\rangle=0$. Оставшаяся зависимость от времени t характеризует медленные изменения и содержится как в осциллирующей части ρ, так и в функции $\hat{r}=\hat{r}(t)$, которую будем называть средним значением амплитуды. Асимптотика осциллирующей части строится в виде степенного ряда

$$\rho(\hat{r},\psi,t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{-n}\rho_n(\hat{r},\psi),\ \ t\to\infty, \tag{21}$$

коэффициенты которого зависят от двух переменных. Все коллизии предыдущих примеров содержатся в функции $\hat{r}(t)$, асимптотику которой можно вскрывать отдельно.

Выбранный для амплитуды анзатц представляют собой аналог многомасштабного разложения. Непривычным здесь является включение среднего $\hat{r}$ в коэффициенты ряда (21). Конечно, эту зависимость можно исключить, если подобрать анзатц для среднего и с учетом его переразложить ряд (21). Однако, разложение в форме (21) оказывается более удобным. Оно не приводит к трудным проблемам при выяснении рекуррентной структуры формул для коэффициентов[2]. Кроме того, в таком подходе осциллирующую часть $\rho(\hat{r},\psi,t)$ и среднее $\hat{r}(t)$ удается разделить так же, как разделили амплитуду и угол. Основой для такого разделения служит усредненное уравнение

$$\frac{d\hat{r}}{dt}=t^k\langle f(\hat{r}+\rho(\hat{r},\psi,t),\psi,t)-g(\hat{r}+\rho(\hat{r},\psi,t),\psi,t)\partial_\psi\rho(\hat{r},\psi,t)\rangle. \tag{22}$$

Подчеркнем, что это уравнение отличается от тривиального усреднения (20). Здесь учитывается зависимость от угла в осциллирующей части амплитуды $\rho(\hat{r},\psi,t)$. Если $k>0$, то вклад от $\rho(\hat{r},\psi,t)$ может оказаться существенным для среднего значения $\hat{r}(t)$ в главном члене асимптотики.

[1] Усредненное уравнение в более подходящей форме будет дано ниже, а пока приводятся наводящие соображения.

[2] В подобных ситуациях средние значения коэффициентов асимптотики обычно определяются из секулярных условий на последующих шагах. Из-за этого иногда возникает иллюзия зацепления формул вверх по номерам [28].

4.4. Осциллирующая часть амплитуды. С учетом усреднения (22) исходное уравнение для амплитуды записывается в виде уравнения для осциллирующей части

$$\begin{aligned}\omega(\hat r+\rho)\partial_\psi\rho = f(\hat r+\rho,\psi,t) - g(\hat r+\rho,\psi,t)\partial_\psi\rho - t^{-k}\partial_t\rho- \\ -[1+\partial_{\hat r}\rho]\langle f(\hat r+\rho(\hat r,\psi,t),\psi,t) - g(\hat r+\rho(\hat r,\psi,t),\psi,t)\partial_\psi\rho(\hat r,\psi,t)\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

Переменная $\hat r$ в этом соотношении является параметром, а производная по ψ и интеграл при вычислении среднего значения берутся с учетом зависимости ρ от ψ. Асимптотическое решение строится в форме (21) при дополнительных требованиях – 2π-периодичности по ψ и нулевого среднего значения $\langle\rho\rangle = 0$.

Пояснение. Усредненные уравнения обычно интерпретируется как следствие секулярных условий, которые обеспечивают ограниченность (периодичность) по быстрой переменной в коэффициентах асимптотики. Здесь эти условия для всех порядков собраны в виде одного уравнения (22).

Лемма 1. *Существует последовательность рекуррентных формул, которые однозначно определяют коэффициенты $\rho_n(\hat r,\psi)$ так, что ряд* (21) *представляет собой асимптотическое решение уравнения* (23) *при $t\to\infty$ равномерно по $\psi\in\mathbb{R}$ и по $\hat r\in\mathcal{K}$ на любом компакте $\mathcal{K}\subset\mathcal{R}$.*

Доказательство. Коэффициенты ряда (21) вычисляются по рекуррентным формулам, которые получаются из уравнения (23) приравниванием выражений при одинаковых степенях t.

Учитывая для функций f, g асимптотическую структуру (2), получаем рекуррентную последовательность формул:

$$\omega(\hat r)\partial_\psi\rho_n = h_n(\hat r,\psi) - \langle h_n(\hat r,\psi)\rangle, \quad n=1,2,\dots .$$

Правые части имеют нулевое среднее. Они определяются через предыдущие приближения $\rho_1(\hat r,\psi),\dots,\rho_{n-1}(\hat r,\psi)$ и коэффициенты Тейлора исходных функций при $r\to\hat r$. Например,

$$h_1 = f_1(\hat r,\psi);$$

$$h_2 == \omega'(\hat r)\rho_1\partial_\psi\rho_1 + [f_2 + (\partial_r f_1 - \partial_\psi g_1)\rho_1](\hat r,\psi).$$

Таким способом коэффициенты $\rho_n(\hat r,\psi)$ определяются однозначно в классе периодических функций с нулевым средним значением. Гладкость исходных функций обеспечивают гладкость коэффициентов $\rho_n(\hat r,\psi)$ по всем переменным. Следовательно, эти функции и любые их производные ограничены при $\psi\in\mathbb{R}$ и при $\hat r\in\mathcal{K}$ на любом компакте $\mathcal{K}\subset\mathcal{R}$. Тем самым ряд (21) и любые его производные являются асимптотическими при $t\to\infty$ равномерно по переменным $(\hat r,\psi)$.

В силу выбора коэффициентов подстановка отрезка ряда (21) произвольной длины N в уравнение (23) дает невязку порядка $\mathcal{O}(t^{-N-1})$ равномерно по $\psi\in\mathbb{R}$, $\hat r\in\mathcal{K}$. Такая конструкция и называется асимптотическим решением. Лемма доказана.

4.5. Усреднение для угла. Ввиду выполненных построений задача для угла сводится к скалярному уравнению

$$t^{-k}\frac{d\psi}{dt} = \omega(\hat r+\rho(\hat r,\psi,t)) + g(\hat r+\rho(\hat r,\psi,t),\psi,t). \tag{24}$$

Для его асимптотического интегрирования используется предыдущий подход с выделением зависимости от быстрой фазы. При этом для среднего значения амплитуды $\hat r=\hat r(t)$ структура зависимости от t пока не раскрывается.

Исходный анзатц берется в виде функции трех переменных $\psi(t) = s + \Psi(\hat{r}, s, t)$. Для функции, которая определяет быструю переменную $s = S(t)$, вводится усредненное уравнение

$$\frac{dS}{dt} = t^k \hat{G}(\hat{r}(t), t), \tag{25}$$

правая часть которого определяется через интеграл среднего значения по переменной s:

$$\hat{G} = \langle \omega(\hat{r} + \rho(\hat{r}, s + \Psi(\hat{r}, s, t), t)) + g(\hat{r} + \rho(\hat{r}, s + \Psi(\hat{r}, s, t), t), s + \Psi(\hat{r}, s, t), t) \rangle.$$

Она представляет собой известную функцию от $\hat{r}, t$, если известны $\Psi(\hat{r}, s, t)$ и $\rho(\hat{r}, \psi, t)$.

Второе слагаемое $\Psi(\hat{r}, s, t)$, называемое осциллирующей частью фазы, ищется в классе функций, периодических по s с нулевым средним значением. Такой подход позволяет разделить задачи для $S(t)$ и $\Psi(\hat{r}, s, t)$.

Исходное уравнение для угла переписывается для функции $\Psi(\hat{r}, s, t)$:

$$\begin{aligned} &\hat{G}\partial_s \Psi + t^{-k}\partial_t \Psi = \omega(\hat{r} + \rho(\hat{r}, s + \Psi, t)) + g(\hat{r} + \rho(\hat{r}, s + \Psi, t), s + \Psi, t) - \hat{G} \\ &-\partial_{\hat{r}}\Psi \cdot \langle f(\hat{r} + \rho(\hat{r}, \psi, t), \psi, t) - g(\hat{r} + \rho(\hat{r}, \psi, t), \psi, t)\partial_\psi \rho(\hat{r}, \psi, t) \rangle. \end{aligned} \tag{26}$$

Последнее слагаемое происходит от производной $-\partial_{\hat{r}}\psi \cdot d\hat{r}/dt$, вычисляемой в силу уравнения (22), и поэтому интеграл среднего значения в этом слагаемом берется по аргументу ψ. Подчеркнем, что в остальных слагаемых усреднение по s выполняется полное, с учетом всех переменных, которые содержат s. Уравнение дополняется условиями 2π-периодичности искомой функции $\Psi(\hat{r}, s, t)$ и нулевого среднего значения $\langle \Psi \rangle = 0$ по быстрой переменной s.

Указание полной зависимости от переменной s придает уравнению громоздкий вид. Однако, с учетом свойств (2) главное слагаемое оказывается весьма простым: $\omega(\hat{r})\partial_s \Psi$. Поэтому построение асимптотического решения в виде ряда по отрицательным степеням

$$\Psi(\hat{r}, s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} \Psi_n(\hat{r}, s) \tag{27}$$

не вызывает затруднений.

Лемма 2. *Пусть для амплитуды $\rho(\hat{r}, \psi, t)$ построен асимптотический ряд* (21). *Тогда существует последовательность рекуррентных формул, которые однозначно определяют коэффициенты $\Psi_n(\hat{r}, s)$ так, что ряд* (27) *представляет собой асимптотическое решение уравнения* (26) *при $t \to \infty$ равномерно по $s \in \mathbb{R}$ и по $\hat{r} \in \mathcal{K}$ на любом компакте $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$.*

Доказательство. Коэффициенты ряда (27) вычисляются по рекуррентным формулам, которые получаются из уравнения (26) приравниванием выражений при одинаковых степенях t:

$$\omega(\hat{r})\partial_s \Psi_n = \Phi_n(\hat{r}, s) - \langle \Phi_n(\hat{r}, s) \rangle, \quad n = 1, 2, ...$$

Правые части имеют нулевое среднее и вычисляются через предыдущие приближения $\psi_1, ..., \psi_{n-1}$ с учетом полученного ранее разложения для амплитуды (21). Например, $\Phi_1 = \omega'(\hat{r})\rho_1(\hat{r}, s) + g_1(\hat{r}, s)$, и (если $k \geq 1$)

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \omega'(\hat{r})\rho_2(\hat{r}, s) + \frac{1}{2}\omega''(\hat{r})\rho_1^2(\hat{r}, s) + g_2(\hat{r}, S) - [\omega'(\hat{r})\partial_s \Psi_1 - \partial_r g_1(\hat{r}, S)]\rho_1(\hat{r}, s) + \\ +\Psi_1(\hat{r}, s)\partial_{\hat{r}}\partial_s H_1(\hat{r}, s) - \partial_{\hat{r}}\psi_1 \langle F_1 \rangle. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\Psi_n(\hat{r}, s)$ однозначно определяются в классе 2π-периодических функций с нулевым средним $\langle \Psi_n \rangle = 0$. Лемма доказана.

5. Асимптотика усредненного уравнения

Построение осциллирующей части асимптотического решения в виде рядов (21), (27) выглядит тривиальным, хотя и громоздким. Приведенная выше процедура представляет собой переход от исходной системы (1) к уравнениям (22), (25) и соответствует обычному методу усреднения [7, 29]. Усредненные уравнения (22), (25), как видим, разделены во всех порядках. Если функция $\hat{r}(t)$ известна, то фаза выписывается через интеграл:

$$S(t) = s_0 + \int_T^t \langle \partial_r H(\hat{r}(\eta) + \rho(\hat{r}(\eta), s + \psi(\hat{r}(\eta), s, \eta), \eta), s + \psi(\hat{r}(\eta), s, \eta), \eta)\rangle \, d\eta$$

и содержит параметр s_0 в качестве константы интегрирования; $T = \mathrm{const} > 0$. Эффективность этой формулы определяется эффективностью представления для среднего значения амплитуды $\hat{r}(t)$.

Ключевой задачей во всей конструкции оказывается усредненное уравнение для амплитуды (22), для которого требуется построить однопараметрическое семейство асимптотических решений. В общей ситуации без уточнения функций $f(r,\psi,t)$, $g(r,\psi,t)$ не возможно дать какие-либо разумные ответы. Поэтому рассмотрим несколько частных случаев.

5.1. Асимптотическое представление для среднего значения амплитуды.

1. Если система (1) гамильтонова: $f = \partial_\psi H(r,\psi,t)$, $g = -\partial_r H(r,\psi,t)$, то усредненное уравнение (22) оказывается однородным. Тогда ответ для среднего тривиален: $\hat{r} \equiv r_0$, $\forall\, r_0 = \mathrm{const} \in \mathcal{R}$. В таком случае построенные ряды по целым степеням t^{-n} дают асимптотическое решение исходных уравнений, которое зависит от двух параметров r_0, s_0. Этот результат можно сформулировать в следующей форме:

Теорема 2. *Для гамильтоновых уравнений типа* (1) *существует двухпараметрическое асимптотическое решение с ограниченной амплитудой* $r = r_0 + \rho(r_0,\psi,t)$, $\psi = s + \Psi(r_0, s, t)$, *в котором* ρ, Ψ *представляются асимптотическими рядами* (21), (27) *по целым отрицательным степеням* t^{-n}. *Фазовая переменная* $s = S(t)$ *в этих формулах представляется асимптотическим рядом, который может содержать конечное число неубывающих на бесконечности слагаемых:*

$$S(t) = s_0 + S_{-1}(r_0)\ln t + t^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} S_n(r_0)t^{-n}, \ \forall\, s_0 \in \mathbb{R}, \ r_0 \in \mathcal{R}. \tag{28}$$

Отсюда, в частности, вытекают формулы теоремы 1, которые получаются путем подстановки и переразложения рядов (21), (27), (28).

Пояснение. На любом шаге n коэффициенты каждого из последующих рядов (21), (27), (28) вычисляются по рекуррентным формулам с участием конечного числа членов предыдущих рядов.

В общей ситуации, когда система (1) не гамильтонова: $f_r + g_\psi \not\equiv 0$, асимптотическое решение для среднего $\hat{r}(t)$ может иметь сложную структуру и включать, например, дробные степени и логарифмы. Очевидно, асимптотика среднего значения определяет структуру асимптотики всего решения.

2. Выделим класс негамильтоновых систем (1), для которых среднее $\hat{r}(t)$ разлагается в асимптотический ряд по целым отрицательным степеням

$$\hat{r}(t; r_0) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} r_n, \ t \to \infty, \quad (r_n = r_n(r_0)) \tag{29}$$

с произвольной константой r_0. Очевидно, это позволит сохранить структуру разложения для решения $r(t), \varphi(t)$ в той форме, что приведена в теореме 2.

Ограничения на функции $f, g(r,\psi,t)$ получаются следующим образом. Выделим в $f(r,\psi,t)$ негамильтонову часть $F(r,\psi,t)$, положив $f = \partial_\psi H + F(r,\psi,t)$, $g = -\partial_r H$. В соответствии с исходными условиями (2) эта функция имеет разложение

$$F(r,\psi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(r,\psi)t^{-n}, \quad t\to\infty.$$

Гамильтонова часть не дает вклада в усредненное уравнение (22), правая часть которого выписывается через среднее значение от сложной функции

$$\frac{d\hat r}{dt} = t^k\langle F(\hat r + \rho(\hat r,\psi,t),\psi,t)\rangle.$$

Заметим, что здесь в осциллирующей части амплитуды $\rho(\hat r,\psi,t)$ учитывается зависимость от угла. Эту правую часть разложим в асимптотический ряд с учетом асимптотики для $\rho(\hat r,\psi,t)$. В итоге усредненное уравнение в асимптотической форме приобретает вид

$$\frac{d\hat r}{dt} = t^k\sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}\hat F_n(\hat r).$$

Теперь нетрудно понять: чтобы решение $\hat r(t)$ обладало свойством (29), в правой части необходимо обращение в нуль коэффициентов при главных слагаемых, которые не убывают достаточно быстро:

$$\hat F_n(\hat r)\equiv 0,\ \forall\,\hat r,\ (n=1,...,k+1). \tag{30}$$

Коэффициенты $\hat F_n(\hat r)$ вычисляются через коэффициенты Тейлора функций $F_1,...,F_n(r,\psi)$ в точке $\hat r$ и приближения $\rho_1,...,\rho_{n-1}(\hat r,\psi)$. Поскольку ρ_j однозначно выражаются через исходные данные, то и сформулированные условия можно выписать в терминах исходных данных. На первых шагах условия на негамильтонову часть возмущения приобретают вид:

$$\hat F_1(r)\equiv\langle F_1(r,\psi)\rangle = 0, \quad \omega\hat F_2(r)\equiv\omega(r)\langle F_2(r,\psi)\rangle + \langle G_1\partial_r F_1\rangle, = 0,$$

$$\omega^2\hat F_3(r)\equiv\omega^2(r)\langle F_3(r,\psi)\rangle - \omega(r)\Big\langle\Big[H_2 - \int[F_2(r,\psi)-\langle F_2\rangle]\,d\psi\Big]\partial_r F_1\Big\rangle -$$

$$-\Big\langle\Big[G_1\partial_r H_1 - \int[G_1(r,\psi)\partial_r F_1(r,\psi) - \langle G_1\partial_r F_1\rangle]\,d\varphi\Big]\partial_r F_1\Big\rangle +$$

$$+\Big\langle\omega(r)G_1\partial_r F_2 + \frac{1}{2}G_1^2\partial_r^2 F_1\Big\rangle - \frac{1}{2}\omega'(r)\langle[G_1^2 - \langle G_1^2\rangle]\partial_r F_1\rangle = 0;\ \forall\,r\in\mathbb{R}.$$

Здесь $G_1(r,\psi) = -H_1(r,\psi) + \langle H_1\rangle + \int F_1(r,\psi)\,d\psi$; $H_j(r,\psi)$ – коэффициенты разложения гамильтониана $H(r,\psi,t)$ в асимптотический ряд при $t\to\infty$. Условия (30) выполняются, например, в случае слабых возмущений $t^k F(r,\psi,t) = \mathcal{O}(t^{-2}),\ t\to\infty$.

Условия (30) не только необходимы, но и достаточны для построения асимптотики среднего значения амплитуды в виде ряда (29).

Лемма 3. *Пусть в негамильтоновой части возмущения первые члены асимптотики* $F_n(r,\psi)$, $n = 1,...,k+1$ *имеют средние значения, связанные соотношениями* (30). *Тогда усредненное уравнение* (22) *имеет однопараметрическое семейство асимптотических при* $t\to\infty$ *решений в виде ряда* (29) *с произвольной константой* r_0. *Ряд является асимптотическим равномерно по* r_0 *на любом компакте* $\mathcal{K}\subset\mathcal{R}$.

Доказательство сводится к вычислению коэффициентов по рекуррентным формулам, которые получаются из выражений при одинаковых степенях t^{-n} в усредненном уравнении; например, $-r_1 = \hat F_{k+2}(r_0)$, $-2r_2 = \hat F_{k+3}(r_0) + \hat F'_{k+2}(r_0)r_1$.

Отсюда вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для уравнений* (1) *существует двухпараметрическое асимптотическое решение с ограниченной амплитудой* $r = \hat{r} + \rho(\hat{r}, \psi, t), \psi = s + \psi(\hat{r}, s, t)$, *в котором* $\rho, \psi, s, \hat{r}$ *представляются асимптотическими рядами* (21), (27), (28), (29) *равномерно по параметрам* $s_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \mathcal{K}$ *на любом компакте* $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$.

5.2. Неасимптотическое представление для среднего значения амплитуды. Из предыдущих построений легко понять, что более сложная структура асимптотики решения может возникнуть из-за усложнения структуры среднего значения амплитуды $\hat{r}(t)$. Источником таких усложнений является негамильтонова часть системы F, точнее, ее главные слагаемые, влияние которых на среднее $\hat{r}$ проявляется через уравнение (22). Конкретные примеры из приложений показывают, что усложнение асимптотики не является экзотикой; в разложениях могут появиться, например, дробные степени t, см. [26, 27]. Исследование асимптотики решений скалярных уравнений типа (22) представляет самостоятельную задачу и выходит за рамки этой статьи. В данной работе более важным представляется указание класса функций F (негамильтоновой части), при которых пригодны построенные асимптотики для амплитуды и угла без детализации асимптотики для среднего значения $\hat{r}(t)$.

В предыдущем случае ограничения на F в форме (30) соответствовали требованию обращения в нуль главных членов из правой части усредненного уравнения: $\hat{F}_j(r) = 0,\ (j = 1, ..., k+1)$. Это приводило к тривиальному ответу для среднего в главном $\hat{r}(t) = r_0 + \mathcal{O}(t^{-1}),\ r_0 = \text{const}$. В более общем подходе предлагается акцентировать внимание на свойствах решения главной части усредненного уравнения

$$\frac{dR_0}{dt} = t^k \sum_{j=1}^{k+1} t^{-j} \hat{F}_j(R_0) \equiv \mathcal{F}_0(R_0, t). \tag{31}$$

Вместо требования обращения в нуль правой части можно наложить условия в неявной форме в виде ограничений на решение $R_0(t)$.

Лемма 4. *Пусть в окрестности бесконечности* $t \geq T = \text{const}$ *уравнение* (31) *имеет семейство решений* $R_0 = R_0(t; C)$ *со значениями в* $\mathcal{R}$, *гладких, равномерно ограниченных по* t *и по параметру* $C \in \mathcal{C}$ *на любом компакте* $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$. *Пусть производная этих решений по параметру имеет степенные мажоранты снизу:*

$$|\partial_c R_0(t; C)| \geq M t^{\delta},\ |\partial_c R_0(t; C)|^2 \geq M t^{\delta} |\partial_c^2 R_0(t; C)|,\ \forall\, t \geq T,\ C \in \mathcal{K}$$

с показателем $\delta > -1$, $M = M(T, \mathcal{K}) > 0$. *Тогда существует последовательность функций* $\{\hat{r}_m(t; r_0),\ m = 1, 2, ...\}$, *определенных по* t *в окрестности бесконечности и зависящих от параметра* $r_0 \in \mathcal{C}$, *которые: 1) обладают асимптотикой* $\hat{r}_m(t; r_0) = R_0(t; r_0 + \mathcal{O}(t^{-1-\nu})),\ t \to \infty$; *2) составленный из них ряд*

$$\hat{r}(t; r_0) = \hat{r}_1(t; r_0) + \sum_{m=1}^{\infty} [\hat{r}_{m+1}(t; r_0) - \hat{r}_m(t; r_0)] \tag{32}$$

представляет собой асимптотическое решение усредненного уравнения (22) *равномерно по параметру* r_0 *на любом компакте* $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$.

Доказательство. В качестве функции $\hat{r}_m(t; r_0)$ берется однопараметрическое решение уравнения

$$\frac{dR}{dt} = \mathcal{F}_0(R, t) + \mathcal{F}_m(R, t), \tag{33}$$

правая часть которого представлена отрезком асимптотического ряда из полного уравнения (22) так, что

$$\mathcal{F}_m(R,t) \equiv \sum_{j=2}^{m+1} t^{-j} \hat{F}_{j+k}(R) = \mathcal{O}(t^{-2}),\ t \to \infty.$$

Если такое решение искать методом вариации произвольной постоянной в виде $R = R_0(t, C(t))$, то для функции $C(t)$ получается уравнение

$$\frac{dC}{dt} = [\partial_C R_0(t,C)]^{-1} \mathcal{F}_m(R_0(t,C),t).$$

После перехода к интегральному уравнению

$$C(t) = r_0 - \int_t^\infty [\partial_C R_0(\eta, C(\eta))]^{-1} \mathcal{F}_m(R_0(\eta, C(\eta)), \eta)\, d\eta, \quad \forall\, r_0 = \mathrm{const}$$

можно применить метод сжимающих отображений для доказательства существования решения с асимптотикой $C(t;r_0) = r_0 + \mathcal{O}(t^{-1-\delta}),\ t \to \infty$. Константа r_0 остается произвольным параметром этого решения. Ограничения на функцию $R_0(t;C)$ обеспечивают сжимаемость интегрального оператора. Отсюда вытекает требуемая асимптотика для функций $\hat{r}_m(t;r_0) = R_0(t, C(t;r_0))$. Такой вывод, в частности, соответствует результату, приведенному в [30], теореме 8.

Поскольку частичные суммы ряда (32) совпадают с функциями $\hat{r}_m(t;r_0)$, которые при подстановке в уравнение (22) дают невязку порядка $\mathcal{O}(t^{-m-2}),\ t \to \infty,\ \forall\, m$, то такой ряд принято называть асимптотическим решением. Лемма доказана.

Пояснения.

1. Получаемые таким образом функции $\hat{r}_m(t;r_0)$ претендуют на роль приближений для среднего значения амплитуды $\hat{r}(t)$ на бесконечности. При этом вопрос об асимптотической структуре ряда (32) не обсуждается. Реализованная здесь идея состоит в том, что вместо частичных сумм асимптотического ряда для аппроксимации $\hat{r}(t)$ предъявляется другая последовательность функций, определяемых из усредненного уравнения. В конечном счете, асимптотическая структура последовательности $\hat{\{r_{m+1}(t;r_0) - \hat{r}_m(t;r_0)\}}$ при $t \to \infty$ может быть установлена после обоснования асимптотики для точного решения.
2. В качестве функций $\hat{r}_m(t;r_0)$ можно брать не точные, а асимптотические решения уравнения (33), которые дают невязку порядка $\mathcal{O}(t^{-m-2})$.
3. В случае, когда для уравнения (22) возможно построение решения в виде асимптотического ряда, роль функций $\hat{r}_m(t;r_0)$ могут играть его частичные суммы.

Выводы из леммы 4. Для обоснования [31] важны свойства невязки, получаемой в усредненном уравнении (22), когда вместо аргумента $\hat{r}$ подставляется функция $\hat{r}_m(t;r_0)$. По построению этих функций порядок невязки $\mathcal{O}(t^{-m-2})$ увеличивается с ростом номера m.

Что касается других частей исходных уравнений в форме (23), (26), то для них важным является свойство ограниченности функций $\hat{r}_m(t;r_0)$. Оно гарантирует, что построенные выше ряды для $\rho(\hat{r},\psi,t), \psi(\hat{r},s,t)$ остаются асимптотическими решениями после подстановки функции $\hat{r}_m(t;r_0)$ на место аргумента $\hat{r}$. В таком случае для уравнений (23), (26) порядок невязки зависит от длины взятых отрезков рядов (21), (27) и не зависит от m.

Наконец, усредненное уравнение (25) для фазы $S(t)$ интегрируется тривиально. Правую часть в (25) можно представить в виде ряда

$$t^k \hat{G}(\hat{r}(t),t) = t^k \sum_{p=0}^\infty t^{-p} G_p(\hat{r}(t)), \quad t \to \infty,$$

коэффициенты которого зависят от t посредством среднего $\hat{r}(t)$. Этот ряд является асимптотическим при $t \to \infty$ для каждой реализации среднего в виде функции $\hat{r}_m(t;r_0)$, если выполнены условия предыдущей леммы. Поэтому представление для фазы можно выписать также в виде ряда, который получается при интегрировании правой части

$$S(t) = S_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t), \quad S_n(t) = -\int_t^{\infty} \eta^{-n-1} G_{n+k+1}(\hat{r}(\eta))\, d\eta = \mathcal{O}(t^{-n}). \tag{34}$$

В этой формуле выделена неубывающая часть фазы

$$S_0(t) = s_0 + \sum_{n=0}^{k+1} \int_T^t \eta^{k-n} G_n(\hat{r}(\eta))\, d\eta.$$

Выбор значения для нижнего предела $T = \mathrm{const} > 0$ здесь не играет роли ввиду наличия произвольной константы s_0. Если выполнены условия предыдущей леммы, то при каждой реализации среднего в виде функции $\hat{r}_m(t; r_0)$ все $\hat{h}_p(\hat{r}_m(t; r_0))$ представляют собой ограниченные функции по t, и поэтому ряд в (34) является асимптотическим.

Полученные результаты можно суммировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда для уравнений* (1) *существует двухпараметрическое асимптотическое решение в виде рядов по отрицательным степеням*

$$r(t; r_0, s_0) = \hat{r} + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} r_n(\hat{r}, s), \quad \varphi(t; r_0, s_0) = s + \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n} \psi_n(\hat{r}, s). \tag{35}$$

Коэффициенты являются 2π*-периодическими функциями по быстрой переменной* $s = S(t)$*, асимптотика которой определена в* (34)*. Аргумент* $\hat{r}$ *представим в виде ряда* (32)*.*

Пояснение. Отрезки рядов (35), (32), (34) длины N при подстановке в уравнения (1) дают невязки порядка $\mathcal{O}(t^{-N-1})$, $t \to \infty$ равномерно по параметрам $s_0 \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \mathcal{K}$ на любом компакте $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}$.

Замечание. В отличие от результатов теоремы 3 ряды построенного здесь асимптотического решения не вычисляются по рекуррентным формулам в той части, которая зависит от $\hat{r}$. Для повышения порядка невязки, например, до $\mathcal{O}(t^{-N-2})$, $t \to \infty$ требуется не только увеличение длины отрезков рядов (35), (34), но и подстановка вновь найденной функции $\hat{r}_{N+1}(r_0, t)$ во все коэффициенты r_n, ψ_n, S_n $(n = 1, ..., N+1)$ и в формулу для $S(t)$.

6. Усреднение амплитуды в примерах

Во всей асимптотической конструкции главным объектом оказывается усредненное уравнение для амплитуды (либо энергии $\hat{r}(t) \equiv \hat{E}(t)$). Структура асимптотики функции $\hat{r}(t)$ определяет структуру разложения всего решения. В известных конкретных задачах среднее значение амплитуды $\hat{r}(t)$ обычно стабилизируется при $t \to \infty$. Это позволяет значительно упростить асимптотические формулы.

Например, при исследованиях трансцендентов Пенлеве усредненное уравнение в форме (7)

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -t^{-1} \langle Y^2(\psi, \hat{E}) \rangle$$

указывает на убывание энергии $\hat{E}(t)$ при $t \to \infty$. Более того, поскольку среднее значение осциллирующей функции $Y^2(\psi, E)$ положительно при $E \neq 0$, и $Y(\psi, E) \to 0$ при $E \to 0$, то энергия $\hat{E}(t)$ стремится к значению $E = 0$, соответствующему точке покоя автономной системы. Такое свойство позволяет выписать главный член асимптотики для $\hat{E}(t)$, используя для решения автономной системы $X, Y(\psi, E)$ асимптотику по малой энергии, например,

$$X(\psi, E) = A\sqrt{E} \cos\psi + \mathcal{O}(E), \ E \to 0, \ (A = \mathrm{const}).$$

Фактически речь идет о линеаризации нелинейного осциллятора вблизи устойчивого положения равновесия. Хотя для разных трансцендентов Пенлеве функции $X, Y(\psi, E)$ извлекается из разных автономных систем, во всех случаях для среднего имеет место свойство $\langle Y^2(\psi, E)\rangle = E + \mathcal{O}(E^2),\ E \to 0$. Таким образом, усредненное уравнение в асимптотической форме приобретает вид:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -t^{-1}[\hat{E} + \mathcal{O}(\hat{E}^2)] + \mathcal{O}(t^{-2}). \tag{36}$$

Отсюда немедленно извлекается асимптотика для среднего значения энергии

$$\hat{E}(t) = Ct^{-1} + \mathcal{O}(t^{-2}),\ t \to \infty,\ (\forall\, C = \mathrm{const}).$$

Имея в виду произвольность константы интегрирования C, для решения исходного (неавтономного) уравнения получается асимптотическая формула

$$x(t) = Ct^{-1/2}\cos\psi + \mathcal{O}(t^{-1}),\ t \to \infty,\ (\forall\, C = \mathrm{const}).$$

Асимптотика для фазовой функции $\psi(t)$ выписывается отдельно и в главном члене имеет вид

$$\psi(t) = \omega(0)t + \tilde{\gamma}(C)\ln t + s_0,\ (\forall\, C, s_0 = \mathrm{const}).$$

Коэффициент $\tilde{\gamma}(C)$ в логарифмическом сдвиге фазы вычисляется с учетом $\omega'(0)$. Возвращение к исходным переменным приводит к известным формулам, например, в случае Пенлеве-2

$$u(z) = cz^{-1/4}\cos\Big(\frac{2\sqrt{2}}{3}z^{3/2} + \gamma(c)\ln z + s_0\Big) + \mathcal{O}(z^{-1/2}),\ z \to +\infty,\ (c, s_0 = \mathrm{const}).$$

Несколько иная ситуация складывается для уравнений главного резонанса (8). В исходном амплитудном уравнении среднее значение правой части равно нулю. Поэтому отыскание решений с ограниченной амплитудой приводит к тривиальному усредненному уравнению $d\hat{r}/dt = 0$. Таким образом, $\hat{r}(t) \equiv C,\ \forall\, C = \mathrm{const}$. Для такого семейства решений полные асимптотические разложения по целым отрицательным степеням t^{-n} построены в [27].

Построение асимптотики решений с неограниченно растущей амплитудой оказывается более сложной задачей. После выделения в (8) растущей части амплитуды в виде $\varrho(t) = \sqrt{\lambda t} + t^{-1/4}a(t)$ для остатка возникает система, которая в главном представляет собой уравнения математического маятника. Переход к переменным типа действие-угол приводит к задаче типа (1). Если независимую переменную выбрать так, чтобы все ее степени в этих уравнениях были целыми (сделав замену $t^{1/4} \Rightarrow t$), то множитель в левой части имеет показатель с $k = 2$. Усредненное уравнение для энергии снова совпадает с (36). Одним из результатов такого анализа является определение скорости стабилизации амплитуды к растущей функции $\varrho(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(t^{-3/8}),\ t \to \infty$. Детали конструкции содержатся в [27].

Для уравнений главного резонанса (9), в которых учитывается диссипация, переход к системе (1) описан в главе 3. Получаемое на этом пути усредненное уравнение (см. [32])

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -2\beta t^{-1}[\hat{E} + \mathcal{O}(\hat{E}^2)] + \mathcal{O}(t^{-2})$$

содержит множитель 2β, зависящий от коэффициента диссипации. Этот множитель определяет структуру асимптотики среднего значения энергии $\hat{E}(t) = Ct^{-2\beta}[1 + o(1)],\ t \to \infty$. Применительно к исходной системе (9) отсюда следует, что в нелинейных системах рост амплитуды накачки компенсирует диссипативные потери и обеспечивает вхождение в авторезонансный режим с ростом амплитуды колебаний. При этом стабилизация амплитуды к растущей функции оказывается степенной: $\varrho(t) = \sqrt{\lambda t}[1 + \mathcal{O}(t^{-\beta})],\ t \to \infty$. Отметим радикальное отличие этого результата от наивного представления об экспоненциальной стабилизации колебаний под влиянием диссипации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брюно А.Д. *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях.* М.: Наука. 1998. 288 с.
2. Козлов В.В., Фурта С.Д. *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальныхз уравнений.* М.: Изд-во Моск. ун-та. 1996. 244 с.
3. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.:Наука. 1983. 352 с.
4. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. *Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях* // Итоги науки и техники. 1980. Том 15. С. 4–94.
5. Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С. *Трансцендменты Пенлеве. Метод задачи Римана.* Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2005. 728 с.
6. Калякин Л.А. *Асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым* // Современная математика и ее приложения Т. 53. 2008. С. 138–160.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука. 1974. 501 с.
8. Найфэ А. *Методы возмущений.* М.: Мир. 1976. 455 с.
9. W. Eckhaus *New approach to the asymptotic theory of nonlinear oscillations and wave-propagation* // J. Math. Anal. Appl. V. 49. №3. 1975. P. 575–611.
10. D. Kaper *Perturbed nonlinear oscillations* // SIAM J. Appl. Math. V. 31. №3. 1976. P. 519–546.
11. D.E. Gilsinn *A high order generalized method of averaging* // SIAM J. Appl. Math. V. 42. №1. 1982. P. 113–134.
12. J. Kevorkian *Perturbation techniques for oscillatory systems with slowly varying coefficients* // SIAM Review V. 29. №3. 1987. P. 391–461.
13. Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978. 304 с.
14. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ. 1985. 310 с.
15. P.Boutroux *Recherches sur les transcendantes de M.Painlevé et l'étude asymptotique des équations differéntielles du second ordre* // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. V. 30. 1913. P. 265–375; V. 31. 1914. P. 99–159.
16. N. Joshi *Asymptotic Studies of the Painlevé Equations* // The Painlevé Property. One Centure Later. CRM Series in Math. Phys. Springer. New York. 1999. P. 181–228.
17. Кузмак Г.Е. *Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами* // Прикладная математика и механика. Т. 23. №3. 1951. С. 519–526.
18. Федорюк М.В. *Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка* // Журнал выч. мат. и мат. физики. 1986. Т. 26. №2. С. 196–210.
19. R.J. Greenberg *Spin-orbit couplingin the solar system* // Astron. J. V. 71. №6. 1966.
20. A.T. Sinclair *On the origin of the commensurabolities amongst the satellits of Saturn* // Month Notic Roy.Astron. Soc. V. 160. №2. 1972.
21. Нейштадт А.И. *Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром* // Прикладная математика и механика. Т. 39. №4. 1975. С. 621–632.
22. B. Meerson, L. Friedland *Strong autoresonance excitation of Rydberg atoms: the rydberg accelerator* // Physical Review A. V. 41. 1990. P. 5233–5236.
23. J. Fajans and L. Friedland *Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators* // Am. J. Phys. V. 69. №10. 2001. P. 1096–1102.
24. A.P. Itin, A.I. Neishtadt, A.A. Vasiliev, *Capture into resonance in dynamics of a charged partice in magnetic field and electrostatic wave* // Physica D. V. 141. №4. 2000. P. 281–296.
25. Калякин Л.А. *Асимптотический анализ моделей авторезонанса* // Успехи Математических Наук. Т. 63. Вып 5. 2008. С. 3–72

26. Калякин Л.А. *Асимптотика решений уравнений главного резонанса на бесконечности* // Докл. РАН. 2003. Т. 388. №3. С. 305–308.
27. Калякин Л.А. *Асимптотики решений уравнений главного резонанса* // ТМФ. 2003. Т. 137. №1. С. 142–152.
28. Калякин Л.А. *Возмущение вырожденной плоской простой волны в системе уравнений Навье-Стокса* // Докл. РАН. 1998. Т. 360. №3. С. 328–330.
29. Нейштадт А.И. *О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой* // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
30. Кудрявцев Л.Д. *Асимптотика решений дифференциальных уравнений вблизи сингулярных точек* // Труды МИРАН. 2001. Т. 232. С. 194–217.
31. L.A. Kalyakin *Justification of asymptotic expansion at infinity* // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2008. V. 15. S3. P. 210–216.
32. Калякин Л.А. *Авторезонансные асимптотики в осциллирующей системе со слабой диссипацией* // ТМФ. 2009. Т. 158, №6.

Леонид Анатольевич Калякин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: klenru@mail.ru