Уфимский математический журнал. Том 1. № 2 (2009). С. 3-8.

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВО ТИПА ТЕОРЕМЫ ПЛОЩАДЕЙ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. В работе получено обобщение классического принципа площадей для областей на компактной римановой поверхности.

Ключевые слова: однолистные функции, теорема площадей, римановы поверхности.

Пусть S — класс функций, однолистных в круге $\Delta = \{z : \quad |z| < 1\}$ и имеющих разложение $\varphi(z) = z + a_2z^2 + \ldots$; Σ — класс функций, однолистных в дополнении $\Delta_e = \{w : \quad |w| < 1\}$ с разложением $\psi(w) = w + b_0 + b_1w^{-1} + b_2w^{-2} + \ldots$, Σ_0 — подкласс Σ, состоящий из функций ψ таких, что $0 \notin \psi(\Delta_e)$. Преобразование инверсии $\varphi(z) \mapsto \varphi^{-1}(z^{-1})$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями из S и Σ_0. Классический *принцип площадей* утверждает, что *для $\psi \in \Sigma$ площадь дополнения к области $\psi(\Delta_e)$ неотрицательна.* Аналитическое выражение этого факта — лемма Гроноулла (внешняя теорема площадей, 1914–1915 гг.):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_e} |\psi'^2(w) - 1|^2 |\mathrm{d}w| = \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1, \tag{1}$$

причем равенство имеет место только для "полных"отображений ψ (для которых площадь дополнения к $\psi(\Delta_e)$ равна нулю), см. [1, §1, гл. 1]. Много других утверждений было получено на основе принципа площадей для однолистных функций. Например, неравенства Грунского, дающие критерий принадлежности функции классу S (см. [1]), оценка Кебе-Бибербаха для $\varphi \in S$ и $z \in \Delta$ (см., например, [1, §5, гл. 1])

$$\left|\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)} - \frac{2\bar{z}}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4}{1-|z|^2}.$$

Эта оценка точная: равенство достигается лишь для "полных"отображений φ.

Целью данной работы является развитие и обобщение метода площадей на компактные римановы поверхности.

1. Одно следствие теоремы Стокса. Пусть $\mathbf{S}$ — компактная риманова поверхность. Обозначим через $W^{1,2}(\mathbf{S})$ пространство классов смежности $[f] = \{f + \mathrm{const}\}$ всех локально суммируемых функций $f : \mathbf{S} \to \mathbb{C}$, для которых дифференциал $\omega_f = \mathrm{d}f$ принадлежит гильбертову пространству $L^2(\mathbf{S})$ (см. [2, гл. 7, с. 181–182]). Напомним, что норма в $L^2(\mathbf{S})$ определяется следующим образом:

$$\|\omega\|^2_{L^2} = \int_{\mathbf{S}} \omega \wedge {}^*\bar{\omega},$$

где

$$\omega = u\,\mathrm{d}z + v\,\mathrm{d}\bar{z}, \qquad {}^*\omega = -\mathrm{i}u\,\mathrm{d}z + \mathrm{i}v\,\mathrm{d}\bar{z},$$

Abuzyarova N.F. Area theorem type inequality.

© Абузярова Н.Ф. 2009.

Поступила 19 мая 2009 года.

а z — какой-нибудь локальный параметр на $\mathbf{S}$. На множестве функций f с $\omega_f = \mathrm{d}f \in L^2(\mathbf{S})$ равенство
$$\|f\|^2 = \|\mathrm{d}f\|^2_{L^2}$$
определяет полунорму. Пространство $W^{1,2}(\mathbf{S})$ мы снабдим нормой
$$\|[f]\|^2_{W^{1,2}} = \|f\|^2 = \|\mathrm{d}f\|^2_{L^2}.$$

Ясно, что для двух представителей f_1 и f_2 одного и того же класса смежности $[f]$ будет $\mathrm{d}f_1 = \mathrm{d}f_2$, поэтому в дальнейшем элементы пространства $W^{1,2}(\mathbf{S})$ — классы смежности $[f]$ — будем обозначать просто f и называть функциями.

В терминах локального параметра z дифференциал $\omega_f = \mathrm{d}f$ может быть представлен в виде $\omega_f = \partial_z f\,\mathrm{d}z + \bar{\partial}_z f\,\mathrm{d}\bar{z}$, где $\partial_z = \partial/\partial z$, $\bar{\partial}_z = \partial/\partial\bar{z}$ Это представление есть локальная форма глобального разложения
$$\omega_f = \omega_{f,1} + \omega_{f,2},$$
где $\omega_{f,1} = \partial_z f\,\mathrm{d}z$, $\omega_{f,2} = \bar{\partial}_z f\,\mathrm{d}\bar{z}$ в терминах локальных координат (см. [3, гл. 1, 2]).

Элемент $f \in W^{1,2}(\mathbf{S})$ порождает дифференциалы второго порядка
$$\Lambda_{f,1} = \omega_{f,1} \wedge \bar{\omega}_{f,1}, \quad \Lambda_{f,2} = -\omega_{f,2} \wedge \bar{\omega}_{f,2},$$
которые в локальных координатах имеют вид
$$\Lambda_{f,1} = |\partial_z f|^2\,\mathrm{d}z \wedge\,\mathrm{d}\bar{z}, \qquad \Lambda_{f,2} = |\overline{\partial}_z f|^2\,\mathrm{d}z \wedge\,\mathrm{d}\bar{z}. \tag{2}$$
Заметим, что
$$\|f\|^2_{W^{1,2}} = \mathrm{i}\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} + \mathrm{i}\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}.$$

Утверждение 1. *Пусть $f \in W^{1,2}(\mathbf{S})$. Тогда оба интеграла $\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1}$ и $\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}$ конечны и имеет место соотношение*
$$\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} = \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}. \tag{3}$$

Доказательство.

По существу, сформулированное утверждение является одним из следствий теоремы Стокса (см. [2])

Предположим сначала, что $f \in C^2(\mathbf{S})$, и рассмотрим интеграл
$$\int\limits_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big). \tag{4}$$
Несложные вычисления приводят к следующему соотношению в терминах локальных координат
$$\mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big) = \big(|\partial_z f|^2 - |\overline{\partial}_z f|^2\big)\,\mathrm{d}z \wedge\,\mathrm{d}\bar{z}.$$
Используя последнее равенство, перепишем интеграл (4) в виде
$$\int\limits_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big) = \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} - \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}. \tag{5}$$
Из теоремы 6-4 [2, гл. 6, с. 167] следует, что
$$\int\limits_{\mathbf{S}} \mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}\bar{f}\big) = 0.$$

Учитывая (5), получаем
$$\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,1} = \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{f,2}.$$

Утверждение доказано для $f \in C^2(\mathbf{S})$. В случае произвольной $f \in W^{1,2}(\mathbf{S})$ применяем аппроксимацию в соответствующей норме гладкими функциями.

Отметим, что Предложение 1 утверждает следующее: для *точной* диференциальной формы первого порядка ω имеет место соотношение
$$\int\limits_{\mathbf{S}} \omega \wedge \bar{\omega} = 0.$$

2. Решение уравнения Лапласа в области на поверхности S и неравенство типа теоремы площадей. Рассмотрим конечносвязную область $\mathbf{\Omega}$ на $\mathbf{S}$ ($\mathbf{\Omega} \neq \emptyset,\ \mathbf{S}$) и мероморфную функцию R на $\mathbf{S}$, все полюсы которой принадлежат $\mathbf{\Omega}$. Обозначим $p_1, \ldots, p_N$ полюсы функции R, и пусть m_j — кратность полюса p_j, $j = 1, \ldots, N$. Имеет место

Теорема 1. *Существует функция* $Q : \mathbf{S} \to \mathbb{C}^\infty$*, обладающая свойствами:*
($Q1$) *Q равна нулю на множестве* $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$;
($Q2$) *Q — гармоническая на* $\mathbf{\Omega} \setminus \{p_1, \ldots, p_N\}$;
($Q3$) *разность $P = R - Q$ (более точно, класс смежности $[P] = \{P + const\}$) принадлежит пространству $W^{1,2}(\mathbf{S})$ и выполняется неравенство*
$$\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2} \Lambda_{P,1} \leq \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2} \Lambda_{P,2}. \tag{6}$$

Доказательство.

Предположим сначала, что область $\mathbf{\Omega}$ имеет кусочно аналитическую границу. Эта область сама может быть рассмотрена как риманова поверхность. Введем для нее *сопряженную поверхность* $\mathbf{\Omega}^*$ (см. [2, гл. 8, с. 217, задача 1]). А именно, пусть $\mathbf{\Omega}^*$ — еще одна копия $\mathbf{\Omega}$ и $* :\ \mathbf{\Omega} \to \mathbf{\Omega}^*$ — тождественное отображение, $p^* = *(p)$, обратное к которому $*^{-1}$ мы тоже будем обозначать $*$, так что $p^{**} = p$. Комплексная структура на $\mathbf{\Omega}^*$ определяется следующим образом. Если отображение $z = \Phi(p)$ задает локальные координаты в окрестности какой-нибудь точки $p_0 \in \mathbf{\Omega}$ с $\Phi(p_0) = 0$, то локальный параметр $\Phi^*(p^*)$ в окрестности точки p_0^* задается так: $\bar{z} = \overline{\Phi}(p) = \Phi^*(p^*)$. Определим "удвоенную"область ('Schottky double') $\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{\Omega} \cup \mathbf{\Omega}^* \cup \partial\mathbf{\Omega}$, отождествляя сопряженные граничные точки $p \in \partial\mathbf{\Omega}$ и $p^* \in \partial\mathbf{\Omega}^*$. В качестве локального параметра в окрестности таких отождествленных точек p_0 и p_0^* берется
$$z = \begin{cases} \chi(q), & p \in \mathbf{\Omega}, \\ \overline{\chi}(h^{-1}(q)), & q \in \mathbf{\Omega}^*, \end{cases}$$
где $z = \chi(p)$ — специальный локальный параметр, определенный в некоторой окрестности $V \subset \mathbf{S}$ точки p_0 и отображающий множество $V \cap \mathbf{\Omega}$ на область в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ так, что $\chi(p_0) = 0$ и связная часть $\partial\mathbf{\Omega} \cap V$, содержащая p_0, переходит взаимно однозначно и непрерывно в отрезок вещественной оси (см. [2, гл. 8, с. 217, задача 2]). Таким образом, область $\widetilde{\mathbf{\Omega}}$ с введенной комплексной структурой становится компактной римановой поверхностью.

Далее, согласно следствию 8-1 в [2, гл.8, с. 211], для каждой точки p_j, $j = 1, \ldots, N$, существуют функции g_j и g_j^*, обладающие следующими свойствами:
g_j — гармоническая в $\widetilde{\mathbf{\Omega}} \setminus \{p_j\}$, g_j^* — гармоническая в $\widetilde{\mathbf{\Omega}} \setminus \{p_j^*\}$;

g_j имеет в точке p_j ту же особенность, что и R, а g_j^* имеет в точке p_j^* особенность такую же, как $(-R \circ \ *)$.

Положим

$$Q_j(p) = \frac{1}{2}\left\{g_j(p) + g_j^*(p) - g_j(p^*) - g_j^*(p^*)\right\}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Функция Q_j удовлетворяет условиям:

(1) она гармонична в $\mathbf{\Omega} \setminus \{p_j\}$;

(2) функция $(R - Q_j)$ регулярна (не имеет особенности) в точке p_j;

(3) Q_j непрерывна в $\bar{\mathbf{\Omega}} \setminus \{p_j\}$, и $Q_j(p) = 0$ на границе $\partial\mathbf{\Omega}$.

Определим теперь функцию Q :

$$Q(p) = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{N} Q_j(p), & p \in \mathbf{\Omega}, \\ 0, & p \in \mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}, \end{cases}$$

и положим

$$P(p) = R(p) - Q(p).$$

Из свойств функции Q следует, что P совпадает с R на компактном множестве $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$, а также, что P гармонична всюду в $\mathbf{\Omega}$. Так как граница области $\mathbf{\Omega}$ предполагается кусочно аналитической, функция Q и ее производные $\partial_z Q$, $\bar{\partial}_z Q$ гармоничны и равны нулю на $\partial\mathbf{\Omega}$. Из всего вышесказанного можем заключить, что справедливо включение $P \in W^{1,2}(\mathbf{S})$.

В общем случае, когда граница $\partial\mathbf{\Omega}$ не является кусочно аналитической, область $\mathbf{\Omega}$ аппроксимируем возрастающей последовательностью областей $\mathbf{\Omega}_n$ с кусочно аналитическими границами. Для каждой области $\mathbf{\Omega}_n$ можно построить функцию Q_n описанным выше способом. Для перехода к пределу воспользуемся результатом А. Берлинга (см. [4, с. 53]), из которого следует равномерная по n ограниченность так называемых Lip $\frac{1}{2}$-норм (норм в пространстве Гельдера с показателем 1/2) функций Q_n, взятых вне объединения малых окрестностей точек $p_1, \ldots, p_N$. Ограниченность таких норм влечет слабую сходимость подпоследовательности $\{Q_n\}$ к некоторой функции Q, определенной в $\mathbf{\Omega}$. Введем, как и выше, $P = R - Q$ с этой предельной функцией Q.

Ясно, что для функций P и Q выполнены все требуемые условия, кроме, может быть, включения $P \in W^{1,2}(\mathbf{S})$. Это включение будет вытекать из следующего факта: функция P решает задачу Дирихле в области $\mathbf{\Omega}$ с граничными значениями, равными R, а решение задачи Дирихле минимизирует интеграл Дирихле, взятый по области $\mathbf{\Omega}$. $W^{1,2}(\mathbf{S})$ — норма (полунорма) функции P есть сумма ее интеграла Дирихле по $\mathbf{\Omega}$ и интеграла Дирихле функции R по $\mathbf{S} \setminus \mathbf{\Omega}$; оба эти интеграла конечны. Следовательно, получаем, что P принадлежит $W^{1,2}(\mathbf{S})$.

Докажем неравенство (6) для функции $P = R - Q$. Согласно (2), имеем

$$\Lambda_{P,1} = |\partial_z R - \partial_z Q|^2 \, \mathrm{d}z \wedge \, \mathrm{d}\bar{z}, \quad \Lambda_{P,2} = |\overline{\partial}_z Q|^2 \, \mathrm{d}z \wedge \, \mathrm{d}\bar{z},$$

где z — локальный параметр.

Заметим, что $|\mathrm{d}z| = \frac{\mathrm{i}}{2} \, \mathrm{d}z \wedge \, \mathrm{d}\bar{z}$. Верны соотношения

$$\frac{\mathrm{i}}{2} \int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{P,1} \geq \frac{\mathrm{i}}{2} \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \Lambda_{P,1}$$

и

$$\int\limits_{\mathbf{S}} \Lambda_{P,2} = \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \Lambda_{P,2}.$$

Учитывая эти соотношения и применяя (3) к функции P, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2}\Lambda_{P,1} \le \int\limits_{\mathbf{\Omega}} \frac{\mathrm{i}}{2}\Lambda_{P,2},$$

где в терминах локальных координат

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\,\Lambda_{P,1} = |\partial_z R - \partial_z Q|^2\,|\mathrm{d}z|, \quad \frac{\mathrm{i}}{2}\,\Lambda_{P,2} = |\overline{\partial}_z Q|^2\,|\mathrm{d}z|.$$

Теорема1 доказана.

Замечание 1. *Знак равенства в (6) имеет место в точности тогда, когда дополнение* $\mathbf{S}\setminus\mathbf{\Omega}$ *имеет нулевую площадь.*

Замечание 2. *Положим* $\mathbf{S} = \mathbb{C}^\infty$ *и пусть, как и выше,* $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ *— конечно-связная нетривиальная область,* $\Omega \ne \emptyset, \mathbb{C}^\infty$*. Рассмотрим мероморфную функцию* $R(w) = (w-\mu)^{-1}$, $w \in \Omega$ *с единственным простым полюсом* $\mu \in \Omega$*. Если* $\Phi(w)$ *— функция, конформно и однолистно отображающая область* Ω *на единичный круг* Δ*, то функция Грина области* Ω *имеет вид*

$$G_\Omega(w,\mu) = -\frac{1}{2}\log\left|\frac{\Phi(w-\Phi(\mu))}{1-\Phi(w)\overline{\Phi(\mu)}}\right|^2.$$

Функция

$$Q(w) = 2\partial_\mu G_\Omega = \frac{\Phi'(\mu)}{\Phi(w)-\Phi(\mu)} - \frac{\Phi'(\mu)}{1-\overline{\Phi(w)}\Phi(\mu)}$$

удовлетворяет условиям доказанной теоремы для выбранной R*. Для функции* $P = R - Q$ *имеем*

$$\partial_w P = -\frac{1}{(w-\mu)^2} + \frac{\Phi'(\mu)\Phi'(w)}{(\Phi(w)-\Phi(\mu))^2},$$

$$\overline{\partial}_w P = -\frac{\Phi'(\mu)\overline{\Phi'(w)}}{1-(\overline{\Phi(w)}\Phi(\mu))^2} = -\pi\overline{K_\Omega(w,\mu)},$$

где K_Ω *— воспроизводящее ядро Бергмана (см.* [5, с. 208, формула (2.3)]*).*

Неравенство (6) в данном случае будет иметь вид

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{1}{(w-\mu)^2} - \frac{\Phi'(\mu)\Phi'(w)}{(\Phi(w)-\Phi(\mu))^2}\right|^2 |dw| \le \frac{\pi|\Phi'(\mu)|^2}{(1-|\Phi(\mu)|^2)^2},$$

так как в силу свойств функции K_Ω

$$\int\limits_\Omega |\overline{\partial}_w P|^2|dw| = \pi^2\int\limits_\Omega |K_\Omega(w,\mu)|^2|dw| = \pi^2 K_\Omega(\mu,\mu) = \frac{\pi|\Phi'(\mu)|^2}{(1-|\Phi(\mu)|^2)^2}.$$

Переходя к интегрированию по Δ *получим*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\Delta \left|\frac{\varphi'(z)\varphi'(\lambda)}{(\varphi(z)-\varphi(\lambda))^2} - \frac{1}{(z-\lambda)^2}\right|^2 |dz| \le \frac{1}{(1-|\lambda|^2)^2},$$

где $\varphi = \Phi^{-1}$, $\lambda = \Phi(\mu)$*. В частности, при* $\lambda = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ *будет*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\Delta \left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi^2(z)} - \frac{1}{z^2}\right|^2 |dz| \le 1.$$

Если переписать последнее соотношение в терминах функции $\psi(w) = \varphi^{-1}(w^{-1})$*, которая, в силу условий на* φ*, принадлежит классу* Σ*, мы получим лемму Гроноулла (1).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев Н.А. *Принцип площадей в теории однолистных функций.* М.: Наука. 1975. 336 с.
2. G. Springer *Introduction to Riemann surfaces.* Addison-Welsey, USA. 1957. 307 p.
3. Форстер О. *Римановы поверхности.* М.: Мир. 1980. 248 с.
4. A. Beurling *The collected works of Arne Beurling.* Vol.1. Complex Analysis (L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger and J. Wermer, eds.). Birkhäuser Boston. Boston. 1989.
5. S. Bergman , M. Schiffer *Kernel functions and conformal mapping.* Compositio Math. V. 8. 1951. pp. 205–249.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки валиди, д. 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: a-natalia@bk.ru