Уфимский математический журнал. Том 1. № 2 (2009). С. 17-28.

УДК 517.53+517.537.7

ПОВЕДЕНИЕ СУММЫ РЯДА ДИРИХЛЕ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ РОСТА НА КРИВЫХ

А.М. ГАЙСИН, Н.Н. ЮСУПОВА

Аннотация. Изучаются классы целых рядов Дирихле, определяемые выпуклыми мажорантами роста. Получены точные оценки роста и убывания функций из заданного класса.

Ключевые слова: ряды Дирихле, максимальный член, выпуклая мажоранта роста.

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{p_n} \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция, $P=\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, имеющая плотность

$$\Delta=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p_n}.$$

Пойа [1] показал, что если $\Delta=0$, то в каждом угле $\{z:|\arg(z-\alpha)|\leqslant\delta\}$ $(\delta>0)$ функция f имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Соответствующий результат для рядов Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\lambda_ns},\quad 0<\lambda_n\uparrow\infty, \tag{2}$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости, доказан М.Н. Шереметой в [2]: если для последовательности $\Lambda=\{\lambda_n\}$ выполняются условия $\Delta=0$ и $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq h>0$ $(n\geq1)$, то R-порядок функции F на положительном луче $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ равен R-порядку ρ_R функции F во всей плоскости. Более общий результат доказан А.М. Гайсиным в [3], где, в частности, показано, что если $\Delta=0$ и индекс конденсации δ-последовательности Λ равен нулю, то $\rho_R=\rho_\gamma$, где

$$\rho_\gamma=\varlimsup_{\substack{s\in\gamma\\ s\to\infty}}\frac{\ln\ln|F(s)|}{\sigma}\quad(\sigma=Re\ s)$$

— порядок по Ритту на кривой γ, уходящей в бесконечность так, что если $s\in\gamma$ и $s\to\infty$, то $Re\ s\to+\infty$.

Наиболее общий, но результат несколько иного характера установлен в статье [4]. Для того, чтобы сформулировать его, введем соответствующие обозначения и определения.

Пусть $\Gamma=\{\gamma\}$— семейство всех кривых, уходящих в бесконечность так, что если $s\in\gamma$ и $s\to\infty$, то $Re\,s\to+\infty$.

Gaisin A.M., Yusupova N.N. Behaviour of the Sum of Dirichlet Series with a given majorant of a growth on curves.

Работа поддержана грантом Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ– 3081-2008.1, РФФИ (грант 08-01-00779-а).

Поступила 24 апреля 2009 г.

Через $D(\Lambda)$ обозначим класс целых функций F, представимых во всей плоскости рядами Дирихле (2), а через $D(\Lambda, R)$ — подкласс $D(\Lambda)$, состоящий из функций F, имеющих конечный порядок $\rho_R(F)$ по Ритту:

$$\rho_R(F) = \varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma}, \quad M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)|.$$

Для $F \in D(\Lambda)$, $\gamma \in \Gamma$ положим

$$d(F;\gamma) \stackrel{def}{=} \varlimsup_{\substack{s\in\gamma\\ s\to\infty}} \frac{\ln|F(s)|}{\ln M(Re\, s)}, \quad d(F) = \inf_{\gamma\in\Gamma} d(F;\gamma).$$

Через L обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ положительных функций.

Последовательность $\{b_n\}$ ($b_n \neq 0$ при $n \geq N$) называется $\overline{W}$-нормальной, если найдется функция $\theta \in L$, такая, что (см. [4])

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \frac{\theta(t)}{t^2} dt = 0, \qquad -\ln|b_n| \leqslant \theta(\lambda_n) \quad (n \geq N).$$

Рассмотрим произведение Вейерштрасса

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (0 < \lambda_n \uparrow \infty).$$

Известно, что Q — целая функция экспоненциального типа в том и только в том случае, когда последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность.

В [4] доказана

Теорема A. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Предположим, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $\overline{W}$-нормальна. Для того, чтобы для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$ выполнялось равенство $d(F) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} = 0. \tag{3}$$

Пусть целая функция f конечного порядка имеет вид (1). Если последовательность P имеет плотность $\Delta = 0$, то $d(f) = 1$ ($d(f)$ — аналог величины $d(F)$, который определяется по всевозможным кривым, произвольным образом уходящим в бесконечность). Этот факт впервые был установлен Пойа в [1]. Заметим, что равенство $d(f) = 1$ вытекает из более общей теоремы A. Действительно, так как $\Delta = 0$, то, очевидно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{p_n \leqslant x} \frac{1}{p_n} = 0.$$

Более того, в данном случае (см. [5])

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(p_n)}\right| = 0.$$

Это означает, что существует функция $\theta \in L$, $\theta(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, такая, что

$$-\ln|Q'(p_n)| \leqslant \theta(p_n) \quad (n \geq 1).$$

Значит, последовательность $\{Q'(p_n)\}$ $\overline{W}$-нормальна.

Наконец, если f — целая функция конечного порядка, то полагая $z = e^s$, замечаем, что

$$F(s) = f(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{p_n s}$$

— целая функция конечного R-порядка. Следовательно, $d(f) = d(F)$, и все следует из теоремы A.

Однако, из того, что $d(F) = 1$, вообще говоря, не следует выполнение равенства $\rho_R(F) = \rho_\gamma$ для порядков по Ритту функции F во всей плоскости и на кривой $\gamma \in \Gamma$. Оказывается, если в теореме A условие (3) заменить на более сильное требование

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} = 0, \tag{4}$$

то $\rho_R(F) = \rho_\gamma$ для любой функции $F \in D(\Lambda, R)$.

В настоящей статье приведено обоснование этого факта. Здесь рассмаривается более общая ситуация, а именно изучаются классы рядов Дирихле (2), определяемые некоторой выпуклой мажорантой роста.

1. Вспомогательные утверждения. Основные результаты

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность D. Тогда

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

— целая функция экспоненциального типа не выше πD^*, где D^* — усредненная верхняя плотность последовательности Λ:

$$D^* = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}, \quad N(t) = \int_0^t \frac{n(x)}{x}\, dx, \quad n(t) = \sum_{\lambda_j \leqslant t} 1.$$

Всегда $D^* \leqslant D \leqslant eD^*$ (см., например, в [6]).

Пусть L — класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ положительных функций, Φ — выпуклая функция из L,

$$D_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \ln M(\sigma) \leqslant \Phi(m\sigma) \quad (m \geq 1)\},$$

где $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Положим $D(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m(\Phi)$.

Наряду с рядом (2) введем в рассмотрение следующий ряд:

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q'(\lambda_n) e^{\lambda_n s}. \tag{5}$$

Так как Q — целая функция экспоненциального типа, то ряд (5) абсолютно сходится во всей плоскости, а его сумма F^* — целая функция.

Предположим, что введенная выше функция Φ такова, что

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty, \tag{6}$$

где φ — функция, обратная к Φ. Для наших целей потребуется следующий класс монотонных функций:

$$W(\varphi)=\left\{w\in L:\sqrt{x}\leqslant w(x),\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_1^x\frac{w(t)}{t^2}dt=0\right\}.$$

Пусть $\Gamma=\{\gamma\}$ — семейство кривых γ, введенное выше, и пусть для $F\in D(\Lambda)$

$$d(F;\gamma)\stackrel{def}{=}\varlimsup_{\substack{s\in\gamma\\ s\to\infty}}\frac{\ln|F(s)|}{\ln M(Re\,s)},\quad d(F)=\inf_{\gamma\in\Gamma}d(F;\gamma). \tag{7}$$

Через $\mu(\sigma)$ и $\mu^*(\sigma)$ обозначим максимальные члены рядов (2) и (5) соответственно.

В работе [7] доказан критерий выполнения равенства $d(F)=1$ для любой функции F из класса $D(\Phi)$.

В настоящей статье изучаются аналогичные свойства функций F из класса $\underline{D}(\Phi)$, где

$$\underline{D}(\Phi)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\underline{D}_m(\Phi),$$

$$\underline{D}_m(\Phi)=\{F\in D(\Lambda):\exists\{\sigma_n\}:0<\{\sigma_n\}\uparrow\infty,\ \ln M(\sigma_n)\leqslant\Phi(m\sigma_n)\ (m\geq 1)\}.$$

Нетрудно увидеть, что эти классы ($D(\Phi)$ и $\underline{D}(\Phi)$) в каком-то смысле „двойственны“, как, например, классы функций конечного R-порядка и конечного нижнего R-порядка. В связи с этим возникает естественная задача указать необходимые и достаточные условия, при которых $d(F)=1$ для любой функции F из $\underline{D}(\Phi)$.

Сформулируем основные результаты статьи.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Если выполняется условие*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{\lambda_n\leqslant x}\frac{1}{\lambda_n}=0, \tag{8}$$

то для любой функции $F\in\underline{D}(\Phi)$ и любого β $\quad(0<\beta\leqslant\frac{1}{5})$ существует множество E_β, нулевой нижней плотности, такое, что справедлива оценка

$$\varlimsup_{\substack{\sigma\in e_\beta\\ \sigma\to\infty}}\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\leqslant 2\beta+(1-2\beta)d(F;\gamma), \tag{9}$$

где $e_\beta=[0,\infty)\setminus E_\beta$, $\quad\gamma$ — любая кривая из семейства Γ, а $d(F;\gamma)$ — величина, определенная формулой (7).

Будем говорить, что последовательность $\left\{Q'(\lambda_n)\right\}$ $\quad W(\varphi)$-нормальна, если существует $\theta\in L$, такая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_1^x\frac{\theta(t)}{t^2}dt=0,\qquad -\ln\left|Q'(\lambda_n)\right|\leqslant\theta(\lambda_n)\quad(n\geq 1).$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Предположим, что последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$-нормальна.*

Для того, чтобы для любой функции $F\in\underline{D}(\Phi)$ выполнялось равенство $d(F)=1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (8).

Замечание. Условиям теорем 1, 2, например, удовлетворяет функция

$$\Phi(\sigma)=\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma)\quad(k\geq 1).$$

Следовательно, из них вытекают соответствующие результаты из [4], доказанные для случая $k = 1$.

Следствие. *Пусть для последовательности Λ выполняется условие (8), а последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$-нормальна. Если $F \in D(\Phi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ при всех $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ верна оценка:*

$$\ln \mu(\sigma) < (1+\varepsilon) \ln |F(s^*)| \quad (\sigma = Re\, s), \tag{10}$$

где s^* — некоторая точка кривой γ, обладающая свойством: $|Re\, s^* - \sigma| \leqslant \varepsilon\sigma$. Пусть $F \in D(\Lambda, R)$. Тогда $F \in D(\Phi)$ для $\Phi(\sigma) = e^{\sigma}$.

Если выполняется условие (8) (в этом случае $\varphi(x) = \ln x$), а последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$-нормальна, то из (10) получаем, что $\rho_R(F) = \rho_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться определениями порядков и оценкой $M(\sigma - \varepsilon) \leqslant K(\varepsilon)\mu(\sigma)$, справедливой для всех $\sigma > 0$ (см., например, в [6, гл. II, §6, п. 2]) ($\varepsilon > 0$ — любое, но фиксированное).

Видим, что следствие из теорем 1, 2 содержит приведенные выше результаты из работ [2], [3].

Приведем формулировки лемм, которые будут использованы для доказательств теорем.

Лемма 1 [8]. *Пусть $\Phi \in L$, и для функции φ, обратной к Φ, выполняется условие (6). Пусть далее $u(\sigma)$ — неубывающая, положительная и непрерывная на $[0, \infty)$ функция, причем*

$$\lim_{\sigma\to\infty} u(\sigma) = \infty, \quad \varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{u(\sigma)}{\ln \Phi(\sigma)} < \infty.$$

Пусть $\{x_n\}$ — любая последовательность, выбранная так, что

$$u(x_n) \leqslant C \ln \Phi(x_n), \quad 0 < C < \infty.$$

Предположим, что функция w принадлежит классу $W(\varphi)$. Если $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w(v) = e^{u(\sigma)},$$

то существует функция $w^* \in W(\varphi)$ вида $w^*(t) = \beta(t)w(t)$ $(\beta \in L)$, такая, что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$,

$$mes(E \cap [0, x_n]) \leqslant o(\varphi(v(x_n))) + 4 \int\limits_{v(x_1)}^{v(x_n)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = o(\varphi(v(x_n))), x_n \to \infty,$$

имеет место оценка

$$u\left(\sigma + \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) < u(\sigma) + o(1).$$

.

Лемма 2 [9]. *Пусть $F \in \underline{D}(\Phi)$, где $\Phi \in L$. Тогда существуют $m \geq 1$, последовательность $\sigma_j \uparrow \infty$ такие, что при $\sigma = \sigma_j$*

$$\ln \mu(\sigma) \leqslant \Phi(m\sigma), \quad \ln \mu^*(\sigma) \leqslant \Phi(m\sigma),$$

где $\mu(\sigma)$, $\mu^*(\sigma)$ — максимальные члены рядов (2) и (5) соответственно.

Если $F \in D(\Phi)$, то данные оценки верны при всех σ.

Лемма 3 [10]. *Пусть γ — кривая, соединяющая точку z_0 с окружностью $\{z : |z - z_0| = R\}$, состоящая из конечного числа кусочно-гладких жордановых кривых, а $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $D(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ и непрерывная в ее замыкании $\overline{D}(z_0; R)$. Пусть*

$$M = \max_{\overline{D}(z_0;R)} |g(t)|, \quad m = \max_{\gamma} |g(t)|.$$

Тогда при $0<\beta\leqslant\frac{1}{5}$ *для всех* z *из круга* $\overline{D}(z_0;\beta R)$ *верна оценка:*

$$|g(z)|\leqslant m^{1-2\beta}M^{2\beta}. \tag{11}$$

Отметим, что лемма 1 — утверждение типа Бореля-Неванлинны. Лемма 3 основана на теореме о двух константах и является аналогом известной леммы Карлемана-Мию. Лемма 2 очевидна (она следует из неравенств типа Коши).

2. Доказательство теоремы 1

Последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность. Следовательно,

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{n(x)}{x}<\infty,\quad \varlimsup_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}<\infty.$$

Проверяется, что

$$\sup_{x>0}\left|\sum_{\lambda_n\leqslant x}\frac{1}{\lambda_n}-\int\limits_0^x\frac{N(t)}{t^2}\right|=a<\infty.$$

Отсюда с учетом (8) получаем, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_0^x\frac{N(t)}{t^2}dt=0.$$

Положим $w(t)=\max(\sqrt{t},N(et))$. Ясно, что $w\in W(\varphi)$. Тогда, очевидно, существует функция $w^*\in W(\varphi)$ такая, что $w^*(x)=\beta(x)w(x)\quad(\beta\in L)$.

Пусть $v=v(\sigma)$, $p=p(\sigma)$ — решения уравнений

$$w_1(v)=3\ln\mu(\sigma),\quad w_1(p)=2\ln\mu^*(\sigma), \tag{12}$$

где $w_1(v)=\sqrt{\beta(x)}w(x)$. Положим

$$R_v=\sum_{\lambda_j>v}|a_j|\,e^{\lambda_j\sigma},\quad h=\frac{w_1(v)}{v},\quad v=v(\sigma).$$

Так как последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность, то $C=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}<\infty$. Следовательно, верна оценка (см., например, в [10])

$$R_v\leqslant C\mu(\sigma+h)\exp\left[-(1+o(1))w_1(v)\right]. \tag{13}$$

Рассмотрим функции $u(\sigma)=\ln 3+\ln\ln\mu(\sigma)$, $u^*(\sigma)=\ln 2+\ln\ln\mu^*(\sigma)$. Поскольку $F\in\underline{D}(\Phi)$, то согласно лемме 2 найдется последовательность $\{\tau_j\}\quad(0<\tau_j\uparrow\infty)$ такая, что

$$u(\sigma)\leqslant\ln\Phi(m\sigma),\quad u^*(\sigma)\leqslant\ln\Phi(m\sigma)\quad \sigma=\tau_j\quad(m\geq 1).$$

Следовательно, с учетом (12) при $\sigma=\tau_j$ $(j\geq 1)$ имеем

$$\ln w_1(v(\sigma))=u(\sigma)\leqslant\ln\Phi(m\sigma),\quad \ln w_1(p(\sigma))=u^*(\sigma)\leqslant\ln\Phi(m\sigma)\quad(m\geq 1).$$

Значит,

$$\frac{1}{\sigma}\leqslant\frac{m}{\varphi(w_1(v(\sigma)))},\quad \frac{1}{\sigma}\leqslant\frac{m}{\varphi(w_1(p(\sigma)))},\quad \sigma=\tau_j,\quad m\geq 1. \tag{14}$$

Учитывая условие (6) и то , что $\sqrt{x}\leqslant w_1(x)$, имеем

$$\varphi(x)\leqslant C_1\varphi(w_1(x)),\quad x\geq x_0\quad(0<C_1<\infty). \tag{15}$$

В итоге из (14) и (15) получим оценки

$$\frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{C_2}{\varphi(v(\sigma))}, \quad \frac{1}{\sigma} \leqslant \frac{C_2}{\varphi(p(\sigma))}, \quad \sigma = \tau_j \quad (0 < C_2 < \infty). \tag{16}$$

Далее, поскольку $w^* \in W(\varphi)$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{w^*(x)}{x\varphi(x)} = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_1^x \frac{w^*(t)}{t^2}\, dt = 0. \tag{18}$$

Очевидно, при замене условия $u(\sigma) \leqslant C \ln \Phi(\sigma)$ при $\sigma = \tau_j$ на $u(\sigma) \leqslant \ln \Phi(m\sigma)$ при $\sigma = \tau_j$ $(j \geq 1,\ m \geq 1)$ заключение леммы 1 останется тем же, если остальные условия оставить без изменений. Поэтому, применяя лемму 1 для функций u и w_1 и учитывая при этом (16)–(18), вне некоторого множества $E'_\beta \subset [0, \infty)$,

$$mes(E'_\beta \cap [0, \tau_j]) \leqslant o(\varphi(v(\tau_j))) + 4 \int\limits_{v(\tau_1)}^{v(\tau_j)} \frac{w^*(t)}{t^2}\, dt = o(\tau_j),\ \tau_j \to \infty, \tag{19}$$

при $\sigma \to \infty$ получаем, что

$$\mu(\sigma + (\beta^{-1} + 1)h(\sigma)) = \mu(\sigma)^{1+o(1)} \quad (0 < \beta \leqslant 1). \tag{20}$$

Следовательно, из (13), (20) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне E'_β

$$R_v \leqslant C\mu(\sigma)^{1+o(1)} \exp\left[-w_1(v)(1 + o(1))\right] = \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))}. \tag{21}$$

Пусть

$$P_a(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it).$$

Справедливы следующие формулы А.Ф. Леонтьева для коэффициентов [5]:

$$a_n = e^{-\alpha\lambda_n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \varphi_n(t) P_a(t + \alpha)\, dt,$$

где

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{q'_a(\lambda_n)} \int\limits_0^\infty \frac{q_a(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t}\, d\lambda, \quad q_a(\lambda) = \prod_{\lambda_n \leqslant a} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

а C — любой замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму q_a, то есть начало координат. Учитывая (21) и пользуясь формулами для коэффициентов, легко показать, что при $\sigma \to \infty$ вне E'_β (это делается точно так же, как и в [10])

$$|a_n|\, |Q'(\lambda_n)| e^{\lambda_n\sigma} \leqslant \mu(\sigma)^{-2(1+o(1))} + \mu(\sigma)^{o(1)} \max_{|\xi-\alpha| \leqslant h(\sigma)} |F(\xi)|\ (n \geq 1). \tag{22}$$

Пусть

$$R_p^* = \sum_{\lambda_n > p} |a_n| \left|Q'(\lambda_n)\right| e^{\lambda_n\sigma}, \quad p = p(\sigma).$$

Но $u^*(\sigma) \leqslant \Phi(m\sigma)$ при $\sigma = \tau_j$ ($\{\tau_j\}$ — последовательность, введенная выше), где $u^*(\sigma) = \ln 2 + \ln\ln \mu^*(\sigma)$. Поэтому, применяя лемму 1, из тех же рассуждений, при помощи которых была получена оценка для R_v, получаем, что

$$R_p^* \leqslant C\mu^*(\sigma)^{-2(1+o(1))}, \quad C = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n^2},$$

если $\sigma\to\infty$ вне некоторого множества $E_1\subset[0,\infty)$ (E_1 от β не зависит),

$$mes(E_1\cap[0,\tau_j])\leqslant o(\varphi(p(\tau_j)))=o(\tau_j)\quad \tau_j\to\infty. \tag{23}$$

Отсюда следует, что $\lambda_{k(\sigma)}\leqslant p(\sigma)$, если $\sigma\geq\sigma_1$ $\sigma\notin E_1$. Здесь $k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (5).

Пусть $E_\beta=E'_\beta\cup E_1$. Тогда, учитывая (14),(19), (23) и то, что $w^*\in W(\varphi)$, при $\tau_j\to\infty$ получаем, что

$$\frac{mes\big(E_\beta\cap[0,\tau_j]\big)}{\tau_j}\leqslant C_2\left[\frac{mes\big(E'_\beta\cap[0,\tau_j]\big)}{\varphi(v(\tau_j))}+\frac{mes\big(E_1\cap[0,\tau_j]\big)}{\varphi(p(\tau_j))}\right]=o(1).$$

Поскольку $R_v\leqslant1$, $R^*_p\leqslant1$ ($v=v(\sigma)$, $p=p(\sigma)$) при $\sigma\geq\sigma_3$, $\sigma\notin E_\beta$, то, очевидно,

$$1)\ \lambda_{\nu(\sigma)}\leqslant v(\sigma);\quad 2)\ \lambda_{k(\sigma)}\leqslant p(\sigma),$$

где $\nu(\sigma)$, $k(\sigma)$ — центральные индексы рядов (2), (5). Далее, для $\lambda_n\leqslant p(\sigma)$

$$\big|Q'(\lambda_n)\big|\leqslant\frac{2}{\lambda_1}\prod_{\lambda_j\leqslant p(\sigma)}\left|1+\frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}\right|.$$

Но при $\lambda_n\leqslant p(\sigma)$ и $\sigma\to\infty$

$$\ln\prod_{\lambda_j\leqslant p(\sigma)}\left(1+\frac{\lambda_n^2}{\lambda_j^2}\right)\leqslant n(p)\frac{\lambda_n}{p}+2N(p)\leqslant3N(ep)=o(\ln\mu^*(\sigma)),\ p=p(\sigma).$$

Так что для $\lambda_n\leqslant p(\sigma)$ и $\sigma\to\infty$ имеем: $\big|Q'(\lambda_n)\big|\leqslant\big[\mu^*(\sigma)\big]^{o(1)}$. Следовательно, $\mu^*(\sigma)=\big|a_kQ'(\lambda_k)\big|e^{\lambda_k\sigma}\leqslant\mu(\sigma)\big[\mu^*(\sigma)\big]^{o(1)}$, где $p=p(\sigma)$, $k=k(\sigma)$. Значит, $(1+o(1))\ln\mu^*(\sigma)\leqslant\ln\mu(\sigma)$ при $\sigma\to\infty$. Так что $w_1(p)=2\ln\mu^*(\sigma)<3\ln\mu(\sigma)=w_1(v)$ ($\sigma\geq\sigma_4$). Это означает, что $\lambda_{k(\sigma)}\leqslant p(\sigma)<v(\sigma)$ при $\sigma\geq\sigma_4$, $\sigma\notin E_\beta$. С учетом этого из (22) получаем, что при $\sigma\to\infty$ вне $E_\beta=E'_\beta\cup E_1$

$$\mu^*(\sigma)<1+\mu(\sigma)^{o(1)}\max_{|\xi-\alpha|\leqslant h(\sigma)}|F(\xi)|, \tag{24}$$

где $\alpha=\sigma+i\tau\quad(\alpha\in\gamma)$.

Дальнейшие рассуждения основаны на лемме 3. Пусть $\gamma(\alpha)$ — часть кривой, содержащейся в круге $\overline{D}(\alpha;h\beta^{-1})\quad(0<\beta\leqslant\frac{1}{5},h=h(\sigma))$. Применяя лемму 3, имеем [10]:

$$\max_{|\xi-\alpha|\leqslant h(\sigma)}|F(\xi)|\leqslant\big(2\big|F\big(z'_\alpha\big)\big|\big)^{1-2\beta}M^{2\beta}\big(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)\big), \tag{25}$$

где z'_α — некоторая точка из $\gamma(\alpha)$. Далее, учитывая (20), получим

$$\mu(\sigma)\leqslant M(\sigma)\leqslant M\big(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)\big)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\big|a_n\big|e^{\lambda_n\left(\sigma+\beta^{-1}h(\sigma)\right)}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\big(\sigma+\big(1+\beta^{-1}\big)h(\sigma)\big)\Big[n(v(\sigma))+\sum_{\lambda_n>v(\sigma)}e^{-h(\sigma)\lambda_n}\Big]<\mu(\sigma)^{1+o(1)}, \tag{26}$$

когда $\sigma\to\infty$ вне E'_β. Следовательно, с учетом оценок (25), (26) из (24) получаем, что при $\sigma\to\infty$ вне множества $E_\beta=E'_\beta\cup E_1$ нулевой нижней плотности

$$(1+o(1))\mu^*(\sigma)\leqslant2\big|F(z'_\alpha)\big|^{1-2\beta}\mu(\sigma)^{(1+o(1))2\beta},\quad z'_\alpha\in\gamma(\alpha).$$

Следовательно, при $\sigma\to\infty$ вне E_β

$$\frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)}\leqslant(1+o(1))2\beta+(1-2\beta)\frac{\ln\big|F(z'_\alpha)\big|}{\ln\mu(\sigma)},\quad 0<\beta\leqslant\frac{1}{5}. \tag{27}$$

Так как $\left|Re\ z'_\alpha - \sigma\right| \leqslant \beta^{-1}h$, учитывая оценки (26), окончательно получаем, что

$$\varlimsup_{\substack{\sigma\in e_\beta\\ \sigma\to\infty}} \frac{\ln\mu^*(\sigma)}{\ln\mu(\sigma)} \leqslant 2\beta + (1-2\beta)d(F;\gamma), \tag{28}$$

где $0<\beta\leqslant\frac{1}{5}$, $\quad e_\beta = [0,\infty)/E_\beta$.

Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Достаточность. Последовательность $\{Q'(\lambda_n)\}$ $W(\varphi)$-нормальна. Следовательно, существует $\theta\in L$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\int\limits_1^x \frac{\theta(t)}{t^2}dt = 0, \qquad -\ln\left|Q'(\lambda_n)\right| \leqslant \theta(\lambda_n) \quad (n\geq 1).$$

Положим $w(x)=\max(N(et),\theta(t),\sqrt{t})$. Ясно, что $w\in W(\varphi)$. Тогда существует $w^*\in W(\varphi)$ такая, что $w^*=\beta(t)w(t)$ $(\beta\in L)$. Пусть, как и в теореме 1, $v=v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w_1(v) = 3\ln\mu(\sigma),$$

где $w_1(t)=\sqrt{\beta(t)}w(t)$. При доказательстве теоремы 1 было установлено, что если $\sigma\in e_\beta$, то $\lambda_{\nu(\sigma)}\leqslant v(\sigma)$, $\lambda_{k(\sigma)}\leqslant v(\sigma)$, где $\nu(\sigma)$ — центральный индекс ряда (2), а $k(\sigma)$ — центральный индекс ряда (5). Те же оценки, в том числе и оценка (28), будут иметь место и в данном случае. Следовательно,

$$\mu(\sigma)\leqslant\mu^*(\sigma)\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| \leqslant \mu^*(\sigma)e^{\theta(v(\sigma))} = \mu^*(\sigma)\mu(\sigma)^{o(1)}$$

при $\sigma\in e_\beta$ и $\sigma\to\infty$. Так что при $\sigma\in e_\beta$ и $\sigma\to\infty$

$$(1+o(1))\ln\mu(\sigma)\leqslant\ln\mu^*(\sigma). \tag{29}$$

Но тогда из (28) следует, что

$$1\leqslant 2\beta+(1-2\beta)d(F,\gamma)\leqslant 1, \quad 0<\beta\leqslant\frac{1}{5}.$$

Устремляя β к нулю, отсюда окончательно получаем равенство $d(F,\gamma)=1$. Следовательно, $d(F)=1$.

Необходимость. Будем доказывать от противного. Пусть для любой функции $F\in\underline{D}(\Phi)$ выполняется равенство $d(F)=1$, но

$$\varlimsup_{x\to\infty}\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{\lambda_n\leqslant x}\frac{1}{\lambda_n} > 0. \tag{30}$$

Рассмотрим функцию

$$F(s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\left(1+\lambda_n\right)^2}\frac{\psi^2\left(\lambda_n\right)}{Q'\left(\lambda_n\right)}e^{\lambda_n s} \quad (s=\sigma+it),$$

где

$$\psi(\lambda)=\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)e^{-\frac{\lambda}{\lambda_n}}, \qquad Q(\lambda)=\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Поскольку $n(x)=O(x)$ при $x\to\infty$, то, учитывая (30), как и в [11], показывается, что

$$\ln\psi(x)\leqslant -dx\varphi(x) \quad (x>0), \quad 0<d<\infty. \tag{31}$$

Покажем, что $F \in \underline{D}(\Phi)$. Сначала оценим $\frac{1}{\left|Q'\left(\lambda_n\right)\right|}$. Из того, что последовательность $\left\{Q'\left(\lambda_n\right)\right\}$ $W(\varphi)$-нормальна, следует, что существует $\theta(x) \in L$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{\theta(t)}{t^2}\, dt = 0, \quad -\ln\left|Q'\left(\lambda_n\right)\right| \leqslant \theta(\lambda_n)\ (n \geq 1).$$

Отсюда видно, что, в частности,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}\varphi(x)} = 0.$$

С учетом (6) имеем

$$\varphi(x) \leqslant c\varphi(\sqrt{x}) \leqslant c\varphi\left(\frac{x}{2}\right) \quad (x \geq 4).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\theta(x)}{x\varphi(x)} = 0.$$

Поэтому

$$\theta(x) \leqslant \varepsilon(x)x\varphi(x), \quad x \geq x_0, \tag{32}$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Таким образом, учитывая (32), для любого $\delta > 0$ при некотором $C_1 = C_1(\delta)$ $(0 < C_1 < \infty)$ имеем

$$\frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \leqslant e^{\theta\left(\lambda_n\right)} \leqslant C_1 e^{\delta\lambda_n\varphi\left(\lambda_n\right)}\ (n \geq 1). \tag{33}$$

Зафиксируем δ, $0 < \delta < 2d$. Тогда из (31), (33) получаем, что

$$M(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n)^2} \frac{1}{|Q'(\lambda_n)|} \psi^2(\lambda_n) e^{\lambda_n\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n)^2} e^{\delta\lambda_n\varphi(\lambda_n)} e^{-2d\lambda_n\varphi(\lambda_n)} e^{\lambda_n\sigma} \leqslant C \max_{t\geq 0} \exp[(\delta - 2d)t\varphi(t) + t\sigma],$$

где $C = C_1C_2$, $C_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\lambda_n)^2}$. Заметим, что данный максимум достигается в точке $t^* \leqslant \Phi\left(\frac{\sigma}{2d-\delta}\right)$. Следовательно,

$$M(\sigma) \leqslant Ce^{\sigma t^*} \leqslant Ce^{\sigma\Phi\left(\frac{\sigma}{2d-\delta}\right)}.$$

Но Φ — возрастающая выпуклая функция. Следовательно, $\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \uparrow \infty$ при $\sigma \to \infty$. Значит, $M(\sigma) \leqslant Ce^{\Phi(\sigma)\Phi\left(\frac{\sigma}{2d-\delta}\right)} \leqslant Ce^{\Phi^2(A\sigma)}$, $\ 0 < A < \infty$. Следовательно, $M(\sigma) \leqslant Ce^{\Phi^2(B\sigma)}$ при некотором $B > A$ и при всех σ. Далее, из (6) следует, что $\Phi^2(\sigma) \leqslant \Phi(T\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_1$ $(0 < T < \infty)$. Учитывая это, окончательно получаем, что $\ln M(\sigma) \leqslant \Phi(k\sigma)$ (σ — любое, k — некоторое натуральное число). Это означает, что $F \in D(\Phi)$. Тем более, $F \in \underline{D}(\Phi)$.

В работе [11] показано, что $|F(\sigma)| \leqslant M < \infty$ $(0 \leqslant \sigma < \infty)$. Это означает, что $d(F; [0, \infty)) \leqslant 0$. Так что $d(F) \leqslant 0$. Получили противоречие. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varphi(x)} \sum_{\lambda_n \leqslant x} \frac{1}{\lambda_n} = 0.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Доказательство следствия. Поскольку $F \in D(\Phi)$, то в леммах 1 и 2 вместо x_n и σ_j можно брать непрерывные величины x и σ. Поэтому оценки (27), (29) будут справедливы вне некоторого множества E_β нулевой плотности, то есть

$$DE_\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{mes(E_\beta \cap [0,x])}{x} = 0.$$

Если $\sigma \in e_\beta = \mathbb{R}_+ \setminus E_\beta$, то оценка (10) вытекает из оценок (27), (29), если число β $(0 < \beta \leqslant \frac{1}{5})$ выбрать достаточно малым. Если $\sigma \in E_\beta$, положим $\sigma' = \inf\{x \in e_\beta : x > \sigma\}$. Так как $DE_\beta = 0$, то $\sigma' = (1 + o(1))\sigma$ при $\sigma \to \infty$ $(\sigma \in E_\beta)$. Значит, для любого $\sigma \in E_\beta$, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\sigma^* \in e_\beta$, $\sigma < \sigma^* < (1+\varepsilon_1)\sigma$. Тогда из (27), (29) получаем, что для любого $\varepsilon_2 > 0$ при $\sigma \geq \sigma_1(\varepsilon_2)$ и $\beta \leqslant \beta_0(\varepsilon_2)$

$$\ln \mu(\sigma) \leqslant \ln \mu(\sigma^*) < (1+\varepsilon_2) \ln |F(s^*)|,$$

где $s^* \in \gamma$, $|Re\, s^* - \sigma^*| \leqslant \beta^{-1}h$, $h = \frac{w_1(v(\sigma^*))}{v(\sigma^*)}$.

Так как $w_1 \in W(\varphi)$, то, учитывая первую оценку из (16), при $\sigma^* \to \infty$ имеем

$$\frac{h}{\sigma^*} = O\left(\frac{w_1(v(\sigma^*))}{v(\sigma^*)\varphi(v(\sigma^*))}\right) \to 0.$$

Значит, при $\sigma \geq \sigma_2(\varepsilon_1)$ получаем

$$|Re\, s^* - \sigma| \leqslant \beta^{-1}h + \varepsilon_1\sigma \leqslant 2\varepsilon_1\sigma.$$

Осталось взять $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда требуемая оценка (10) выполняется при $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Pólya *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen* // Math. Z. V. 29. 1929. P. 549–640.
2. Шеремета М.Н. *О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле* // Математ. заметки. Т. 33, вып. 2. 1983. С. 235–245.
3. Гайсин А.М. *Поведение суммы ряда Дирихле заданного роста* // Математ. заметки. Т. 50, вып. 4. 1991. С. 47–56.
4. Гайсин А.М., Латыпов И.Д. *Асимптотическое поведение суммы ряда Дирихле заданного роста на кривых* // Математ. заметки. Т. 78. № 1. 2005. С. 37–51.
5. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
6. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983. 175 с.
7. Юсупова Н.Н. *Поведение рядов Дирихле заданного роста на кривых* // Вестник УГАТУ. Т. 9. № 3 (23). 2007. С. 40–45.
8. Юсупова Н.Н. *Теорема типа Бореля-Неванлинны для функции заданного роста* // Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции „Студент и научно-технический прогресс“: Математика. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2006. С. 32.
9. Юсупова Н.Н. *Устойчивость логарифма максимального члена ряда Дирихле заданного роста* // VI Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике, физике и химии. Сборник трудов. Математика. Уфа: РИО БашГУ, 2006. С. 190–202.
10. Гайсин А.М. *Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Матем. сб. Т. 194. № 8. 2002. С. 55–82.
11. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58. № 2. 1994. С. 73–92.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru

Наркес Нурмухаметовна Юсупова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: YusupovaN@rambler.ru