

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭЙЗЕНХАРТА

З.Х. ЗАКИРОВА

Аннотация. В работе ведется исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[+ + - - - -]$, которые допускают проективные движения, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Общий метод определения псевдоримановых многообразий, которые допускают негомотетическую проективную группу G_r , был развит А.В.Аминовой. А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3 , которые допускают негомотетические проективные или аффинные преобразования. Эта проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдо-риманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта, называются *h-пространствами*. Известно, что проблема определения таких пространств зависит от типа *h*-пространства, т.е. от типа билинейной формы $L_X g_{ij}$, определенной характеристикой λ -матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$. Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры *h*-пространства.

В работе найдены метрики и определены квадратичные первые интегралы уравнений геодезических 6-мерных *h*-пространств типов $[(21 \dots 1)(21 \dots 1) \dots (1 \dots 1)]$.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Mathematics Subject Classification: 53C50, 53B30.

1. ВВЕДЕНИЕ

Линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее вектор скорости $T^i = dx^i/dt$ параллелен вдоль нее самой (см. [1]): $\nabla_t T = 0$. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (1)$$

где Γ_{jk}^i — компоненты связности псевдориманова многообразия (M, g) . Отметим, что здесь и далее по повторяющимся индексам идет суммирование.

Преобразование f псевдориманова многообразия M на себя называется *проективным преобразованием*, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Векторное поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

Z.KH. ZAKIROVA, ON SOME SPECIAL SOLUTIONS OF EISENHART EQUATION.

© ЗАКИРОВА З.Х. 2013.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-02-00457-а).

Поступила 27 декабря 2011 г.

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [2] (см. также [8])

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X, Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z), \quad (2)$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y, Z на M , где R — тензор кривизны.

В локальных координатах:

$$L_X \Gamma_{jk}^i = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j, \quad (3)$$

что равносильно

$$\begin{aligned} L_X \Gamma_{jk}^i &\equiv \partial_{jk} \xi^i + \xi^l \partial_l \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^l \partial_l \xi^i + \Gamma_{lk}^i \partial_j \xi^l + \Gamma_{jl}^i \partial_k \xi^l \equiv \\ &\equiv \xi_{,jk}^i + \xi^l R_{jlk}^i = \delta_j^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j. \end{aligned}$$

Если M — псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇ , то условие (2) эквивалентно уравнениям (см. [2], [8]):

$$L_X g = h, \quad (4)$$

$$\nabla h(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\varphi + g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \quad (5)$$

где $(Y, Z, W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1} \operatorname{div} X$. Уравнение (4) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, второе уравнение (5) называется *уравнением Эйзенхарта*.

Впервые проблема определения $2D$ римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, т.е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались С. Ли и М. Кенигсом (см. [3]). Другие важные результаты были получены А.З. Петровым в работе [4], который классифицировал геодезически эквивалентные псевдоримановы пространства V^3 . В дальнейшем, А.В. Аминова полностью решила эту задачу в [5]. Для риманова многообразия с размерностью > 2 похожая проблема была решена Г. Фубини в [6] и А.С. Солодовниковым в [7]¹, в их трудах содержится классификация римановых пространств с размерностью > 2 по локальным группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий. Заметим, что их выводы опирались на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Если отказаться от условия знакоопределенности, задача намного усложняется и требует совершенно нового метода решения.

В работе [8] А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3 , допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли.

Данная проблема не решена для псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (5). Задача определения таких пространств зависит от типа h -пространств, т.е. от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре λ -матрицы $(h - \lambda g)$ (см. [8]). Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc\dots]$, то мы будем называть соответствующее пространство — h -пространством типа $[abc\dots]$. Эти идеи впервые были высказаны П.А. Широковым (см. [10]). Таким образом, псевдориманово пространство, для которого существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называется *h -пространством*.

Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры псевдориманова пространства. В частности, для 6-мерного псевдориманова пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[+ + - - - -]$ возможны следующие типы:

- 1) $[(1\dots 1)\dots(1\dots 1)]$, т.е. $[111111]$, $[(11)1111]$, $[(111)111]$ и т.д.;

¹ Следует отметить, что полный обзор литературы по этой теме дан в работе [8] и в кандидатской диссертации автора [9].

- 2) $[1\bar{1}(1\dots 1)\dots(1\dots 1)]$, т.е. $[1\bar{1}1111]$, $[1\bar{1}(11)11]$, $[1\bar{1}(111)1]$ и т.д;
- 3) $[11\bar{1}\bar{1}(1\dots 1)\dots(1\dots 1)]$, т.е. $[(11)\bar{1}\bar{1}11]$, $[(11)(\bar{1}\bar{1})11]$, $[11\bar{1}\bar{1}(11)]$ и т.д;
- 4) $[(21\dots 1)\dots(1\dots 1)]$, т.е. $[21111]$, $[(21)111]$, $[(211)11]$ и т.д;
- 5) $[(21)11\bar{1}]$, $[(211)1\bar{1}]$, $[2(11)1\bar{1}]$;
- 6) $[(21\dots 1)(21\dots 1)(1\dots 1)(1\dots 1)]$, т.е. $[2211]$, $[(22)11]$, $[2(21)1]$, $[(21)(21)]$ и т.д;
- 7) $[2\bar{2}11]$, $[2\bar{2}(11)]$;
- 8) $[(31\dots 1)\dots(1\dots 1)]$, т.е. $[3111]$, $[(31)11]$, $[(311)1]$ и т.д;
- 9) $[311\bar{1}]$, $[(31)1\bar{1}]$;
- 10) $[321]$, $[3(21)]$, $[(32)1]$, $[(321)]$;
- 11) $[33]$, $[(33)]$;
- 12) $[411]$, $(41)1$, $[4(11)]$, $[(411)]$;
- 13) $[51]$, $[(51)]$.

Отметим, что h -пространства под номерами 1), 2), 3) были исследованы Г.Фубини в [6] и А.С. Солодовниковым в [7], h -пространства под номерами 4), 5), 8), 9) были исследованы А.В. Аминовой в [8], h -пространства под номерами 6), 7), 10), 11), 12), 13) были исследованы автором в кандидатской диссертации [9]. Некоторые результаты были опубликованы в [11]-[15].

Целью данной работы является исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[+ + - - - -]$. В частности, мы найдем метрики 6-мерных h -пространств типов $[22(11)]$, $[2(21)1]$, $[2(211)]$, $[(22)11]$, $[(221)1]$, $[(2211)]$, $[(22)(11)]$, $[(21)(21)]$ и определим первые квадратичные интегралы уравнений геодезических этих h -пространств. Метрика h -пространства типа $[2211]$ была получена автором в [11].

Основной метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомометрическую проективную группу G_r , был развит А.В. Аминовой (см. [8])¹. Используя в данной работе технику интегрирования в косономальном (подвижном) репере, мы найдем метрики рассматриваемых h -пространств.

Уравнение Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \quad (6)$$

в косономальном репере имеет вид (см. [8])²

$$X_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^n e_h (\bar{a}_{hq} \gamma_{\bar{h}pr} + \bar{a}_{ph} \gamma_{\bar{h}qr}) = \bar{g}_{pr} X_q \varphi + \bar{g}_{qr} X_p \varphi \quad (p, q, r = 1, \dots, n), \quad (7)$$

где

$$X_r \varphi \equiv \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \xi_{i,j} \xi^i \xi^j, \quad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

ξ_i^j — компоненты косономального репера, $\bar{g}_{pr} = e_p \delta_{\bar{p}}^r$ и \bar{a}_{pq} — канонические формы тензоров g_{pr} , a_{pq} , соответственно, $\gamma_{ik}^p = e_p \gamma_{l\bar{p}k}$ — компоненты связности в косономальном репере X . Коммутаторы векторных полей X_k and X_h определяются по формуле (см. [8])

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^n e_l (\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk}) X_{\bar{l}}, \quad (8)$$

¹ Впервые техника интегрирования в косономальном репере была применена в работах [16], [17].

² Отображение \sim , которое переводит одни индексы в другие, было впервые введено А.В. Аминовой в работах [16], [17] (см. также [8]) в определении косономального (подвижного) репера. Следует заметить, что данные статьи А.В. Аминовой можно найти в интернете по ссылке http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=8394. Опуская громоздкое определение косономального (подвижного) репера, достаточно привести несколько примеров, и читателям станет понятно действие отображения \sim . К примеру, для h -пространства типа $[2211]$ $\bar{1} = 2$, $\bar{2} = 1$, $\bar{3} = 4$, $\bar{4} = 3$, $\bar{5} = 5$, $\bar{6} = 6$; для h -пространства типа $[321]$ $\bar{1} = 3$, $\bar{2} = 2$, $\bar{3} = 1$, $\bar{4} = 5$, $\bar{5} = 4$, $\bar{6} = 6$; для h -пространства типа $[411]$ $\bar{1} = 4$, $\bar{2} = 3$, $\bar{3} = 2$, $\bar{4} = 1$, $\bar{5} = 5$, $\bar{6} = 6$. Эти же соотношения сохраняются и в случае кратных элементарных делителей, т.е. при наличии скобок в типах h -пространств, например, в случае $[22(11)]$, $[2(211)]$ и т.д.

что равносильно

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n (\gamma_{mkl} - \gamma_{lmk}) \bar{g}^{ml} X_l.$$

Отметим, что для 6-мерных h -пространств типа $[(21 \dots 1)(21 \dots 1) \dots (1 \dots 1)]$ $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ (см. [8]).

Для 6-мерных h -пространств типа $[(21 \dots 1)(21 \dots 1) \dots (1 \dots 1)]$ канонические формы \bar{g}_{pr} и \bar{a}_{pq} имеют вид (см. [4])

$$\bar{g}_{pr} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \lambda_6 \end{pmatrix},$$

где $e_1 = e_2, e_3 = e_4, e_i = \pm 1, (i = 1, 2, \dots, 6)$, $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ — вещественные функции, которые могут совпадать. Эти функции являются корнями характеристического уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$.

2. МЕТРИКА h -ПРОСТРАНСТВА ТИПА [22(11)]

Подставив канонические формы \bar{g}_{pr} и \bar{a}_{pq} из (9) в (7) и учитывая, что для h -пространства типа [22(11)] $\lambda_5 = \lambda_6, \tilde{1} = 2, \tilde{2} = 1, \tilde{3} = 4, \tilde{4} = 3, \tilde{5} = 5, \tilde{6} = 6$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} X_r \lambda_2 &= 0 \quad (r \neq 2), \quad X_r \lambda_4 = 0 \quad (r \neq 4), \quad X_r \lambda_6 = 0, \\ X_2(\lambda_2 - \varphi) &= X_4(\lambda_4 - \varphi) = 0, \quad \gamma_{121} = e_2 X_2 \varphi, \quad \gamma_{343} = e_4 X_4 \varphi, \\ \gamma_{142} = \gamma_{241} &= \frac{e_2 X_4 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_4}, \quad \gamma_{242} = -\frac{e_2 X_4 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_4)^2}, \quad \gamma_{324} = \gamma_{423} = \frac{e_4 X_2 \varphi}{\lambda_4 - \lambda_2}, \\ \gamma_{424} &= -\frac{e_4 X_2 \varphi}{(\lambda_4 - \lambda_2)^2}, \quad \gamma_{244} = \frac{e_4 X_2 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_4)^2}, \quad \gamma_{s\sigma s} = \frac{e_\sigma X_s \varphi}{(\lambda_s - \lambda_\sigma)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $r = 1, 2, \dots, 6, \sigma = 5, 6, s = 2, 4, \gamma_{56r}$ — произвольные. Остальные γ_{pqr} равны нулю.

Известно, для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$X_q \theta = \xi^i \partial_i \theta = 0, \quad (q = 1, \dots, m, i = 1, \dots, 6, m < 6), \quad (11)$$

где ξ^i — компоненты косономального репера, была вполне интегрируемой, т.е. чтобы она допускала $6 - m$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы ([2], см. также [8])

$$[X_q, X_r] = X_q X_r - X_r X_q = \sum_{p=1}^6 e_p (\gamma_{pqr} - \gamma_{prq}) X_{\tilde{p}} \quad (12)$$

линейно выражались через операторы X_q .

Используя формулы (10) и (12), выпишем коммутаторы операторов X_i ($i = 1, \dots, 6$) в рассматриваемом h -пространстве:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -e_1\gamma_{121}X_2, & [X_1, X_3] &= 0, & [X_2, X_3] &= e_4\gamma_{423}X_3, \\ [X_1, X_4] &= -e_2\gamma_{241}X_1, & [X_3, X_4] &= -e_3\gamma_{343}X_4, \\ [X_2, X_4] &= -e_2\gamma_{242}X_1 - e_1\gamma_{142}X_2 + e_4\gamma_{424}X_3 + e_3\gamma_{324}X_4, \\ [X_p, X_\sigma] &= -e_\tau\gamma_{\tau\sigma p}X_\tau, & [X_q, X_\sigma] &= e_\sigma\gamma_{\sigma q\sigma}X_\sigma - e_\tau\gamma_{\tau\sigma q}X_\tau, \\ [X_5, X_6] &= -e_5\gamma_{565}X_5 + e_6\gamma_{656}X_6, \end{aligned} \quad (13)$$

где $p = 1, 3$, $q = 2, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$ ($\sigma \neq \tau$).

Далее, составляя вполне интегрируемые системы (11) из (13), мы определим допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через θ^i . После чего, с помощью преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, мы можем обратить в нуль некоторые компоненты ξ^i введенного выше косономального репера. В частности, вполне интегрируемые системы из (13) являются системы: $X_1\theta = X_3\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$,

$X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta$, $X_3\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$. Обозначим решение первой системы — θ^2 , второй системы — θ^4 , решения третьей системы — θ^5 и θ^6 . Четвертая система имеет два независимых решения, одно из которых обозначим через θ^1 , а второе выберем совпадающим с θ^2 . Последняя система имеет также два независимых решения, одно обозначим через θ^3 , а второе выберем совпадающим с θ^4 . После преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ в новой системе координат, опустив штрихи, определим

$$\xi_p^i = P_p(x)\delta_p^i, \quad \xi_2^3 = \xi_2^4 = \xi_2^\sigma = \xi_4^1 = \xi_4^2 = \xi_4^\sigma = \xi_\sigma^\alpha = 0, \quad (14)$$

где $p = 1, 3$, $\sigma = 5, 6$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $P_p(x)$ — произвольные функции.

С помощью равенств (14) из той части уравнений (10), которая не содержит γ_{pqr} , найдем

$$2\varphi = \sum_{i=1}^6 f_i + c, \quad \lambda_i = f_i, \quad (15)$$

где $f_1 = f_2(x^2)$, $f_3 = f_4(x^4)$ — произвольные функции, $f_5 = f_6 = \lambda - \text{const}$, $c = \text{const}$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (13), с помощью формул (10) и (14) получим систему уравнений на компоненты ξ^j косономального репера:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \xi_1^1 \partial_1 \xi_2^1 - \xi_2^1 \partial_1 \xi_1^1 - \xi_2^2 \partial_2 \xi_1^1 = -f_2' \xi_2^2 \xi_1^1, \\ 2^\circ \quad & \xi_1^1 \partial_1 \xi_2^2 = -f_2' (\xi_2^2)^2, \\ 3^\circ \quad & \xi_3^3 \partial_3 \xi_1^1 = \xi_3^3 \partial_3 \xi_2^1 = \xi_3^3 \partial_3 \xi_2^2 = 0, \\ 4^\circ \quad & \partial_4 \xi_1^1 = \frac{f_4'}{f_2 - f_4} \xi_1^1, \\ 5^\circ \quad & \partial_4 \xi_2^1 = \frac{f_4'}{f_2 - f_4} \xi_2^1 - \frac{f_4'}{(f_2 - f_4)^2} \xi_1^1, \\ 6^\circ \quad & \partial_4 \xi_2^2 = \frac{f_4'}{f_2 - f_4} \xi_2^2, \\ 7^\circ \quad & \xi_3^3 \partial_3 \xi_4^3 - \xi_4^3 \partial_3 \xi_3^3 - \xi_4^4 \partial_4 \xi_3^3 = -f_4' \xi_4^4 \xi_3^3, \\ 8^\circ \quad & \xi_3^3 \partial_3 \xi_4^4 = -f_4' (\xi_4^4)^2, \\ 9^\circ \quad & \xi_1^1 \partial_1 \xi_3^3 = \xi_1^1 \partial_1 \xi_4^3 = \xi_1^1 \partial_1 \xi_4^4 = 0, \\ 10^\circ \quad & \partial_2 \xi_3^3 = \frac{f_2'}{f_4 - f_2} \xi_3^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11^\circ \quad \partial_2 \xi_4^3 &= \frac{f_2'}{f_4 - f_2} \xi_4^3 - \frac{f_2'}{(f_4 - f_2)^2} \xi_3^3, \\
12^\circ \quad \partial_2 \xi_4^4 &= \frac{f_2'}{f_4 - f_2} \xi_4^4, \\
13^\circ \quad \xi_1^1 \partial_1 \xi_\sigma^\sigma &= -\gamma_{\tau\sigma 1} \xi_\tau^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma), \\
14^\circ \quad \xi_1^1 \partial_1 \xi_\tau^\tau &= -\gamma_{\tau\sigma 1} \xi_\tau^\tau, \quad (\tau \neq \sigma), \\
15^\circ \quad \xi_3^3 \partial_3 \xi_\sigma^\sigma &= -\gamma_{\tau\sigma 3} \xi_\tau^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma), \\
16^\circ \quad \xi_3^3 \partial_3 \xi_\tau^\tau &= -\gamma_{\tau\sigma 3} \xi_\tau^\tau, \quad (\tau \neq \sigma), \\
17^\circ \quad \xi_2^1 \partial_1 \xi_\sigma^\sigma + \xi_2^2 \partial_2 \xi_\sigma^\sigma &= -\frac{f_2'}{f_2 - \lambda} \xi_2^2 \xi_\sigma^\sigma - \gamma_{\tau\sigma 2} \xi_\tau^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma), \\
18^\circ \quad \xi_2^1 \partial_1 \xi_\tau^\tau + \xi_2^2 \partial_2 \xi_\tau^\tau &= -\frac{f_2'}{f_2 - \lambda} \xi_2^2 \xi_\tau^\tau - \gamma_{\tau\sigma 2} \xi_\tau^\tau, \quad (\tau \neq \sigma), \\
19^\circ \quad \xi_4^3 \partial_3 \xi_\sigma^\sigma + \xi_4^4 \partial_4 \xi_\sigma^\sigma &= -\frac{f_4'}{f_4 - \lambda} \xi_4^4 \xi_\sigma^\sigma - \gamma_{\tau\sigma 4} \xi_\tau^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma), \\
20^\circ \quad \xi_4^3 \partial_3 \xi_\tau^\tau + \xi_4^4 \partial_4 \xi_\tau^\tau &= -\frac{f_4'}{f_4 - \lambda} \xi_4^4 \xi_\tau^\tau - \gamma_{\tau\sigma 4} \xi_\tau^\tau, \quad (\tau \neq \sigma), \\
21^\circ \quad \xi_5^5 \partial_5 \xi_6^5 + \xi_6^6 \partial_6 \xi_5^5 - \xi_5^5 \partial_5 \xi_6^5 - \xi_6^6 \partial_6 \xi_5^5 &= -\gamma_{565} \xi_5^5 + \gamma_{656} \xi_6^5, \\
22^\circ \quad \xi_5^5 \partial_5 \xi_6^6 + \xi_6^6 \partial_6 \xi_5^6 - \xi_5^5 \partial_5 \xi_6^6 - \xi_6^6 \partial_6 \xi_5^6 &= -\gamma_{565} \xi_5^6 + \gamma_{656} \xi_6^6, \\
23^\circ \quad (\xi_\sigma^\sigma \partial_\sigma + \xi_\tau^\tau \partial_\tau) \xi_\alpha^\beta &= 0, \quad (\tau \neq \sigma),
\end{aligned}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \sigma, \tau = 5, 6$, $f_2' = \frac{df_2}{dx^2}$, $f_4' = \frac{df_4}{dx^4}$.

Из уравнения 23° следует, что все ξ_α^β не зависят от переменных x^5, x^6 . Интегрируя уравнения $3^\circ, 4^\circ, 9^\circ, 10^\circ$, найдем

$$\begin{aligned}
\xi_1^1 &= (f_4 - f_2)^{-1} F_1(x^1, x^2), \\
\xi_3^3 &= (f_2 - f_4)^{-1} F_3(x^3, x^4),
\end{aligned}$$

где F_1, F_3 — функции указанных переменных, не равные нулю вследствие линейной независимости векторов репера и формул (14). Из уравнения 3° также следует, что ξ_2^1 не зависит от переменной x^3 .

Выражения для найденных компонент репера можно упростить с помощью преобразования координат

$$\bar{x}^1 = \int \frac{dx^1}{F_1}, \quad \bar{x}^2 = x^2, \quad \bar{x}^3 = \int \frac{dx^3}{F_3}, \quad \bar{x}^4 = x^4, \quad \bar{x}^\sigma = x^\sigma,$$

которое не меняет вида равенств (14). В новой системе координат получим

$$\xi_1^1 = (f_4 - f_2)^{-1}, \quad \xi_3^3 = (f_2 - f_4)^{-1}. \quad (16)$$

После этого, интегрируя уравнения 2° и 6° с учетом 3° , найдем

$$\xi_2^2 = (f_4 - f_2)^{-1} (f_2' x^1 + \theta(x^2))^{-1},$$

где $\theta(x^2)$ — произвольная функция переменной x^2 .

Возможны два случая: 1) $f_2' = 0$, 2) $f_2' \neq 0$. Во втором случае сделаем координатное преобразование $\bar{x}^2 = f_2(x^2)$, $\bar{x}^p = x^p$ ($p \neq 2$) и положим $\bar{\theta} = (f_2')^{-1} \theta$. Опуская черту, можно объединить оба случая одной формулой

$$\xi_2^2 = (f_4 - f_2)^{-1} A^{-1}, \quad (17)$$

где

$$A = \epsilon x^1 + \theta, \quad f_1 = f_2 = \epsilon x^2,$$

ϵ равно 0 либо 1, θ — функция переменной x^2 , отличная от нуля при $\epsilon = 0$.

Следуя подобным рассуждениям, проинтегрировав уравнения 8°, 12° с учетом 9°, получим

$$\xi_4^4 = (f_2 - f_4)^{-1} \tilde{A}^{-1}. \quad (18)$$

Здесь

$$\tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega, \quad f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a,$$

$\tilde{\epsilon}$ равно 0 либо 1, a — const, отличная от нуля при $\tilde{\epsilon} = 0$, ω — функция переменной x^4 , также отличная от нуля при $\tilde{\epsilon} = 0$.

Интегрируя уравнения 1°, 5°, 7° и 11° с учетом 3°, 9°, найдем

$$\begin{aligned} \xi_2^1 &= (f_4 - f_2)^{-1} ((f_4 - f_2)^{-1} + Q(x^2)), \\ \xi_4^3 &= (f_2 - f_4)^{-1} ((f_2 - f_4)^{-1} + R(x^4)), \end{aligned}$$

где $Q(x^2), R(x^4)$ — функции указанных переменных.

С помощью преобразования координат

$$\bar{x}^1 = x^1 - \int Q dx^2, \quad \bar{x}^3 = x^3 - \int R dx^2, \quad \bar{x}^p = x^p \quad (p \neq 1, 3)$$

можно обратить в нуль функции Q и R , при этом не изменив полученные ранее формулы. После чего компоненты ξ_2^1 и ξ_4^3 косонормального репера примут вид

$$\xi_2^1 = (f_4 - f_2)^{-2}, \quad \xi_4^3 = (f_2 - f_4)^{-2}. \quad (19)$$

Используя полученные результаты и формулу (см. [8])

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^6 e_h \xi_h^i \xi_h^j, \quad (20)$$

можно вычислить следующие контравариантные компоненты метрического тензора рассматриваемого h -пространства:

$$\begin{aligned} g^{11} &= 2e_2(f_4 - f_2)^{-3}, & g^{12} &= e_2(f_4 - f_2)^{-2} A^{-1}, \\ g^{33} &= 2e_4(f_2 - f_4)^{-3}, & g^{34} &= e_4(f_2 - f_4)^{-2} \tilde{A}^{-1}. \end{aligned}$$

Из формулы (20) также следует, что в рассматриваемом h -пространстве $g^{\sigma\tau} = e_\sigma \xi_\sigma^\sigma \xi_\tau^\tau + e_\tau \xi_\tau^\sigma \xi_\sigma^\tau$, $\sigma, \tau = 5, 6$. С помощью уравнений 13°, 14°, 15°, 16° нетрудно показать, что $\xi_1^1 \partial_1 g^{\sigma\tau} = \xi_3^3 \partial_3 g^{\sigma\tau} = 0$, отсюда $\partial_1 g^{\sigma\tau} = \partial_3 g^{\sigma\tau} = 0$. Тогда из уравнений 17°, 18°, 19°, 20° следует

$$\partial_2 g^{\sigma\tau} = -2 \frac{f_2'}{f_2 - \lambda} g^{\sigma\tau}, \quad \partial_4 g^{\sigma\tau} = -2 \frac{f_4'}{f_4 - \lambda} g^{\sigma\tau}.$$

Интегрируя эти уравнения, принимая во внимание уравнения 21°, 22°, найдем

$$g^{\sigma\tau} = (f_2 - \lambda)^{-2} (f_4 - \lambda)^{-2} F^{\sigma\tau}(x^5, x^6), \quad (21)$$

где $F^{\sigma\tau}$ — произвольные функции переменных x^5, x^6 .

Далее, вычислив ковариантные компоненты g_{ij} метрического тензора, с помощью формул (см. [8])

$$\xi_h^i = g_{ij} \xi_h^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^n e_h e_l \bar{a}_{hl} \xi_h^i \xi_l^j, \quad (22)$$

мы найдем компоненты тензора a_{ij} .

Запишем итоговый результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если симметрический тензор h_{ij} типа [22(11)] и скаляр φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям (1), то существует голономная система координат, в которой φ , g_{ij} и h_{ij} определяются формулами

$$\begin{aligned} g_{ij}dx^i dx^j &= e_2 A(f_4 - f_2) \{(f_4 - f_2)dx^1 dx^2 - A(dx^2)^2\} + \\ &+ e_4 \tilde{A}(f_2 - f_4) \{(f_2 - f_4)dx^3 dx^4 - \tilde{A}(dx^4)^2\} + \\ &+ F_{\sigma\tau}(f_2 - \lambda)^2 (f_4 - \lambda)^2 dx^\sigma dx^\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}dx^i dx^j &= f_2 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + \\ &+ A g_{12}(dx^2)^2 + f_4 g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + \tilde{A} g_{34}(dx^4)^2 + \lambda g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = 2f_2 + 2f_4 + c, \quad (25)$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega(x^4), \quad (26)$$

где $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $f_2 = \epsilon x^2$, $f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a$, λ, c и a — постоянные, $a \neq 0$ когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $F_{\sigma\tau}(x^5, x^6), \theta(x^2), \omega(x^4)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0$, $\omega \neq 0$ когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $e_2, e_4 = \pm 1$.

3. МЕТРИКИ h -ПРОСТРАНСТВ ТИПОВ [2(21)1], [2(211)]

В этом случае и в остальных случаях, рассмотренных ниже, проделываются вычисления, аналогичные h -пространству типа [22(11)]. В связи с этим некоторые выкладки будут опущены.

Подставив канонические формы \bar{g}_{pr} и \bar{a}_{pq} из (9) в (7) с учетом того, что для h -пространства типа [2(21)1] $\lambda_4 = \lambda_5$, получим

$$\begin{aligned} X_r \lambda_2 &= 0 \quad (r \neq 2), \quad X_r \lambda_5 = 0, \quad X_r \lambda_6 = 0 \quad (r \neq 6), \\ X_2(\lambda_2 - \varphi) &= X_6(\lambda_6 - \varphi) = 0, \quad \gamma_{121} = e_2 X_2 \varphi, \\ \gamma_{162} = \gamma_{261} &= \frac{e_2 X_6 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_6}, \quad \gamma_{262} = -\frac{e_2 X_6 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_6)^2}, \quad \gamma_{3s4} = \gamma_{4s3} = \frac{e_4 X_s \varphi}{\lambda_5 - \lambda_s}, \\ \gamma_{4s4} &= -\frac{e_4 X_s \varphi}{(\lambda_5 - \lambda_s)^2}, \quad \gamma_{2\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_2 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_\sigma)}, \quad \gamma_{565} = \frac{e_5 X_6 \varphi}{\lambda_5 - \lambda_6}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $r = 1, 2, \dots, 6$, $\sigma = 5, 6$, $s = 2, 6$, γ_{45r} — произвольные, остальные γ_{pqr} равны нулю.

Коммутаторы операторов h -пространства типа [2(21)1] имеют вид

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -e_1 \gamma_{121} X_2, \quad [X_1, X_3] = 0, \\ [X_2, X_3] &= e_4 \gamma_{423} X_3, \quad [X_1, X_4] = -e_5 \gamma_{541} X_5, \\ [X_1, X_5] &= -e_4 \gamma_{451} X_3, \quad [X_1, X_6] = -e_2 \gamma_{261} X_1, \\ [X_2, X_4] &= e_3 \gamma_{324} X_4 + e_4 \gamma_{424} X_3 - e_5 \gamma_{542} X_5, \\ [X_2, X_5] &= e_5 \gamma_{525} X_5 - e_4 \gamma_{425} X_3, \\ [X_2, X_6] &= -e_2 \gamma_{262} X_1 - e_1 \gamma_{162} X_2 + e_6 \gamma_{626} X_6, \\ [X_3, X_4] &= -e_5 \gamma_{543} X_5, \quad [X_3, X_5] = -e_4 \gamma_{453} X_3, \\ [X_3, X_6] &= -e_4 \gamma_{463} X_3, \quad [X_4, X_5] = -e_4 \gamma_{454} X_3 + e_5 \gamma_{545} X_5, \\ [X_4, X_6] &= -e_3 \gamma_{364} X_4 - e_4 \gamma_{464} X_3 + e_5 \gamma_{546} X_5, \\ [X_5, X_6] &= e_4 \gamma_{456} X_3 - e_5 \gamma_{565} X_5. \end{aligned} \quad (28)$$

Отсюда следует, что системы $X_i \theta = 0$ ($i \neq 2$), $X_j \theta = 0$ ($j \neq 4$), $X_k \theta = 0$ ($k \neq 6$) являются вполне интегрируемыми и имеют, соответственно, следующие решения: $\theta^2, \theta^4, \theta^6$. Системы $X_3 \theta = X_4 \theta = X_5 \theta = X_6 \theta = 0$, $X_1 \theta = X_2 \theta = X_3 \theta = X_6 \theta = 0$ и $X_1 \theta = X_2 \theta = X_6 \theta = 0$ также вполне интегрируемые. Первая система имеет решения θ^1 и θ^2 , вторая система

имеет решения θ^4 и θ^5 , третья система имеет решения θ^3 , θ^4 и θ^5 . После координатного преобразования $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, получим

$$\xi_p^i = P_p(x)\delta_p^i, \quad \xi_2^s = \xi_4^q = \xi_5^q = \xi_5^4 = 0, \quad (29)$$

где $p = 1, 2, 3$, $s = 3, 4, 5, 6$, $q = 1, 2, 6$, $P_p(x)$ — произвольные функции.

Проинтегрировав систему уравнений (28) с учетом (27) и (29) подобно предыдущему случаю, а затем вычислив компоненты тензоров g_{ij} и a_{ij} , мы придем к следующему результату

$$\begin{aligned} g_{ij}dx^i dx^j = & e_2\{2(f_6 - f_2)Adx^1 dx^2 - A^2(dx^2)^2\} + \\ & +(f_6 - \lambda)(f_2 - \lambda)^2\{2e_4 dx^3 dx^4 - e_4(\Sigma + \omega)(dx^4)^2 + e_5(dx^5)^2\} + \\ & + e_6(f_2 - f_6)^2(dx^6)^2, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}dx^i dx^j = & f_2 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + \\ & + g_{12}(dx^2)^2 + \lambda g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + g_{34}(dx^4)^2 + f_6 g_{66}(dx^6)^2, \end{aligned} \quad (31)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + f_6 + c)g_{ij}, \quad \varphi = f_2 + \frac{1}{2}f_6 + c, \quad (32)$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \Sigma = 2(f_2 - \lambda)^{-1} + (f_6 - \lambda)^{-1}, \quad (33)$$

где $\epsilon = 0, 1$, $f_2 = \epsilon x^2$, λ и c — постоянные, $\theta(x^2)$, $\omega(x^4, x^5)$, $f_6(x^6)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4, 5$, $e_2, e_4, e_5, e_6 = \pm 1$.

После похожих выкладок для h -пространства типа [2(211)] , получим

$$\begin{aligned} g_{ij}dx^i dx^j = & 2e_2 Adx^1 dx^2 + \\ & +(f_2 - \lambda)^2\{2e_4 dx^3 dx^4 - e_4(\Sigma + \omega)(dx^4)^2 + g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau\}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = 2f_2 g_{12} dx^1 dx^2 + g_{12}(dx^2)^2 + \lambda g_{pq} dx^p dx^q + g_{34}(dx^4)^2, \quad (35)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + c)g_{ij}, \quad \varphi = f_2 + c, \quad (36)$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \Sigma = 2(f_2 - \lambda)^{-1}, \quad (37)$$

где $\epsilon = 0, 1$, $f_2 = \epsilon x^2$, λ, c — постоянные, $\theta(x^2)$, $\omega(x^4, x^5, x^6)$, $g_{\sigma\tau}(x^4, x^5, x^6)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0$, $p, q = 3, 4, 5, 6$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $e_2, e_4 = \pm 1$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если симметрический тензор h_{ij} типов [2(21)1], [2(211)] и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция φ и тензоры g_{ij} , h_{ij} определяются формулами (30)–(37).

4. МЕТРИКИ h -ПРОСТРАНСТВ ТИПОВ [(22)11], [(221)1]

Для h -пространства типа [(22)11] из (7) следует система уравнений

$$\begin{aligned} X_r \lambda_4 = 0, \quad X_r \lambda_\sigma = 0 \quad (r \neq \sigma), \quad X_\sigma(\lambda_\sigma - \varphi) = 0, \\ \gamma_{14r} = \gamma_{23r}, \quad \gamma_{1\sigma 2} = \gamma_{2\sigma 1} = \frac{e_2 X_\sigma \varphi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma}, \quad \gamma_{3\sigma 4} = \gamma_{4\sigma 3} = \frac{e_4 X_\sigma \varphi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma}, \\ \gamma_{s\sigma s} = -\frac{e_s X_\sigma \varphi}{(\lambda_4 - \lambda_\sigma)^2}, \quad \gamma_{\sigma\tau\sigma} = \frac{e_\sigma X_\tau \varphi}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau} \quad (\sigma \neq \tau), \end{aligned} \quad (38)$$

где $r = 1, 2, \dots, 6$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $s = 2, 4$, γ_{24r} — произвольные, остальные γ_{pqr} равны нулю.

Составим коммутаторы операторов:

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= e_4\gamma_{412}X_3 - e_4\gamma_{421}X_3 - e_3\gamma_{411}X_4, \\
[X_1, X_3] &= e_4\gamma_{413}X_3 - e_2\gamma_{141}X_1, \\
[X_2, X_3] &= -e_2\gamma_{142}X_1 + e_3\gamma_{413}X_4 + e_4\gamma_{423}X_3, \\
[X_1, X_4] &= -e_1\gamma_{141}X_2 + e_4\gamma_{414}X_3 - e_2\gamma_{241}X_1, \\
[X_1, X_\sigma] &= e_4\gamma_{41\sigma}X_3 - e_2\gamma_{2\sigma 1}X_1, \\
[X_2, X_4] &= -e_1\gamma_{142}X_2 + e_4\gamma_{424}X_3 + e_3\gamma_{414}X_4 - e_2\gamma_{242}X_1, \\
[X_2, X_\sigma] &= e_3\gamma_{41\sigma}X_4 + e_4\gamma_{42\sigma}X_3 - e_2\gamma_{2\sigma 2}X_1 - e_1\gamma_{1\sigma 2}X_2, \\
[X_3, X_4] &= -e_1\gamma_{143}X_2 - e_2\gamma_{243}X_1 + e_2\gamma_{144}X_1, \\
[X_3, X_\sigma] &= e_2\gamma_{23\sigma}X_1 - e_1\gamma_{4\sigma 3}X_3, \\
[X_4, X_\sigma] &= e_1\gamma_{14\sigma}X_2 - e_3\gamma_{3\sigma 4}X_4 + e_2\gamma_{24\sigma}X_1 - e_4\gamma_{4\sigma 4}X_3, \\
[X_5, X_6] &= -e_5\gamma_{565}X_5 + e_6\gamma_{656}X_6.
\end{aligned} \tag{39}$$

Составив вполне интегрируемые системы из (39), после координатных преобразований, найдем

$$\xi_\sigma^i = P_\sigma(x)\delta_\sigma^i, \xi_p^q = \xi_\alpha^\sigma = 0, \tag{40}$$

где $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 3$, $q = 2, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $P_\sigma(x)$ — произвольные функции.

Из (38), (39), (40) получим систему уравнений на компоненты ξ_i^j косонормального репера:

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad & \xi_1^\alpha \partial_\alpha \xi_2^\beta - \xi_2^\alpha \partial_\alpha \xi_1^\beta = \gamma_{412} \xi_3^\beta - \gamma_{421} \xi_3^\beta - \gamma_{411} \xi_4^\beta, \\
2^\circ \quad & \xi_1^\alpha \partial_\alpha \xi_3^\beta - \xi_3^\alpha \partial_\alpha \xi_1^\beta = \gamma_{413} \xi_3^\beta - \gamma_{141} \xi_1^\beta, \\
3^\circ \quad & \xi_1^\alpha \partial_\alpha \xi_4^\beta - \xi_4^\alpha \partial_\alpha \xi_1^\beta = -\gamma_{141} \xi_2^\beta - \gamma_{414} \xi_3^\beta - \gamma_{241} \xi_1^\beta, \\
4^\circ \quad & \xi_\sigma^\sigma \partial_\sigma \xi_1^\beta = \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma} \xi_\sigma^\sigma \xi_1^\beta - \gamma_{41\sigma} \xi_3^\beta, \\
5^\circ \quad & \xi_2^\alpha \partial_\alpha \xi_3^p - \xi_3^\alpha \partial_\alpha \xi_2^p = -\gamma_{142} \xi_1^\beta + \gamma_{413} \xi_4^p + \gamma_{423} \xi_3^p, \\
6^\circ \quad & \xi_3^\alpha \partial_\alpha \xi_2^q = -\gamma_{413} \xi_4^q, \\
7^\circ \quad & \xi_2^\alpha \partial_\alpha \xi_4^\beta - \xi_4^\alpha \partial_\alpha \xi_2^\beta = -\gamma_{142} \xi_2^\beta + \gamma_{414} \xi_4^\beta - \gamma_{242} \xi_1^\beta + \gamma_{424} \xi_3^\beta, \\
8^\circ \quad & \xi_\sigma^\sigma \partial_\sigma \xi_2^\beta = \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma} \xi_\sigma^\sigma \xi_2^\beta - \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{(\lambda - f_\sigma)^2} \xi_\sigma^\sigma \xi_1^\beta - \gamma_{41\sigma} \xi_4^\beta - \gamma_{42\sigma} \xi_3^\beta, \\
9^\circ \quad & \xi_3^\alpha \partial_\alpha \xi_4^\beta - \xi_4^\alpha \partial_\alpha \xi_3^\beta = -\gamma_{143} \xi_2^\beta + \gamma_{144} \xi_1^\beta - \gamma_{243} \xi_1^\beta, \\
10^\circ \quad & \xi_\sigma^\sigma \partial_\sigma \xi_3^\beta = \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma} \xi_\sigma^\sigma \xi_3^\beta - \gamma_{14\sigma} \xi_1^\beta, \\
11^\circ \quad & \xi_\sigma^\sigma \partial_\sigma \xi_4^\beta = \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma} \xi_\sigma^\sigma \xi_4^\beta - \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{(\lambda - f_\sigma)^2} \xi_\sigma^\sigma \xi_3^\beta - \gamma_{14\sigma} \xi_2^\beta - \gamma_{24\sigma} \xi_1^\beta, \\
12^\circ \quad & \xi_\beta^\alpha \partial_\alpha \xi_\sigma^\sigma = 0, \\
13^\circ \quad & \xi_\sigma^\sigma \partial_\sigma \xi_\tau^\tau = \frac{1}{2} \frac{f'_\sigma}{f_\tau - f_\sigma} \xi_\sigma^\sigma \xi_\tau^\tau, \quad (\tau \neq \sigma),
\end{aligned}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 3$, $q = 2, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $f_\tau = f_\tau(x_\tau)$, $f_\sigma = f_\sigma(x_\sigma)$ — произвольные функции указанных переменных.

Интегрируя 12° и 13°, после координатного преобразования x^5, x^6 найдем

$$\xi_5^5 = (f_6 - f_5)^{-1/2}, \quad \xi_6^6 = (f_5 - f_6)^{-1/2}.$$

Дифференцируя $g^{\alpha\beta} = \sum_{h=1}^6 e_h \xi_h^\alpha \xi_h^\beta$ по x^p ($p = 1, 3$), с учетом уравнений $1^\circ - 3^\circ$ и $5^\circ - 7^\circ$, найдем $\partial_p g^{\alpha\beta} = 0$.

Дифференцируя $g^{\alpha\beta}$ по x^σ ($\sigma = 5, 6$), из уравнений $4^\circ, 8^\circ, 10^\circ, 11^\circ$, получим

$$\partial_\sigma g^{pr} = -\frac{f'_\sigma}{f_\sigma - \lambda} g^{pr} - \frac{f'_\sigma}{(f_\sigma - \lambda)^2} \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}, \quad \partial_\sigma g^{pq} = -\frac{f'_\sigma}{f_\sigma - \lambda} g^{pq},$$

где $p, r = 1, 3, q = 2, 4$.

Проинтегрировав эти уравнения, найдем

$$g^{pr} = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1} (\Sigma + F^{pr}), \quad g^{pq} = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1} F^{pq},$$

где F^{pr}, F^{pq} — произвольные функции переменных $x^2, x^4, \Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}$, \sum_σ — означает суммирование по σ , Π_σ — означает произведение по σ .

Выполнив подобные вычисления для h -пространства типа [(221)1], после удачно подобранных координатных преобразований, в итоге получим

$$g_{ij} dx^i dx^j = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda) \{ 2g_{12} dx^1 dx^2 - e_2 (\Sigma + \theta_1) (dx^2)^2 + 2g_{34} dx^3 dx^4 - e_4 (\Sigma + \theta_2) (dx^4)^2 + G \} + \sum_\sigma e_\sigma (f_\tau - f_\sigma) (dx^\sigma)^2, \quad (41)$$

$$a_{ij} dx^i dx^j = \lambda (g_{st} dx^s dx^t + G) + g_{12} (dx^2)^2 + g_{34} (dx^4)^2 + \sum_\sigma f_\sigma g_{\sigma\sigma} (dx^\sigma)^2 + G, \quad (42)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + \left(\sum_\sigma f_\sigma + c \right) g_{ij}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_\sigma f_\sigma + c. \quad (43)$$

$$\Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}, \quad (44)$$

$$G = 2e_5 \{ 1 + \theta_3 (f_6 - \lambda) \} dx^4 dx^5 + (f_6 - \lambda) g_{55} (dx^5)^2 + e_6 (dx^6)^2, \quad (45)$$

где λ, c — постоянные. Здесь для h -пространства типа [(22)11] $\tau, \sigma = 5, 6$ ($\tau \neq \sigma$), $s, t = 1, 2, 3, 4, G = 0, g_{st}, \theta_1, \theta_2$ — произвольные функции переменных x^2, x^4, f_σ — произвольная функция переменного x^σ . Для h -пространства типа [(221)1] $\sigma = 6, s, t = 1, 2, 3, 4, 5, g_{st}, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ — произвольные функции переменных $x^2, x^4, x^5, f_\tau = \lambda, f_6$ — произвольная функция переменного x^6 .

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если симметрический тензор h_{ij} типов [(22)11], [(221)1] и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнению Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция φ и тензоры g_{ij}, h_{ij} определяются формулами (41)–(45).

5. МЕТРИКИ h -ПРОСТРАНСТВ ТИПОВ [(2211)], [(22)(11)], [(21)(21)]

Во всех этих случаях функция $\varphi = const$, следовательно, в силу равенства (6) тензор h_{ij} является ковариантно постоянным. Опуская дальнейшие выкладки, сводящиеся к интегрированию уравнений относительно ξ_i^j вместе с удачно подобранными координатными преобразованиями, получим для h -пространства типа [(2211)]:

$$g_{ij} dx^i dx^j = 2g_{12} dx^1 dx^2 - e_2 \theta (dx^2)^2 + 2g_{34} dx^3 dx^4 + g_{rq} dx^r dx^q, \quad (46)$$

$$a_{ij} dx^i dx^j = \lambda g_{ij} dx^i dx^j + g_{12} (dx^2)^2, \quad (47)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + c g_{ij}, \quad (48)$$

где $r, q = 5, 6, \lambda, c$ — постоянные, $\theta, g_{12}, g_{34}, g_{rq}$ — произвольные функции переменных x^2, x^4, x^5, x^6 ;

для h -пространства типа [(22)(11)]:

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_2\{2dx^1 dx^2 - \theta(dx^2)^2\} + e_4\{2dx^3 dx^4 - \omega(dx^4)^2\} + g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau, \quad (49)$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1\{g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + e_2(dx^2)^2 + g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + e_4(dx^4)^2\} + \lambda_2 g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau, \quad (50)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + c g_{ij}, \quad (51)$$

где θ, ω — произвольные функции переменных x^2, x^4 , $g_{\sigma\tau}$ — произвольные функции переменных x^5, x^6 , λ_1, λ_2, c — постоянные, здесь $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$; для h -пространства типа [(21)(21)]:

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_2\{2dx^1 dx^2 - \theta(dx^2)^2\} + e_3(dx^3)^2 + e_5\{2dx^4 dx^5 - \omega(dx^5)^2\} + e_6(dx^6)^2, \quad (52)$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + e_2(dx^2)^2 + \lambda_2 g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + e_5(dx^5)^2, \quad (53)$$

$$h_{ij} = a_{ij} + c g_{ij}, \quad (54)$$

где θ — произвольная функция переменных x^2, x^3 , ω — произвольная функция переменных x^5, x^6 , λ_1, λ_2, c — постоянные, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i_1, j_1 = 1, 2, 3$, $i_2, j_2 = 4, 5, 6$.

Резюмируем результат этого параграфа в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Если тензор h_{ij} типов [(2211)], [(22)(11)], [(21)(21)] и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнению Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция φ и тензоры g_{ij} , h_{ij} определяются формулами (46)–(54).

6. ПЕРВЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ h -ПРОСТРАНСТВ ТИПОВ [(21...1)(21...1)...(1...1)]

Каждому решению h_{ij} уравнения (6) соответствует первый квадратичный интеграл уравнений геодезических (см. [8])

$$(h_{ij} - 4\varphi g_{ij})\dot{x}^i \dot{x}^j = \text{const}, \quad (55)$$

где \dot{x}^i — касательный вектор геодезической.

Следовательно, первые квадратичные интегралы уравнений геодезических h -пространств типов [(21...1)(21...1)...(1...1)] определяются формулой (55), где тензоры h_{ij} , g_{ij} и функция φ указаны в теоремах 1-4.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы нашли небольшой класс 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[+ + - - - -]$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования, в частности, мы нашли метрики h -пространств типов [22(11)], [2(21)1], [2(211)], [(22)11], [(221)1], [(2211)], [(22)(11)], [(21)(21)] и затем определили первые квадратичные интегралы уравнений геодезических этих h -пространств. Отметим, что полученные результаты легко обобщаются в случае n -мерного псевдориманова пространства с сигнатурой $[+ + - - - - \dots - -]$.

Определение метрик всех h -пространств, перечисленных во введении, полностью решит задачу о нахождении 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[+ + - - - -]$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования или проективные движения. Эта задача была полностью решена автором в кандидатской диссертации [9].

Следующая задача — это исследование проективно-групповых свойств рассматриваемых пространств. Здесь остается открытой проблема о восстановлении векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование и проблема о структуре проективной алгебры Ли. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения Киллинга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия* // М.: Эдиториал УРСС, 1998, 278 с.
- [2] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия* М.:ИЛ, 1948, 316 с.
- [3] M.G. Konigs *Lecons sur la theorie generale des surfaces* // Appl. II to G. Darboux. IV. (1896), P. 368.
- [4] Петров А.З. *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики* // Уч. зап. Казан. ун-та. 1949. Т. 109, № 3. С. 7–36.
- [5] Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // Успехи Мат.Наук **48** (1993), 2(290), С. 107–164.
- [6] G. Fubini *Sui gruppi trasformazioni geodetiche* // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903, Vol. 53, № 2, P. 261–313.
- [7] Солодовников А.С. *Проективные преобразования римановых пространств* // Успехи Мат.Наук, 1956, № 11, P. 45–116.
- [8] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // Успехи Мат.Наук **50** (1995), 1(301). С. 69–142.
- [9] Закирова З.Х. *Проективно-групповые свойства 6-мерных теорий типа Калуцы-Клейна* // Кандидатская диссертация, КГУ, 2001, с. 129.
- [10] Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах* // Изв. Казанск. физ.-мат. общ., 1925 (25), № 2. С. 86–114.
- [11] Закирова З.Х. *6-мерные h-пространства специального типа* //Международ. геом. семина. им. Н.И. Лобачевского, Казань, 4-6 февр., 1997: Тез. докл.- Казань. 1997. с.52.
- [12] Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [51]* // Труды геом. семинара: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Казань, 23. 1997. С. 57–64.
- [13] Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [411]* // Изв. вузов. Матем. 1999, № 9(448). С. 78–79.
- [14] Закирова З.Х. *Жесткие 6-мерные h-пространства постоянной кривизны* // Теоретическая и математическая физика. 158(3): 293–299 (2009).
- [15] Закирова З.Х. *Метрики 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]* // Краткие сообщения по физике ФИАН. Т. 38, № 9 . 2011. С. 270–274.
- [16] Аминова А.В. *О косоортогональных реперах и некоторых свойствах параллельных тензорных полей на римановых многообразиях* // Изв. вузов. Матем. 1982, № 6. С. 63–67.
- [17] Аминова А.В. *О подвижном косоортогональном репере и одном типе проективных движений римановых многообразий* // Изв. вузов. Матем. 1982, № 9. С. 69–74.

Зольфира Хаписовна Закирова,
Казанский Государственный Энергетический Университет,
ул. Красносельская, 51,
420066, г. Казань, Россия
E-mail: zolya_zakirova@mail.ru