Уфимский математический журнал. Том 1. № 2 (2009). С. 9-16.

УДК 517.51

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССА БЕСОВА В МЕТРИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

К.А. БЕКМАГАНБЕТОВ

Аннотация. В работе установлена точная оценка порядка приближения класса Бесова тригонометрическими полиномами в метрике анизотропных пространствах Лоренца.

Ключевые слова: пространства Бесова, пространства Лоренца, порядок приближения, ступенчатый крест.

1. Введение

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ — измеримая функция, заданная на $[0,1]^n$. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*_1,\ldots,*_n}(t_1,\ldots,t_n)$ обозначим функцию, полученную применением к первой невозрастающей перестановки, последовательно по переменным $x_1,\ldots,x_n$, при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)$, $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_n)$ удовлетворяют условиям, если $0<p_j<\infty$, то $0<q_j\leqslant\infty$, если же $p_j=\infty$, то и $q_j=\infty$ для $j=1,\ldots,n$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pq}}$ называется множество функций, для которых конечна

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pq}}} = \left(\int_0^1 .. \left(\int_0^1 \left|t_1^{1/p_1}..\,t_n^{1/p_n} f^{*_1,..,*_n}(t_1,..,t_n)\right|^{q_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{q_2/q_1}..\frac{dt_n}{t_n}\right)^{1/q_n}.$$

Здесь выражение $\left(\int_0^1 (G(s))^q\frac{ds}{s}\right)^{1/q}$ при $q=\infty$ понимается как $\sup_{s>0}G(s)$.

Для функций $f\in L_{\mathbf{pr}}$ обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f)e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}$ — коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе, $\rho(\mathbf{s})=\{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^n : [2^{s_i-1}]\leqslant|k_i|<2^{s_i}, i=1,\ldots,n\}$, $(\mathbf{k},\mathbf{x})=\sum_{j=1}^n k_jx_j$.

Анизотропным пространством Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\theta}$ ([1], [2]) называется множество функций f из $L_{\mathbf{pr}}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\theta}} = \left\|\left\{\mathbf{2}^{(\alpha,\mathbf{s})}\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}}\right\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n}\right\|_{l_\theta},$$

где $\mathbf{0}<\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)<\infty$, $\mathbf{0}<\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)\leqslant\infty$, $\|\cdot\|_{l_\theta}$ — норма дискретного пространства Лебега l_θ со смешанной метрикой.

Bekmaganbetov K.A. About order of approximation of Besov classes in metric of anisotropic Lorentz spaces.

Поступила 8 мая 2009 г.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, где $\gamma_j > 0$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и

$$Q^n(\gamma, N) = \bigcup_{(\mathbf{s},\gamma)<N} \rho(\mathbf{s}), \quad T_{Q^n(\gamma,N)} = \left\{ t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in Q^n(\gamma,N)} b_{\mathbf{k}} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right\}.$$

$E_{\gamma,N}(f)_{L_{\mathbf{pr}}}$ — наилучшее приближение функции f полиномами из $T_{Q^n(\gamma,N)}$ в метрике $L_{\mathbf{pr}}$, $S_{\gamma,N}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in Q^n(\gamma,N)} a_{\mathbf{k}}(f) e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$ – частичная сумма ряда Фурье функции f.

К.И. Бабенко в работе [3] было предложено приближать функции многих переменных полиномами со спектром из гиперболических крестов. В дальнейшем вопросам приближения функций из различных классов гладких функций полиномами со спектром из гиперболических крестов были посвящены работы С.А. Теляковского [4], Б.С. Митягина [5], Я.С. Бугрова [6], Н.С. Никольской [7], Э.М. Галеева [8], В.Н. Темлякова [9], Динь Зунга [10], Н.Н. Пустовойтова [11], Б.С. Кашина и В.Н. Темлякова [12], А.С. Романюка [13], [14], Г.А. Акишева [2].

Отметим, что в работах [3]–[14] изучались вопросы теории приближений функций в метрике изотропных пространств Лебега, а в работе [2] — анизотропных пространств Лоренца, имеющих природу пространств со смешанной метрикой.

Основным результатом работы [2] является следующая теорема.

Теорема [2]**.** *Пусть* $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leqslant \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) < \infty$, $0 < \alpha_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \ldots = \alpha_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < \alpha_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n + \frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n}$, $\gamma_j = (\alpha_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})/(\alpha_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда для* $\tau_j \leqslant \theta_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, l < \nu$, $\theta_j < \tau_j < +\infty$, $j = l+1, \ldots, n$ *справедливо неравенство*

$$C 2^{-\left(\alpha_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)N} N^{\sum_{j=l+2}^n \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant E_{\gamma,N}\left(B^{\alpha\tau}_{\mathbf{p}\theta}\right)_{L_{\mathbf{q}\theta}} \leqslant C_1 2^{-\left(\alpha_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)N} N^{\sum_{j=l+1}^n \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)},$$

где $E_{\gamma,N}\left(B^{\alpha\tau}_{\mathbf{p}\theta}\right)_{L_{\mathbf{q}\theta}} = \sup\limits_{\|f\|_{B^{\alpha\tau}_{\mathbf{p}\theta}} \leqslant 1} E_{\gamma,N}(f)_{L_{\mathbf{q}\theta}}$.

Как видно, в данной теореме не совпадают по порядку нижняя и верхняя оценки. Кроме того, не естественно для анизотропных пространств выглядит условие $0 < \alpha_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \ldots = \alpha_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < \alpha_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n + \frac{1}{q_n} - \frac{1}{p_n}$, которое накладывает некоторую упорядоченность на гладкостные и метрические характеристики пространств.

В данной работе нам удалось доказать результат, лишенный выше указанных недостатков.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leqslant \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n), \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n), \mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leqslant \infty$, $\alpha_{j_0} + 1/q_{j_0} - 1/p_{j_0} = \min\{\alpha_j + 1/q_j - 1/p_j : j = 1, \ldots, n\}$ *и* $\alpha_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} > 0$, $\gamma_j = \frac{\alpha_j + 1/q_j - 1/p_j}{\alpha_{j_0} + 1/q_{j_0} - 1/p_{j_0}}$, $1 \leqslant \gamma'_j \leqslant \gamma_j$, $j = 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$E_{\gamma',N}\left(B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}\right)_{L_{\mathbf{q}\theta}} \asymp 2^{-\left(\alpha_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right)N} N^{\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}} \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)_+}, \tag{1}$$

где $A = \{j : \gamma'_j = \gamma_j, j = 1, \ldots, n\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$, $(a)_+ = \max(a, 0)$.

2. Вспомогательные утверждения

Сформулируем в виде леммы частный случай теоремы вложения из работы Е.Д. Нурсултанова [1].

Лемма 1 ([1]). *Пусть* $\mathbf{1} \leqslant \mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \leqslant \infty$ *и* $\sigma = \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}$, *тогда*

$$B^{\sigma\theta}_{\mathbf{pr}} \hookrightarrow L_{\mathbf{q}\theta}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие множества:

$$Y^n(\gamma, N) = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^n_+ : \sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j \geq N \right\},$$

$$\aleph^n(\gamma, N) = \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^n_+ : \sum_{j=1}^{n} \gamma_j s_j = N \right\}.$$

Пусть $\mathbf{b}$ — мультииндекс $(b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$. Далее под записью $\bar{\mathbf{b}}$ будем понимать мультииндекс $(b_1, \ldots, b_{n-1})$.

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbf{0} < \gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n) \leqslant \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < \infty$, $\beta > 0$ *и* $\mathbf{0} < \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\left\| \{2^{-\beta(\gamma, \mathbf{s})}\}_{\mathbf{s} \in Y^n(\gamma', N)} \right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}^n_+)} \leqslant C 2^{-\beta\delta N} N^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\varepsilon_j}},$$

где $\delta = \min\{\frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \ldots, n\}$, $A = \{j : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta, j = 1, \ldots, n\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$.

Доказательство проведем индукцией по размерности n.

Пусть $n = 2$. По определению множества $Y^2(\gamma', N)$ и согласно неравенства Минковского получаем, что

$$\left\| \{2^{-\beta(\gamma, \mathbf{s})}\}_{\mathbf{s} \in Y^2(\gamma', N)} \right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}^2_+)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\{ \left(\sum_{s_2 < N/\gamma'_2} \left(\sum_{s_1 \geq (N - \gamma'_2 s_2)/\gamma'_1} 2^{-\beta(\gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2)\varepsilon_1} \right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{s_2 \geq N/\gamma'_2} \left(\sum_{s_1 \geq 0} 2^{-\beta(\gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2)\varepsilon_1} \right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \left\{ \left(\sum_{s_2 < N/\gamma'_2} 2^{-\beta(\frac{\gamma_1}{\gamma'_1}(N - \gamma'_2 s_2) + \gamma_2 s_2)\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} + \left(\sum_{s_2 \geq N/\gamma'_2} 2^{-\beta\gamma_2 s_2 \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} \right\} =$$

$$= C_2 \left\{ J_1 + J_2 \right\}. \tag{2}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Для оценки J_1 воспользуемся соотношением

$$\sum_{k<N} 2^{\alpha k}(N-k)^\tau \asymp \begin{cases} N^\tau & \text{при} \quad \alpha < 0 \\ N^{\tau+1} & \text{при} \quad \alpha = 0 \\ 2^{\alpha N} & \text{при} \quad \alpha > 0 \end{cases}, \quad (\tau \geq 0). \tag{3}$$

$$J_1 = \left(\sum_{s_2 < N/\gamma'_2} 2^{-\beta(\frac{\gamma_1}{\gamma'_1}(N - \gamma'_2 s_2) + \gamma_2 s_2)\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} =$$

$$= 2^{-\beta\frac{\gamma_1}{\gamma'_1}N} \left(\sum_{s_2 < N/\gamma'_2} 2^{-\beta(\frac{\gamma_2}{\gamma'_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma'_1})\gamma'_2 s_2 \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}} \asymp 2^{-\beta\delta_2 N} N^{\sum_{j \in A_2 \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\varepsilon}_j}, \tag{4}$$

$$J_2=\left(\sum_{s_2\geq N/\gamma_2'}2^{-\beta\gamma_2 s_2\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}}\asymp 2^{-\beta\frac{\gamma_2}{\gamma_2'}N}\leqslant C_3 2^{-\beta\delta_2 N}, \tag{5}$$

здесь $\delta_2=\min\{\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}, j=1,2\}$, $A_2=\{j:\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}=\delta_2, j=1,2\}$, $j_1=\min\{j:j\in A_2\}$.

Подставляя (4) и (5) в (2), убеждаемся в справедливости леммы при $n=2$.

Положим, что лемма верна для $n-1\geq 2$, то есть справедливо неравенство

$$\left\|\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\}_{\mathbf{s}\in Y^{n-1}(\gamma,N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^{n-1})}\leqslant C_4 2^{-\beta\delta_{n-1}N}N^{\sum_{j\in A_{n-1}\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\varepsilon_j}}, \tag{6}$$

где $\delta_{n-1}=\min\{\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}, j=1,\ldots,n-1\}$, $A_{n-1}=\{j:\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}=\delta_2, j=1,\ldots,n-1\}$, $j_1=\min\{j:j\in A_{n-1}\}$, и докажем ее для n. По определению множества $Y^n(\gamma',N)$ и согласно неравенства Минковского получаем, что

$$\left\|\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^n)}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\left\{\left(\sum_{s_n<N/\gamma_n'}\left(2^{-\beta\gamma_n s_n}\left\|\{2^{-\beta(\bar\gamma,\bar{\mathbf{s}})}\}_{\bar{\mathbf{s}}\in Y^{n-1}(\bar{\gamma}',N-\gamma_n's_n)}\right\|_{l_{\bar\varepsilon}(\mathbb{Z}_+^{n-1})}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{s_n\geq N/\gamma_n'}\left(2^{-\beta\gamma_n s_n}\left\|\{2^{-\beta(\bar\gamma,\bar{\mathbf{s}})}\}_{\bar{\mathbf{s}}\in\mathbb{Z}_+^{n-1}}\right\|_{l_{\bar\varepsilon}(\mathbb{Z}_+^{n-1})}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\right\}=C_1\left\{J_3+J_4\right\}. \tag{7}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности. Для оценки J_3 воспользуемся неравенством (6) и соотношением (3), тогда получим

$$J_3\leqslant\left(\sum_{s_n<N/\gamma_n'}\left(2^{-\beta\gamma_n s_n}C_4 2^{-\beta\delta_{n-1}(N-\gamma_n's_n)}(N-\gamma_n's_n)^{\sum_{j\in A_{n-1}\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\varepsilon_j}}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}=$$

$$=C_4 2^{-\beta\delta_{n-1}N}\left(\sum_{s_n<N/\gamma_n'}\left(2^{-\beta(\frac{\gamma_n}{\gamma_n'}-\delta_{n-1})\gamma_n's_n}(N-\gamma_n's_n)^{\sum_{j\in A_{n-1}\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\varepsilon_j}}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\asymp$$

$$\asymp 2^{-\beta\delta_n N}N^{\sum_{j\in A_n\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\varepsilon_j}}, \tag{8}$$

$$J_4\leqslant C_5\left(\sum_{s_n\geq N/\gamma_n'}2^{-\beta\gamma_n\varepsilon_n s_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\asymp 2^{-\beta\frac{\gamma_n}{\gamma_n'}N}\leqslant C_6 2^{-\beta\delta_n N}, \tag{9}$$

здесь $\delta_n=\min\{\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}, j=1,\ldots,n\}$, $A_n=\{j:\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}=\delta_n, j=1,\ldots,n\}$, $j_1=\min\{j:j\in A_n\}$.

Подставляя (8) и (9) в (7), получаем, что

$$\left\|\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma,N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^n)}\leqslant C_7 2^{-\beta\delta_n N}N^{\sum_{j\in A_n\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\varepsilon_j}},$$

где $\delta_n=\min\{\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}, j=1,\ldots,n\}$, $A_n=\{j:\frac{\gamma_j}{\gamma_j'}=\delta_n, j=1,\ldots,n\}$, $j_1=\min\{j:j\in A_n\}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $\mathbf{0}<\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)<\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$ *и* $\mathbf{0}<\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\leqslant\infty$. *Тогда*

$$\left\|\left\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\right\}_{\mathbf{s}\in\aleph^n(\gamma,N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^n)}\asymp 2^{-\beta N}N^{\sum_{j=2}^n\frac{1}{\varepsilon_j}}.$$

Доказательство проведем индукцией по размерности n.
Пусть $n=2$. По определению множества $\aleph^2(\gamma,N)$ имеем

$$\left\|\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\}_{\mathbf{s}\in\aleph^2(\gamma,N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^2)}=\left(\sum_{s_2\leqslant N/\gamma_2}\sum_{s_1=(N-\gamma_2 s_2)/\gamma_1}2^{-\beta\varepsilon_2(\gamma_1 s_1+\gamma_2 s_2)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}}=$$

$$=2^{-\beta N}\left(\sum_{s_2\leqslant N/\gamma_2}1\right)^{\frac{1}{\varepsilon_2}}\asymp 2^{-\beta N}N^{\frac{1}{\varepsilon_2}}.$$

Положим, что лемма верна для $n-1\geq 2$, то есть справедливо отношение

$$\left\|\left\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\right\}_{\mathbf{s}\in\aleph^{n-1}(\gamma,N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^{n-1})}\asymp 2^{-\beta N}N^{\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_j}},\tag{10}$$

и докажем ее для n. По определению множества $\aleph^n(\gamma,N)$ и согласно (10) получаем, что

$$\left\|\left\{2^{-\beta(\gamma,\mathbf{s})}\right\}_{\mathbf{s}\in\aleph^{n}(\gamma,N)}\right\|_{l_\varepsilon(\mathbb{Z}_+^{n})}=$$

$$=\left(\sum_{s_n\leqslant N/\gamma_n}\left(2^{-\beta\gamma_n s_n}\left\|\left\{2^{-\beta\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j s_j}\right\}_{\bar{\mathbf{s}}\in\aleph^{n-1}(\bar\gamma,N-\gamma_n s_n)}\right\|_{l_{\bar\varepsilon}(\mathbb{Z}_+^{n-1})}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\asymp$$

$$\asymp\left(\sum_{s_n\leqslant N/\gamma_n}\left(2^{-\beta\gamma_n s_n}2^{-\beta(N-\gamma_n s_n)}(N-\gamma_n s_n)^{\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_j}}\right)^{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\asymp$$

$$\asymp 2^{-\beta N}\left(\sum_{s_n\leqslant N/\gamma_n}(N-\gamma_n s_n)^{\varepsilon_n\sum_{j=2}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_j}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}}\asymp 2^{-\beta N}N^{\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\varepsilon_j}}.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Пусть $f\in B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}$. Так как

$$\Delta_{\mathbf{s}}\left(f-S_{\gamma',N}(f)\right)=\begin{cases}0, & \mathbf{s}\notin Y^n(\gamma',N)\\ \Delta_{\mathbf{s}}(f), & \mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)\end{cases},$$

то согласно лемме 1 и неравенству Гельдера получаем

$$\|f-S_{\gamma',N}(f)\|_{L_{\mathbf{q}\theta}}=\left\|\sum_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\Delta_{\mathbf{s}}(f)\right\|_{L_{\mathbf{q}\theta}}\leqslant$$

$$\leqslant C_8\left\|\sum_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\Delta_{\mathbf{s}}(f)\right\|_{B_{\mathbf{p}\,\mathbf{r}}^{\left(\frac{1}{\mathbf{p}}-\frac{1}{\mathbf{q}}\right)\theta}}=C_8\left\|\left\{2^{(\frac{1}{\mathbf{p}}-\frac{1}{\mathbf{q}},\mathbf{s})}\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}}\right\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\right\|_{l_\theta}=$$

$$=C_8\left\|\left\{2^{-(\alpha+\frac{1}{\mathbf{q}}-\frac{1}{\mathbf{p}},\mathbf{s})}2^{(\alpha,\mathbf{s})}\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}}\right\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\right\|_{l_\theta}\leqslant$$

$$\leqslant C_8\left\|\left\{2^{(\alpha,\mathbf{s})}\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}}\right\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\right\|_{l_\tau}\left\|\left\{2^{-(\alpha+\frac{1}{\mathbf{q}}-\frac{1}{\mathbf{p}},\mathbf{s})}\right\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)}\right\|_{l_\varepsilon}\leqslant$$

$$\leqslant C_8 \left\| \left\{ 2^{-(\alpha_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}})(\gamma,\mathbf{s})} \right\}_{\mathbf{s}\in Y^n(\gamma',N)} \right\|_{l_\varepsilon} \|f\|_{B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}},$$

здесь ε таково, что $\dfrac{1}{\varepsilon} = \left(\dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{\tau}\right)_+$.

Далее, применяя лемму 2, получаем

$$\|f - S_{\gamma',N}(f)\|_{L_{\mathbf{q}\theta}} \leqslant C_9 \|f\|_{B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}} \cdot 2^{-\left(\alpha_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)N} N^{\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+},$$

где $A = \{j : \gamma'_j = \gamma_j, j = 1,\ldots,n\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$, $(a)_+ = \max(a, 0)$.

Верхняя оценка доказана.

Докажем нижнюю оценку. Пусть $A = \{j : \gamma'_j = \gamma_j, j = 1,\ldots,n\}$, $j_1 = \min\{j : j \in A\}$, $B = \{j : \theta_j < \tau_j, j = 1,\ldots,n\}$ и $B' = A \cap B \cup \{j_1\}$. Положим $\mathbf{s_0} = (s^0_1,\ldots,s^0_n)$, где $s^0_j = s_j$ при $j \in B'$ и $s^0_j = 0$ при $j \notin B'$, $\widetilde{\mathbf{s}} = (s_{j_1},\ldots,s_{j_{|B'|}})$, $\widetilde{\gamma}' = (\gamma'_{j_1},\ldots,\gamma'_{j_{|B'|}})$, где $j_i \in B'$, $i = 1,\ldots,|B'|$ и $j_1 < \ldots < j_{|B'|}$. Рассмотрим функцию

$$f(\mathbf{x}) = N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \sum_{(\gamma',\mathbf{s_0})=N} \prod_{j=1}^{n} 2^{-(\alpha_j+1-\frac{1}{p_j})s^0_j} \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s_0})} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})}.$$

Функция $f \in L_{\mathbf{pr}}$, так как является полиномом с конечным спектром. Согласно теореме Харди-Литтлвуда

$$\left\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s})} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right\|_{L_{\mathbf{pr}}} \asymp \prod_{j=1}^{n} 2^{(1-\frac{1}{p_j})s_j}. \tag{11}$$

В случае $|B'| = 1$ нижняя оценка элементарным образом получается из определения функции $f(\mathbf{x})$ и оценки (11). Пусть $|B'| > 1$, тогда, согласно (11) и лемме 3 при $\beta = 0$, получаем

$$\|f\|_{B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}} = \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{n} 2^{\alpha_j s_j} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}} \right\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^n_+} \right\|_{l_\tau} =$$

$$= N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{n} 2^{\alpha_j s^0_j} \cdot 2^{-(\alpha_j+1-\frac{1}{p_j})s^0_j} \left\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s_0})} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right\|_{L_{\mathbf{pr}}} \right\}_{\mathbf{s_0}\in\aleph^n(\gamma',N)} \right\|_{l_\tau} \asymp$$

$$\asymp N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \chi_{\aleph^n(\gamma,N)}(\mathbf{s_0}) \right\}_{\mathbf{s_0}\in\aleph^n(\gamma,N)} \right\|_{l_\tau} \asymp$$

$$\asymp N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \chi_{\aleph^{|B'|}(\widetilde{\gamma},N)}(\tilde{\mathbf{s}}) \right\}_{\tilde{\mathbf{s}}\in\aleph^{|B'|}(\widetilde{\gamma},N)} \right\|_{l_\tau} \asymp$$

$$\asymp N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \cdot N^{\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} = C_{10}. \tag{12}$$

С другой стороны, согласно определению функции $f(\mathbf{x})$, леммам 1, 3 и оценке (11), получаем

$$\|f - S_{\gamma,N}(f)\|_{L_{\mathbf{q}\theta}} \geq C_{11} \|f - S_{\gamma,N}(f)\|_{B^{\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mathbf{q}}\right)\theta}_{\lambda\ \kappa}} =$$

$$= C_{11} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{n} 2^{\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{q_j}\right)s_j} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f - S_{\gamma,N}(f))\|_{L_{\lambda\kappa}} \right\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^n_+} \right\|_{l_\theta} = C_{11} N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{n} 2^{\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{q_j}\right)s_j^0} \cdot 2^{-\left(\alpha_j+1-\frac{1}{p_j}\right)s_j^0} \left\| \sum_{\mathbf{k}\in\rho(\mathbf{s_0})} e^{2\pi i(\mathbf{k},\mathbf{x})} \right\|_{L_{\lambda\kappa}} \right\}_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}_+^n} \right\|_{l_\theta} \asymp$$

$$\asymp N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{n} 2^{\left(\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{q_j}\right)s_j^0} \cdot 2^{-\left(\alpha_j+1-\frac{1}{p_j}\right)s_j^0} \cdot 2^{\left(1-\frac{1}{\lambda_j}\right)s_j^0} \right\}_{\mathbf{s_0}\in\aleph^n(\gamma',N)} \right\|_{l_\theta} =$$

$$= N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{n} 2^{-\left(\alpha_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}\right)s_j^0} \right\}_{\mathbf{s_0}\in\aleph^n(\gamma',N)} \right\|_{l_\theta} =$$

$$= N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ 2^{-\left(\alpha_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)(\tilde{\gamma},\tilde{\mathbf{s_0}})} \right\}_{\tilde{\mathbf{s}}_0\in\aleph^n(\tilde{\gamma'},N)} \right\|_{l_{\tilde{\theta}}} =$$

$$= N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \left\| \left\{ 2^{-\left(\alpha_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)(\tilde{\gamma'},\tilde{\mathbf{s}})} \right\}_{\tilde{\mathbf{s}}\in\aleph^{|B'|}(\tilde{\gamma'},N)} \right\|_{l_{\tilde{\theta}}} \asymp$$

$$\asymp N^{-\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\tau_j}} \cdot 2^{-N\left(\alpha_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} N^{\sum_{j\in B'\setminus\{j_1\}}\frac{1}{\theta_j}} =$$

$$= C_{12} 2^{-N\left(\alpha_{j_0}+\frac{1}{q_{j_0}}-\frac{1}{p_{j_0}}\right)} N^{\sum_{j\in A\setminus\{j_1\}}\left(\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}. \tag{13}$$

Оценки (12), (13) дают нижнюю оценку в (1).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нурсултанов Е.Д. *Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения* // Докл. РАН. 2004. Т. 394, вып. 1. С. 16–19.
2. Акишев Г.А. *Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой* // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 8. С. 17–40.
3. Бабенко К.И. *О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами* // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, вып. 5. С. 982–985.
4. Теляковский С.А. *Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами* // Матем. сб. 1964. Т. 63(105). С. 426–444.
5. Митягин Б.С. *Приближение функций в пространствах L^p и C на торе* // Матем. сб. 1962. Т. 58(100), вып. 4. С. 397–414.
6. Бугров Я.С. *Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной* // Матем. сб. 1964. Т. 64(106), вып. 3. С. 410–418.
7. Никольская Н.С. *Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p* // Сиб. матем. ж. 1974. Т. 15. С. 395–412.
8. Галеев Э.М. *Линейные поперечники классов Гельдера-Никольского периодических функций многих переменных* // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 2. С. 189–199.
9. Темляков В.Н. *Приближение функции с ограниченной смешанной производной* // Труды МИ АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
10. Динь Зунг, *Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами* // Матем. сб. 1986. Т. 131(173), вып. 2. С. 251–271.
11. Пустовойтов Н.Н. *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности* // Anal. Math. 1994. Т. 20, вып. 1. С. 35–48.

12. Кашин Б.С., Темляков В.Н. *Об одной норме и апроксимационных характеристиках классов функций многих переменных* // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 69–99.
13. Романюк А.С. *Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных* // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70, вып. 2. С. 69–98.
14. Романюк А.С. *Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных* // Матем. сб. 2008. Т. 199, вып. 2. С. 93–114.

Куаныш Абдрахманович Бекмаганбетов,
Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова,
ул. Мунайтпасова, 5,
010010, г. Астана, Казахстан
E-mail: bekmaganbetov-ka@yandex.ru