

СИММЕТРИИ И ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ $u_{xy} = e^{u+v}u_y, v_{xy} = -e^{u+v}v_y$

Ю.Г. ВОРОНОВА, А.В. ЖИБЕР

Аннотация. Описаны высшие симметрии и построено общее решение для гиперболической системы уравнений. Также получена явная формула решения задачи Гурса.

Ключевые слова: симметрии, задача Гурса, интегралы.

Mathematics Subject Classification: 35L53, 76M60, 58J70

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматривалась зависимость решения задачи Гурса для экспоненциальной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x \partial y} + \sum_{k=1}^r a_{ik} e^{u^k} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1.1)$$

$$u^i(x, y) - \ln(\tau_i \phi^i(x) \bar{\phi}^i(y)) = 0 \quad \text{при } xy = 0, \quad (1.2)$$

a_{ik} – элементы матрицы Картана простой алгебры Ли, от параметров τ_1, \dots, τ_r , входящих в краевые условия (1.2). Была предложена схема построения решения данной задачи с использованием высших симметрий, допускаемых системой уравнений (1.1). Приведены примеры сведения к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах [2]–[4] для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа построено общее решение и приведен алгоритм построения решения краевых задач. В статье [5], используя симметричный подход, построено точное решение задачи Гурса для нелинейных скалярных гиперболических уравнений лиувилевского типа.

В настоящей работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_{xy} = e^{u+v}u_y, \\ v_{xy} = -e^{u+v}v_y, \end{cases} \quad (1.3)$$

у которой $\det(H_1 \cdot K_1) = 0$, $\text{ord}(H_1, K_1) = 1$, и цепочка обобщенных инвариантов Лапласа обрывается на втором шаге (см. [6]), где H_1, K_1 – главные инварианты линеаризации системы (1.3). Описаны высшие симметрии и построено общее решение системы уравнений (1.3), которое позволяет получить точное решение задачи Гурса.

YU.G. VORONOVA, A.V. ZHIBER, SYMMETRIES AND GOURSAT PROBLEM FOR SYSTEM OF EQUATIONS
 $u_{xy} = e^{u+v}u_y, v_{xy} = -e^{u+v}v_y$.

© ВОРОНОВА Ю.Г., ЖИБЕР А.В. 2013.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 13-01-00070-а) и ФЦП (соглашение №8499).

Поступила 17 июля 2013 г.

2. СИММЕТРИИ

Для удобства изложения материала введем обозначения

$$\begin{aligned} u_1 &= u_x, u_2 = u_{xx}, \dots, v_1 = v_x, v_2 = v_{xx}, \dots, \\ \bar{u}_1 &= u_y, \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots, \bar{v}_1 = v_y, \bar{v}_2 = v_{yy}, \dots \end{aligned}$$

В работе [6] показано, что система уравнений (1.3) имеет интегралы первого и второго порядка

$$\begin{aligned} w &= u_1 - v_1 - e^{u+v} \quad \text{и} \quad \bar{w} = \bar{u}_1 \bar{v}_1, \\ W &= u_2 - u_1 v_1 - e^{u+v} u_1 \quad \text{и} \quad \bar{W} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + \bar{v}_1 - \bar{u}_1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

такие, что $\bar{D}w = 0$, $\bar{D}W = 0$, $D\bar{w} = 0$, $D\bar{W} = 0$, где D, \bar{D} – операторы полного дифференцирования по x, y соответственно.

Определяющая система для высших симметрий системы уравнений (1.3) имеет вид

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^{u+v}\bar{D}p + e^{u+v}\bar{u}_1(p+q), \\ D\bar{D}q = -e^{u+v}\bar{D}q - e^{u+v}\bar{v}_1(p+q). \end{cases} \quad (2.2)$$

В силу формул (2.1), симметрии системы уравнений (1.3), зависящие от переменных u, v, u_1, v_1, \dots , можно искать в виде

$$p = p(u, v, v_1, w, W, w_1, W_1, \dots), \quad q = q(u, v, v_1, w, W, w_1, W_1, \dots).$$

Вычислим $\bar{D}p, \bar{D}q, D\bar{D}p, D\bar{D}q$ и подставим в систему (2.2). Далее, приравняем выражения при \bar{u}_1, \bar{v}_1 , получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} Dp_u = e^{u+v}(p+q), \\ D(p_v - e^{u+v}p_{v_1}) = 2e^{u+v}(p_v - e^{u+v}p_{v_1}), \\ Dq_u = -2e^{u+v}q_u, \\ D(q_v - e^{u+v}q_{v_1}) = -e^{u+v}(p+q). \end{cases} \quad (2.3)$$

Из второго и третьего уравнения системы (2.3) следует, что

$$p_v - e^{u+v}p_{v_1} = 0, \quad q_u = 0.$$

Далее, складывая первое и четвертое уравнение системы (2.3) и интегрируя полученное равенство по u , получим следующее выражение для p :

$$p = -q_v u + e^{u+v}q_{v_1} + Cu + h(v, v_1, w, W, \dots), \quad (2.4)$$

здесь $h(v, v_1, w, W, \dots)$ – произвольная функция, а C – произвольная постоянная. Осталось подставить найденную функцию p во второе и первое уравнение системы (2.3), откуда найдем вид функций p и q , а именно:

$$p = (D + u_1)a - b, \quad q = v_1 a + b, \quad (2.5)$$

здесь $a(w, W, w_1, W_1, \dots), b(w, W, w_1, W_1, \dots)$ – произвольные функции.

Далее симметрии, зависящие от переменных $u, v, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots$, можно искать в виде

$$p = p(\bar{u}_1, \bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \dots), \quad q = q(\bar{u}_1, \bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \dots).$$

Сделаем в системе уравнений (1.3) замену переменных

$$u + v = U, \quad u - v = V.$$

Тогда система уравнений (1.3) эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} u_{xy} = e^u v_y, \\ v_{xy} = e^u u_y, \end{cases} \quad (2.6)$$

здесь новые переменные U, V , для удобства, опять обозначим через u, v . Тогда линеаризованная система (см. (2.2)) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^u(\bar{D}q + \bar{v}_1p), \\ D\bar{D}q = e^u(\bar{D}p + \bar{u}_1p). \end{cases} \quad (2.7)$$

Интегрируя второе уравнение системы (2.7) по y , получим следующую систему уравнений, эквивалентную предыдущей

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^u(\bar{D}q + \bar{v}_1p), \\ Dq = e^up. \end{cases} \quad (2.8)$$

Решение системы уравнений (2.8) будем искать в виде:

$$p = \sum_{k=0}^n p_k f^{(k)}(y), \quad q = \sum_{k=0}^n q_k f^{(k)}(y), \quad (2.9)$$

здесь $f^{(k)}(y) = \bar{D}^{(k)}f(\bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \dots)$.

Далее подставим функции (2.9) в систему уравнений (2.8) и приравняем коэффициенты при одинаковых производных. Получим систему уравнений, эквивалентную системе (2.8), а именно

$$\begin{cases} Dq_k = e^up_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1p_0), \\ D\bar{D}p_k + D(p_{k-1}) = e^u(\bar{D}q_k + q_{k-1} + \bar{v}_1p_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ Dp_n = e^uq_n. \end{cases} \quad (2.10)$$

Рассмотрим случай, когда $n = 0$. В данном случае система (2.10) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1p_0), \\ Dq_0 = e^up_0, \\ Dp_0 = e^uq_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Во втором уравнение системы (2.11) заменим $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}$, получим следующее уравнение

$$(q_0)_{\bar{u}_1} \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} = p_0.$$

Продифференцируем данное уравнение по \bar{u}_1 , при этом выражая $(p_0)_{\bar{u}_1}$ из третьего уравнения системы (2.11), получим

$$((q_0)_{\bar{u}_1}(\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}) - \bar{u}_1q_0)'_{\bar{u}_1} = 0$$

или

$$(q_0)_{\bar{u}_1}(\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}) - \bar{u}_1q_0 = A(\bar{w}, \bar{W}, \dots), \quad (2.12)$$

здесь $A(\bar{w}, \bar{W}, \dots)$ – произвольная функция. Уравнение (2.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого можно представить в виде:

$$q_0 = -\frac{A}{4\bar{w}}\bar{u}_1 + B\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \quad (2.13)$$

где $B(\bar{w}, \bar{W}, \dots)$ – произвольная функция.

Далее подставим выражения для q_0 (2.13) во второе и первое уравнение системы (2.11) и найдем, что p_0, q_0 имеют следующий вид

$$p_0 = \bar{u}_1B(\bar{w}, \bar{W}, \dots), \quad q_0 = \bar{v}_1B(\bar{w}, \bar{W}, \dots). \quad (2.14)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 1$ в системе (2.10). В данном случае система уравнений (2.10) переписывается в виде

$$Dq_0 = e^u p_0, \quad (2.15)$$

$$Dq_1 = e^u p_1, \quad (2.16)$$

$$D\bar{D}p_0 = e^u (\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \quad (2.17)$$

$$D\bar{D}p_1 + Dp_0 = e^u (\bar{D}q_1 + q_0 + \bar{v}_1 p_1), \quad (2.18)$$

$$Dp_1 = e^u q_1. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.16) и (2.19) совпадают с уравнениями системы (2.11), следовательно p_1 и q_1 находятся как и выше, и имеют вид

$$p_1 = \bar{u}_1 B - \frac{A}{4\bar{w}} \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \quad q_1 = -\frac{A}{4\bar{w}} \bar{u}_1 + B \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}. \quad (2.20)$$

Продифференцируем уравнение (2.19) по y , получим

$$D\bar{D}p_1 = e^u (\bar{D}q_1 + \bar{u}_1 q_1). \quad (2.21)$$

Вычтем из уравнения (2.18) уравнение (2.21), и после несложных преобразований получим

$$Dp_0 = e^u (q_0 + A(\bar{w}, \bar{W}, \dots)). \quad (2.22)$$

Продифференцируем равенство (2.22) по y и вычтем из него уравнение (2.17), найдем выражение для p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{\bar{v}_1} (\bar{D}A + \bar{u}_1 q_0 + \bar{u}_1 A). \quad (2.23)$$

Выражение для p_0 (2.23) подставим в уравнение (2.15) и заменяя $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка на функцию q_0 , а именно:

$$(q_0)_{\bar{u}_1} = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} q_0 + \frac{\bar{D}A}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} + \frac{\bar{u}_1 A}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}.$$

Решение данного уравнения можно представить в виде

$$q_0 = -\bar{u}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} - A + R \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \quad (2.24)$$

где $R = R(\bar{w}, \bar{W}, \dots)$ – произвольная функция. Подставим выражение (2.24) в равенство (2.23), откуда найдем p_0

$$p_0 = -\bar{v}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} + \bar{u}_1 R. \quad (2.25)$$

В итоге получили, что система уравнений (2.15)–(2.19) имеет решения вида (2.20), (2.24), (2.25). Из формул (2.9) следует, что симметрии системы уравнений (2.6) имеют следующий вид

$$p = \left(-\bar{v}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} + \bar{u}_1 R \right) f + \left(\bar{u}_1 B - \frac{A\bar{v}_1}{4\bar{w}} \right) \bar{D}f, \quad (2.26)$$

$$q = \left(-\bar{u}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} - A + \bar{v}_1 R \right) f + \left(-\frac{A}{4\bar{w}} \bar{u}_1 + \bar{v}_1 B \right) \bar{D}f. \quad (2.27)$$

С учетом формул (2.14), симметрии (2.26), (2.27) можно представить в виде

$$p = \frac{\bar{v}_1}{\bar{w}} \bar{D}G, \quad q = 4G + \frac{\bar{u}_1}{\bar{w}} \bar{D}G, \quad (2.28)$$

здесь $G = -\frac{1}{4}Af$. Напомним, что найденные симметрии (2.14), (2.28) заданы в новых переменных U, V . Возвращаясь к переменным $u = \frac{U+V}{2}$, $v = \frac{U-V}{2}$, получим следующее представление для симметрий системы уравнений (1.3)

$$p = \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}G + \bar{u}_1 B + 2G, \quad q = -\bar{v}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}G + \bar{v}_1 B - 2G. \quad (2.29)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

С использованием высших симметрий (2.5), (2.29) задача интегрирования системы уравнений (1.3) сводится к следующей динамической системе (см. [1]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} = (D + u_1)\psi^1 - \psi^2 = \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 + \bar{u}_1 \bar{\psi}^2 + 2\bar{\psi}^1, \\ \tau \frac{\partial v}{\partial \tau} = v_1\psi^1 + \psi^2 = -\bar{v}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 + \bar{v}_1 \bar{\psi}^2 - 2\bar{\psi}^1, \\ \tau \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} = e^{u+v} \bar{u}_1 \psi^1, \\ \tau \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \tau} = -e^{u+v} \bar{v}_1 \psi^1, \\ \tau \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = e^{u+v} \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 + e^{u+v} \bar{u}_1 \bar{\psi}^2, \\ \tau \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = e^{u+v} \bar{v}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 - e^{u+v} \bar{v}_1 \bar{\psi}^2, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

будем предполагать, что функции $\psi^1 = \psi^1(x)$, $\psi^2 = \psi^2(x)$, $\bar{\psi}^1 = \bar{\psi}^1(y)$, $\bar{\psi}^2 = \bar{\psi}^2(y)$.

Первое и второе уравнения системы (3.1) представляют собой уравнения в частных производных первого порядка относительно функций u, v , соответственно. Решения данных уравнений можно представить в виде

$$u = -\ln \psi^1 + \int \frac{\psi^2}{\psi^1} dx + F(a, y), \quad v = -\int \frac{\psi^2}{\psi^1} dx + G(a, y), \quad (3.2)$$

здесь $F(a, y), G(a, y)$ – произвольные функции, через a обозначено выражение

$$a = \ln \tau + \int \frac{dx}{\psi^1}.$$

Далее подставим найденные функции (3.2) в систему (3.1), получим систему уравнений на функции F и G

$$F_a = \bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{G_y} + \bar{\psi}^2 F_y + 2\bar{\psi}^1, \quad (3.3)$$

$$G_a = -\bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{F_y} + \bar{\psi}^2 G_y - 2\bar{\psi}^1, \quad (3.4)$$

$$F_{ya} = e^{F+G} F_y, \quad (3.5)$$

$$G_{ya} = -e^{F+G} G_y, \quad (3.6)$$

$$F_{aa} = e^{F+G} \left(\bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{G_y} + \bar{\psi}^2 F_y \right), \quad (3.7)$$

$$G_{aa} = e^{F+G} \left(\bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{F_y} - \bar{\psi}^2 G_y \right). \quad (3.8)$$

С учетом (3.3), (3.4), уравнения (3.7), (3.8) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{aa} = e^{f+g} f_a, \\ g_{aa} = -e^{f+g} g_a, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

где $f = F - 2a\bar{\psi}^1$, $g = G + 2a\bar{\psi}^1$. Вычтем из первого уравнения системы (3.9) второе уравнение и проинтегрируем полученное равенство по a , тогда

$$f_a - g_a = e^{f+g} + C_1(y), \quad (3.10)$$

здесь $C_1(y)$ – произвольная функция. Далее умножим первое уравнение системы (3.9) на g_a , второе уравнение – на f_a и сложим полученные выражения, откуда найдем

$$g_a = \frac{C_2(y)}{f_a}, \quad (3.11)$$

здесь $C_2(y)$ – произвольная функция. Подставим найденную формулу для g_a (3.11) в уравнение (3.10), получим

$$g = -f + \ln(f_a^2 - C_1 f_a - C_2) - \ln f_a. \quad (3.12)$$

Возвращаясь к системе уравнений (3.9), с учетом формулы (3.12), первое уравнение можно переписать так

$$f_{aa} = f_a^2 - C_1 f_a - C_2.$$

Правая часть данного выражения представляет собой полином второй степени, разложим его на множители

$$f_{aa} = (f_a - \alpha)(f_a - \beta),$$

α, β – произвольные функции от y . Интегрируя данное уравнение найдем функцию f , а именно

$$f = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} [(\alpha - \beta)a + \gamma] - \ln[1 - \exp\{(\alpha - \beta)a + \gamma\}] + \delta(y), \quad \alpha \neq \beta, \quad (3.13)$$

$$f = \alpha a - \ln(\varepsilon - a) + \kappa(y), \quad \alpha = \beta, \quad (3.14)$$

здесь $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y), \delta(y), \varepsilon(y), \kappa(y)$ – произвольные функции.

Теперь подставим найденные формулы (3.13), (3.14), (3.12) в уравнение (3.5). Получим следующие соотношения

1. при $\alpha \neq \beta$

$$\beta' + 2\bar{D}\bar{\psi}^1 = 0, \quad \alpha = \beta + c, \quad \delta' + \frac{\beta'\gamma}{\alpha - \beta} = 0, \quad (3.15)$$

где c – произвольная постоянная,

2. при $\alpha = \beta$

$$\alpha' + 2\bar{D}\bar{\psi}^1 = 0, \quad \alpha\varepsilon' + \kappa' = 0. \quad (3.16)$$

Далее подставим функции (3.13), (3.14), (3.12), с учетом условий (3.15), (3.16) в уравнения (3.6), (3.3), (3.4), получим верные тождества. Таким образом решение системы уравнений (1.3) можно представить в виде (3.2), где функции $F = f + 2a\bar{\psi}^1$, $G = g - 2a\bar{\psi}^1$ находятся из соотношений (3.13), (3.14), (3.12), а именно

при $\alpha \neq \beta$:

$$u = \ln \phi_1'(x) + \phi_2(x) - \frac{\alpha\delta'}{\alpha'} - \ln\left(1 - \exp\left\{a - \frac{\delta'}{\alpha'}\right\}\right) + \delta,$$

$$v = -\phi_2(x) + \left(a - \frac{\delta'}{\alpha'}\right) + \frac{\alpha\delta'}{\alpha'} - \ln\left(\alpha - (\alpha - 1)\exp\left\{a - \frac{\delta'}{\alpha'}\right\}\right) - \delta,$$

при $\alpha = \beta$:

$$u = \ln \phi_1'(x) + \phi_2(x) - \ln(\varepsilon(y) - a) + \kappa(y), \quad (3.17)$$

$$v = -\phi_2(x) - \ln\left[\frac{\kappa'}{\varepsilon'}(a - \varepsilon(y)) + 1\right] - \kappa(y), \quad (3.18)$$

здесь $\phi_1'(x) = \frac{1}{\psi^1}$, $\phi_2'(x) = \frac{\psi^2}{\psi^1}$, $\varepsilon(y), \kappa(y), \alpha(y), \delta(y)$ – произвольные функции.

4. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГУРСА

Рассмотрим задачу Гурса для системы уравнений (1.3):

$$u|_{y=0} = \ln p(x), \quad v|_{y=0} = \ln q(x), \quad u|_{x=0} = \ln \bar{p}(y), \quad v|_{x=0} = \ln \bar{q}(y). \quad (4.1)$$

Положим в решение (3.17), (3.18) $y = 0$, $\tau = 1$, получим

$$u|_{y=0} = \ln p(x) = \ln \phi_1' + \phi_2 - \ln(\varepsilon(0) - \phi_1) + \kappa(0), \quad (4.2)$$

$$v|_{y=0} = \ln q(x) = -\phi_2 - \ln \left(\frac{\kappa'(0)}{\varepsilon'(0)} (\phi_1 - \varepsilon(0)) + 1 \right) - \kappa(0). \quad (4.3)$$

Сложим выражения (4.2) и (4.3), и проинтегрируем полученное равенство по x , откуда найдем функцию $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x) = \varepsilon(0) - \left(C_2 + \left\{ \frac{1}{C_1} - C_2 \right\} e^{\int_0^x pqd\xi} \right)^{-1}, \quad (4.4)$$

здесь постоянные $C_1 = \varepsilon(0) - \phi_1(0)$, $C_2 = \frac{\kappa'(0)}{\varepsilon'(0)}$.

Далее из выражения (4.2) найдем вид функции $\phi_2(x)$, а именно:

$$\phi_2(x) = \ln \left[(q(0)e^{\phi_2(0)+\kappa(0)} - 1) e^{-\int_0^x pqd\xi} + 1 \right] - \ln q - \kappa(0). \quad (4.5)$$

Теперь положим в формулах (3.17), (3.18) $x = 0$:

$$u|_{x=0} = \ln \bar{p}(y) = \ln \phi_1'(0) + \phi_2(0) - \ln(\varepsilon - \phi_1(0)) + \kappa, \quad (4.6)$$

$$v|_{x=0} = \ln \bar{q}(y) = -\phi_2(0) - \ln \left(\frac{\kappa'}{\varepsilon'} (\phi_1(0) - \varepsilon) + 1 \right) - \kappa. \quad (4.7)$$

Сложим равенства (4.6), (4.7), тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции $\varepsilon(y)$, решая которое найдем

$$\varepsilon(y) = \phi_1(0) + \phi_1'(0) \left(\int_0^y \bar{q}\bar{p}'d\xi + \frac{\phi_1'(0)}{C_1} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

Тогда $\kappa(y)$ находится из выражения (4.6) и имеет вид

$$\kappa(y) = \ln \bar{p} - \phi_2(0) - \ln \left(\int_0^y \bar{q}\bar{p}'d\xi + \bar{p}(0)e^{-\phi_2(0)-\kappa(0)} \right). \quad (4.9)$$

Далее воспользуемся условием согласования. Положим в решение (3.17), (3.18) $x = 0$, $y = 0$, получим следующие соотношения:

$$\phi_1'(0) = p(0)q(0)C_1(1 - C_1C_2), \quad (4.10)$$

$$\phi_2(0) + \kappa(0) = -\ln(q(0)(1 - C_1C_2)). \quad (4.11)$$

Теперь подставим найденные функции (4.4), (4.5), (4.8), (4.9) в решение (3.17), (3.18) и, учитывая условия согласования (4.10), (4.11), в итоге получим следующее представление решения задачи Гурса (1.3), (4.1), а именно:

$$u = \ln \left[\frac{p(x)\bar{p}(y)q(0)}{p(0)q(0) + \int_0^y \bar{p}'\bar{q}d\xi (1 - e^{xp\{\int_0^x pqd\xi\}})} \right],$$

$$v = \ln \left[\frac{q(x)\bar{q}(y)p(0)\exp\left\{\int_0^x pqd\xi\right\}}{\left(\bar{p}\bar{q} - \int_0^y \bar{p}'\bar{q}d\xi\right)\left(\exp\left\{\int_0^x pqd\xi\right\} - 1\right) + p(0)q(0)} \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лезнов А. Н., Шабат А. Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* // Интегрируемые системы БФАН СССР. Уфа. 1982. С. 34–44.
2. Жибер А. В., Михайлова Ю.Г. *Алгоритм построения общего решения n -компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами Лапласа и краевые задачи* // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1. №3. С. 28–45.
3. Воронова Ю. Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. №2. С. 20–26.
4. Жибер А. В., Михайлова Ю.Г. *О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. №4. С. 73–82.
5. Воронова Ю. Г. *Построение решения задачи Гурса для нелинейных гиперболических уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых учёных. Уфа, БГУ. 2012. Т. 1. С. 51–58.
6. Гурьева А. М. *Метод каскадного интегрирования Лапласа и нелинейные гиперболические системы уравнений* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 2005. 172 с.

Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mihaylovaj@mail.ru

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.ru