Уфимский Математический Журнал

2013. Том 5. № 2.

**Главный редактор:**
В.В. Напалков

**Заместители главного редактора:**
Р.К. Газизов
Р.С. Юлмухаметов

**Ответственный секретарь:**
Р.А. Башмаков

**Редакционная коллегия:**
Р.Р. Гадыльшин
А.М. Гайсин
А.В. Жибер
Л.А. Калякин
Ю.А. Кордюков
Ф.Х. Мукминов
И.Х. Мусин
Ф.С. Насыров
Б.Н. Хабибуллин
И.Т. Хабибуллин
З.Ю. Фазуллин
V.Ya. Eiderman (USA)
M. Gurses (Turkey)
Yu.I. Lyubarskii (Norway)
F.M. Mahomed (South Africa)
S.V. Meleshko (Thailand)
A. Montes Rodríguez (Spain)
A.G. Poltoratski (USA)
M. Sodin (Israel)
A. Vidras (Cyprus)
Deng Guantie (China)

**Редакционный совет:**
М.Б. Гузаиров
Н.Х. Ибрагимов
А.М. Ильин
В.В. Напалков
А.М. Седлецкий
А.Б. Шабат

# СОДЕРЖАНИЕ

**Учредители:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,

ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный
технический университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы»

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций (Свид. ПИ № ФС77-50877 от 14.08.2012)

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей доступны в Интернете на сайтах Института математики с ВЦ УНЦ РАН matem.anrb.ru, Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала mathnet.ru

Статьи журнала реферируются в Zentralblatt MATH (ZBMATH).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий.

**Технические редакторы:** Р.Н. Гарифуллин, А.А. Махота.
**Корректура:** О.А. Соколова.

Подписано в печать 20.09.2013 г. Формат 60×84/8.
Усл. печ. л. ???. Уч.-изд. л. ???. Тираж 500 экз. Изд. № ???. Заказ № ???.
Цена договорная.

Отпечатано с предоставленных файлов в редакционно-издательском центре
Уфимского государственного авиационного технического университета.
450074, г. Уфа, ул.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:
ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112, к. 22. Тел.+7 347 273 33 42.
E-mail: umj@matem.anrb.ru
URL: http://matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863. Ufimskii matematičeskij žurnal.
Индекс в каталоге «Роспечать» 57382.

© ИМВЦ УНЦ РАН, 2013 г.

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 3-11.

УДК 517.53

# РЯДЫ ДИРИХЛЕ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ИМЕЮЩИЕ ПРАВИЛЬНУЮ ДИСКРЕТНУЮ МАЖОРАНТУ РОСТА

**Н.Н. АИТКУЖИНА, А.М. ГАЙСИН**

**Аннотация.** Изучается класс целых функций, представимых рядами Дирихле с вещественными коэффициентами, определяемый некоторой выпуклой мажорантой роста. Доказан критерий выполнения асимптотического равенства на положительном луче, представляющего собой точную оценку роста логарифма модуля каждой функции из рассматриваемого класса.

**Ключевые слова:** ряды Дирихле с вещественными коэффициентами, дискретная мажоранта роста.

**Mathematics Subject Classification:** 30D10.

Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k \quad (z=x+iy) \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция с вещественными коэффициентами, а $\{p_n\}$ $(n\geq 1)$ — последовательность перемен знаков коэффициентов (по определению $p_n=\min\limits_{k>p_{n-1}}\{k: a_{p_{n-1}}a_k<0\}$, где $p_0=\min\{k: a_k\neq 0\}$). Через $p(t)$ обозначим считающую функцию последовательности $\{p_n\}$: $p(t)=\sum\limits_{p_n\leqslant t}1$. В [1] показано, что если плотность последовательности $\{p_n\}$ $\Delta=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{p(t)}{t}$ равна нулю, то в каждом угле $\{z: |\arg z|\leqslant\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$ целая функция (1) имеет тот же порядок, что и во всей плоскости. Позже выяснилось, что данный результат справедлив и для луча $\{z:\arg z=0\}$: если функция (1) имеет конечный порядок $\rho$ и $\Delta=0$, то [2]

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln|f(x)|}{\ln M_f(x)}=1,\quad M_f(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|\ (r>0). \tag{2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\rho_0=\rho$, где $\rho_0=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\frac{\ln\ln|f(x)|}{\ln x}$. При $\Delta=0$ равенство (2) верно и для функций конечного нижнего порядка [3]. В [4] найдены неулучшаемые условия на функцию $p(t)$ (они слабее условия $\Delta=0$), при выполнении которых для любой функции конечного порядка (конечного нижнего порядка), заданной рядом (1), при $x\to\infty$ вне некоторого множества нулевой нижней логарифмической плотности справедливо асимптотическое равенство

$$\ln M_f(x)=(1+o(1))\ln|f(x)|. \tag{3}$$

N.N. Aitkuzhina, A.M. Gaisin, Dirichlet series with real coefficients.

© Аиткужина Н.Н., Гайсин А.М. 2013.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-97004-р_поволжье_а).

*Поступила 15 апреля 2013 г.*

Целью данной статьи является получение аналогичных с (3) асимптотических оценок для целых функций с более общей мажорантой роста, представленных рядами Дирихле с вещественными коэффициентами.

Через $L$ обозначим класс всех непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ положительных функций. Пусть $\Phi \in L$ — выпуклая функция, такая, что для ее обратной функции $\varphi$ выполняется условие

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x^2)}{\varphi(x)} < \infty. \tag{4}$$

Через $A(\varphi)$ и $\underline{A}(\varphi)$ будем обозначать классы положительных, неубывающих на $\mathbb{R}_+$ функций $\alpha = \alpha(t)$, $\alpha(t) = o(t\varphi(t))$ при $t \to \infty$, таких, что соответственно

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{\varphi(r)} \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2}\, dt = 0, \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{\varphi(r)} \int_1^r \frac{\alpha(t)}{t^2} dt = 0.$$

Подклассы $A(\varphi)$ и $\underline{A}(\varphi)$, состоящие из функций $\alpha \in L$, таких, что $\alpha(t) \geq \sqrt{t}$, будем соответственно обозначать через $W(\varphi)$ и $\underline{W}(\varphi)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1) \quad \sup_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty \quad \text{(условие несгущаемости);} \tag{5}$$

$$2) \quad \ln(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > -\alpha(\lambda_n) \quad (n \geq 1) \quad \text{(условие несближаемости),}$$

где $\alpha$ — некоторая функция из $W(\varphi)$, $\alpha(t) = O(t)$ при $t \to \infty$, $\lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Обозначим $D(\Lambda)$ класс всех целых функций $F$, представимых абсолютно сходящимися во всей плоскости рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it) \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами $a_n$. Пусть $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$,

$$\underline{D}_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : \exists\, \{\sigma_n\},\ 0 < \sigma_n \uparrow \infty,\ \ln M(\sigma_n) \leqslant \Phi(m\sigma_n)\} \quad (m \geq 1).$$

Положим $\underline{D}(\Phi) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m(\Phi)$. Через $\mu(\sigma)$ будем обозначать максимальный член ряда (6), то есть $\mu(\sigma) = \max\limits_{n\geq 1}\{|a_n| e^{\lambda_n \sigma}\}$.

Пусть $\mu_n = \lambda_{p_n}$, где $\{p_n\}$ — последовательность перемен знаков коэффициентов ряда (6), $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$, $q(t) = \sum\limits_{q_n \leqslant t} 1$, где

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_{n+1}}}{2},\ \lambda_{p_n} + 1\right).$$

Так как $\mu_n < q_n < \mu_{n+1}$, то $|l(t) - q(t)| \leqslant 1$.

В дальнейшем будет предполагаться выполнение следующего условия на последовательность $\{p_n\}$: существует $\theta \in A(\varphi)$, что

$$\int_1^{\lambda_n} \frac{l(t; \lambda_n)}{t}\, dt \leqslant \theta(\lambda_n) \quad (n \geq 1), \tag{7}$$

где $l(t; \lambda_n)$ — число точек $\mu_j$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$. Отметим, что в случае $\varphi(x) = \ln x$, условие (7) выполняется автоматически (это показано в [4]).

В настоящей статье доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть выполняется условие (7).*

*Для того чтобы для любой функции $F \in \underline{D}(\Phi)$ при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$ нулевой нижней плотности выполнялось асимптотическое равенство*

$$\ln M(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(\sigma)|, \tag{8}$$

*необходимо и достаточно, чтобы $l \in A(\varphi)$.*

Отметим, что если $\Phi(\sigma) = \underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k}(\sigma)$ $(k \geq 1)$, то при $k = 1$ класс $\underline{D}(\Phi)$ состоит из рядов Дирихле конечного нижнего порядка по Ритту. Поэтому соответствующие результаты из [3]-[4] являются следствиями из теоремы 1.

## §1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобится следующая лемма типа Бореля-Неванлинны.

**Лемма 1 [5].** *Пусть $\Phi \in L$, и для функции $\varphi$, обратной к $\Phi$, выполняется условие (4). Пусть, далее, $u(\sigma)$ — неубывающая, положительная и непрерывная на $[0, \infty)$ функция, причем*

$$\lim_{\sigma\to\infty} u(\sigma) = \infty, \quad \varliminf_{\sigma\to\infty} \frac{u(\sigma)}{\ln \Phi(\sigma)} < \infty.$$

*Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, выбранная так, что*

$$u(x_n) \leqslant C \ln \Phi(x_n), \quad 0 < C < \infty.$$

*Предположим, что функция $w$ принадлежит классу $W(\varphi)$. Если $v = v(\sigma)$ — решение уравнения*

$$w(v) = e^{u(\sigma)}, \tag{9}$$

*то при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset [0, \infty)$,*

$$mes(E \cap [0, x_n]) \leqslant o(\varphi(v(x_n))) + 4 \int\limits_{v(x_1)}^{v(x_n)} \frac{w^*(t)}{t^2} dt = o(\varphi(v(x_n))),\ x_n \to \infty,$$

*имеет место асимптотическое равенство*

$$u\left(\sigma + d\frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}\right) = u(\sigma) + o(1) \quad (0 < d < \infty).$$

В условиях леммы 1 $w^*$ — некоторая функция, имеющая вид $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, $\beta \in L$. Функция $\beta$ выбирается так, что $w^* \in W(\varphi)$. В лемме 1 указанная функция $w^*$ всегда существует (она определяется не единственным образом). Отметим, что исключительное множество $E$ зависит от функции $w^*$.

Для получения оценки типа (8) нам потребуется следующее утверждение об оценке ограниченной аналитической функции в круге.

**Лемма 2. [6].** *Пусть $g$ — функция, аналитическая в круге $\{z : |z| < R\}$, причем*

$$|g(0)| > 1, \quad \ln \sup_{|z|<R} |g(z)| = M < \infty.$$

*Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков $V_n = \{z : |z - z_n| < \rho_n\}$ таких, что*

$$\sum_n \rho_n \leqslant Rr^N(1 - r),$$

*вне которых, но в круге $\{z : |z| \leqslant rR\}$ выполняется оценка*

$$\ln |g(z)| \geq \frac{R - r}{R + r} \ln |g(0)| - 5NL, \tag{10}$$

*где*

$$L = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g(re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|g(0)|.$$

Оценка (10) является более точной, чем оценка $\ln|g(z)| \geq -5NM$ из [7].

Пусть $\{p_n\}$ — последовательность натуральных чисел, $\mu_n = \lambda_{p_n}$, $l(t) = \sum\limits_{\mu_n \leqslant t} 1$,

$$q_n = \min\left(\frac{\lambda_{p_n} + \lambda_{p_{n+1}}}{2}, \lambda_{p_n} + 1\right), \quad q(t) = \sum_{q_n \leqslant t} 1.$$

Положим

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a}\left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right) \quad (a \geq q_1).$$

Имеет место следующая

**Лемма 3 [4].** *Для любого $\lambda_n \leqslant a$ $(a \geq q_1)$ справедлива оценка*

$$-\ln|Q_a(\lambda_n)| \leqslant \int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t} dt + 4N_q(2ea), \tag{11}$$

*где $q(t;\lambda_n)$ — число точек $q_i$ в отрезке $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$,*

$$N_q(t) = \int_0^t \frac{q(x)}{x} dx.$$

## §2. Доказательство теоремы 1

**1. Достаточность.** Поскольку $|l(t) - q(t)| \leqslant 1$, $l \in A(\varphi)$, то $q \in A(\varphi)$. Далее,

$$\int_0^r \frac{q(t)}{t^2} dt = \int_0^r \frac{dN_q(t)}{t} = \frac{N_q(r)}{r} + \int_0^r \frac{N_q(t)}{t^2} dt,$$

где $N_q(t) = \int\limits_0^t \frac{q(x)}{x} dx$. Следовательно, $N_q \in A(\varphi)$. Значит, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_1(t)$, $1 \leqslant \beta_1(t) \uparrow \infty$, $t \to \infty$, такая, что функция $N_q(2et)\beta_1(t)$ также принадлежит $A(\varphi)$.

Оценим интеграл $\int\limits_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt$, где $q(t;\lambda_n)$ — число точек $q_i$ из отрезка $\{h : |h - \lambda_n| \leqslant t\}$. Имея в виду второе из условий (5), имеем

$$\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt = \int_{\gamma_n}^1 \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt + \int_1^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\, dt = I_1 + I_2,$$

где $\gamma_n = \frac{1}{2}e^{-\alpha(\lambda_n)}$. Но из условия $\sup\limits_t(\lambda(t+1) - \lambda(t)) < \infty$ следует, что $q(t;\lambda_n) \leqslant dt + d$ $(0 < d < \infty)$. Так как $\mu_n < q_n < \mu_{n+1}$, то $|q(t;\lambda_n) - l(t;\lambda_n)| \leqslant 1$. Поэтому, учитывая (7), имеем

$$I_1 \leqslant d[1 + \ln 2 + \alpha(\lambda_n)], \quad I_2 \leqslant \theta(\lambda_n) + \ln\lambda_n \quad (n \geq 1), \tag{12}$$

где $\alpha \in W(\varphi)$, $\theta \in A(\varphi)$. Следовательно, принимая во внимание (12), получаем, что

$$\int_0^{\lambda_n} \frac{q(t;\lambda_n)}{t}\,dt < \Theta_1(\lambda_n), \tag{13}$$

где $\Theta_1 \in W(\varphi)$. Далее, найдется непрерывная на $[0,\infty)$ функция $\beta_2(t)$, $1 \leqslant \beta_2(t) \uparrow \infty$, при $t \to \infty$, такая, что функция $\Theta_1(t)\beta_2(t)$ принадлежит $W(\varphi)$. Положим $w^*(t) = \beta(t)w(t)$, где $w(t) = \Theta_1(t) + N_q(2et)$, $\beta(t) = \min(\beta_1(t), \beta_2(t))$. Ясно, что $w^* \in \underline{W}(\varphi)$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma), \tag{14}$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (6). Положим

$$F_a(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n e^{\lambda_n s}, \quad F_a^*(s) = \sum_{\lambda_n \leqslant a} a_n Q_a(\lambda_n) e^{\lambda_n s},$$

где

$$Q_a(z) = \prod_{q_n \leqslant 2a} \left(1 - \frac{z^2}{q_n^2}\right).$$

Поскольку все $a_n Q_a(\lambda_n)(\lambda_n \leqslant a)$ одного знака, можно считать, что $a_n Q_a(\lambda_n) \geq 0$ $(\lambda_n \leqslant a)$. Так как, очевидно,

$$M_a^*(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F_a^*(\sigma + it)| = F_a^*(\sigma),$$

то

$$M_a^*(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} q_a(t) F_a(t+\sigma)\,dt, \tag{15}$$

где $q_a(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q_a(z)$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. Принимая во внимание (14), как и в [3] показывается, что при $\sigma \to \infty$

$$\delta \max_{|t|=\delta} |q_v(t)| \leqslant \delta \int_0^\infty M(Q_v, r) e^{-\delta r}\,dv \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma), \tag{16}$$

где $M(Q_v, r) = \max\limits_{|z|=r} |Q_v(z)|$. Далее, применяя лемму 1, получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E_1 \in [0,\infty)$ нулевой нижней плотности $dE_1$

$$\ln\mu(\sigma + 4\delta^*) = (1 + o(1))\ln\mu(\sigma), \quad \delta^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}, \tag{17}$$

причем согласно той же лемме при $\sigma_n^* \to \infty$

$$\frac{mes(E_1 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} = o(1), \ \sigma_n^* \to \infty,$$

где последовательность $\{\sigma_n^*\}$ выбрана из условия $\ln M(\sigma_n^*) \leqslant \Phi(m\sigma_n^*)$ $(m \geq 1)$. Тогда при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$\sum_{\lambda_n > v(\sigma)} |a_n| e^{\lambda_n(\sigma + 3\delta^*)} \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*) \sum_{\lambda_n > v(\sigma)} e^{-\delta^* \lambda_n} \leqslant$$

$$\mu^{1+o(1)}(\sigma) \exp[-3(1 + o(1))\ln\mu(\sigma)] < 1. \tag{18}$$

Учитывая первое из условий (5), видим, что $\lambda(v(\sigma)) = O(v(\sigma))$ при $\sigma \to \infty$. Значит, $\ln\lambda(v(\sigma)) \leqslant 2\ln v(\sigma) \leqslant 2w(v(\sigma))$ при $\sigma \geq \sigma_0$ (мы учли, что $w \in W(\varphi)$). Отсюда с учетом (14), (17) при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$ имеем

$$M(\sigma + 3\delta^*) \leqslant \mu(\sigma + 4\delta^*)[\lambda((v(\sigma)) + 1] \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma), \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1.$$

Следовательно, при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$\ln M(\sigma + 3\delta^*) = (1 + o(1))\ln M(\sigma). \tag{19}$$

Учитывая (16), (18), из (15) получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$M_v^*(\sigma) \leqslant M^{1+o(1)}(\sigma)(\max_{|\xi-\sigma|\leqslant\delta} |F(\xi) + 1|). \tag{20}$$

Но при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$M(\sigma) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} |a_n|e^{\lambda_n\sigma} + 1 = \sum_{\lambda_n \leqslant v(\sigma)} (|a_n||Q_v(\lambda_n)|e^{\lambda_n\sigma})|Q_v(\lambda_n)|^{-1} + 1.$$

Отсюда ввиду леммы 3, оценки (13), равенства (14) следует, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$

$$M(\sigma) \leqslant \mu^{o(1)}(\sigma)M_v^*(\sigma) \leqslant M^{o(1)}(\sigma)M_v^*(\sigma).$$

С учетом этой оценки из (20) окончательно получаем, что при $\sigma \to \infty$ вне $E_1$, $dE_1 = 0$,

$$M^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\sigma|\leqslant\delta} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{21}$$

где $|\xi^* - \sigma| = \delta$, $\delta = \frac{w_1(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w_1(t) = \beta^{1/2}(t)w(t)$. К тому же согласно лемме 1

$$\frac{mes(E_1 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} = o(1), \ \sigma_n^* \to \infty.$$

Напомним, что последовательность $\{\sigma_n^*\}$ выбрана из условия $\ln M(\sigma_n^*) \leqslant \Phi(m\sigma_n^*)$ $(m \geq 1)$, и $\sigma_n^* \to \infty$.

Положим $B = [0, \infty) \setminus E_1$. Найдется последовательность $\{\sigma_i\}$ $(\sigma_i \in B)$ такая, что $\sigma \uparrow \infty$, $\sigma_i + \delta_i \leqslant \sigma_{i+1}$, причем $\sigma_{i+1} - \delta_{i+1} < \inf\{\sigma : \sigma \in B, \ \sigma > \sigma_i + \delta_i\}$, где $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$ $(i \geq 1)$. Значит,

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [\sigma_i - \delta_i, \sigma_i + \delta_i].$$

Положим $g(z) = F(z + \xi^*)$. Из (21) видно, что $|g(0)| > 1$ при $\sigma \in B \cap [\sigma_0, \infty)$ $(\sigma_0 > 0)$. В (21) положим $\sigma = \sigma_i$, $\delta = \delta_i$, а в лемме 2 возьмем $N = 3$, $r = [\beta(v(\sigma_i))]^{-1/2}$, $R = 2\delta_i^*$, $\left(\delta_i^* = \frac{w^*(v(\sigma_i))}{v(\sigma_i)}\right)$. Тогда $Rr = 2\frac{w^*(v_i)}{v_i\sqrt{\beta(v_i)}} = 2\sqrt{\beta(v_i)}\frac{w(v_i)}{v_i} = \frac{2w_1(v_i)}{v_i} = 2\delta_i$ $(v_i = v(\sigma_i))$. Следовательно, из леммы 2 заключаем, что в круге $\{z : |z| \leqslant 2\delta_i\}$, но вне исключительных кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке

$$\sum_n p_n^{(i)} \leqslant 2\delta_i\beta_i^{-\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

верна оценка (10). Здесь $\beta_i = \beta(v(\sigma_i))$. Тогда для всех $z$ из круга $\{z : |z| \leqslant \delta_i\}$, но вне кружков $V_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов, удовлетворяющих оценке (22), из (10) при $i \to \infty$ имеем

$$\ln|g(z)| \geq \left[1 + o(1) - 15\frac{L}{\ln|g(0)|}\right]\ln|g(0)|. \tag{23}$$

Учитывая, что $g(z) = F(z + \xi^*)$, а также используя оценки (21), (19), (23), получаем, что для всех $z$ из круга $\{z : |z - \sigma_i| \leqslant \delta_i\}$, но вне исключительных кружков $C_n^{(i)}$ с общей суммой радиусов не больше $2\delta_i \beta_i^{-\frac{1}{2}}$,

$$\ln |F(z)| > (1 + o(1)) \ln M(\sigma_i),\ i \to \infty. \tag{24}$$

Здесь $\delta_i = \delta(v(\sigma_i))$, а $\delta = \frac{w(v(\sigma))}{v(\sigma)}$, $w(t)$ — функция, удовлетворяющая условиям леммы 1.

Пусть $E_2$ — проекция множества $\bigcup\limits_{i,n} C_n^{(i)}$ на вещественную ось. Оценим относительную меру множества $E_2$. Пусть последовательность $\{\sigma_n\}$ $(\sigma_n \in B, B = [0, \infty) \setminus E_1)$ такая, что если $\sigma_n' = \inf\{\sigma : \sigma \in B,\ \sigma > \sigma_n + \delta_n\}$, то $0 \leqslant \sigma_{n+1} - \sigma_n' \leqslant \delta_n$.

Пусть $\sigma_k < \sigma_n^* \leqslant \sigma_{k+1}$. Поскольку $\ln M(\sigma_n^*) \leqslant \Phi(m\sigma_n^*)$ $(m \geq 1)$, с учетом (4), (14) получаем, что $\sigma_n^* \geq \alpha\varphi(v(\sigma_n^*)) > \alpha\varphi(v(\sigma_k))$ $(\alpha > 0)$. Тогда

$$\frac{mes(E_2 \cap [0, \sigma_n^*])}{\sigma_n^*} \leqslant \frac{4}{\sigma_k} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i^{-\frac{1}{2}} \delta_i + \frac{4\delta_k}{\alpha\varphi(v(\sigma_k))},$$

где

$$\delta_k = \frac{\beta^{-\frac{1}{2}}(v(\sigma_k)) w(v(\sigma_k))}{v(\sigma_k)} < \frac{w^*(v(\sigma_k))}{v(\sigma_k)},$$

а $w^* = \beta(t)w(t)$ $(0 < \beta(t) \uparrow \infty,\ t \to \infty)$— функция, удовлетворяющая условиям леммы 1. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{4\delta_k}{\alpha\varphi(v(\sigma_k))} = 0.$$

Но так как $\beta_i^{-1/2} \to 0$ при $i \to \infty$, а $\sigma_k \geq 2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta_i$, то $dE_2 = 0$. Значит оценка (8) имеет место при $\sigma \to \infty$ вне $E = E_1 \cup E_2$, $dE = 0$.

Достаточность доказана.

**2. Необходимость.** Пусть $l \notin A(\varphi)$. Тогда

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\mu_n \leqslant r} \frac{1}{\mu_n} = \gamma > 0, \tag{25}$$

и ряд $\sum\limits_n \mu_n^{-1}$ расходится. Положим

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}).$$

Так как $\mu_n = \lambda_{p_n}$, а последовательность $\{\lambda_n\}$ подчинена условиям (5), то последовательность $\{\mu_n\}$ имеет конечную верхнюю плотность, и $\mu(t; \mu_n) \leqslant Ct + C$ $(0 < C < \infty)$, где $\mu(t; \mu_n)$ — число точек $\mu_i$ $(\mu_i \neq \mu_n)$ из отрезка $\{h : |h - \mu_n| \leqslant t\}$. Но тогда из результатов статьи [8] следует, что

$$\ln |\Phi'(\mu_n)| = -\int_0^1 \frac{\mu(t; \mu_n)}{t} dt + O(\mu_n).$$

С учетом второго условия из (5) отсюда получаем, что

$$-\ln |\Phi'(\mu_n)| = O(\mu_n),\ n \to \infty. \tag{26}$$

Введем в рассмотрение ряд

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_n s}\ (s = \sigma + it), \tag{27}$$

где

$$a_k = \begin{cases} \frac{\psi^2(\mu_n)}{\Phi'(\mu_n)(1+\mu_n)^2}, & k = p_n, \\ 0, & k \neq p_n \end{cases} \quad (n \geq 1), \quad \psi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z/\mu_n)e^{-z/\mu_n}.$$

Поскольку $l(x) = O(x)$, при $x \to \infty$, то, учитывая (25), имеем (см. [8])

$$\ln \psi(x) \leqslant -dx\varphi(x) \quad (x > 0), \tag{28}$$

где $0 < d < \infty$. Проверяется, что при некотором достаточно малом $q > 0$ справедлива оценка:

$$\ln \psi^2(x) \leqslant -2qx \sum_{\mu_n \leqslant x} \frac{1}{\mu_n} \quad (0 < q < \infty). \tag{29}$$

Следовательно, ввиду (26), (29) ряд (27) абсолютно сходится во всей плоскости. Так как $|F(\sigma)| = O(1)$ при $\sigma \to +\infty$ [6], достаточно показать, что $F \in \underline{D}(\Phi)$.

Учитывая (26), (29), при некотором $A \geq A_0$ имеем:

$$M(\sigma) \leqslant A \exp\left[\max_{t \geq 0}\left(-qt\int_0^t \frac{l(x)}{x^2}\,dx + \sigma t\right)\right]. \tag{30}$$

Из (25) следует, что для некоторой последовательности $\{t_k\}$, $t_k \uparrow \infty$,

$$\int_0^{t_k} \frac{l(x)}{x^2}\,dx \geq \beta\varphi(t_k), \quad \beta > 0. \tag{31}$$

Пусть $t = t(\sigma)$ — решение уравнения

$$a\int_0^t \frac{l(x)}{x^2}\,dx = \sigma. \tag{32}$$

Поскольку, очевидно, $t = t(\sigma)$ — непрерывная, возрастающая функция, то из (30)–(32) получаем, что для некоторой последовательности $\{\sigma_k\}$, $\sigma_k \uparrow \infty$,

$$\ln M(\sigma_k) \leqslant \ln A + \sigma_k t_k \leqslant \ln A + \sigma_k \Phi\left(\frac{\sigma_k}{\beta q}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \ln A + \Phi(\sigma_k)\Phi\left(\frac{\sigma_k}{\beta q}\right) \leqslant \ln A + \Phi^2(B\sigma_k) \quad (0 < B < \infty).$$

Отсюда $\ln M(\sigma_k) \leqslant \Phi(m\sigma_k)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$. Следовательно, $F \in \underline{D}(\Phi)$.

Необходимость доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. G. Pólya *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzeihen*// Math. Z. V. 29, P. 549–640. 1929.
2. Шеремета М.Н. *Об одной теореме Полиа* // Укр. мат. журн., Т. 35, № 1. 1983. С. 119–124.
3. Шеремета М.Н. *О целых функциях с вещественными тейлоровскими коэффициентами*// Укр. мат. журн. Т. 37, № 6. 1985. С. 786–787.
4. Гайсин А.М. *К одной теореме Пойа о целых функциях с вещественными коэффициентами Тейлора* // Сиб. мат. журн. Т. 38, № 1.1997. С 46–55.
5. Юсупова Н.Н. *Теорема типа Бореля-Неванлинны для функции заданного роста*// Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Математика. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск. 2006. С. 32.
6. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58, № 2. 1994. С. 73–92.

7. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 6. 1968. С. 130–150.
8. Красичков И.Ф. *Оценка снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. мат. журн. Т. 6, № 4. 1965. С. 840–861.

Наркес Нурмухаметовна Аиткужина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `YusupovaN@rambler.ru`

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `GaisinAM@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 12-19.

УДК 517.9

# КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПОРЯДКОВ 4 И 6

**Ф.Х. БАЙЧОРОВА, З.С. ЭЛЬКАНОВА**

**Аннотация.** Рассматривается модельная задача о паре коммутирующих дифференциальных операторах порядков 4 и 6. Полученные результаты применяются для обобщения известной коммутирующей пары из работы Диксмье на случай рациональных коэффициентов.

**Ключевые слова:** коммутирующие дифференциальные операторы, дифференциальные операторы порядков 4 и 6.

**Mathematics Subject Classification:** 34L05.

## Введение

Переформулировав вопрос из работы Бёрчнелла–Чонди [1] 1932 г., мы приходим к задаче о паре многочленов $a(D)$ и $b(D)$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющих функциональному уравнению [7]:

$$a(D+\beta)b(D) = a(D)b(D+\alpha); \quad \alpha, \beta \in C^N. \tag{1}$$

Здесь $D = (D_1, D_2, \dots, D_N)$ — формальная переменная, а векторы $\alpha$ и $\beta$ в $C^N$ считаются заданными. Для дифференциального оператора $C(D)$ с частными производными $D_j = \partial j$ имеет место формула

$$C(D) \circ e^{\gamma \cdot x} = e^{\gamma \cdot x} C(D+\gamma), \qquad \gamma \in C^N, C(D) \text{ — многочлен.} \tag{2}$$

Из этой формулы следует, что функциональное уравнение (1) эквивалентно условию коммутирования пары дифференциальных операторов с частными производными полуинвариантных относительно группы сдвигов:

$$A = e^{\alpha \cdot x} \cdot a(D), \quad B = e^{\beta \cdot x} \cdot b(D). \tag{3}$$

Действительно, в силу (2), композиция этих операторов приводит к формуле

$$A \circ B = e^{(\alpha+\beta)\cdot x} a(D+\beta) b(D),$$

и, таким образом, условие коммутирования таких операторов (3) действительно сводится к (1).

В теории коммутативных колец дифференциальных операторов с одной независимой переменной специальные операторы вида (3)[1] могут играть роль модели (см. [6] и [8]). В одномерном случае полиномиальное уравнение (1) принимает вид:

$$a(z+\beta)b(z) = b(z+\alpha)a(z), \quad \alpha,\ \beta \in C, \quad \alpha\beta \neq 0. \tag{4}$$

Его можно переписать за счет растяжения $z$ с коэффициентом $\beta_n$ в следующем виде

$$a(z+n)b(z) = a(z)b(z+m), \quad m = \deg P(z),\ n = \deg Q(z). \tag{5}$$

Это не ограничивает общности. Действительно, пусть многочлены

$$a(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m, \quad b(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n \tag{6}$$

F.Kh. Baichorova, Z.S. Elkanova, Commuting differential operators of orders 4 and 6.

© Ф.Х. Байчорова, З.С. Эльканова 2013.

*Поступила 16 мая 2013 г.*

[1] их собственные функции обобщают функции Бесселя

удовлетворяют функциональному уравнению (4). Приравняв коэффициенты при $z^{n+m-1}$ и $z^{n+m-2}$ в левой и правой частях уравнения, мы получаем, что

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{n}{m}, \qquad b_1 = \frac{n}{m}\, a_1 + \frac{n}{2}(\beta - \alpha). \tag{7}$$

Первое из этих соотношений после растяжения $z$ позволяет положить $\alpha = m$, $\beta = n$, а второе выражает $b_1$ через $a_1$. Продолжая этот процесс приведения подобных членов в уравнении (5), можно выразить все коэффициенты $b_1, \dots, b_n$ через $a_1, \dots, a_m$. В результате подстановки этих формул для коэффициентов многочлена $b(z)$ в уравнение (5) мы получаем, что степень многочлена

$$c(z) = a(z+n)b(z) - a(z)b(z+m) \tag{8}$$

удовлетворяет неравенству

$$\deg c(z) \leqslant m - 2.$$

Оставшиеся коэффициенты при $z^j$, $j \leqslant m-2$ дают, таким образом, $m-1$ уравнений относительно $m$ коэффициентов $a_1, \dots, a_m$. За счет сдвига (2) можно положить $a_m = 0$ и уравнять тем самым числа уравнений и неизвестных.

При взаимно простых $(m, n)$ задача о коммутирующих дифференциальных операторах порядков $m$ и $n$ изучена довольно хорошо. В частности, в рассматриваемом случае при фиксированных небольших $(m, n)$ и $\gcd(m, n) = 1$ полные списки многочленов, удовлетворяющих уравнению (5), приведены в работе [6](см. также [8]). Характерное свойство этих многочленов заключается в том, что их корни являются целыми числами при $a_m = 0$. Помимо указанного нормировочного условия, в списках учитывается, что переход к сопряженным операторам не нарушает их коммутирования. При этом формально сопряженный к оператору $\exp(\gamma \cdot x) \circ C(D)$ (см. (2)) имеет следующий вид

$$C(-D) \circ e^{\gamma \cdot x} = e^{\gamma \cdot x} C(\gamma - D). \tag{9}$$

Интерес к более сложному случаю $\gcd(m, n) \neq 1$ в последнее время заметно усилился. В основном речь идет о коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, обобщающими известный пример Диксмье [2] (обзор соответствующей литературы можно найти в [4]).

В рассматриваемой нами модельной задаче уравнения (4) и (5) позволяют полностью решить вопрос о парах коммутирующих операторов порядков 4 и 6. Установлено в частности, что канонической формой в этом случае могут служить операторы:

$$A = e^{4t} D^2 (D+2)^2 = A_2^2, \quad B = e^{6t} D^2 (D+2)^2 (D+4)^2 = A_2^3, \qquad A_2 = e^{2t} D^2.$$

Их общей собственной функцией $A_2 \psi = \psi$ является, как легко видеть, функция Бесселя нулевого порядка, которая при $n = 0$ удовлетворяет уравнению:

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{x^2 + n^2}{x^2} y, \quad D_t = -x D_x,\ x = -e^{-t}. \tag{10}$$

На модельной задаче удалось прояснить важную роль дополнительного[1] свободного параметра, который входит в коммутирующие пары дифференциальных операторов при $\gcd(m, n) \neq 1$.

## 1. Общие свойства решений уравнения (5)

Покажем, что многочлены $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, соответствующие коммутирующим операторам $A = e^{mt} a(D)$ и $B = e^{nt} b(D)$, должны в силу условия коммутирования операторов иметь общий вещественный корень $\alpha$. Для простоты будем считать, что корни многочленов вещественные (для случая комплексных корней рассуждения аналогичны).

Существование общих корней многочленов, удовлетворяющих (5), следует из леммы:

[1] не связанного со спектральной кривой

**Лемма 1.** *(об общем корне) Пусть многочлены $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ степеней $m$ и $n$ удовлетворяют уравнению* (5). *Тогда эти многочлены имеют общий корень.*

◀ Выше отмечено, что сдвиг не меняет условия коммутирования. За счет такого сдвига можно считать, что корни многочлена $a(\lambda)$ были неположительны, и что $a(0) = 0$:

$$a(\lambda) = \lambda \prod_{1}^{m-1}(\lambda + \lambda_j), \quad \lambda_{m-1} \leqslant \lambda_{m-2} \cdots \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_1 \leqslant 0. \tag{11}$$

Сейчас будет показано, что если многочлен $b(\lambda)$ удовлетворяет (5), то $b(0) = 0$ и

$$b(\lambda) = \lambda \prod_{1}^{n-1}(\lambda + \mu_j), \quad \mu_{n-1} \leqslant \mu_{n-2} \cdots \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1 \leqslant 0, \quad (\mu_{n-1} - \lambda_{m-1}) = n - m. \tag{12}$$

Покажем это. Предположим сначала, что $b(0) \neq 0$. Тогда, полагая $\lambda = 0$, в (5) мы получаем

$$a(n)b(0) = a(0)b(m),$$

$$a(n)b(0) = 0 \Rightarrow a(n) = 0.$$

Но $n > 0$, что противоречит отсутствию положительных корней многочлена $a(\lambda)$.

Аналогично, предположив, что многочлен $b(\lambda)$ имеет положительный нуль $\lambda_0$, мы находим из уравнения (5):

$$a(\lambda_0 + n)b(\lambda_0) = a(\lambda_0)b(\lambda_0 + m) = 0,$$

$$a(\lambda_0)b(\lambda_0 + m) = 0.$$

Но так как $\lambda_0 > 0$, и $a(\lambda)$ по условию не имеет положительных корней, то $b(\lambda_0 + m) = 0$. Повторяя это рассуждение, мы получаем бесконечную серию нулей $b(\lambda)$, что невозможно.

Последняя из формул (12) доказывается переходом к сопряженным дифференциальным операторам:

$$A^* = D(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)...(D-\lambda_{m-1})e^{mt} = e^{mt}(D+m)(D-\lambda_1+m)(D-\lambda_2+m)...(D-\lambda_{m-1}+m), \tag{13}$$

$$B^* = D(D-\mu_1)(D-\mu_2)...(D-\mu_{n-1})e^{nt} = e^{nt}(D+n)(D-\mu_1+n)(D-\mu_2+n)...(D-\mu_{n-1}+n). \tag{14}$$

Напомним, что если дифференциальные операторы $A$ и $B$ коммутируют, то их сопряженные операторы $A^*$ и $B^*$ также коммутируют. Следовательно, по первой части утверждения их максимальные корни также должны совпадать. У сопряженных операторов $A^*$ и $B^*$ максимальными корнями являются $(\lambda_{m-1} - m)$ и $(\mu_{n-1} - n)$ соответственно. Откуда и получаем искомую последнюю формулу:

$$\lambda_{m-1} - m = \mu_{n-1} - n \Rightarrow (\mu_{n-1} - \lambda_{m-1}) = n - m.$$

▶

Вообще говоря, корни могут быть кратными, как показывает следующий пример.

Можно убедиться, что операторы $A$ и $B$ порядков 4 и 6 соответственно

$$A = e^{4t}D(D + 2)(D + \alpha)(D + \alpha + 2),$$

$$B = e^{6t}D(D + 2)(D + 4)(D + \alpha)(D + \alpha + 2)(D + \alpha + 4)$$

коммутируют при любом $\alpha$. А при $\alpha = 2$ имеют кратные корни.

В случае, если $m$ и $n$ взаимно просты, в известных нам случаях кратных корней нет.

**Лемма 2.** *Решения полиномиального уравнения*

$$P(z + n_1)Q(z) = P(z)Q(z + n_2)$$

*можно перемножать.*

◀ Пусть $(p_1, q_1)$ и $(p_2, q_2)$-два решения рассматриваемого полиномиального уравнения. Тогда $(p = p_1p_2, q = q_1q_2)$ также будет являться решением.

$$p_1(\xi + n_1)q_1(\xi) = p_1(\xi)q_1(\xi + n_2), \quad p_2(\xi + n_1)q_2(\xi) = p_2(\xi)q_2(\xi + n_2),$$

так как

$$p_1(\xi + n_1)p_2(\xi + n_1)q_1(\xi)q(\xi) = p_1(\xi)p_2(\xi)q_1(\xi + n_2)q_2(\xi + n_2). \quad ▶$$

Отметим, что растяжение независимой переменной в уравнении (5) дает

$$P_k(z) = k^m P(\frac{z}{k}),\ Q_k(z) = k^n Q(\frac{z}{k}) \quad \text{следовательно,} \quad P_k(z + nk)Q_k(z) = P_k(z)Q_k(z + mk) \tag{15}$$

Коэффициенты $a_j(k)$ многочленов $P_k(z)$ $(Q_k(z))$ связаны с исходными формулами $a_j(k) = k^j a_j$.

**Пример 1.** *В случае операторов второго и третьего порядков многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ имеют вид:*

$$P(z) = z^2 + a_1z + a_2, \quad Q(z) = z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3.$$

*Пользуясь леммой 1, представим эти многочлены в виде*

$$P(z) = z(z + a), \quad Q(z) = z(z + b)(z + a + 1), \quad 0 \leqslant b \leqslant a + 1,\ 0 \leqslant a.$$

*Уравнение* (5) *имеет вид*

$$(z+3)[z^2+(a+b+1)z+b+ab] = (z+2)[z^2+(a+b+2)z+2a+ab] \quad \textit{следовательно,} \quad a = 1,\ 3.$$

*Таким образом получаем две пары коммутирующих дифференциальных операторов второго и третьего порядков:*

$$P(z) = z^2 + z = z(z + 1), \quad Q(z) = z^3 + 3z^2 + 2z = z(z + 1)(z + 2)$$

*и*

$$P(z) = z^2 + 3z = z(z + 3), \quad Q(z) = z^3 + 6z^2 + 8z = z(z + 2)(z + 4).$$

## 2. Полиномиальное уравнение (5) при $m = 4$, $n = 6$

Учитывая Лемму 2, рассмотрим более подробно полиномиальное уравнение

$$P(z + 3)Q(z) = P(z)Q(z + 2), \tag{16}$$

не фиксируя заранее степени многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. Техника развитая в работе [6] позволяет исследовать коммутирующие пары операторов, порядки которых не взаимно просты. Единственное отличие сводится к появлению свободных параметров в коэффициентах многочленов $A(D)$ и $B(D)$, удовлетворяющих уравнению (16).

Возвращаясь к случаю операторов порядка 2-3 (ср. Пример 1). Для того чтобы найти многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ второй и третьей степени:

$$P(z) = z^2 + a_1z + a_2, \quad Q(z) = z^3 + b_1z^2 + b_2z + b_3,$$

удовлетворяющие уравнению (16), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $z$ в левой и правой частях этого уравнения. Полагая $a_2 = 0$, находим:

$$b_1 = \frac{3}{2}a_1 + \frac{3}{2}, \quad b_2 = \frac{3}{8}a_1^2 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{8}, \quad b_3 = -\frac{1}{16}a_1^3 + \frac{3}{16}a_1^2 + \frac{1}{16}a_1 - \frac{3}{16} = 0$$

и получаем $a_1 = 1,\ -1,\ 3$, решая уравнение $b_3 = 0$. При $a_1 = 1$ находим, что $b_1 = 3$, $b_2 = 2, b_3 = 0$. И пара перестановочных многочленов имеет вид:

$$P(z) = z^2 + z = z(z + 1),\ Q(z) = z^3 + 3z^2 + 2z = z(z + 1)(z + 2).$$

При $a_1 = 3 : b_1 = 6, b_2 = 8, b_3 = 0$. И пара перестановочных многочленов имеет вид:

$$P(z) = z^2 + 3z = z(z + 3),\ Q(z) = z^3 + 6z^2 + 8z = z(z + 2)(z + 4).$$

При $a_1 = -1 : b_1 = 0, b_2 = -1, b_3 = 0$. И пара перестановочных многочленов имеет вид:

$$P(z) = z^2 - z = z(z - 1), \quad Q(z) = z^3 - z = z(z - 1)(z + 1).$$

В случае операторов четвертого и шестого порядков перестановочные многочлены имеют вид:

$$\begin{cases} P(z) = z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4, \quad P(z+3) = z^4 + p_1z^3 + p_2z^2 + p_3z + p_4 \\ Q(z) = z^6 + b_1z^5 + b_2z^4 + b_3z^3 + b_4z^2 + b_5z + b_6, \; Q(z+2) = z^6 + \sum_{j=1}^{6} q_jz^{6-j}. \end{cases} \tag{17}$$

Формула Тейлора дает

$$p_1 = \frac{1}{6}P'''(3) = a_1 + 12, \; p_2 = a_2 + 9a_1 + 54, \; p_3 = a_3 + 6a_2 + 27a_1 + 12 \cdot 9, \; p_4 = P(3)$$

$$q_1 = b_1 + 12, \; q_2 = b_2 + 10b_1 + 60, \; q_3 = b_3 + 8b_2 + 40b_1 + 160,$$

$$q_4 = b_4 + 6b_3 + 24b_2 + 80b_1 + 15 \cdot 16, \; q_5 = b_5 + 4b_4 + 12b_3 + 32b_2 + 80b_1 + 192, q_6 = Q(2).$$

Необходимое и достаточное условие коммутирования соответствующих операторов приводится к полиномиальному уравнению (16) за счет растяжения (15) с $k = 2$.

**Лемма 3.** *Перемножение решений уравнения* (5) *для операторов 2 и 3 порядков приводит с точностью до сопряжений (т.е. преобразование Дарбу нулевого порядка* [8]*) к следующему списку коммутирующих пар операторов порядков 4 и 6:*

$$e^{4t}D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+2), \quad e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+2)(D+\alpha+4) \tag{A$_1$}$$

$$e^{4t}D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+6), \quad e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+4)(D+\alpha+8) \tag{A$_2$}$$

$$e^{4t}D(D+6)(D+\alpha)(D+\alpha+6), \quad e^{6t}D(D+4)(D+8)(D+\alpha)(D+\alpha+4)(D+\alpha+8) \tag{A$_3$}$$

*Данный список можно дополнить тривиальной парой коммутирующих дифференциальных операторов:*

$$e^{4t}D(D+1)(D+2)(D+3), \quad e^{6t}D(D+1)(D+2)(D+3)(D+4)(D+5)$$

◀ Выбрав $k = 2$ в уравнении (15), из известных коммутирующих операторов второго и третьего порядков получим коммутирующие операторы порядков 4 и 6.

$$A_1 = e^{2t}D(D+1), B_1 = e^{3t}D(D+1)(D+2),$$

$$A_2 = e^{2t}D(D+3), B_2 = e^{3t}D(D+2)(D+4).$$

Список этот, согласно примеру 1, имеет следующий вид:

$$P_1(\xi) = \xi(\xi+1), Q_1(\xi) = \xi(\xi+1)(\xi+2), \quad P_2(\xi) = \xi(\xi+3), Q_2(\xi) = \xi(\xi+2)(\xi+4).$$

Можно записать:

$$P = P_1^2 = z^2(z+2)^2, Q = Q_1^2 = z^2(z+2)^2(z+4)^2$$

$$P = P_2^2 = z^2(z+6)^2, Q = Q_2^2 = z^2(z+4)^2(z+8)^2$$

$$P = P_1P_2 = z^2(z+2)(z+6), Q = Q_1Q_2 = z^2(z+2)(z+4)^2(z+8).$$

Учитывая, что сдвиг корня не влияет на коммутирование операторов, с точностью до сопряжений получаем искомый список операторов 4 и 6 порядков. ▶

Можно показать, что нечетные $\alpha$ (и четные $\alpha$) приводят, соответственно, к полуцелым и целым значениям $n$ в уравнении Бесселя (10).

*Замечание.* Решения (17) полиномиального уравнения (16), нормированные условиями $a_4 = b_6 = 0$, зависят от дополнительного параметра $t = a_1$. При этом $\deg P_2 = 2, \; \deg Q_3 = 3$ и выполняется полиномиальное уравнение

$$P_2(z+3)Q_3(z) = P_2(z)Q_3(z+2). \tag{18}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z$, выразим сначала все коэффициенты $b_i$ через $a_1, \; a_2, a_3$.(Сдвигом коэффициент $a_4$ обращаем в ноль.)

$$b_6p_4 = 0, \quad b_6p_3 + b_5p_4 = a_3q_6, \quad b_6p_2 + b_5p_3 + b_4p_4 = a_2q_6 + a_3q_5$$

$$p_2 + b_1p_1 + b_2 = q_2 + q_1a_1 + a_2, \quad p_3 + b_1p_2 + b_2p_1 = q_3 + q_2a_1 + q_1a_2 + a_3.$$

При $z^{10}$ и $z^9$ равенство выполняется автоматически. Далее находим

$$2b_1 = 3a_1 + 6, \quad 4b_2 = 6a_2 + 10 + 15a_1 + \frac{3}{2}a_1^2, \quad 16b_3 = 48a_2 + 40a_1 + 12a_1^2 + 24a_3 + 12a_2a_1 - a_1^3$$

$$32b_4 = \frac{3}{4}a_1^4 - 4 + 24a_3a_1 - 3a_1^3 + 72a_2 + 72a_3 + 3a_1^2 + 36a_2a_1 - 6a_2a_1^2 + 12a_2^2,$$

$$32b_5 = 24a_2 - 6a_1^2a_3 + 3a_2a_1^3 - 6a_1a_2^2 + 24a_3a_2 + \frac{7}{2}a_1^3 - \frac{3}{8}a_1^5 - 2a_1 + 12 + 96a_3 - 9a_1^2 - 12a_2a_1 +$$

$$+24a_1a_3 - 6a_2a_1^2 + \frac{3}{4}a_1^4 + 12a_2^2, \quad 64b_6 = \frac{7}{16}a_1^6 - 36 - 6a_1^2a_3 + 3a_2a_1^3 - 6a_1a_2^2 + 24a_3a_2 + \frac{9}{2}a_1^3 -$$

$$-\frac{15}{4}a_1^4a_2 - \frac{3}{8}a_1^5 + 6a_1 - 76a_2 + 72a_3 - 24a_3a_2a_1 + 28a_1^2 + 9a_2^2a_1^2 - 24a_2a_1 + 24a_3^2 + 6a_3a_1^3 - 4a_2^3 -$$

$$-28a_1a_3 + 37a_2a_1^2 - \frac{13}{2}a_1^4 - 44a_2^2,$$

В силу Леммы 1 можно положить $b_6 \stackrel{\text{def}}{=} \rho(a_1, a_2, a_3) = 0$. При этом

$$R(z) = P(z+3)Q(z) - P(z)Q(z+2) \Rightarrow R(0) = 0, \quad R(z) = zr(a_1, a_2, a_3),$$

и уравнение (16) сводится к двум полиномиальным уравнениям $F = G = 0$ для трех неизвестных $a_1 = 2t,\ a_2 = x,\ a_3 = y$. Привлекая Maple, получаем

$$6y^2 - x^3 + 6yx(1-2t) + x^2\left(9t^2 - 3t - 11\right) + x\left(37t^2 - 19 - 12t - 15t^4 + 6t^3\right) + 18y - 14yt$$
$$+12t^3y - 6yt^2 + 28t^2 - 26t^4 + 3t + 7t^6 - 3t^5 - 9 + 9t^3 = 0, \quad a_1 = 2t, \quad a_2 = x, \quad a_3 = y$$
$$2y^2t^2 - 8y^2x + 126xyt^2 + 15t^4x^2 - 7t^6x + 90xyt - 14t^3xy - 105t^3x^2 + x^4 + 210x^2t$$
$$-75t^3y + 180x + 21x^3t - 525t^3x - 441y + 13yx^2t - 105t^4y - 21yx^2 - 9x^3t^2 + 125t^4x + 441xt$$
$$+118x^2 - 270t^2 + 315yt^2 - 210xy - 100x^2t^2 - 42y^2t - 60y^2 + t^5y + 20x^3 + 17yt$$
$$+81 - 441t^3 + 315t^5 + 180t^4 - 45t^6 - 63t^7 + 147t^5x - 289xt^2 = 0$$

Ищем решения в виде многочленов от $t$ степеней 2 и 3, соответственно:

$$x = \alpha t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2,\ y = \beta t^3 + \beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3 \Rightarrow \alpha = 1.$$

Если искать решение системы (см. Приложение) в виде многочленов от $t$ степеней 1 и 2 при некоторых значениях параметра $t$, удается найти дополнительный список коммутирующих операторов порядков 4 и 6. При специально подобранных значениях $t$ решения сводятся к функциям Бесселя целого порядка.

Итак, положим $a_1 = 2t, \quad a_2 = c_1t + c_2, \quad a_3 = c_3t^2 + c_4t + c_5$. В результате находим

$$c_1 = -10, \quad c_2 = -21, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = 8, \quad c_5 = 20.$$

Решая систему, получим следующие значения $t, a_i, b_j$ и соответствующие им многочлены $P(z)$ и $Q(z)$:

| № | $t$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -2 | -4 | -1 | 4 | -3 | -8 | 12 | 16 | 0 |
| 2 | -3 | -6 | 9 | -4 | -6 | 7 | 6 | -8 | 0 |
| 3 | -4 | -8 | 19 | -12 | -9 | 25 | -15 | -26 | 24 |
| 4 | -1 | -2 | -11 | 12 | 0 | -20 | 0 | 64 | 0 |
| 5 | -5 | -10 | 29 | -20 | -12 | 46 | -48 | -47 | 60 |
| 6 | -6 | -12 | 39 | -28 | -15 | 70 | -90 | -71 | 105 |

| № | $P(z)$ | $Q(z)$ |
|---|---|---|
| 1 | $z(z-1)(z-4)(z+1)$ | $z^2(z-2)(z-4)(z+2)(z+1)$ |
| 2 | $z(z-4)(z-1)^2$ | $z^2(z-1)(z-2)(z-4)(z+1)$ |
| 3 | $z(z-1)(z-3)(z-4)$ | $z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z+1)$ |
| 4 | $z(z-1)(z+3)(z-4)$ | $z^2(z+4)(z-2)(z+2)(z-4)$ |
| 5 | $z(z-5)(z-1)(z-4)$ | $z(z-1)(z-3)(z-4)(z-5)(z+1)$ |
| 6 | $z(z-1)(z-7)(z-4)$ | $z(z-5)(z-1)(z-7)(z-3)(z+1)$ |

Переходя к операторам (операторы, получаемые за счет сдвига корня, рассматриваются как эквивалентные ), получим следующий список:

$$e^{4t}D(D+6)(D+8)(D+14),\quad e^{6t}D(D+4)(D+8)^2(D+12)(D+16) \tag{B$_1$}$$
$$e^{4t}D(D+6)(D+8)(D+10),\quad e^{6t}D(D+4)(D+8)^2(D+10)(D+12) \tag{B$_2$}$$
$$e^{4t}D(D+6)^2(D+8),\quad e^{6t}D(D+4)(D+6)(D+8)^2(D+10) \tag{B$_3$}$$
$$e^{4t}D(D+2)(D+6)(D+8),\quad e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+6)(D+8)(D+10) \tag{B$_4$}$$
$$e^{4t}D(D+2)(D+8)(D+10),\quad e^{6t}D(D+2)(D+4)(D+8)(D+10)(D+12) \tag{B$_5$}$$
$$e^{4t}D(D+6)(D+12)(D+14),\quad e^{6t}D(D+4)(D+8)(D+12)(D+14)(D+16) \tag{B$_6$}$$

## 3. Операторная пара Диксмье

В дополнение к интересным обобщениям примера Диксмье [2], построенным в работах [5], [4], рассмотрим кратко вопрос о роли свободного параметра, входящего во все эти примеры. Имея в виду общую формулу

$$[A^n, B] = A^{n-1}C + A^{n-2}CA + A^{n-3}CA^2 + \cdots + CA^{n-1}, \quad C \overset{\text{def}}{=} [A, B],$$

полагаем в случае операторов порядков 4 и 6, что:

$$A = A_0^2 + a(x), \quad B = A_0^3 + b(x)\circ A_0 + A_0 \circ b(x); \qquad A_0 = D^2 + u(x),$$
$$A_\lambda = A + 2\lambda A_0 + \lambda^2, \quad B_\lambda = B + 3\lambda^2 A_0 + \lambda(3A_0^2 + 2b) + \lambda^3.$$

Тогда

$$[B_\lambda, A_\lambda] = [B, A] + \lambda^2\left(3[A_0, A] + 4[b, A_0]\right) + 2\lambda[B, A_0] + \lambda[3A_0^2 + 2b, A] = 0.$$

Таким образом, если $4b = 3a$, то из равенства $[B, A] = 0$ следует, что $[B_\lambda, A_\lambda] = 0$.

Операторное уравнение $[B, A] = 0$ при условии $4b = 3a$ позволяет найти вид функций $u(x)$ и $a(x)$. Действительно,

$$4[B, A] = A_0^2 A_1 + A_1 A_0^2 - 2A_0 A_1 A_0 + 3(a\circ A_1 + A_1 \circ a), \quad A_1 = [A_0, a] = 2a'D + a''.$$

Соберем здесь коэффициенты при различных степенях $D$. Коэффициенты при $D^5$ и $D^4$ сокращаются в силу условия $4b = 3a$, а равенство нулю коэффициента при $D^3$ дает уравнение $a''' = 0$. При этом коэффициент при $D^2$ обращается в нуль, а коэффициент при $D$ и свободный член дают:

$$3(a\circ A_1 + A_1\circ a) = 4(3a''u' + a'u'')D + 2(4a''u'' + a'u''') \quad \text{или}$$

$$3a''u' + a'u'' = 3aa', \qquad a(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \gamma, \\ \beta x \end{cases}.$$

Соответствующие решения уравнения $3a''u' + a'u'' = 3aa'$ имеют вид (ср. [5]):

$$u(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{1}{4}\alpha x^4 + \frac{3}{4}\gamma x^2 - \frac{C_1}{x^2} + C_2, \\ \beta x^3 + C_1 x + C_2 \end{cases}.$$

## Приложение.

Система алгебраических уравнений на коэффициенты $a_i$ многочлена $P(z)$ из (17):

$$\begin{cases}
2688a_1a_3^2 - 1344a_1a_2^3 - 588a_2a_1^5 + 840a_3a_1^4 + 1680a_1^3a_2^2 + 2688a_3a_2^2 + 56448a_3 - 28224a_1a_2 + \\
+26880a_3a_2 + 63a_1^7 - 10080a_3a_1^2 + 8400a_2a_1^3 - 13440a_1a_2^2 - 1260a_1^5 - 4032a_3a_1^2a_2 + 7056a_1^3 = 0, \\
-31104 + 8064a_1a_3^2 - 4032a_1a_2^3 - 1764a_2a_1^5 + 2520a_3a_1^4 + 5040a_1^3a_2^2 + 8064a_3a_2^2 + 42a_2a_1^6 + \\
+3072a_2a_3^2 + 270a_1^6 + 25920a_1^2 - 2496a_3a_1a_2^2 - 3264a_3a_1 + 23040a_3^2 - 69120a_2 + 169344a_3 \\
-360a_2^2a_1^4 + +864a_1^2a_2^3 - 84672a_1a_2 + 80640a_3a_2 - 4320a_1^4 + 189a_1^7 - 30240a_3a_1^2 + 25200a_2a_1^3 \\
-40320a_1a_2^2 - 3780a_1^5 - -7680a_2^3 + 27744a_2a_1^2 - 3000a_2a_1^4 + 3600a_3a_1^3 + 9600a_1^2a_2^2 - 17280a_3a_1a_2 \\
-12096a_3a_1^2a_2 - 45312a_2^2 + +672a_2a_3a_1^3 - 192a_3^2a_1^2 - 12a_3a_1^5 - 384a_2^4 + 21168a_1^3 = 0, \\
-46656 + 9024a_1a_3^2 - 2592a_1a_2^3 - 1674a_2a_1^5 + 2280a_3a_1^4 + 4320a_1^3a_2^2 + 81344a_3a_2^2 + 63a_2a_1^6 \\
+4608a_2a_3^2 + +405a_1^6 + 38880a_1^2 - 3744a_3a_1a_2^2 - 4896a_3a_1 + 34560a_3^2 - 7776a_1 - 103680a_2 \\
+91584a_3 + 288a_3^2a_1^3 + +21a_3a_1^6 - 192a_3a_2^3 - 540a_2^2a_1^4 + 1296a_1^2a_2^3 - 63072a_1a_2 + 37824a_3a_2 \\
-6480a_1^4 + 189a_1^7 + 432a_3a_1^2a_2^2 - -1152a_3^2a_1a_2 - 18528a_3a_1^2 + 20520a_2a_1^3 - 30240a_1a_2^2 \\
-3294a_1^5 - 11520a_2^3 + 41616a_2a_1^2 - 4500a_2a_1^4 + +5400a_3a_1^3 + 14400a_1^2a_2^2 + 1152a_3^3 - 25920a_3a_1a_2 \\
-9456a_3a_1^2a_2 - 180a_3a_2a_1^4 - 67968a_2^2 + 1008a_2a_3a_1^3 - \ -288a_3^2a_1^2 - 18a_3a_1^5 - 576a_2^4 + 17928a_1^3 = 0.
\end{cases} .$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. J.L. Burchnall, T.W. Chaundy, *Commutative ordinary diff. operators, II. The identity $P^n = Q^m$ Proc. Roy. Soc. London, ser. A*, V. 134. Is. 824. P. 471–485. 1932.
2. J. Dixmier,"Sur les alg. de Weyl," *Bull. Soc. Math. France*, V. 96. P. 209-242. 1968.
3. Шабат А.Б. "Лекции по теории солитонов," , 60 стр., КЧГУ, Карачаевск, 2008.
4. O.I. Mokhov, "Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients," arXiv: 1303.4263.
5. Миронов А.Е. "О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2," *Сиб. электр. матем. известия*, V. 6. P. 533–536. 2009.
6. А.Б. Шабат, З.С. Эльканова, "О коммутирующих дифференциальных операторах," *ТМФ*, Т. 162. № 3. С. 334-344, 2010.
7. Шабат А.Б., Эльканова З.С. "О коммутирующих дифференциальных операторах в двумерии," *УМЖ*, Т. 3. Вып. 2. С. 91-99, 2011.
8. Шабат А.Б., Эльканова З.С. и Урусова А.Б. "Двусторонние преобразования Дарбу *Теор. Мат. Физ.*, Т. 173. № 2. С. 207–218. 2012.



Фатима Хасановна Байчорова, аспирант,
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
4369202, г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская республика, Россия
E-mail: `fatima-kchgu@yandex.ru`

Зарият Сайдахматовна Эльканова, аспирант,
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
4369202, г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская республика, Россия
E-mail: `z.109@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 20-27.

УДК 517.9

# СИММЕТРИИ И ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ $u_{xy} = e^{u+v}u_y$, $v_{xy} = -e^{u+v}v_y$

**Ю.Г. ВОРОНОВА, А.В. ЖИБЕР**

**Аннотация.** Описаны высшие симметрии и построено общее решение для гиперболической системы уравнений. Также получена явная формула решения задачи Гурса.

**Ключевые слова:** симметрии, задача Гурса, интегралы.

**Mathematics Subject Classification:** 35L53, 76M60, 58J70

## 1. Введение

В работе [1] рассматривалась зависимость решения задачи Гурса для экспоненциальной системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x \partial y} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} e^{u^k} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \tag{1.1}$$

$$u^i(x,y) - \ln\left(\tau_i \phi^i(x) \bar{\phi}^i(y)\right) = 0 \ \text{ при } \ xy = 0, \tag{1.2}$$

$a_{ik}$ – элементы матрицы Картана простой алгебры Ли,
от параметров $\tau_1, \dots, \tau_r$, входящих в краевые условия (1.2). Была предложена схема построения решения данной задачи с использованием высших симметрий, допускаемых системой уравнений (1.1). Приведены примеры сведения к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах [2]–[4] для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа построено общее решение и приведен алгоритм построения решения краевых задач. В статье [5], используя симметрийный подход, построено точное решение задачи Гурса для нелинейных скалярных гиперболических уравнений лиувиллевского типа.

В настоящей работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_{xy} = e^{u+v}u_y, \\ v_{xy} = -e^{u+v}v_y, \end{cases} \tag{1.3}$$

у которой $\det(H_1 \cdot K_1) = 0$, $\mathrm{ord}(H_1, K_1) = 1$, и цепочка обобщенных инвариантов Лапласа обрывается на втором шаге (см. [6]), где $H_1$, $K_1$ – главные инварианты линеаризации системы (1.3). Описаны высшие симметрии и построено общее решение системы уравнений (1.3), которое позволяет получить точное решение задачи Гурса.

---

Yu.G. Voronova, A.V. Zhiber, Symmetries and Goursat problem for system of equations $u_{xy} = e^{u+v}u_y$, $v_{xy} = -e^{u+v}v_y$.

© Воронова Ю.Г., Жибер А.В. 2013.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 13-01-00070-а) и ФЦП (соглашение №8499).

*Поступила 17 июля 2013 г.*

## 2. Симметрии

Для удобства изложения материала введем обозначения

$$u_1 = u_x,\ u_2 = u_{xx},\ \dots, v_1 = v_x,\ v_2 = v_{xx}, \dots,$$

$$\bar{u}_1 = u_y,\ \bar{u}_2 = u_{yy},\ \dots, \bar{v}_1 = v_y,\ \bar{v}_2 = v_{yy}, \dots.$$

В работе [6] показано, что система уравнений (1.3) имеет интегралы первого и второго порядка

$$\begin{array}{c} w = u_1 - v_1 - e^{u+v} \quad \text{и} \quad \bar{w} = \bar{u}_1\bar{v}_1, \\ W = u_2 - u_1v_1 - e^{u+v}u_1 \quad \text{и} \quad \bar{W} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} + \bar{v}_1 - \bar{u}_1, \end{array} \tag{2.1}$$

такие, что $\bar{D}w = 0$, $\bar{D}W = 0$, $D\bar{w} = 0$, $D\bar{W} = 0$, где $D$,$\bar{D}$ – операторы полного дифференцирования по $x$, $y$ соответственно.

Определяющая система для высших симметрий системы уравнений (1.3) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} D\bar{D}p = e^{u+v}\bar{D}p + e^{u+v}\bar{u}_1(p+q), \\ D\bar{D}q = -e^{u+v}\bar{D}q - e^{u+v}\bar{v}_1(p+q). \end{array} \right. \tag{2.2}$$

В силу формул (2.1), симметрии системы уравнений (1.3), зависящие от переменных $u$, $v$, $u_1$, $v_1, \dots$, можно искать в виде

$$p = p(u, v, v_1, w, W, w_1, W_1, \dots), \quad q = q(u, v, v_1, w, W, w_1, W_1, \dots).$$

Вычислим $\bar{D}p$, $\bar{D}q$, $D\bar{D}p$, $D\bar{D}q$ и подставим в систему (2.2). Далее, приравняем выражения при $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, получим следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} Dp_u = e^{u+v}(p+q), \\ D\left(p_v - e^{u+v}p_{v_1}\right) = 2e^{u+v}\left(p_v - e^{u+v}p_{v_1}\right), \\ Dq_u = -2e^{u+v}q_u, \\ D\left(q_v - e^{u+v}q_{v_1}\right) = -e^{u+v}(p+q). \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Из второго и третьего уравнения системы (2.3) следует, что

$$p_v - e^{u+v}p_{v_1} = 0, \quad q_u = 0.$$

Далее, складывая первое и четвертое уравнение системы (2.3) и интегрируя полученное равенство по $u$, получим следующее выражение для $p$:

$$p = -q_v u + e^{u+v}q_{v_1} + Cu + h(v, v_1, w, W, \dots), \tag{2.4}$$

здесь $h(v, v_1, w, W, \dots)$ – произвольная функция, а $C$ – произвольная постоянная. Осталось подставить найденную функцию $p$ во второе и первое уравнение системы (2.3), откуда найдем вид функций $p$ и $q$, а именно:

$$p = (D + u_1)a - b,\ q = v_1a + b, \tag{2.5}$$

здесь $a(w, W, w_1, W_1, \dots)$, $b(w, W, w_1, W_1, \dots)$ – произвольные функции.

Далее симметрии, зависящие от переменных $u$, $v$, $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1, \dots$, можно искать в виде

$$p = p(\bar{u}_1, \bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \dots), \quad q = q(\bar{u}_1, \bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \dots).$$

Сделаем в системе уравнений (1.3) замену переменных

$$u + v = U, \ \ u - v = V.$$

Тогда система уравнений (1.3) эквивалентна следующей системе

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xy} = e^u v_y, \\ v_{xy} = e^u u_y, \end{array} \right. \tag{2.6}$$

здесь новые переменные $U$, $V$, для удобства, опять обозначим через $u$, $v$. Тогда линеаризованная система (см. (2.2)) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^u(\bar{D}q + \bar{v}_1 p), \\ D\bar{D}q = e^u(\bar{D}p + \bar{u}_1 p). \end{cases} \tag{2.7}$$

Интегрируя второе уравнение системы (2.7) по $y$, получим следующую систему уравнений, эквивалентную предыдущей

$$\begin{cases} D\bar{D}p = e^u(\bar{D}q + \bar{v}_1 p), \\ Dq = e^u p. \end{cases} \tag{2.8}$$

Решение системы уравнений (2.8) будем искать в виде:

$$p = \sum_{k=0}^{n} p_k f^{(k)}(y), \quad q = \sum_{k=0}^{n} q_k f^{(k)}(y), \tag{2.9}$$

здесь $f^{(k)}(y) = \bar{D}^{(k)} f(\bar{w}, \bar{W}, \bar{w}_1, \bar{W}_1, \ldots)$.

Далее подставим функции (2.9) в систему уравнений (2.8) и приравняем коэффициенты при одинаковых производных. Получим систему уравнений, эквивалентную системе (2.8), а именно

$$\begin{cases} Dq_k = e^u p_k, \ k = 0, 1, \ldots, n, \\ D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \\ D\bar{D}p_k + D(p_{k-1}) = e^u(\bar{D}q_k + q_{k-1} + \bar{v}_1 p_k), \ k = 1, 2, \ldots, n, \\ Dp_n = e^u q_n. \end{cases} \tag{2.10}$$

Рассмотрим случай, когда $n = 0$. В данном случае система (2.10) примет следующий вид:

$$\begin{cases} D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \\ Dq_0 = e^u p_0, \\ Dp_0 = e^u q_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Во втором уравнение системы (2.11) заменим $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}$, получим следующее уравнение

$$(q_0)_{\bar{u}_1} \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} = p_0.$$

Продифференцируем данное уравнение по $\bar{u}_1$, при этом выражая $(p_0)_{\bar{u}_1}$ из третьего уравнения системы (2.11), получим

$$\big((q_0)_{\bar{u}_1}(\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}) - \bar{u}_1 q_0\big)'_{\bar{u}_1} = 0$$

или

$$(q_0)_{\bar{u}_1}(\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}) - \bar{u}_1 q_0 = A(\bar{w}, \bar{W}, \ldots), \tag{2.12}$$

здесь $A(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)$ – произвольная функция. Уравнение (2.12) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого можно представить в виде:

$$q_0 = -\frac{A}{4\bar{w}} \bar{u}_1 + B\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \tag{2.13}$$

где $B(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)$ – произвольная функция.

Далее подставим выражения для $q_0$ (2.13) во второе и первое уравнение системы (2.11) и найдем, что $p_0$, $q_0$ имеют следующий вид

$$p_0 = \bar{u}_1 B(\bar{w}, \bar{W}, \ldots), \ q_0 = \bar{v}_1 B(\bar{w}, \bar{W}, \ldots). \tag{2.14}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 1$ в системе (2.10). В данном случае система уравнений (2.10) перепишется в виде

$$Dq_0 = e^u p_0, \tag{2.15}$$
$$Dq_1 = e^u p_1, \tag{2.16}$$
$$D\bar{D}p_0 = e^u(\bar{D}q_0 + \bar{v}_1 p_0), \tag{2.17}$$
$$D\bar{D}p_1 + Dp_0 = e^u(\bar{D}q_1 + q_0 + \bar{v}_1 p_1), \tag{2.18}$$
$$Dp_1 = e^u q_1. \tag{2.19}$$

Уравнения (2.16) и (2.19) совпадают с уравнениями системы (2.11), следовательно $p_1$ и $q_1$ находятся как и выше, и имеют вид

$$p_1 = \bar{u}_1 B - \frac{A}{4\bar{w}}\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \quad q_1 = -\frac{A}{4\bar{w}}\bar{u}_1 + B\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}. \tag{2.20}$$

Продифференцируем уравнение (2.19) по $y$, получим

$$D\bar{D}p_1 = e^u(\bar{D}q_1 + \bar{u}_1 q_1). \tag{2.21}$$

Вычтем из уравнения (2.18) уравнение (2.21), и после несложных преобразований получим

$$Dp_0 = e^u(q_0 + A(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)). \tag{2.22}$$

Продифференцируем равенство (2.22) по $y$ и вычтем из него уравнение (2.17), найдем выражение для $p_0$:

$$p_0 = \frac{1}{\bar{v}_1}(\bar{D}A + \bar{u}_1 q_0 + \bar{u}_1 A). \tag{2.23}$$

Выражение для $p_0$ (2.23) подставим в уравнение (2.15) и заменяя $\bar{v}_1 = \sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}$, получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка на функцию $q_0$, а именно:

$$(q_0)_{\bar{u}_1} = \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} q_0 + \frac{\bar{D}A}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}} + \frac{\bar{u}_1 A}{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}.$$

Решение данного уравнения можно представить в виде

$$q_0 = -\bar{u}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} - A + R\sqrt{\bar{u}_1^2 - 4\bar{w}}, \tag{2.24}$$

где $R = R(\bar{w}, \bar{W}, \ldots)$ – произвольная функция. Подставим выражение (2.24) в равенство (2.23), откуда найдем $p_0$

$$p_0 = -\bar{v}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} + \bar{u}_1 R. \tag{2.25}$$

В итоге получили, что система уравнений (2.15)–(2.19) имеет решения вида (2.20), (2.24), (2.25). Из формул (2.9) следует, что симметрии системы уравнений (2.6) имеют следующий вид

$$p = \left(-\bar{v}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} + \bar{u}_1 R\right) f + \left(\bar{u}_1 B - \frac{A\bar{v}_1}{4\bar{w}}\right)\bar{D}f, \tag{2.26}$$

$$q = \left(-\bar{u}_1 \frac{\bar{D}A}{4\bar{w}} - A + \bar{v}_1 R\right) f + \left(-\frac{A}{4\bar{w}}\bar{u}_1 + \bar{v}_1 B\right)\bar{D}f. \tag{2.27}$$

С учетом формул (2.14), симметрии (2.26), (2.27) можно представить в виде

$$p = \frac{\bar{v}_1}{\bar{w}}\bar{D}G, \quad q = 4G + \frac{\bar{u}_1}{\bar{w}}\bar{D}G, \tag{2.28}$$

здесь $G = -\frac{1}{4}Af$. Напомним, что найденные симметрии (2.14), (2.28) заданы в новых переменных $U$, $V$. Возвращаясь к переменным $u = \frac{U+V}{2}$, $v = \frac{U-V}{2}$, получим следующее представление для симметрий системы уравнений (1.3)

$$p = \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}G + \bar{u}_1 B + 2G, \quad q = -\bar{v}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}G + \bar{v}_1 B - 2G. \tag{2.29}$$

## 3. Построение общего решения

С использованием высших симметрий (2.5), (2.29) задача интегрирования системы уравнений (1.3) сводится к следующей динамической системе (см. [1]):

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial u}{\partial \tau} = (D + u_1)\psi^1 - \psi^2 = \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 + \bar{u}_1 \bar{\psi}^2 + 2\bar{\psi}^1, \\ \tau \frac{\partial v}{\partial \tau} = v_1 \psi^1 + \psi^2 = -\bar{v}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 + \bar{v}_1 \bar{\psi}^2 - 2\bar{\psi}^1, \\ \tau \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \tau} = e^{u+v} \bar{u}_1 \psi^1, \\ \tau \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial \tau} = -e^{u+v} \bar{v}_1 \psi^1, \\ \tau \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = e^{u+v} \bar{u}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 + e^{u+v} \bar{u}_1 \bar{\psi}^2, \\ \tau \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = e^{u+v} \bar{v}_1 \frac{1}{\bar{w}} \bar{D}\bar{\psi}^1 - e^{u+v} \bar{v}_1 \bar{\psi}^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

будем предполагать, что функции $\psi^1 = \psi^1(x)$, $\psi^2 = \psi^2(x)$, $\bar{\psi}^1 = \bar{\psi}^1(y)$, $\bar{\psi}^2 = \bar{\psi}^2(y)$.

Первое и второе уравнения системы (3.1) представляют собой уравнения в частных производных первого порядка относительно функций $u$, $v$, соответственно. Решения данных уравнений можно представить в виде

$$u = -\ln \psi^1 + \int \frac{\psi^2}{\psi^1} dx + F(a, y), \quad v = -\int \frac{\psi^2}{\psi^1} dx + G(a, y), \tag{3.2}$$

здесь $F(a, y)$, $G(a, y)$ – произвольные функции, через $a$ обозначено выражение

$$a = \ln \tau + \int \frac{dx}{\psi^1}.$$

Далее подставим найденные функции (3.2) в систему (3.1), получим систему уравнений на функции $F$ и $G$

$$F_a = \bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{G_y} + \bar{\psi}^2 F_y + 2\bar{\psi}^1, \tag{3.3}$$

$$G_a = -\bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{F_y} + \bar{\psi}^2 G_y - 2\bar{\psi}^1, \tag{3.4}$$

$$F_{ya} = e^{F+G} F_y, \tag{3.5}$$

$$G_{ya} = -e^{F+G} G_y, \tag{3.6}$$

$$F_{aa} = e^{F+G} \left( \bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{G_y} + \bar{\psi}^2 F_y \right), \tag{3.7}$$

$$G_{aa} = e^{F+G} \left( \bar{D}\bar{\psi}^1 \frac{1}{F_y} - \bar{\psi}^2 G_y \right). \tag{3.8}$$

С учетом (3.3), (3.4), уравнения (3.7), (3.8) можно переписать в виде

$$\begin{cases} f_{aa} = e^{f+g} f_a, \\ g_{aa} = -e^{f+g} g_a, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $f = F - 2a\bar{\psi}^1$, $g = G + 2a\bar{\psi}^1$. Вычтем из первого уравнения системы (3.9) второе уравнение и проинтегрируем полученное равенство по $a$, тогда

$$f_a - g_a = e^{f+q} + C_1(y), \tag{3.10}$$

здесь $C_1(y)$ – произвольная функция. Далее умножим первое уравнение системы (3.9) на $g_a$, второе уравнение - на $f_a$ и сложим полученные выражения, откуда найдем

$$g_a = \frac{C_2(y)}{f_a}, \tag{3.11}$$

здесь $C_2(y)$ – произвольная функция. Подставим найденную формулу для $g_a$ (3.11) в уравнение (3.10), получим

$$g = -f + \ln\left(f_a^2 - C_1 f_a - C_2\right) - \ln f_a. \tag{3.12}$$

Возвращаясь к системе уравнений (3.9), с учетом формулы (3.12), первое уравнение можно переписать так

$$f_{aa} = f_a^2 - C_1 f_a - C_2.$$

Правая часть данного выражения представляет собой полином второй степени, разложим его на множители

$$f_{aa} = (f_a - \alpha)(f_a - \beta),$$

$\alpha$, $\beta$ – произвольные функции от $y$. Интегрируя данное уравнение найдем функцию $f$, а именно

$$f = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\left[(\alpha - \beta)a + \gamma\right] - \ln\left[1 - exp\{(\alpha - \beta)a + \gamma\}\right] + \delta(y), \ \alpha \neq \beta, \tag{3.13}$$

$$f = \alpha a - \ln(\varepsilon - a) + \kappa(y), \ \ \alpha = \beta, \tag{3.14}$$

здесь $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$, $\delta(y)$, $\varepsilon(y)$, $\kappa(y)$ – произвольные функции.

Теперь подставим найденные формулы (3.13), (3.14), (3.12) в уравнение (3.5). Получим следующие соотношения

1. при $\alpha \neq \beta$

$$\beta' + 2\bar{D}\bar{\psi}^1 = 0, \ \alpha = \beta + c, \ \ \delta' + \frac{\beta'\gamma}{\alpha - \beta} = 0, \tag{3.15}$$

где $c$ – произвольная постоянная,

2. при $\alpha = \beta$

$$\alpha' + 2\bar{D}\bar{\psi}^1 = 0, \ \ \alpha\varepsilon' + \kappa' = 0. \tag{3.16}$$

Далее подставим функции (3.13), (3.14), (3.12), с учетом условий (3.15), (3.16) в уравнения (3.6), (3.3), (3.4), получим верные тождества. Таким образом решение системы уравнений (1.3) можно представить в виде (3.2), где функции $F = f + 2a\bar{\psi}^1$, $G = g - 2a\bar{\psi}^1$ находятся из соотношений (3.13), (3.14), (3.12), а именно

при $\alpha \neq \beta$:

$$u = \ln\phi_1'(x) + \phi_2(x) - \frac{\alpha\delta'}{\alpha'} - \ln\left(1 - exp\{a - \frac{\delta'}{\alpha'}\}\right) + \delta,$$

$$v = -\phi_2(x) + (a - \frac{\delta'}{\alpha'}) + \frac{\alpha\delta'}{\alpha'} - \ln\left(\alpha - (\alpha - 1)exp\{a - \frac{\delta'}{\alpha'}\}\right) - \delta,$$

при $\alpha = \beta$:

$$u = \ln\phi_1'(x) + \phi_2(x) - \ln(\varepsilon(y) - a) + \kappa(y), \tag{3.17}$$

$$v = -\phi_2(x) - \ln\left[\frac{\kappa'}{\varepsilon'}(a - \varepsilon(y)) + 1\right] - \kappa(y), \tag{3.18}$$

здесь $\phi_1'(x) = \frac{1}{\psi^1}$, $\phi_2'(x) = \frac{\psi^2}{\psi^1}$, $\varepsilon(y)$, $\kappa(y)$, $\alpha(y)$, $\delta(y)$ – произвольные функции.

## 4. Точное решение задачи Гурса

Рассмотрим задачу Гурса для системы уравнений (1.3):

$$u\mid_{y=0}=\ln p(x),\quad v\mid_{y=0}=\ln q(x),\quad u\mid_{x=0}=\ln \bar{p}(y),\quad v\mid_{x=0}=\ln \bar{q}(y). \tag{4.1}$$

Положим в решение (3.17), (3.18) $y=0$, $\tau=1$, получим

$$u\mid_{y=0}=\ln p(x)=\ln \phi_1'+\phi_2-\ln(\varepsilon(0)-\phi_1)+\kappa(0), \tag{4.2}$$

$$v\mid_{y=0}=\ln q(x)=-\phi_2-\ln\left(\frac{\kappa'(0)}{\varepsilon'(0)}(\phi_1-\varepsilon(0))+1\right)-\kappa(0). \tag{4.3}$$

Сложим выражения (4.2) и (4.3), и проинтегрируем полученное равенство по $x$, откуда найдем функцию $\phi_1(x)$:

$$\phi_1(x)=\varepsilon(0)-\left(C_2+\left\{\frac{1}{C_1}-C_2\right\}e^{\int\limits_0^x pqd\xi}\right)^{-1}, \tag{4.4}$$

здесь постоянные $C_1=\varepsilon(0)-\phi_1(0)$, $C_2=\frac{\kappa'(0)}{\varepsilon'(0)}$.

Далее из выражения (4.2) найдем вид функции $\phi_2(x)$, а именно:

$$\phi_2(x)=\ln\left[\left(q(0)e^{\phi_2(0)+\kappa(0)}-1\right)e^{-\int\limits_0^x pqd\xi}+1\right]-\ln q-\kappa(0). \tag{4.5}$$

Теперь положим в формулах (3.17), (3.18) $x=0$:

$$u\mid_{x=0}=\ln \bar{p}(y)=\ln \phi_1'(0)+\phi_2(0)-\ln(\varepsilon-\phi_1(0))+\kappa, \tag{4.6}$$

$$v\mid_{x=0}=\ln \bar{q}(y)=-\phi_2(0)-\ln\left(\frac{\kappa'}{\varepsilon'}(\phi_1(0)-\varepsilon)+1\right)-\kappa. \tag{4.7}$$

Сложим равенства (4.6), (4.7), тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно функции $\varepsilon(y)$, решая которое найдем

$$\varepsilon(y)=\phi_1(0)+\phi_1'(0)\left(\int\limits_0^y \bar{q}\bar{p}'d\xi+\frac{\phi_1'(0)}{C_1}\right)^{-1}. \tag{4.8}$$

Тогда $\kappa(y)$ находится из выражения (4.6) и имеет вид

$$\kappa(y)=\ln\bar{p}-\phi_2(0)-\ln\left(\int\limits_0^y \bar{q}\bar{p}'d\xi+\bar{p}(0)e^{-\phi_2(0)-\kappa(0)}\right). \tag{4.9}$$

Далее воспользуемся условием согласования. Положим в решение (3.17), (3.18) $x=0$, $y=0$, получим следующие соотношения:

$$\phi_1'(0)=p(0)q(0)C_1(1-C_1C_2), \tag{4.10}$$

$$\phi_2(0)+\kappa(0)=-\ln\left(q(0)(1-C_1C_2)\right). \tag{4.11}$$

Теперь подставим найденные функции (4.4), (4.5), (4.8), (4.9) в решение (3.17), (3.18) и, учитывая условия согласования (4.10), (4.11), в итоге получим следующее представление решения задачи Гурса (1.3), (4.1), а именно:

$$u=\ln\left[\frac{p(x)\bar{p}(y)q(0)}{p(0)q(0)+\int\limits_0^y \bar{p}'\bar{q}d\xi(1-exp\{\int\limits_0^x pqd\xi\})}\right],$$

$$v = \ln \left[ \frac{q(x)\bar{q}(y)p(0)exp\{\int\limits_0^x pqd\xi\}}{(\bar{p}\bar{q} - \int\limits_0^y \bar{p}'\bar{q}d\xi)(exp\{\int\limits_0^x pqd\xi\} - 1) + p(0)q(0)} \right].$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Лезнов А. Н., Шабат А. Б. *Условия обрыва рядов теории возмущений* //Интегрируемые системы БФАН СССР. Уфа. 1982. С. 34–44.
2. Жибер А. В., Михайлова Ю.Г. *Алгоритм построения общего решения $n$–компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами Лапласа и краевые задачи* // Уфимский математический журнал. 2009. Т. 1. №3. С. 28–45.
3. Воронова Ю. Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лалпалса* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. №2. С. 20–26.
4. Жибер А. В., Михайлова Ю.Г. *О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лалпалса* // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. №4. С. 73–82.
5. Воронова Ю. Г. *Построение решения задачи Гурса для нелинейных гиперболических уравнений с интегралами первого и второго порядка* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых учёных. Уфа, БГУ. 2012. Т. 1. С. 51–58.
6. Гурьева А. М. *Метод каскадного интегрирования Лапласа и нелинейные гиперболические системы уравнений* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 2005. 172 с.



Юлия Геннадьевна Воронова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `mihaylovaj@mail.ru`

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: `zhiber@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 28-40.

УДК 517.53

# КРИТЕРИИ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ТИПА САЛИНАСА-КОРЕНБЛЮМА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ОБЩЕГО ВИДА

**Р.А. ГАЙСИН**

**Аннотация.** Доказан критерий квазианалитичности в граничной точке области достаточно общего вида (необязательно выпуклой и односвязной), если вблизи данной точки область в некотором смысле близка к углу или сравнима с ним.

**Ключевые слова:** класс Карлемана, регулярные последовательности, билогарифмическое условие квазианалитичности.

**Mathematics Subject Classification:** 30D60.

## 1. Введение

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Некоторые из чисел $M_n$ могут быть равны $+\infty$, но предполагается, что существует бесконечное число конечных $M_n$. Классом $C\{M_n\}$ называется множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f$, заданных на отрезке $I = [a, b]$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, для каждой из которых существует постоянная $K_f$, такая, что [1]

$$\sup_{a<x<b} \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant K_f^n M_n \qquad (n \geq 0).$$

В общем случае $I$ может быть интервалом или полуинтервалом.

В 1912 году Ж. Адамаром был поставлен следующий вопрос [1]: каковы должны быть числа $M_n$, чтобы для всяких двух функций $f$ и $\varphi$ из класса $C\{M_n\}$, для которых в некоторой точке $x_0$ интервала $I = (a, b)$ при всех $n \geq 0$

$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

следовало бы, что $f(x) \equiv \varphi(x)$ $(a < x < b)$?

Было замечено, что это во всяком случае так, если $M_n = n!$. Дело в том, что в этом случае класс $C\{n!\}$ совпадает с классом вещественно аналитических на интервале $(a, b)$ функций [1]. В силу аддитивности классов $C\{M_n\}$, проблема Адамара может быть сформулирована и в такой форме: каковы должны быть числа $M_n$, чтобы класс $C\{M_n\}$ был квазианалитическим, то есть всякая функция $f \in C\{M_n\}$, для которой в некоторой точке $x_0 \in I$

$$f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad (n \geq 0),$$

тождественно равнялась нулю.

R.A. Gaisin, Quasianalyticity criteria of Salinas-Korenblum type for general domains.

© Гайсин Р.А. 2013.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0358 "Развитие новых направлений спектральной теории и теории функций, их приложения в задачах математической физики и нелинейной динамики".

*Поступила 15 апреля 2013 г.*

Проблема квазианалитичности Адамара для отрезка (интервала, полуинтервала) $I$ полностью решается так называемой теоремой Данжуа-Карлемана. Одна из эквивалентных ее формулировок, принадлежащая Островскому, следующая [1], [2]: *для того чтобы класс* $C\{M_n\}$ *был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty.$$

*Здесь* $T(r) = \sup\limits_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ — *функция следа последовательности* $\{M_n\}$.

Пусть $G$ — некоторая область комплексной плоскости. Через $H(G, M_n)$ обозначим класс функций $f$, аналитических в области $G$ и удовлетворяющих условиям:

$$\sup_{z \in G} \left| f^{(n)}(z) \right| \leqslant C_f M_n \qquad (n \geq 0).$$

Предположим, что область $G$ обладает тем свойством, что все производные $f^{(n)}$ $(n \geq 0)$ функции $f \in H(G, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы $\partial G$. В этом случае класс $H(G, M_n)$ называется квазианалитическим в точке $z_0 \in \partial G$, если из того, что $f \in H(G, M_n)$ и $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \geq 0)$ следует, что $f \equiv 0$ [3].

Сделаем краткий обзор результатов, связанных с проблемой квазианалитичности класса $H(G, M_n)$, и сформулируем задачу, которая здесь будет обсуждаться.

Как известно, задача о квазианалитичности класса $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma = \{z : |argz| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\} \qquad (1 < \gamma < \infty)$$

впервые была поставлена и решена Р. Салинасом в 1955 г. [4]: *класс* $H(\Delta_\gamma, M_n)$ *является квазианалитическим в точке* $z = 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}} dr = +\infty.$$

Следует заметить, что теорема Островского является предельным случаем теоремы Р. Салинаса (при $\gamma \to \infty$).

Задача о квазианалитичности класса $H(K, M_n)$, где $K$ — круг, в свое время была решена Б. И. Коренблюмом [5]. Им доказано следующее утверждение: *класс* $H(K, M_n)$ *квазианалитичен в граничной точке тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}} = +\infty.$$

Условие, необходимое и достаточное для квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в граничной точке произвольной выпуклой ограниченной области $D$, установлено Р. С. Юлмухаметовым в [3]. Приведем этот результат.

Пусть $D$ — выпуклая, ограниченная область комплексной плоскости, лежащая в левой полуплоскости и $0 \in \partial D$. В этом случае опорная функция $h(\varphi) = \max\limits_{\lambda \in D} \mathrm{Re}(\lambda e^{i\varphi})$ области $D$ неотрицательна и обращается в нуль в некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$ $(-\frac{\pi}{2} < \sigma_- \leqslant 0 \leqslant \sigma_+ < \frac{\pi}{2})$. Пусть это — наибольший отрезок, на котором $h(\varphi) = 0$. Положим

$$\Delta_+(\varphi) = \sqrt{\varphi - \sigma_+} \left( h'(\varphi) + \int\limits_0^\varphi h(\alpha) d\alpha \right), \qquad \sigma_+ \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta_-(\varphi) = -\sqrt{\sigma_- - \varphi}\left(h'(\varphi) + \int_0^{\varphi} h(\alpha)d\alpha\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \sigma_-.$$

Через $v(r)$ обозначим функцию, обратную к функции

$$v_1(x) = \exp\int_{x_1}^{x} \frac{(2\pi - \Delta_+^{-1}(y) + \Delta_-^{-1}(y))dy}{(-\pi + \Delta_+^{-1}(y) - \Delta_-^{-1}(y))y}, x \to 0, x_1 > 0.$$

**Теорема 1.** [3] *Если $h'(\sigma_\pm) = 0$, то класс $H(D, M_n)$ является квазианалитическим в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{v(r)r^2}dr = +\infty.$$

Возникает задача: для областей достаточно общего вида (необязательно ограниченных, выпуклых и односвязных) найти критерии квазианалитичности, которые явно зависят только от заданной последовательности $\{M_n\}$, причем для регулярных последовательностей допускают переформулировку в виде билогарифмического условия Левинсона? Выяснению этого вопроса и посвящена настоящая статья.

## 2. История вопроса. Определения и предварительные факты

Пусть $\{M_n\}$ — положительная последовательность чисел $M_n$, удовлетворяющая условию $M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$. Можно считать, что $M_0 = 1$. Последовательность $\{M_n\}$ называется логарифмически выпуклой, если выполняется условие: $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$ $(n \geq 1)$. Хорошо известно, что логарифмически выпуклая последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией следа $T(r)$, причем [1], [2]

$$M_n = \sup_{r \geq 0} \frac{r^n}{T(r)} \qquad (n \geq 0).$$

Поясним геометрический смысл логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$. Для этого, логарифмируя неравенства $M_n^2 \leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, получим, что

$$\ln M_n \leqslant \frac{1}{2}\ln M_{n-1} + \frac{1}{2}\ln M_{n+1} \qquad (n \geq 1).$$

Отсюда видим, что условие логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$ означает, что точка $(n, \ln M_n)$ лежит не выше отрезка, соединяющего точки $(n-1, \ln M_{n-1})$ и $(n+1, \ln M_{n+1})$ $(n \geq 1)$.

Через $\{M_n^c\}$ обозначим последовательность, полученную из $\{M_n\}$ путем выпуклой регуляризации посредством логарифмов (см., например, в [1], [2], [6]).

В статье [7] приведены критерии квазианалитичности класса Карлемана $H(\Delta_\gamma, M_n)$ для угла

$$\Delta_\gamma = \{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\} \qquad (1 < \gamma < \infty)$$

в формах, явно связанных с заданной последовательностью $\{M_n\}$ (или $\{M_n^c\}$), а именно, доказана

**Теорема 2.** [7] *Для того чтобы класс $H(\Delta_\gamma, M_n)$ был квазианалитическим в точке $z = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из эквивалентных условий:*

1) $\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{\gamma}{1+\gamma}}}dr = \infty$, *где* $T(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ *(критерий Р. Салинаса);*

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{M_n^c}{M_{n+1}^c}\right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}=\infty;$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}=\infty$, *где* $\beta_n=\inf\limits_{k\geq n}M_k^{\frac{1}{k}}$.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о билогарифмическом условии квазианалитичности для угла. Для этого, следуя работе [8], введем в рассмотрение присоединенную последовательность $\{m_n\}$, где $m_n=\frac{M_n}{n!}$. Здесь $\{M_n\}$ — любая положительная последовательность чисел. Теперь дополнительно предположим, что последовательность $\{M_n\}$ подчинена следующим требованиям:

а) $m_n^2\leqslant m_{n-1}m_{n+1}\quad(n\geq 1)$;

б) $\sup\limits_n\left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}}<\infty$;

в) $m_n^{\frac{1}{n}}\to\infty,\quad n\to\infty$.

Если выполнены условия а) – в), то последовательность $\{M_n\}$ называется регулярной. Условие а) — это условие логарифмической выпуклости последовательности $\{m_n\}$. Отметим также, что из условия б) вытекает замкнутость класса $C\{M_n\}$ относительно операции дифференцирования. Из условия в) следует, что класс Карлемана $C\{M_n\}$ содержит и аналитические функции. Для регулярной последовательности $\{M_n\}$ введем так называемый ассоциированный вес [8]

$$\omega(r)=\sup_{n\geq 0}\frac{r^n}{m_n}.$$

Из условия а) следует, что $M_n^2\leqslant M_{n-1}M_{n+1}$, то есть последовательность $\{M_n\}$ логарифмически выпукла (это проверяется непосредственно). Поэтому согласно теореме Данжуа-Карлемана класс $C\{M_n\}$ является квазианалитическим тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих эквивалентных условий [1], [2]:

$$1^0.\ \int\limits_1^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}dr=\infty;\qquad 2^0.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_n}{M_{n+1}}=\infty.$$

Для регулярной последовательности $\{M_n\}$, как показал Е.М. Дынькин [8], условие $2^0$ (следовательно, и условие $1^0$) равносильно билогарифмическому условию Левинсона

$$\int\limits_0^d\ln\ln h(r)dr=+\infty,$$

где $h(r)=\omega(\frac{1}{r})$, а величина $d>0$ выбрана таким образом, что $h(d)\geq e$. Здесь

$$h(r)=\sup_{n\geq 0}\frac{1}{m_nr^n},\qquad m_n=\frac{M_n}{n!},\qquad r>0.$$

Ясно, что $h(r)$ — убывающая функция, $\lim\limits_{r\to 0}h(r)=\infty$. Поскольку последовательность $\{m_n\}$ логарифмически выпукла, то имеет место обратное представление:

$$m_n=\sup_{r>0}\frac{1}{r^nh(r)}\qquad(n\geq 0).$$

Справедлива следующая

**Теорема 3.** [7] *Пусть последовательность* $\{M_n\}$ $(n\geq 0)$ *положительных чисел* $M_n$ *такова, что измененная последовательность* $\{M_n^*\}$, $M_n^*=M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$ $(1<\gamma<\infty)$ *является регулярной. Тогда класс* $H(\Delta_\gamma,M_n)$ *квазианалитичен в точке* $z=0$ *тогда и только* *тогда, когда выполняется условие Левинсона*

$$\int_0^d \ln\ln h(r)dr = +\infty, \qquad (1)$$

*где*

$$h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} r^n}, \qquad 1 < \gamma < \infty.$$

Отметим, что теорема Данжуа-Карлемана является предельным случаем условий 1) – 3) теоремы 2. Аналог теоремы 3 для отрезка ранее был доказан Е.М. Дынькиным при выполнении билогарифмического условия, получающегося из условия Левинсона (1), если формально положить $\gamma = \infty$.

## 3. Критерии квазианалитичности

**3.1. Случай выпуклой области.** Пусть $D$ — ограниченная выпуклая область, $0 \in \partial D$, $h'(\sigma_\pm) = 0$. Тогда класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда [3]

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{v(r)r^2} dr = +\infty.$$

Величины $h(\varphi)$, $\sigma_+$, $\sigma_-$, $T(r)$ определены во введении. Этот результат допускает обобщение и другую, более наглядную формулировку. Чтобы ее привести, введем в рассмотрение некоторые геометрические характеристики выпуклой области. Как известно, опорная функция

$$h(\varphi) = \max_{\lambda\in D} \mathrm{Re}(\lambda e^{i\varphi})$$

представляет собой расстояние от начала координат до касательной прямой к области $D$, перпендикулярной направлению $\{re^{-i\varphi}, r > 0\}$. Будем считать, что система координат выбрана таким образом, что наибольший отрезок, на котором $h(\varphi) = 0$, имеет вид $[-\sigma, \sigma]$, где $\sigma > 0$. Отметим, что при этом $\sigma < \frac{\pi}{2}$. Если $\sigma = \frac{\pi}{2}$, то область вырождается в отрезок отрицательной полуоси.

Выберем на границе области $D$ направление против часовой стрелки и введем натуральную параметризацию границы:

$$z = z(s),\ 0 \leqslant s < s_0,$$

где $s_0$ — общая длина границы $D$. Таким образом, длина дуги границы от точки $z = 0$ до точки $z(s)$ (в выбранном направлении) равна $s$.

Как и в работе [9], через $-\alpha_-(s)$ $(0 \leqslant s < s_0)$ обозначим угол наклона касательной прямой к границе $D$ в точке $z(s)$ к мнимой оси. Тогда функция $\alpha_-(s)$ определена всюду на $[0, s_0)$, кроме счетного множества точек $s$, для которых точка $z(s)$ является угловой точкой. Доопределим функцию $\alpha_-(s)$ из условия непрерывности справа. По построению, $\lim\limits_{s\to 0} \alpha_-(s) = -\sigma$. Аналогично, угол наклона касательной в точке $z(s_0 - s)$ к направлению мнимой оси обозначим через $\alpha_+(s)$. Тогда $\alpha_+(s)$ положительна, не возрастает и $\lim\limits_{s\to 0} \alpha_+(s) = \sigma$. Положим

$$\alpha(s) = \frac{\alpha_+(s) - \alpha_-(s)}{2},\ 0 \leqslant s < s_0.$$

Поскольку $\lim\limits_{s\to 0}\alpha(s)=\sigma<\frac{\pi}{2}$, то существует число $\varepsilon>0$, такое, что $\alpha(s)<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant s<\varepsilon$. Пусть

$$R(s)=\exp\int\limits_{s}^{\varepsilon}\frac{\pi-\alpha(t)}{\frac{\pi}{2}-\alpha(t)}d\ln t,\qquad 0\leqslant s<\varepsilon.$$

Положим $\beta(s)=\pi-2\alpha(s)$. Тогда функция $\beta(s)$ представляет собой величину угла между касательными в точках $z(s)$ и $z(s_0-s)$, в котором лежит область $D$, а функция $R(s)$ примет вид

$$R(s)=\exp\int\limits_{s}^{\varepsilon}\frac{\pi+\beta(t)}{\beta(t)}d\ln t,\qquad 0\leqslant s<\varepsilon.$$

Справедлива следующая

**Теорема 4.** [9] *Пусть $D$ — выпуклая, но необязательно ограниченная область, $z_0\in\partial D$, а*

$$T(r)=\sup_{n\geq 0}\frac{r^n}{M_n}$$

*— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0,s)$ обозначим величину угла между касательными к границе $D$, проведенными в точках, удаленных от точки $z_0$ на длину дуги границы, равной $s$. Положим*

$$R(z_0,s)=\exp\int\limits_{s}^{\varepsilon}\frac{\pi+\beta(z_0,x)}{\beta(z_0,x)}d\ln x,\qquad 0\leqslant s<\varepsilon. \tag{2}$$

*Тогда условие*

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2R^{-1}(z_0,r)}dr=\infty \tag{3}$$

*является необходимым и достаточным для квазианалитичности класса $H(D,M_n)$ в точке $z_0$.*

В частности, из этой теоремы легко получить упомянутые выше условия квазианалитичности классов $H(D,M_n)$ в случае, если $D$ — круг или угол раствора $\pi\alpha,\ 0<\alpha\leqslant 1$.

Наша цель — показать, что если выпуклая область $D$ в граничной точке $z_0$ удовлетворяет некоторому интегральному условию (зависящему от геометрии области), то условие (3) допускает более простую формулировку.

Итак, пусть точка $z_0\in\partial D$ фиксирована. Тогда определенная выше величина угла $\beta(z_0,s)$, не убывая, стремится к $\pi\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ при стремлении параметра $s$ к нулю. Учитывая, что $\beta(z_0,s)\equiv\pi\alpha$ для угла, выделим из подынтегрального выражения в формуле (2) слагаемое $\frac{1+\alpha}{\alpha}$:

$$\frac{\pi+\beta(z_0,s)}{\beta(z_0,s)}=\frac{1+\alpha}{\alpha}+\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,s)}{\alpha\beta(z_0,s)}.$$

Тогда при малых $s$ интеграл $\displaystyle\int\limits_{s}^{\varepsilon}\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,x)}{\alpha\cdot\beta(z_0,x)}\cdot\frac{dx}{x}$ будет мало отличаться от величины $\displaystyle\frac{1}{\pi\alpha^2}\int\limits_{s}^{\varepsilon}\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,x)}{x}dx$. Стало быть, если интегралы $\displaystyle\int\limits_{s}^{\varepsilon}\frac{\pi\alpha-\beta(z_0,x)}{x}dx$

равномерно ограничены при всех $s$, $0 < s < \varepsilon$, то критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z_0 \in \partial D$ примет следующий вид:

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty.$$

Действительно, это следует из того, что в этом случае

$$R(s) = \exp\left[\int_s^\varepsilon \frac{1+\alpha}{\alpha} d\ln x\right] \cdot \exp\left[\int_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{\alpha \cdot \beta(z_0, x)} d\ln x\right],$$

и при $s \to 0$

$$R(s) = r \sim \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \cdot \exp\left(\frac{c}{\pi\alpha^2}\right),$$

где

$$c = \lim_{s\to 0} \int_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx = \int_0^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx.$$

Следовательно, при $r \to \infty$

$$R^{-1}(r) \sim \exp\left(\frac{c}{\pi\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1}\right) \varepsilon r^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}},$$

и условие (3) принимает вид

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2 r^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}} dr = \int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty.$$

Таким образом, для выпуклых областей, для которых величина $\beta(z_0, s)$ подчинена требованию

$$\sup_s \int_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \tag{4}$$

критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z_0 \in \partial D$ совпадает с критериями квазианалитичности Салинаса для угла $\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}\}$ $(0 < \alpha < 1)$ и Коренблюма для полуплоскости $\Delta_1$.

Имеет место

**Теорема 5.** *Пусть $D$ — выпуклая, но необязательно ограниченная область, $z_0 \in \partial D$, а*

$$T(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}$$

*— функция следа последовательности $\{M_n\}$. Через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе $D$, проведенными в точках, удаленных от точки $z_0$ на длину дуги границы, равной $s$. Предположим, что в точке $z_0$ выполняется условие*

$$\sup_s \int_s^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(z_0, x)}{x} dx < \infty, \qquad \pi\alpha = \lim_{s\to 0} \beta(z_0, s) \quad (0 < \alpha \leqslant 1).$$

*Тогда класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке $z_0$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = +\infty. \tag{5}$$

**Замечание 1**. Условие (4) будет, например, выполнено, если

$$|\pi\alpha - \beta(z_0, s)| = O\left(s^\gamma\right), \ \gamma > 0$$

или

$$|\pi\alpha - \beta(z_0, s)| = O\left(\frac{1}{|\ln s|^\gamma}\right), \ \gamma > 1 \text{ при } s \to 0.$$

**Замечание 2**. Для регулярных последовательностей $\{M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\}$ было получено билогарифмическое условие квазианалитичности в угле, равносильное условию (5) при $\alpha = \frac{1}{\gamma}$. Следовательно, в силу теоремы 5, для выпуклых областей с дополнительным условием (4) в точке $z_0 \in \partial D$ билогарифмический критерий квазианалитичности в данной точке имеет тот же вид, что и для угла:

$$\int\limits_0^d \ln\ln h_*(r)dr = +\infty, \qquad h_*(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{n!}{r^n \cdot M_n^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}}, \qquad 1 < \gamma < \infty. \tag{6}$$

Из теоремы 5 вытекает несколько следствий. Приведем их.

**Следствие 1**. Пусть $\Delta_\alpha = \left\{z : |\pi - \arg z| < \frac{\pi\alpha}{2}\right\}$ — угол раствора $\pi\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ с вершиной в точке $z = 0$. Тогда, очевидно, $\beta(s) \equiv \pi\alpha$, и условие (4) в этом случае выполняется.

Если положить $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, то условие (5) в точности совпадет с критерием квазианалитичности Р. Салинаса для угла

$$\Delta_\gamma = \left\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}, 0 < |z| < \infty\right\} \qquad (1 < \gamma < \infty).$$

**Следствие 2**. Пусть $K = \{z : |z + R| < R\}$ — круг. Проверяется, что в этом случае

$$\beta(s) = \pi - 2\frac{s}{R},$$

причем $\beta(s) \uparrow \pi$ $(\alpha = 1)$ при $s \to 0$. Так как $\frac{\pi - \beta(x)}{x} = \frac{2}{R}$, то условие (4) выполняется в любой точке $\partial K$, а соотношение (5) в данном случае (при $\alpha = 1$) переходит в критерий Коренблюма.

### 3.2. Области специального вида.

Рассмотрим теперь области специального вида — двуугольники $K^\alpha$. Под двуугольником $K^\alpha$, следуя работе [10], будем понимать пересечение внешностей или внутренностей двух кругов произвольного одинакового радиуса, окружности которых проходят через точку $O$ — начало координат — и пересекаются под углом раствора $\pi\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$. Под $K^1$ будем понимать либо внешность, либо внутренность окружности, проходящей через точку $O$.

Покажем, что для двуугольника $K^\alpha$, полученного при пересечении внутренностей двух кругов, условие (4) выполняется. Для этого нам понадобится следующая

**Лемма 1.** *Пусть к окружности произвольного радиуса $R$ и проходящей через точку $O$, а с центром, лежащим ниже оси $Ox$, проведена касательная в точке $A$. Пусть, далее, $\beta_1$ $(0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2})$ — угол между касательной и отрицательным направлением оси $Ox$, причем $\beta_1 \to \gamma$ при $A \to O$. Тогда*

$$\gamma - \beta_1 = \frac{\breve{AO}}{R},$$

*здесь $\breve{AO}$ — длина дуги окружности, заключенной между точками $A$ и $O$.*

Действительно, заметим, что $(\pi-\gamma)+\beta_1=\pi-\alpha$. Отсюда имеем $\gamma-\beta_1=\alpha$. Учитывая, что $\alpha=\frac{\breve{AO}}{R}$, получим требуемое равенство $\gamma-\beta_1=\frac{\breve{AO}}{R}$.

Пусть $K^\alpha$ — двуугольник, образованный пересечением внутренностей двух кругов. Он, очевидно, является выпуклым множеством. Будем считать, что $K^\alpha$ расположен в левой полуплоскости и симметричен относительно оси $Ox$. Тогда на основании леммы 1 получаем, что

$$\pi\alpha-\beta(s)=2\frac{s}{R}.$$

Так что

$$\int\limits_s^\varepsilon\frac{\pi\alpha-\beta(x)}{x}dx=\frac{2}{R}(\varepsilon-s)\qquad(0<s<\varepsilon),$$

и для $K^\alpha$ условие (4) выполнено.

Наконец, сформулируем последнее следствие.

**Следствие 3**. Для выпуклого двуугольника $K^\alpha$ $(0<\alpha<2)$ условие (4) выполняется всюду. Критерий квазианалитичности для двуугольных областей $K^\alpha$ $(0<\alpha<2)$ в точке $O$ совпадает с критерием Р. Салинаса для угла

$$\Delta_\alpha=\left\{z:|\pi-\arg z|<\frac{\pi\alpha}{2}\right\}.$$

Из теоремы 5 можно получить критерии квазианалитичности классов $H(G,M_n)$ и для невыпуклых областей $G$, удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

Пусть $G$ — область комплексной плоскости, не содержащая бесконечно удаленную точку. Будем говорить, что область $G$ удовлетворяет условию $A$, если ее граница $C$ состоит из конечного числа кусочно-гладких простых замкнутых кривых $c_1,c_2,\ldots,c_n$, каждая из которых имеет кусочно-непрерывную кривизну и содержит не более конечного числа угловых точек, причем все внутренние (относительно области $G$) углы отличны от 0 и $2\pi$. Обозначим внутренний угол между односторонними касательными к $C$ в точке $z$ через $\pi\alpha(z)$. Пусть $\alpha=\min\limits_{z\in C}\alpha(z)>0$. Тогда область $G$, удовлетворяющая условию $A$, обладает свойством [10]: для любой точки $z\in\partial G$, существуют двуугольники $K_1^{\alpha(z)}$ и $K_2^{\alpha(z)}$ такие, что

$$K_1^{\alpha(z)}\subset G\subset K_2^{\alpha(z)}.$$

Здесь $K_1^{\alpha(z)}$ — выпуклый двуугольник, образованный пересечением внутренностей, а $K_2^{\alpha(z)}$ — двуугольник, образованный пересечением внешностей двух кругов одинакового, но достаточно малого радиуса, окружности которых проходят через точку $z$.

Классы $H(K_1^{\alpha(z)},M_n)$ и $H(K_2^{\alpha(z)},M_n)$ квазианалитичны или неквазиана литичны в точке $z\in C$ одновременно [10]. Следовательно, учитывая следствие 3 и применяя теорему 5, получаем: *все три класса $H(G,M_n)$, $H(K_1^{\alpha(z)},M_n)$ и $H(K_2^{\alpha(z)},M_n)$ квазианалитичны в точке $z\in C$ тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_1^\infty\frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha(z)+2}{\alpha(z)+1}}}dr=+\infty. \tag{7}$$

Заметим, что если точка $z\in C$ является точкой гладкости границы области $G$ (то есть $\alpha(z)\equiv1$), то критерий квазианалитичности класса $H(G,M_n)$ в этой точке имеет вид

$$\int\limits_1^\infty\frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}}dr=+\infty.$$

Если учесть замечание 2, для регулярных последовательностей $\{M_n^{\frac{1}{\alpha+1}}\}$ условие (7) равносильно билогарифмическому условию (6) при $\gamma = \frac{1}{\alpha}$.

Отметим, что критерий квазианалитичности класса $H(G, M_n)$, где $G$ — область, удовлетворяющая условию $A$, другим способом доказан в работе [10].

## 4. Критерий существования регулярной миноранты неквазианалитичности

Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, $\omega(r) = \max\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{m_n}$ $\left(m_n = \frac{M_n}{n!}\right)$ — ассоциированный вес [8]. Тогда последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией $\omega(r)$:

$$M_n = n! \sup_{r>0} \frac{r^n}{\omega(r)}.$$

Как было сказано в п.2, в этом случае условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty \tag{8}$$

допускает переформулировку в терминах билогарифмического условия Левинсона

$$\int_0^d \ln \ln H(r) dr < \infty,$$

где $H(r) = \omega(\frac{1}{r})$, а $d > 0$ такое, что $H(d) > e$.

Последовательность $\{M_n\}$ назовем слабо регулярной, если для нее выполнены условия а), в) из определения регулярности $\{M_n\}$ (см. п.2). Оказывается, для слабо регулярных последовательностей условие (8) допускает другую интерпретацию.

**Лемма 2.** *Пусть последовательность $\{M_n\}$ слабо регулярна. Для того чтобы выполнялось условие (8), необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $R = R(t)$, такая, что: $R(t) \downarrow 0$, $tR(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, и*

$$1) \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant R(n); \qquad 2) \int_1^{\infty} R(t) dt < \infty.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь почти очевидна. Действительно, поскольку $M_n^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ (это следует из логарифмической выпуклости последовательности $\{M_n\}$ и свойства в)), условие (8) согласно теореме Данжуа-Карлемана может быть записано в виде [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} < \infty. \tag{9}$$

Поэтому достаточность леммы следует из условий 1), 2) и свойств функции $R = R(t)$ .

Н е о б х о д и м о с т ь. Полагая $r(n) = M_n^{-\frac{1}{n}}$, имеем

$$r(n)n = \frac{n}{M_n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{m_n^{\frac{1}{n}}} \ \frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}.$$

Отсюда, учитывая формулу Стирлинга [11]

$$n! = \sqrt{2\pi n} \ n^n \ e^{-n} \ e^{\theta(n)}, \qquad |\theta(n)| \leqslant \frac{1}{12n},$$

получаем

$$r(n)n = \frac{1}{m_n^{\frac{1}{n}}}\ \frac{e^{1-\frac{\theta(n)}{n}}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} \leqslant e^{\frac{13}{12}}\ \frac{1}{m_n^{\frac{1}{n}}}. \tag{10}$$

Если правую часть (10) обозначить $R(n)n$, то видим, что $R(n)n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$R(n) = e^{\frac{13}{12}}\ \frac{1}{n}\ \left(\frac{n!}{M_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e^{\frac{1}{6}}\ (2\pi n)^{\frac{1}{2n}}\ \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} = O\left(\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}}\right).$$

Значит, из условия (9) следует, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R(n) < \infty$.

Таким образом,

$$\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant R(n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} R(n) < \infty, \qquad R(n) \downarrow 0,\ R(n)n \downarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Требуемой, очевидно, будет функция $R = R(t)$, линейная для $t \in (n, n+1)$ и принимающая значения $R(n)$ и $R(n+1)$ на концах интервала $(n, n+1)$.

Лемму 2 дополняет

**Лемма 3.** *Пусть $\{M_n\}$ ($M_n > 0$) — произвольная последовательность, обладающая свойством: существует положительная непрерывная функция $r = r(t)$, определенная на $\mathbb{R}_+$, $r(t) \downarrow 0$, $r(t)t \downarrow 0$ при $t \to \infty$, и такая, что*

$$\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant r(n), \qquad \int_1^{\infty} r(t)dt < \infty.$$

*Тогда существует слабо регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что*

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (M_n^*)^{-\frac{1}{n}} < \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$D_n = \left(\frac{1}{r(n)}\right)^n \leqslant M_n \qquad (n \geq 1).$$

Последовательность $\left\{\frac{D_n}{n!}\right\}$ необязательно является логарифмически выпуклой. Поэтому ее заменим на миноранту, обладающую требуемыми свойствами.

Учитывая формулу Стирлинга, имеем

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{n^n \Delta_n}\ \left(\frac{1}{r(n)}\right)^n,$$

где $\Delta_n = e^{-n}\ \sqrt{2\pi n}\ e^{\theta(n)}$ $\left(|\theta(n)| \leqslant \frac{1}{12n}\right)$. Так как, очевидно,

$$\Delta_n \leqslant \sqrt{2\pi}\ \exp\left(\frac{1}{12n} - n + \frac{1}{2}\ln n\right) \leqslant \sqrt{2\pi} < e,$$

то

$$\frac{D_n}{n!} \geq \frac{1}{e}\ \left(\frac{1}{nr(n)}\right)^n > \left(\frac{1}{enr(n)}\right)^n\ (n \geq 1).$$

Если положить

$$m_n^* = \frac{M_n^*}{n!} = \left(\frac{1}{enr(n)}\right)^n,$$

то $M_n^* \leqslant D_n \leqslant M_n$. Так как $nr(n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, то $(m_n^*)^{\frac{1}{n}} \uparrow \infty$ при $n \to \infty$. Видим, что последовательность $\{M_n^*\}$ слабо регулярная.

Убедимся, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(M_n^*)^{\frac{1}{n}}} < \infty. \tag{11}$$

Действительно,

$$M_n^* = n! \left(\frac{1}{enr(n)}\right)^n = \sqrt{2\pi n}\; e^{-2n+\theta(n)} \left(\frac{1}{r(n)}\right)^n.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{M_n^*}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant e^{\frac{25}{12}}\; r(n) \qquad (n \geq 1),$$

и условие (11) следует из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r(n)$.

**Замечание 3**. В условиях леммы 3, не умаляя общности, можно считать, что $t^2 r(t) \uparrow \infty$ при $t \to \infty$.

Это следует из следующего утверждения [12]:

*Пусть $r = r(t)$ — положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция, $tr(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, и*

$$\int_1^{\infty} r(t)dt < \infty.$$

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $r_1 = r_1(t)$, удовлетворяющая условиям:*

1. $r(t) \leqslant r_1(t)$;
2. $tr_1(t) \downarrow 0$, $t^{1+\varepsilon} r_1(t) \uparrow$ *при* $t \to \infty$;
3. $\int\limits_1^{\infty} r_1(t)dt < \infty$.

В силу сказанного в замечании 3, последовательность $\{M_n^*\}$, построенная в лемме 3, удовлетворяет и условию б) регулярности. Так что в условиях леммы 3 существует регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_n^*}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Убедимся, что последовательность $\{M_n^*\}$ удовлетворяет условию б). Действительно, имеем

$$a_n = \left(\frac{m_{n+1}^*}{m_n^*}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)\; r(n+1)}}\; \frac{n\; r(n)}{(n+1)\; r(n+1)}.$$

Но

$$\frac{n\; r(n)}{(n+1)\; r(n+1)} \leqslant \frac{(n+1)^2\; r(n+1)}{(n+1)\; r(n+1)}\; \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \leqslant 2.$$

Отсюда

$$a_n \leqslant 2 \sqrt[n]{\frac{n+1}{(n+1)^2\; r(n+1)}} \leqslant 2 \left(\frac{n+1}{4r(2)}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant C < \infty,$$

и

$$\sup_n \left(\frac{m_{n+1}^*}{m_n^*}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 6.** *Пусть $M_n > 0$. Для того чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что*

$$M_n^* \leqslant M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

*необходимо и достаточно, чтобы нашлась положительная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция $r = r(t)$, $tr(t) \downarrow 0$, $t^2 r(t) \uparrow$ при $t \to \infty$ такая, что*

$$1) \frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \leqslant r(n) \ (n \geq 1); \qquad\qquad 2) \int\limits_1^{\infty} r(t)dt < \infty.$$

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Р.С. Юлмухаметову за постановку задач и внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельбройт С. *Квазианалитические классы функций.* М.–Л.: 1937. 108 с.
2. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* М.: ИЛ, 1955. 268 с.
3. Юлмухаметов Р.С. *Квазианалитические классы функций в выпуклых областях* // Матем. сб. 1986. Т. 130(172). С. 500–519.
4. R.B. Salinas *Functions with null moments* // Rev. Acad. Ciencias. Madrid. 1955. P. 331–368.
5. Коренблюм Б.И. *Квазианалитические классы функций в круге* // Доклады АН СССР. Т. 164. № 1. С. 36–39.
6. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980. 384с.
7. Гайсин Р.А. *Эквивалетные критерии квазианалитичности класса Карлемана в угле* // Сборник трудов Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании“. Том 1. Математика. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
8. Дынькин Е.М. *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала* // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ (Труды VII Зимней школы. Дрогобыч) М.: АН СССР. Центральный экономико-математический институт, 1976. С. 40–73.
9. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций и применения.* Дисс. ... докт. физ.-мат наук. Уфа, 1986. 197с.
10. Прилипко Т.И. *Квазианалитические классы функций в комплексной области* // Укр. матем. журнал. 1967. Т. 19. № 2. С. 127–134.
11. *Математический энциклопедический словарь* // гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.
12. R. Couture *Un theoreme de Denjoy-Carleman sur une courbe du plan complexe* // Proceedings of the American math. soc. 1982. V. 85. № 3. P. 401–406.

Рашит Ахтярович Гайсин,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г.Уфа, Россия
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 41-53.

УДК 514.764:517.95

# О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЭЙЗЕНХАРТА

З.Х. ЗАКИРОВА

**Аннотация.** В работе ведется исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$, которые допускают проективные движения, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Общий метод определения псевдоримановых многообразий, которые допускают негомотетическую проективную группу $G_r$, был развит А.В.Аминовой. А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности $\geq 3$, которые допускают негомотетические проективные или афинные преобразования. Эта проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдо-риманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта, называются *$h$-пространствами*. Известно, что проблема определения таких пространств зависит от типа $h$-пространства, т.е. от типа билинейной формы $L_X g_{ij}$, определенной характеристикой $\lambda$-матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$. Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры $h$-пространства.

В работе найдены метрики и определены квадратичные первые интегралы уравнений геодезических 6-мерных $h$-пространств типов $[(21\ldots1)(21\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$.

**Ключевые слова:** дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

**Mathematics Subject Classification:** 53C50, 53B30.

## 1. Введение

Линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее вектор скорости $T^i = dx^i/dt$ параллелен вдоль нее самой (см. [1]): $\nabla_t T = 0$ . Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1}$$

где $\Gamma^i_{jk}$ — компоненты связности псевдориманова многообразия $(M, g)$. Отметим, что здесь и далее по повторяющимся индексам идет суммирование.

Преобразование $f$ псевдориманова многообразия $M$ на себя называется *проективным преобразованием*, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Векторное поле $X$ называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

---

Z.Kh. Zakirova, On some special solutions of Eisenhart equation.

© Закирова З.Х. 2013.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-02-00457-а).

*Поступила 27 декабря 2011 г.*

Векторное поле $X$ является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии $M$ с аффинной связностью $\nabla$ тогда и только тогда, когда [2] (см. также [8])

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X,Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z), \tag{2}$$

для поля 1-формы $\varphi$ и всех векторных полей $Y, Z$ на $M$, где $R$ — тензор кривизны.

В локальных координатах:

$$L_X \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \tag{3}$$

что равносильно

$$L_X \Gamma^i_{jk} \equiv \partial_{jk}\xi^i + \xi^l \partial_l \Gamma^i_{jk} - \Gamma^l_{jk}\partial_l \xi^i + \Gamma^i_{lk}\partial_j \xi^l + \Gamma^i_{jl}\partial_k \xi^l \equiv$$
$$\equiv \xi^i_{,jk} + \xi^l R^i_{jlk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j.$$

Если $M$ — псевдориманово многообразие с метрикой $g$ и римановой связностью $\nabla$, то условие (2) эквивалентно уравнениям (см. [2], [8]):

$$L_X g = h, \tag{4}$$

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi, \tag{5}$$

где $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}X$. Уравнение (4) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, второе уравнение (5) называется *уравнением Эйзенхарта*.

Впервые проблема определения $2D$ римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, т.е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались С. Ли и М. Кенигсом (см. [3]). Другие важные результаты были получены А.З. Петровым в работе [4], который классифицировал геодезически эквивалентные псевдоримановы пространства $V^3$. В дальнейшем, А.В. Аминова полностью решила эту задачу в [5]. Для риманова многообразия с размерностью $> 2$ похожая проблема была решена Г. Фубини в [6] и А.С. Солодовниковым в [7][1], в их трудах содержится классификация римановых пространств с размерностью $> 2$ по локальным группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий. Заметим, что их выводы опирались на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Если отказаться от условия знакоопределенности, задача намного усложняется и требует совершенно нового метода решения.

В работе [8] А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности $\geq 3$, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли.

Данная проблема не решена для псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (5). Задача определения таких пространств зависит от типа $h$-пространств, т.е. от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре $\lambda$-матрицы $(h - \lambda g)$ (см. [8]). Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc...]$, то мы будем называть соответствующее пространство — $h$-пространством типа $[abc...]$. Эти идеи впервые были высказаны П.А. Широковым (см. [10]). Таким образом, псевдориманово пространство, для которого существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называется *$h$-пространством.*

Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры псевдориманова пространства. В частности, для 6-мерного псевдориманова пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$ возможны следующие типы:

1) $[(1...1)...(1...1)]$, т.е. $[111111]$, $[(11)1111]$, $[(111)111]$ и т.д.;

[1] Следует отметить, что полный обзор литературы по этой теме дан в работе [8] и в кандидатской диссертации автора [9].

2) $[1\overline{1}(1...1)...(1...1)]$, т.е. $[1\overline{1}1111]$, $[1\overline{1}(11)11]$, $[1\overline{1}(111)1]$ и т.д;
3) $[11\overline{1}\overline{1}(1...1)...(1...1)]$, т.е. $[(11)\overline{1}\overline{1}11]$, $[(11)(\overline{1}\overline{1})11]$, $[11\overline{1}\overline{1}(11)]$ и т.д ;
4) $[(21...1)...(1...1)]$, т.е. $[21111]$, $[(21)111]$, $[(211)11]$ и т.д.;
5) $[(21)11\overline{1}]$, $[(211)1\overline{1}]$, $[2(11)1\overline{1}]$;
6) $[(21...1)(21...1)(1...1)(1...1)]$, т.е. $[2211]$, $[(22)11]$, $[2(21)1]$, $[(21)(21)]$ и т.д.;
7) $[2\overline{2}11]$, $[2\overline{2}(11)]$;
8) $[(31...1)...(1...1)]$, т.е. $[3111]$, $[(31)11]$, $[(311)1]$ и т.д.;
9) $[311\overline{1}]$, $[(31)1\overline{1}]$;
10) $[321]$, $[3(21)]$, $[(32)1]$, $[(321)]$;
11) $[33]$, $[(33)]$;
12) $[411]$, $(41)1]$, $[4(11)]$, $[(411)]$;
13) $[51]$, $[(51)]$.

Отметим, что $h$-пространства под номерами 1), 2), 3) были исследованы Г.Фубини в [6] и А.С. Солодовниковым в [7], $h$-пространства под номерами 4), 5), 8), 9) были исследованы А.В. Аминовой в [8], $h$-пространства под номерами 6), 7), 10), 11), 12), 13) были исследованы автором в кандидатской диссертации [9]. Некоторые результаты были опубликованы в [11]-[15].

Целью данной работы является исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$. В частности, мы найдем метрики 6-мерных $h$-пространств типов $[22(11)]$, $[2(21)1]$,$[2(211)]$, $[(22)11]$, $[(221)1]$, $[(2211)]$, $[(22)(11)]$, $[(21)(21)]$ и определим первые квадратичные интегралы уравнений геодезических этих $h$-пространств. Метрика $h$-пространства типа $[2211]$ была получена автором в [11].

Основной метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомотетическую проективную группу $G_r$, был развит А.В. Аминовой (см. [8])[1]. Используя в данной работе технику интегрирования в косонормальном (подвижном) репере, мы найдем метрики рассматриваемых $h$-пространств.

Уравнение Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}, \tag{6}$$

в косонормальном репере имеет вид (см. [8])[2]

$$X_r\overline{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\overline{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \overline{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr}X_q\varphi + \overline{g}_{qr}X_p\varphi \quad (p,q,r = 1,\ldots,n), \tag{7}$$

где

$$X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{i,j}\underset{q}{\xi^i}\underset{r}{\xi^j}, \quad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

$\underset{i}{\xi^j}$ — компоненты косонормального репера, $\overline{g}_{pr} = e_p\delta_{\tilde{p}}^{\ r}$ и $\overline{a}_{pq}$ — канонические формы тензоров $g_{pr}$, $a_{pq}$, соответственно, $\gamma^p_{lk} = e_p\gamma_{l\tilde{p}k}$ — компоненты связности в косонормальном репере $X$. Коммутаторы векторных полей $X_k$ and $X_h$ определяются по формуле (см. [8])

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^{n} e_l(\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk})X_{\tilde{l}}, \tag{8}$$

---

[1] Впервые техника интегрирования в косонормальном репере была применена в работах [16], [17].

[2] Отображение $\sim$, которое переводит одни индексы в другие, было впервые введено А.В. Аминовой в работах [16], [17] (см. также [8]) в определении косонормального (подвижного) репера. Следует заметить, что данные статьи А.В. Аминовой можно найти в интернете по ссылке http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=8394. Опуская громоздкое определение косонормального (подвижного) репера, достаточно привести несколько примеров, и читателям станет понятно действие отображения $\sim$. К примеру, для $h$-пространства типа $[2211]$ $\tilde{1}=2$, $\tilde{2}=1$, $\tilde{3}=4$, $\tilde{4}=3$, $\tilde{5}=5$, $\tilde{6}=6$; для $h$-пространства типа $[321]$ $\tilde{1}=3$, $\tilde{2}=2$, $\tilde{3}=1$, $\tilde{4}=5$, $\tilde{5}=4$, $\tilde{6}=6$; для $h$-пространства типа $[411]$ $\tilde{1}=4$, $\tilde{2}=3$, $\tilde{3}=2$, $\tilde{4}=1$, $\tilde{5}=5$, $\tilde{6}=6$. Эти же соотношения сохраняются и в случае кратных элементарных делителей, т.е. при наличие скобок в типах $h$-пространств, например, в случае $[22(11)]$, $[2(211)]$ и т.д.

что равносильно

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(\gamma_{mkh} - \gamma_{mhk})\overline{g}^{ml}X_l.$$

Отметим, что для 6-мерных $h$-пространств типа $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$ $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ (см. [8]).

Для 6-мерных $h$-пространств типа $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$ канонические формы $\overline{g}_{pr}$ и $\overline{a}_{pq}$ имеют вид (см. [4])

$$\overline{g}_{pr} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\overline{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_4\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4\lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_5\lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_6\lambda_6 \end{pmatrix},$$

где $e_1 = e_2, e_3 = e_4, e_i = \pm 1, (i = 1, 2, ..., 6)$, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, $\lambda_5$, $\lambda_6$ — вещественные функции, которые могут совпадать. Эти функции являются корнями характеристического уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$.

## 2. Метрика $h$-пространства типа [22(11)]

Подставив канонические формы $\overline{g}_{pr}$ и $\overline{a}_{pq}$ из (9) в (7) и учитывая, что для $h$-пространства типа [22(11)] $\lambda_5 = \lambda_6$, $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{gathered} X_r\lambda_2 = 0 \ (r \neq 2), \quad X_r\lambda_4 = 0 \ (r \neq 4), \quad X_r\lambda_6 = 0, \\ X_2(\lambda_2 - \varphi) = X_4(\lambda_4 - \varphi) = 0, \quad \gamma_{121} = e_2X_2\varphi, \quad \gamma_{343} = e_4X_4\varphi, \\ \gamma_{142} = \gamma_{241} = \frac{e_2X_4\varphi}{\lambda_2 - \lambda_4}, \quad \gamma_{242} = -\frac{e_2X_4\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_4)^2}, \quad \gamma_{324} = \gamma_{423} = \frac{e_4X_2\varphi}{\lambda_4 - \lambda_2}, \\ \gamma_{424} = -\frac{e_4X_2\varphi}{(\lambda_4 - \lambda_2)^2}, \quad \gamma_{244} = \frac{e_4X_2\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_4)^2}, \quad \gamma_{s\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_s\varphi}{(\lambda_s - \lambda_\sigma)}, \end{gathered} \tag{10}$$

где $r = 1, 2, ..., 6$, $\sigma = 5, 6$, $s = 2, 4$, $\gamma_{56r}$ — произвольные. Остальные $\gamma_{pqr}$ равны нулю.

Известно, для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$X_q\theta = \underset{q}{\xi^i}\partial_i\theta = 0, \quad (q = 1, \dots, m, i = 1, \dots, 6, m < 6), \tag{11}$$

где $\underset{q}{\xi^i}$ — компоненты косонормального репера, была вполне интегрируемой, т.е. чтобы она допускала $6 - m$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы ([2], см. также [8])

$$[X_q, X_r] = X_qX_r - X_rX_q = \sum_{p=1}^{6} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq})X_{\tilde{p}} \tag{12}$$

линейно выражались через операторы $X_q$.

Используя формулы (10) и (12), выпишем коммутаторы операторов $X_i$ $(i=1,\dots,6)$ в рассматриваемом $h$-пространстве:

$$\begin{gathered}
[X_1,X_2]=-e_1\gamma_{121}X_2,\quad [X_1,X_3]=0,\quad [X_2,X_3]=e_4\gamma_{423}X_3,\\
[X_1,X_4]=-e_2\gamma_{241}X_1,\quad [X_3,X_4]=-e_3\gamma_{343}X_4,\\
[X_2,X_4]=-e_2\gamma_{242}X_1-e_1\gamma_{142}X_2+e_4\gamma_{424}X_3+e_3\gamma_{324}X_4,\\
[X_p,X_\sigma]=-e_\tau\gamma_{\tau\sigma p}X_\tau,\quad [X_q,X_\sigma]=e_\sigma\gamma_{\sigma q\sigma}X_\sigma-e_\tau\gamma_{\tau\sigma q}X_\tau,\\
[X_5,X_6]=-e_5\gamma_{565}X_5+e_6\gamma_{656}X_6,
\end{gathered}\tag{13}$$

где $p=1,3$, $q=2,4$, $\sigma,\tau=5,6$ $(\sigma\neq\tau)$.

Далее, составляя вполне интегрируемые системы (11) из (13), мы определим допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через $\theta^i$. После чего, с помощью преобразования координат $x^{i'}=\theta^i(x)$, мы можем обратить в нуль некоторые компоненты $\underset{q}{\xi}{}^i$ введенного выше косонормального репера. В частности, вполне интегрируемыми системами из (13) являются системы: $X_1\theta=X_3\theta=X_4\theta=X_5\theta=X_6\theta=0$, $X_1\theta=X_2\theta=X_3\theta=X_5\theta=X_6\theta=0$, $X_1\theta=X_2\theta=X_3\theta=X_4\theta$, $X_3\theta=X_4\theta=X_5\theta=X_6\theta=0$, $X_1\theta=X_2\theta=X_5\theta=X_6\theta=0$. Обозначим решение первой системы — $\theta^2$, второй системы — $\theta^4$, решения третьей системы — $\theta^5$ и $\theta^6$. Четвертая система имеет два независимых решения, одно из которых обозначим через $\theta^1$, а второе выберем совпадающим с $\theta^2$ . Последняя система имеет также два независимых решения, одно обозначим через $\theta^3$, а второе выберем совпадающим с $\theta^4$. После преобразования координат $x^{i'}=\theta^i(x)$ в новой системе координат, опустив штрихи, определим

$$\underset{p}{\xi}{}^i=P_p(x)\delta_p{}^i,\quad \underset{2}{\xi}{}^3=\underset{2}{\xi}{}^4=\underset{2}{\xi}{}^\sigma=\underset{4}{\xi}{}^1=\underset{4}{\xi}{}^2=\underset{4}{\xi}{}^\sigma=\underset{\sigma}{\xi}{}^\alpha=0,\tag{14}$$

где $p=1,3$, $\sigma=5,6$, $\alpha=1,2,3,4$, $P_p(x)$ — произвольные функции.

С помощью равенств (14) из той части уравнений (10), которая не содержит $\gamma_{pqr}$, найдем

$$2\varphi=\sum_{i=1}^{6}f_i+c,\quad \lambda_i=f_i,\tag{15}$$

где $f_1=f_2(x^2)$, $f_3=f_4(x^4)$ — произвольные функции, $f_5=f_6=\lambda$ — const, $c$ — const.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (13), с помощью формул (10) и (14) получим систему уравнений на компоненты $\underset{i}{\xi}{}^j$ косонормального репера:

1° $\underset{1}{\xi}{}^1\partial_1\underset{2}{\xi}{}^1-\underset{2}{\xi}{}^1\partial_1\underset{1}{\xi}{}^1-\underset{2}{\xi}{}^2\partial_2\underset{1}{\xi}{}^1=-f'{}_2\underset{2}{\xi}{}^2\underset{2}{\xi}{}^1,$

2° $\underset{1}{\xi}{}^1\partial_1\underset{2}{\xi}{}^2=-f'{}_2(\underset{2}{\xi}{}^2)^2,$

3° $\underset{3}{\xi}{}^3\partial_3\underset{1}{\xi}{}^1=\underset{3}{\xi}{}^3\partial_3\underset{2}{\xi}{}^1=\underset{3}{\xi}{}^3\partial_3\underset{2}{\xi}{}^2=0,$

4° $\partial_4\underset{1}{\xi}{}^1=\frac{f_4'}{f_2-f_4}\underset{1}{\xi}{}^1,$

5° $\partial_4\underset{2}{\xi}{}^1=\frac{f_4'}{f_2-f_4}\underset{2}{\xi}{}^1-\frac{f_4'}{(f_2-f_4)^2}\underset{1}{\xi}{}^1,$

6° $\partial_4\underset{2}{\xi}{}^2=\frac{f_4'}{f_2-f_4}\underset{2}{\xi}{}^2,$

7° $\underset{3}{\xi}{}^3\partial_3\underset{4}{\xi}{}^3-\underset{4}{\xi}{}^3\partial_3\underset{3}{\xi}{}^3-\underset{4}{\xi}{}^4\partial_4\underset{3}{\xi}{}^3=-f'{}_4\underset{4}{\xi}{}^4\underset{4}{\xi}{}^3,$

8° $\underset{3}{\xi}{}^3\partial_3\underset{4}{\xi}{}^4=-f'{}_4(\underset{4}{\xi}{}^4)^2,$

9° $\underset{1}{\xi}{}^1\partial_1\underset{3}{\xi}{}^3=\underset{1}{\xi}{}^1\partial_1\underset{4}{\xi}{}^3=\underset{1}{\xi}{}^1\partial_1\underset{4}{\xi}{}^4=0,$

10° $\partial_2\underset{3}{\xi}{}^3=\frac{f_2'}{f_4-f_2}\underset{3}{\xi}{}^3,$

11° $\partial_2 \underset{4}{\xi}^3 = \frac{f_2'}{f_4-f_2}\underset{4}{\xi}^3 - \frac{f_2'}{(f_4-f_2)^2}\underset{3}{\xi}^3,$

12° $\partial_2 \underset{4}{\xi}^4 = \frac{f_2'}{f_4-f_2}\underset{4}{\xi}^4,$

13° $\underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\gamma_{\tau\sigma 1}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma),$

14° $\underset{1}{\xi}^1 \partial_1 \underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\gamma_{\tau\sigma 1}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau \neq \sigma),$

15° $\underset{3}{\xi}^3 \partial_3 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\gamma_{\tau\sigma 3}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma),$

16° $\underset{3}{\xi}^3 \partial_3 \underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\gamma_{\tau\sigma 3}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau \neq \sigma),$

17° $\underset{2}{\xi}^1 \partial_1 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma + \underset{2}{\xi}^2 \partial_2 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\frac{f_2'}{f_2-\lambda}\underset{2}{\xi}^2 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma - \gamma_{\tau\sigma 2}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma),$

18° $\underset{2}{\xi}^1 \partial_1 \underset{\sigma}{\xi}^\tau + \underset{2}{\xi}^2 \partial_2 \underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\frac{f_2'}{f_2-\lambda}\underset{2}{\xi}^2 \underset{\sigma}{\xi}^\tau - \gamma_{\tau\sigma 2}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau \neq \sigma),$

19° $\underset{4}{\xi}^3 \partial_3 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma + \underset{4}{\xi}^4 \partial_4 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma = -\frac{f_4'}{f_4-\lambda}\underset{4}{\xi}^4 \underset{\sigma}{\xi}^\sigma - \gamma_{\tau\sigma 4}\underset{\tau}{\xi}^\sigma, \quad (\tau \neq \sigma),$

20° $\underset{4}{\xi}^3 \partial_3 \underset{\sigma}{\xi}^\tau + \underset{4}{\xi}^4 \partial_4 \underset{\sigma}{\xi}^\tau = -\frac{f_4'}{f_4-\lambda}\underset{4}{\xi}^4 \underset{\sigma}{\xi}^\tau - \gamma_{\tau\sigma 4}\underset{\tau}{\xi}^\tau, \quad (\tau \neq \sigma),$

21° $\underset{5}{\xi}^5 \partial_5 \underset{6}{\xi}^5 + \underset{5}{\xi}^6 \partial_6 \underset{6}{\xi}^5 - \underset{6}{\xi}^5 \partial_5 \underset{5}{\xi}^5 - \underset{6}{\xi}^6 \partial_6 \underset{5}{\xi}^5 = -\gamma_{565}\underset{5}{\xi}^5 + \gamma_{656}\underset{6}{\xi}^5,$

22° $\underset{5}{\xi}^5 \partial_5 \underset{6}{\xi}^6 + \underset{5}{\xi}^6 \partial_6 \underset{6}{\xi}^6 - \underset{6}{\xi}^5 \partial_5 \underset{5}{\xi}^6 - \underset{6}{\xi}^6 \partial_6 \underset{5}{\xi}^6 = -\gamma_{565}\underset{5}{\xi}^6 + \gamma_{656}\underset{6}{\xi}^6,$

23° $(\underset{\sigma}{\xi}^\sigma \partial_\sigma + \underset{\sigma}{\xi}^\tau \partial_\tau)\underset{\alpha}{\xi}^\beta = 0, \quad (\tau \neq \sigma),$

где $\alpha, \beta = 1,2,3,4,\ \sigma, \tau = 5,6,\ f_2' = \frac{df_2}{dx^2},\ f_4' = \frac{df_4}{dx^4}$.

Из уравнения 23° следует, что все $\underset{\alpha}{\xi}^\beta$ не зависят от переменных $x^5$, $x^6$. Интегрируя уравнения 3°, 4°, 9°, 10°, найдем

$$\underset{1}{\xi}^1 = (f_4 - f_2)^{-1} F_1(x^1, x^2),$$

$$\underset{3}{\xi}^3 = (f_2 - f_4)^{-1} F_3(x^3, x^4),$$

где $F_1, F_3$ — функции указанных переменных, не равные нулю вследствие линейной независимости векторов репера и формул (14). Из уравнения 3° также следует, что $\underset{2}{\xi}^1$ не зависит от переменной $x^3$.

Выражения для найденных компонент репера можно упростить с помощью преобразования координат

$$\overline{x}^1 = \int \frac{dx^1}{F_1}, \quad \overline{x}^2 = x^2, \quad \overline{x}^3 = \int \frac{dx^3}{F_3}, \quad \overline{x}^4 = x^4, \quad \overline{x}^\sigma = x^\sigma,$$

которое не меняет вида равенств (14). В новой системе координат получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = (f_4 - f_2)^{-1}, \quad \underset{3}{\xi}^3 = (f_2 - f_4)^{-1}. \tag{16}$$

После этого, интегрируя уравнения 2° и 6° с учетом 3°, найдем

$$\underset{2}{\xi}^2 = (f_4 - f_2)^{-1}(f_2' x^1 + \theta(x^2))^{-1},$$

где $\theta(x^2)$ — произвольная функция переменной $x^2$.

Возможны два случая: 1) $f_2' = 0$, 2) $f_2' \neq 0$. Во втором случае сделаем координатное преобразование $\overline{x}^2 = f_2(x^2)$, $\overline{x}^p = x^p$ $(p \neq 2)$ и положим $\overline{\theta} = (f_2')^{-1}\theta$. Опуская черту, можно объединить оба случая одной формулой

$$\underset{2}{\xi}^2 = (f_4 - f_2)^{-1} A^{-1}, \tag{17}$$

где
$$A = \epsilon x^1 + \theta, \quad f_1 = f_2 = \epsilon x^2,$$
$\epsilon$ равно 0 либо 1, $\theta$ — функция переменной $x^2$, отличная от нуля при $\epsilon = 0$.

Следуя подобным рассуждениям, проинтегрировав уравнения 8°, 12° с учетом 9°, получим
$$\underset{4}{\xi}^4 = (f_2 - f_4)^{-1}\tilde{A}^{-1}. \tag{18}$$
Здесь
$$\tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega, \quad f_3 = f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a,$$
$\tilde{\epsilon}$ равно 0 либо 1, $a$ — const, отличная от нуля при $\tilde{\epsilon} = 0$, $\omega$ — функция переменной $x^4$, также отличная от нуля при $\tilde{\epsilon} = 0$.

Интегрируя уравнения 1°, 5°, 7° и 11° с учетом 3°, 9°, найдем
$$\underset{2}{\xi}^1 = (f_4 - f_2)^{-1}((f_4 - f_2)^{-1} + Q(x^2)),$$
$$\underset{4}{\xi}^3 = (f_2 - f_4)^{-1}((f_2 - f_4)^{-1} + R(x^4)),$$
где $Q(x^2), R(x^4)$ — функции указанных переменных.

С помощью преобразования координат
$$\overline{x}^1 = x^1 - \int Q dx^2, \quad \overline{x}^3 = x^3 - \int R dx^2, \quad \overline{x}^p = x^p \ (p \neq 1, 3)$$
можно обратить в нуль функции $Q$ и $R$, при этом не изменив полученные раннее формулы. После чего компоненты $\underset{2}{\xi}^1$ и $\underset{4}{\xi}^3$ косонормального репера примут вид
$$\underset{2}{\xi}^1 = (f_4 - f_2)^{-2}, \quad \underset{4}{\xi}^3 = (f_2 - f_4)^{-2}. \tag{19}$$

Используя полученные результаты и формулу (см. [8])
$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi}^i \underset{\tilde{h}}{\xi}^j, \tag{20}$$
можно вычислить следующие контравариантные компоненты метрического тензора рассматриваемого $h$-пространства:
$$g^{11} = 2e_2(f_4 - f_2)^{-3}, \quad g^{12} = e_2(f_4 - f_2)^{-2}A^{-1},$$
$$g^{33} = 2e_4(f_2 - f_4)^{-3}, \quad g^{34} = e_4(f_2 - f_4)^{-2}\tilde{A}^{-1}.$$

Из формулы (20) также следует, что в рассматриваемом $h$-пространстве $g^{\sigma\tau} = e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}^\sigma \underset{\sigma}{\xi}^\tau + e_\tau \underset{\tau}{\xi}^\sigma \underset{\tau}{\xi}^\tau$, $\sigma, \tau = 5, 6$. С помощью уравнений 13°, 14°, 15°, 16° нетрудно показать, что $\underset{1}{\xi}^1 \partial_1 g^{\sigma\tau} = \underset{3}{\xi}^3 \partial_3 g^{\sigma\tau} = 0$, отсюда $\partial_1 g^{\sigma\tau} = \partial_3 g^{\sigma\tau} = 0$. Тогда из уравнений 17°, 18°, 19°, 20° следует
$$\partial_2 g^{\sigma\tau} = -2\frac{f_2'}{f_2 - \lambda} g^{\sigma\tau}, \quad \partial_4 g^{\sigma\tau} = -2\frac{f_4'}{f_4 - \lambda} g^{\sigma\tau}.$$

Интегрируя эти уравнения, принимая во внимание уравнения 21°, 22°, найдем
$$g^{\sigma\tau} = (f_2 - \lambda)^{-2}(f_4 - \lambda)^{-2} F^{\sigma\tau}(x^5, x^6), \tag{21}$$
где $F^{\sigma\tau}$ — произвольные функции переменных $x^5, x^6$.

Далее, вычислив ковариантные компоненты $g_{ij}$ метрического тензора, с помощью формул (см. [8])
$$\underset{h}{\xi}_i = g_{ij} \underset{h}{\xi}^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{n} e_h e_l \overline{a}_{hl} \underset{\tilde{h}}{\xi}_i \underset{\tilde{l}}{\xi}_j, \tag{22}$$
мы найдем компоненты тензора $a_{ij}$.

Запишем итоговый результат в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Если симметрический тензор $h_{ij}$ типа $[22(11)]$ и скаляр $\varphi$ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям (1), то существует голономная система координат, в которой $\varphi$, $g_{ij}$ и $h_{ij}$ определяются формулами*

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = e_2 A(f_4 - f_2)\{(f_4 - f_2)dx^1 dx^2 - A(dx^2)^2)\} + \\ + e_4 \tilde{A}(f_2 - f_4)\{(f_2 - f_4)dx^3 dx^4 - \tilde{A}(dx^4)^2\} + \\ + F_{\sigma\tau}(f_2 - \lambda)^2 (f_4 - \lambda)^2 dx^\sigma dx^\tau, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} a_{ij}dx^i dx^j = f_2 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + \\ + A g_{12}(dx^2)^2 + f_4 g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + \tilde{A} g_{34}(dx^4)^2 + \lambda g_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau, \end{gathered} \tag{24}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = 2f_2 + 2f_4 + c, \tag{25}$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega(x^4), \tag{26}$$

*где $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, $f_2 = \epsilon x^2$, $f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a$, $\lambda$, $c$ и $a$ — постоянные, $a \neq 0$ когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $F_{\sigma\tau}(x^5, x^6), \theta(x^2), \omega(x^4)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0$, $\omega \neq 0$ когда $\tilde{\epsilon} = 0$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $e_2, e_4 = \pm 1$.*

## 3. Метрики $h$-пространств типов [2(21)1],[2(211)]

В этом случае и в остальных случаях, рассмотренных ниже, проделываются вычисления, аналогичные $h$-пространству типа [22(11)]. В связи с этим некоторые выкладки будут опущены.

Подставив канонические формы $\overline{g}_{pr}$ и $\overline{a}_{pq}$ из (9) в (7) с учетом того, что для $h$-пространства типа [2(21)1] $\lambda_4 = \lambda_5$, получим

$$\begin{gathered} X_r\lambda_2 = 0 \ (r \neq 2), \quad X_r\lambda_5 = 0, \quad X_r\lambda_6 = 0 \ (r \neq 6), \\ X_2(\lambda_2 - \varphi) = X_6(\lambda_6 - \varphi) = 0, \quad \gamma_{121} = e_2 X_2\varphi, \\ \gamma_{162} = \gamma_{261} = \frac{e_2 X_6\varphi}{\lambda_2 - \lambda_6}, \quad \gamma_{262} = -\frac{e_2 X_6 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_6)^2}, \quad \gamma_{3s4} = \gamma_{4s3} = \frac{e_4 X_s \varphi}{\lambda_5 - \lambda_s}, \\ \gamma_{4s4} = -\frac{e_4 X_s\varphi}{(\lambda_5 - \lambda_s)^2}, \quad \gamma_{2\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_2\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_\sigma)}, \quad \gamma_{565} = \frac{e_5 X_6 \varphi}{\lambda_5 - \lambda_6}, \end{gathered} \tag{27}$$

где $r = 1, 2, ..., 6$, $\sigma = 5, 6$, $s = 2, 6$, $\gamma_{45r}$ — произвольные, остальные $\gamma_{pqr}$ равны нулю.

Коммутаторы операторов $h$-пространства типа [2(21)1] имеют вид

$$\begin{gathered} [X_1, X_2] = -e_1\gamma_{121}X_2, \quad [X_1, X_3] = 0, \\ [X_2, X_3] = e_4\gamma_{423}X_3, \quad [X_1, X_4] = -e_5\gamma_{541}X_5, \\ [X_1, X_5] = -e_4\gamma_{451}X_3, \quad [X_1, X_6] = -e_2\gamma_{261}X_1, \\ [X_2, X_4] = e_3\gamma_{324}X_4 + e_4\gamma_{424}X_3 - e_5\gamma_{542}X_5, \\ [X_2, X_5] = e_5\gamma_{525}X_5 - e_4\gamma_{425}X_3, \\ [X_2, X_6] = -e_2\gamma_{262}X_1 - e_1\gamma_{162}X_2 + e_6\gamma_{626}X_6, \\ [X_3, X_4] = -e_5\gamma_{543}X_5, \quad [X_3, X_5] = -e_4\gamma_{453}X_3, \\ [X_3, X_6] = -e_4\gamma_{463}X_3, \quad [X_4, X_5] = -e_4\gamma_{454}X_3 + e_5\gamma_{545}X_5, \\ [X_4, X_6] = -e_3\gamma_{364}X_4 - e_4\gamma_{464}X_3 + e_5\gamma_{546}X_5, \\ [X_5, X_6] = e_4\gamma_{456}X_3 - e_5\gamma_{565}X_5. \end{gathered} \tag{28}$$

Отсюда следует, что системы $X_i\theta = 0 \ (i \neq 2)$, $X_j\theta = 0 \ (j \neq 4)$, $X_k\theta = 0 \ (k \neq 6)$ являются вполне интегрируемыми и имеют, соответственно, следующие решения: $\theta^2$, $\theta^4$, $\theta^6$. Системы $X_3\theta = X_4\theta = X_5\theta = X_6\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = X_3\theta = X_6\theta = 0$ и $X_1\theta = X_2\theta = X_6\theta = 0$ также вполне интегрируемые. Первая система имеет решения $\theta^1$ и $\theta^2$, вторая система имеет решения $\theta^4$ и $\theta^5$, третья система имеет решения $\theta^3$, $\theta^4$ и $\theta^5$. После координатного преобразования $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, получим

$$\underset{p}{\xi}^i = P_p(x)\delta_p{}^i, \quad \underset{2}{\xi}^s = \underset{4}{\xi}^q = \underset{5}{\xi}^q = \underset{5}{\xi}^4 = 0, \tag{29}$$

где $p = 1,2,3,\ s = 3,4,5,6,\ q = 1,2,6,\ P_p(x)$ — произвольные функции.

Проинтегрировав систему уравнений (28) с учетом (27) и (29) подобно предыдущему случаю, а затем вычислив компоненты тензоров $g_{ij}$ и $a_{ij}$, мы придем к следующему результату

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = e_2\{2(f_6 - f_2)Adx^1dx^2 - A^2(dx^2)^2\}+ \\ +(f_6-\lambda)(f_2-\lambda)^2\{2e_4dx^3dx^4 - e_4(\Sigma+\omega)(dx^4)^2 + e_5(dx^5)^2\}+ \\ +e_6(f_2-f_6)^2(dx^6)^2, \end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} a_{ij}dx^i dx^j = f_2 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1}+ \\ +g_{12}(dx^2)^2+\lambda g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + g_{34}(dx^4)^2 + f_6 g_{66}(dx^6)^2, \end{gathered} \tag{31}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + f_6 + c)g_{ij}, \quad \varphi = f_2 + \frac{1}{2}f_6 + c, \tag{32}$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \Sigma = 2(f_2-\lambda)^{-1} + (f_6-\lambda)^{-1}, \tag{33}$$

где $\epsilon = 0,1,\ f_2 = \epsilon x^2,\ \lambda$ и $c$ — постоянные, $\theta(x^2), \omega(x^4,x^5), f_6(x^6)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0,\ i_1, j_1 = 1,2,\ i_2, j_2 = 3,4,5,\ e_2, e_4, e_5, e_6 = \pm 1$.

После похожих выкладок для $h$-пространства типа [2(211)] , получим

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = 2e_2Adx^1dx^2+ \\ +(f_2-\lambda)^2\{2e_4dx^3dx^4 - e_4(\Sigma+\omega)(dx^4)^2 + g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau\}, \end{gathered} \tag{34}$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = 2f_2g_{12}dx^1dx^2 + g_{12}(dx^2)^2 + \lambda g_{pq}dx^p dx^q + g_{34}(dx^4)^2, \tag{35}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + c)g_{ij}, \quad \varphi = f_2 + c, \tag{36}$$

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \Sigma = 2(f_2-\lambda)^{-1}, \tag{37}$$

где $\epsilon = 0,1,\ f_2 = \epsilon x^2,\ \lambda, c$ — постоянные, $\theta(x^2), \omega(x^4,x^5,x^6), g_{\sigma\tau}(x^4,x^5,x^6)$ — произвольные функции, $\theta \neq 0$ когда $\epsilon = 0,\ p,q = 3,4,5,6,\ \sigma,\tau = 5,6,\ e_2, e_4 = \pm 1$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Если симметрический тензор $h_{ij}$ типов* [2(21)1], [2(211)] *и функция $\varphi$ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция $\varphi$ и тензоры $g_{ij}$, $h_{ij}$ определяются формулами* (30)–(37).

## 4. Метрики $h$-пространств типов [(22)11], [(221)1]

Для $h$-пространства типа [(22)11] из (7) следует система уравнений

$$\begin{gathered} X_r\lambda_4 = 0, \quad X_r\lambda_\sigma = 0\ (r \neq \sigma), \quad X_\sigma(\lambda_\sigma - \varphi) = 0, \\ \gamma_{14r} = \gamma_{23r}, \quad \gamma_{1\sigma2} = \gamma_{2\sigma1} = \frac{e_2X_\sigma\varphi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma}, \quad \gamma_{3\sigma4} = \gamma_{4\sigma3} = \frac{e_4X_\sigma\varphi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma}, \\ \gamma_{s\sigma s} = -\frac{e_sX_\sigma\varphi}{(\lambda_4 - \lambda_\sigma)^2}, \quad \gamma_{\sigma\tau\sigma} = \frac{e_\sigma X_\tau\varphi}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau}\ (\sigma \neq \tau), \end{gathered} \tag{38}$$

где $r = 1,2,...,6,\ \sigma,\tau = 5,6,\ s = 2,4,\ \gamma_{24r}$ — произвольные, остальные $\gamma_{pqr}$ равны нулю.

Составим коммутаторы операторов:

$$
\begin{gathered}
[X_1, X_2] = e_4\gamma_{412}X_3 - e_4\gamma_{421}X_3 - e_3\gamma_{411}X_4,\\
[X_1, X_3] = e_4\gamma_{413}X_3 - e_2\gamma_{141}X_1,\\
[X_2, X_3] = -e_2\gamma_{142}X_1 + e_3\gamma_{413}X_4 + e_4\gamma_{423}X_3,\\
[X_1, X_4] = -e_1\gamma_{141}X_2 + e_4\gamma_{414}X_3 - e_2\gamma_{241}X_1,\\
[X_1, X_\sigma] = e_4\gamma_{41\sigma}X_3 - e_2\gamma_{2\sigma 1}X_1,\\
[X_2, X_4] = -e_1\gamma_{142}X_2 + e_4\gamma_{424}X_3 + e_3\gamma_{414}X_4 - e_2\gamma_{242}X_1,\\
[X_2, X_\sigma] = e_3\gamma_{41\sigma}X_4 + e_4\gamma_{42\sigma}X_3 - e_2\gamma_{2\sigma 2}X_1 - e_1\gamma_{1\sigma 2}X_2,\\
[X_3, X_4] = -e_1\gamma_{143}X_2 - e_2\gamma_{243}X_1 + e_2\gamma_{144}X_1,\\
[X_3, X_\sigma] = e_2\gamma_{23\sigma}X_1 - e_1\gamma_{4\sigma 3}X_3,\\
[X_4, X_\sigma] = e_1\gamma_{14\sigma}X_2 - e_3\gamma_{3\sigma 4}X_4 + e_2\gamma_{24\sigma}X_1 - e_4\gamma_{4\sigma 4}X_3,\\
[X_5, X_6] = -e_5\gamma_{565}X_5 + e_6\gamma_{656}X_6.
\end{gathered}
\tag{39}
$$

Составив вполне интегрируемые системы из (39), после координатных преобразований, найдем

$$
\underset{\sigma}{\xi}^{i} = P_\sigma(x)\delta_\sigma{}^{i}, \underset{p}{\xi}^{q} = \underset{\alpha}{\xi}^{\sigma} = 0,
\tag{40}
$$

где $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 3$, $q = 2, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6,$ , $P_\sigma(x)$ — произвольные функции.

Из (38), (39), (40) получим систему уравнений на компоненты $\underset{i}{\xi}^{j}$ косонормального репера:

1° $\underset{1}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{\beta} - \underset{2}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{1}{\xi}^{\beta} = \gamma_{412}\underset{3}{\xi}^{\beta} - \gamma_{421}\underset{3}{\xi}^{\beta} - \gamma_{411}\underset{4}{\xi}^{\beta}$,

2° $\underset{1}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{3}{\xi}^{\beta} - \underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{1}{\xi}^{\beta} = \gamma_{413}\underset{3}{\xi}^{\beta} - \gamma_{141}\underset{1}{\xi}^{\beta}$,

3° $\underset{1}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{4}{\xi}^{\beta} - \underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{1}{\xi}^{\beta} = -\gamma_{141}\underset{2}{\xi}^{\beta} - \gamma_{414}\underset{3}{\xi}^{\beta} - \gamma_{241}\underset{1}{\xi}^{\beta}$,

4° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{1}{\xi}^{\beta} = \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta} - \gamma_{41\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta}$,

5° $\underset{2}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{3}{\xi}^{p} - \underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{p} = -\gamma_{142}\underset{1}{\xi}^{\beta} + \gamma_{413}\underset{4}{\xi}^{p} + \gamma_{423}\underset{3}{\xi}^{p}$,

6° $\underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{q} = -\gamma_{413}\underset{4}{\xi}^{q}$,

7° $\underset{2}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{4}{\xi}^{\beta} - \underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{2}{\xi}^{\beta} = -\gamma_{142}\underset{2}{\xi}^{\beta} + \gamma_{414}\underset{4}{\xi}^{\beta} - \gamma_{242}\underset{1}{\xi}^{\beta} + \gamma_{424}\underset{3}{\xi}^{\beta}$,

8° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{2}{\xi}^{\beta} = \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{2}{\xi}^{\beta} - \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{(\lambda - f_\sigma)^2}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta} - \gamma_{41\sigma}\underset{4}{\xi}^{\beta} - \gamma_{42\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta}$,

9° $\underset{3}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{4}{\xi}^{\beta} - \underset{4}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{3}{\xi}^{\beta} = -\gamma_{143}\underset{2}{\xi}^{\beta} + \gamma_{144}\underset{1}{\xi}^{\beta} - \gamma_{243}\underset{1}{\xi}^{\beta}$,

10° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{3}{\xi}^{\beta} = \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta} - \gamma_{14\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta}$,

11° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{4}{\xi}^{\beta} = \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{\lambda - f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{4}{\xi}^{\beta} - \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{(\lambda - f_\sigma)^2}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{3}{\xi}^{\beta} - \gamma_{14\sigma}\underset{2}{\xi}^{\beta} - \gamma_{24\sigma}\underset{1}{\xi}^{\beta}$,

12° $\underset{\beta}{\xi}^{\alpha}\partial_\alpha\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma} = 0$,

13° $\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\partial_\sigma\underset{\tau}{\xi}^{\tau} = \frac{1}{2}\frac{f'_\sigma}{f_\tau - f_\sigma}\underset{\sigma}{\xi}^{\sigma}\underset{\tau}{\xi}^{\tau}, \quad (\tau \neq \sigma)$,

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 3$, $q = 2, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$, $f_\tau = f_\tau(x_\tau), f_\sigma = f_\sigma(x_\sigma)$ — произвольные функции указанных переменных.

Интегрируя 12° и 13°, после координатного преобразования $x^5, x^6$ найдем

$$
\underset{5}{\xi}^{5} = (f_6 - f_5)^{-1/2}, \quad \underset{6}{\xi}^{6} = (f_5 - f_6)^{-1/2}.
$$

Дифференцируя $g^{\alpha\beta} = \sum\limits_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi^\alpha} \underset{\tilde{h}}{\xi^\beta}$ по $x^p$ $(p = 1, 3)$, с учетом уравнений $1^\circ - 3^\circ$ и $5^\circ - 7^\circ$, найдем $\partial_p g^{\alpha\beta} = 0$.

Дифференцируя $g^{\alpha\beta}$ по $x^\sigma$ $(\sigma = 5, 6)$, из уравнений $4^\circ$, $8^\circ$, $10^\circ$, $11^\circ$, получим

$$\partial_\sigma g^{pr} = -\frac{f'_\sigma}{f_\sigma - \lambda} g^{pr} - \frac{f'_\sigma}{(f_\sigma - \lambda)^2} \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}, \quad \partial_\sigma g^{pq} = -\frac{f'_\sigma}{f_\sigma - \lambda} g^{pq},$$

где $p, r = 1, 3$, $q = 2, 4$.

Проинтегрировав эти уравнения, найдем

$$g^{pr} = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1} (\Sigma + F^{pr}), \quad g^{pq} = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1} F^{pq},$$

где $F^{pr}, F^{pq}$ — произвольные функции переменных $x^2, x^4$, $\Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}$, $\sum_\sigma$ — означает суммирование по $\sigma$, $\Pi_\sigma$ — означает произведение по $\sigma$.

Выполнив подобные вычисления для $h$-пространства типа $[(221)1]$, после удачно подобранных координатных преобразований, в итоге получим

$$\begin{gathered} g_{ij} dx^i dx^j = \Pi_\sigma (f_\sigma - \lambda) \{2 g_{12} dx^1 dx^2 - e_2 (\Sigma + \theta_1)(dx^2)^2 + \\ + 2 g_{34} dx^3 dx^4 - e_4 (\Sigma + \theta_2)(dx^4)^2 + G\} + \sum_\sigma e_\sigma (f_\tau - f_\sigma)(dx^\sigma)^2, \end{gathered} \tag{41}$$

$$\begin{gathered} a_{ij} dx^i dx^j = \lambda (g_{st} dx^s dx^t + G) + \\ g_{12} (dx^2)^2 + g_{34} (dx^4)^2 + \sum_\sigma f_\sigma g_{\sigma\sigma} (dx^\sigma)^2 + G, \end{gathered} \tag{42}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + (\sum_\sigma f_\sigma + c) g_{ij}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_\sigma f_\sigma + c. \tag{43}$$

$$\Sigma = \sum_\sigma (f_\sigma - \lambda)^{-1}, \tag{44}$$

$$G = 2 e_5 \{1 + \theta_3 (f_6 - \lambda)\} dx^4 dx^5 + (f_6 - \lambda) g_{55} (dx^5)^2 + e_6 (dx^6)^2, \tag{45}$$

где $\lambda, c$ — постоянные. Здесь для $h$-пространства типа $[(22)11]$ $\tau, \sigma = 5, 6$ $(\tau \neq \sigma)$, $s, t = 1, 2, 3, 4$, $G = 0$, $g_{st}, \theta_1, \theta_2$ — произвольные функции переменных $x^2, x^4$, $f_\sigma$ — произвольная функция переменного $x^\sigma$. Для $h$-пространства типа $[(221)1]$ $\sigma = 6$, $s, t = 1, 2, 3, 4, 5$, $g_{st}, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ — произвольные функции переменных $x^2, x^4, x^5$, $f_\tau = \lambda$, $f_6$ — произвольная функция переменного $x^6$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** *Если симметрический тензор $h_{ij}$ типов* $[(22)11]$, $[(221)1]$ *и функция $\varphi$ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнению Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция $\varphi$ и тензоры $g_{ij}$, $h_{ij}$ определяются формулами* (41)–(45).

## 5. Метрики $h$-пространств типов $[(2211)]$, $[(22)(11)]$, $[(21)(21)]$

Во всех этих случаях функция $\varphi = const$, следовательно, в силу равенства (6) тензор $h_{ij}$ является ковариантно постоянным. Опуская дальнейшие выкладки, сводящиеся к интегрированию уравнений относительно $\underset{i}{\xi^j}$ вместе с удачно подобранными координатными преобразованиями, получим

для $h$-пространства типа $[(2211)]$:

$$g_{ij} dx^i dx^j = 2 g_{12} dx^1 dx^2 - e_2 \theta (dx^2)^2 + 2 g_{34} dx^3 dx^4 + g_{rq} dx^r dx^q, \tag{46}$$

$$a_{ij} dx^i dx^j = \lambda g_{ij} dx^i dx^j + g_{12} (dx^2)^2, \tag{47}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + c g_{ij}, \tag{48}$$

где $r, q = 5, 6$, $\lambda, c$ — постоянные, $\theta, g_{12}, g_{34}, g_{rq}$ — произвольные функции переменных $x^2, x^4, x^5, x^6$;

для $h$-пространства типа [(22)(11)]:

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_2\{2dx^1dx^2 - \theta(dx^2)^2\} + e_4\{2dx^3dx^4 - \omega(dx^4)^2\} + g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau, \tag{49}$$

$$\begin{gathered} a_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1\{g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + \\ + e_2(dx^2)^2 + g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + e_4(dx^4)^2\} + \lambda_2 g_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau, \end{gathered} \tag{50}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij}, \tag{51}$$

где $\theta, \omega$ — произвольные функции переменных $x^2, x^4$, $g_{\sigma\tau}$ — произвольные функции переменных $x^5, x^6$, $\lambda_1, \lambda_2, c$ — постоянные, здесь $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i_1, j_1 = 1, 2$, $i_2, j_2 = 3, 4$, $\sigma, \tau = 5, 6$;
для $h$-пространства типа [(21)(21)]:

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = e_2\{2dx^1dx^2 - \theta(dx^2)^2\} + \\ + e_3(dx^3)^2 + e_5\{2dx^4dx^5 - \omega(dx^5)^2\} + e_6(dx^6)^2, \end{gathered} \tag{52}$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + e_2(dx^2)^2 + \lambda_2 g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2} + e_5(dx^5)^2, \tag{53}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij}, \tag{54}$$

где $\theta$ — произвольная функция переменных $x^2, x^3$, $\omega$ — произвольная функция переменных $x^5, x^6$, $\lambda_1, \lambda_2, c$ — постоянные, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $i_1, j_1 = 1, 2, 3$, $i_2, j_2 = 4, 5, 6$.

Резюмируем результат этого параграфа в виде следующей теоремы.

**Теорема 4.** *Если тензор $h_{ij}$ типов* [(2211)], [(22)(11)], [(21)(21)] *и функция $\varphi$ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнению Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой функция $\varphi$ и тензоры $g_{ij}$, $h_{ij}$ определяются формулами* (46)–(54).

## 6. Первые квадратичные интегралы уравнений геодезических $h$-пространств типов $[(21\ldots1)(21\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$

Каждому решению $h_{ij}$ уравнения (6) соответствует первый квадратичный интеграл уравнений геодезических (см. [8])

$$(h_{ij} - 4\varphi g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j = \text{const}, \tag{55}$$

где $\dot{x}^i$ — касательный вектор геодезической.

Следовательно, первые квадратичные интегралы уравнений геодезических $h$-пространств типов $[(21\ldots1)(21\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$ определяются формулой (55), где тензоры $h_{ij}$, $g_{ij}$ и функция $\varphi$ указаны в теоремах 1-4.

## 7. Заключение

В данной работе мы нашли небольшой класс 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[++----]$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования, в частности, мы нашли метрики $h$-пространств типов [22(11)], [2(21)1],[2(211)], [(22)11], [(221)1], [(2211)], [(22)(11)], [(21)(21)] и затем определили первые квадратичные интегралы уравнений геодезических этих $h$-пространств. Отметим, что полученные результаты легко обобщаются в случае $n$-мерного псевдориманова пространства с сигнатурой $[++----...--]$.

Определение метрик всех $h$-пространств, перечисленных во введение, полностью решит задачу о нахождение 6-мерных псевдоримановых пространств с сигнатурой $[++----]$, допускающих негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования или проективные движения. Эта задача была полностью решена автором в кандидатской диссертации [9].

Следующая задача — это исследование проективно-групповых свойств рассматриваемых пространств. Здесь остается открытой проблема о восстановлении векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование и проблема о структуре проективной алгебры Ли. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения Киллинга.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия* // М.: Эдиториал УРСС,1998, 278 с.

[2] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия* М.:ИЛ, 1948, 316 с.

[3] M.G. Konigs *Lecons sur la theorie generalle des surfaces* // Appl. II to G. Darboux. IV. (1896), P. 368.

[4] Петров А.З. *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики* // Уч. зап. Казан. ун-та. 1949. Т. 109, № 3. С. 7–36.

[5] Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // Успехи Мат.Наук **48** (1993), 2(290), С. 107–164.

[6] G. Fubini *Sui gruppi transformazioni geodetiche* // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903, Vol. 53, № 2, P. 261–313.

[7] Солодовников А.С. *Проективные преобразования римановых пространств* // Успехи Мат.Наук, 1956, № 11, P. 45–116.

[8] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // Успехи Мат.Наук **50** (1995), 1(301). С. 69–142.

[9] Закирова З.Х. *Проективно-групповые свойства 6-мерных теорий типа Калуцы-Клейна* // Кандидатская диссертация, КГУ, 2001, с. 129.

[10] Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах* // Изв. Казанск. физ.-мат. общ., 1925 (25), № 2. С. 86–114.

[11] Закирова З.Х. *6-мерные h-пространства специального типа* //Междунар. геом. семин. им. Н.И. Лобачевского, Казань, 4-6 февр., 1997: Тез. докл.- Казань. 1997. с.52.

[12] Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [51]* // Труды геом. семинара: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Казань, 23. 1997. С. 57–64.

[13] Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических h-пространств типа [411]* // Изв. вузов. Матем. 1999, № 9(448). С. 78–79.

[14] Закирова З.Х. *Жесткие 6-мерные h-пространства постоянной кривизны* // Теоретическая и математическая физика. 158(3): 293-–299 (2009).

[15] Закирова З.Х. *Метрики 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]* // Краткие сообщения по физике ФИАН. Т. 38, № 9 . 2011. С. 270–274.

[16] Аминова А.В. *О косоортогональных реперах и некоторых свойствах параллельных тензорных полей на римановых многообразиях* // Изв. вузов. Матем. 1982, № 6. С. 63-–67.

[17] Аминова А.В. *О подвижном косоортогональном репере и одном типе проективных движений римановых многообразий* // Изв. вузов. Матем. 1982, № 9. С. 69-–74.



Зольфира Хаписовна Закирова,
Казанский Государственный Энергетический Университет,
ул. Красносельская, 51,
420066, г. Казань, Россия
E-mail: zolya_zakirova@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 54-66.

УДК 517.956.4

# ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ЛИ ТОЧЕЧНОЙ ГРУППЫ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ БЕЗ ИСТОЧНИКА

**А.М. ИЛЬЯСОВ**

**Аннотация.** В работе построена оптимальная система подалгебр девятимерной алгебры Ли инфинитезимальных операторов точечной группы симметрии нелинейного уравнения теплопроводности с изотропным тензором теплопроводности со степенной зависимостью от температуры. Результаты представлены в виде леммы и теоремы. Доказано, что с точностью до преобразований внутренних автоморфизмов и некоторых дискретных автоморфизмов существует 117 классов не подобных подалгебр различной размерности.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение теплопроводности, алгебра Ли, оптимальная система подалгебр.

**Mathematics Subject Classification:** 35K59.

## 1. Введение

Замкнутая система уравнений изотропной пространственной нестационарной фильтрации однофазной жидкости в сильно сцементированном пористом пласте [1] с параметрами флюида и скелета породы, зависящими от порового давления, подходящей заменой переменных приводится к нелинейному трехмерному уравнению теплопроводности с коэффициентами, имеющими степенную зависимость от температуры, и источником, зависящим от градиента температуры. Если пренебречь в уравнениях фильтрации гравитационными силами, то данное уравнение сводится к нелинейному уравнению теплопроводности без источника

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_3}\right). \tag{1}$$

В работе [2] выполнена групповая классификация пространственного нелинейного уравнения теплопроводности с источником, зависящим только от температуры в случаях анизотропной, трансверсально-изотропной и изотропной теплопроводности.

Как показано в работе [2], в интересующем нас случае изотропной теплопроводности, который соответствует распространенной модели изотропной пористой среды, ядро основных групп состоит из переносов вдоль осей координат четырехмерного пространства-времени и вращений вокруг осей координат. Этому ядру соответствует семимерная алгебра Ли инфинитезимальных операторов. В этой же работе показано, что в случае отсутствия источника и степенной зависимости коэффициентов уравнения от температуры алгебра Ли $L_7$ расширяется до девятимерной алгебры $L_9$ с базисом ($\sigma \neq 0$):

$$\begin{gathered}
X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_4 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \\
X_5 = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_6 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_7 = \frac{\partial}{\partial t}, \\
X_8 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3},
\end{gathered} \tag{2}$$

A.M. Ilyasov, Optimal system of Lie algebra subalgebras of the point symmetries group for nonlinear heat equation without source.

© Ильясов А.М. 2013.

*Поступила 9 января 2013 г.*

$$X_9 = \sigma\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma\, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, к операторам переноса и вращениям добавляются операторы одновременного растяжения по пространству-времени, а также совместного растяжения по пространственным переменным и зависимой переменной.

Далее, с выбранным базисом (2) будет построена оптимальная система подалгебр (ОСП) алгебры Ли $L_9$. Линейные преобразования для построения оптимальной системы рассматриваются над полем действительных чисел, так как нас интересуют действительные групповые решения уравнения (1).

## 2. Группа внутренних автоморфизмов алгебры Ли $L_9$

Вычислим сначала коммутаторы базисных операторов алгебры $L_9$. По определению, коммутатором базисных операторов (2) $X_i$ и $X_j$, $\quad i,j = 1,...,9$ называется оператор [3]:

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i, \quad i,j = 1,...,9. \tag{3}$$

Вычисления по формуле (3) представлены в табл. 1 коммутаторов операторов алгебры $L_9$. Для краткости в таблице операторы заменены их номерами. Например, $-(\sigma)1$ означает $-\sigma\, X_1$. В таблице 1 в первых столбце и строке стоят базисные операторы, а на их пересечении — значения их коммутаторов.

Табл. 1

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | –2 | 0 | 1 | $(\sigma)1$ |
| **2** | 0 | 0 | 0 | –3 | 0 | 1 | 0 | 2 | $(\sigma)2$ |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 2 | –1 | 0 | 0 | 3 | $(\sigma)3$ |
| **4** | 0 | 3 | –2 | 0 | 6 | –5 | 0 | 0 | 0 |
| **5** | –3 | 0 | 1 | –6 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| **6** | 2 | –1 | 0 | 5 | –4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **7** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | (2)7 | 0 |
| **8** | –1 | –2 | –3 | 0 | 0 | 0 | –(2)7 | 0 | 0 |
| **9** | $-(\sigma)1$ | $-(\sigma)2$ | $-(\sigma)3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Произвольный элемент алгебры $L_9$ в базисе (2) запишем в виде $X = x^i X_i$, $(i = 1,...,9)$. Обозначим через $P_1(x) = (x^1, x^2, x^3)$ и $P_2(x) = (x^4,\ x^5,\ x^6)$ проекции координатного вектора $\vec{x}$ для элемента $X$. Тогда, согласно введенным обозначениям, координатный вектор произвольного одномерного оператора алгебры $L_9$ можно представить в виде:

$$\vec{x} = (P_1(x),\, P_2(x),\, x^7,\, x^8,\, x^9). \tag{4}$$

Пусть $X' = x'^i X_i$, $(i = 1,...,9)$ – некоторый оператор алгебры $L_9$ в базисе (2) и $Y \in L_9$ – другой инфинитезимальный оператор, записанный в том же базисе. Вычислим группу внутренних автоморфизмов алгебры $L_9$. Для любого оператора $Y \in L_9$ однопараметрическая группа внутренних автоморфизмов является решением задачи [3]:

$$\frac{\partial X'}{\partial a} = [X', Y], \quad X'(0) = X. \tag{5}$$

Как показано в [3], для вычисления всех внутренних автоморфизмов достаточно вычислить однопараметрические группы внутренних автоморфизмов для базисных операторов. Таким образом, внутренние автоморфизмы вычисляются из решения уравнений

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a_j} X_i = x'^i [X_i, X_j], \quad x'^i(0) = x^i, \quad i,j = 1,...,9, \tag{6}$$

где в (5) вместо оператора $Y$ последовательно берутся базисные операторы $X_j$.

Пусть $Y = X_1$, тогда из (6) и таблицы коммутаторов имеем:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a_1} X_i = x'^i [X_i, X_1] = -x'^5 X_3 + x'^6 X_2 - x'^8 X_1 - x'^9 \sigma\, X_1, \quad x'^i(0) = x^i,\ \ i = 1,...,9$$

или следующую задачу Коши для системы ОДУ для определения координат $x'^i$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'^1}{\partial a_1} = -x'^8 - \sigma x'^9, \quad \dfrac{\partial x'^2}{\partial a_1} = x'^6, \quad \dfrac{\partial x'^3}{\partial a_1} = -x'^5, \quad \dfrac{\partial x'^i}{\partial a_1} = 0, \\ \\ x'^1(0) = x^1, \quad x'^2(0) = x^2, \quad x'^3(0) = x^3, \quad x'^i(0) = x^i, \quad i = 4, ..., 9, \end{cases}$$

отсюда получаем следующее решение этой задачи:

$$\begin{cases} x'^1 = -(x^8 + \sigma x^9)a_1 + x^1, \\ x'^2 = x^6 a_1 + x^2, \\ x'^3 = -x^5 a_1 + x^3, \\ x'^i = x^i, \quad i = 4, ..., 9. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично (7), из (6) и таблицы коммутаторов 1 получим однопараметрические группы для операторов $Y = X_2$ и $Y = X_3$. Легко показать, что композиция полученных однопараметрических групп автоморфизмов определяет трехпараметрическое преобразование проекции $P_1(x)$.

$$\Gamma : P_1(x') = P_1(x) + P_2(x) \times \vec{\alpha} - (x^8 + \sigma\, x^9)\, \vec{\alpha},$$

где через $x'$ обозначены преобразованные координаты; $\vec{\alpha} = (a_4, a_5, a_6)$ – параметрический вектор, а «$\times$» – знак векторного произведения.

Далее, из (6) находим однопараметрическую группу внутренних автоморфизмов алгебры Ли $L_9$ для оператора $Y = X_4$, которая представляет собой одновременные вращения вокруг осей $Ox^1$ и $Ox^4$:

$$\begin{cases} x'^2 = \sin a_4 \cdot x^3 + \cos a_4 \cdot x^2, \\ x'^3 = \cos a_4 \cdot x^3 - \sin a_4 \cdot x^2, \\ x'^5 = \sin a_4 \cdot x^6 + \cos a_4 \cdot x^5, \\ x'^6 = \cos a_4 \cdot x^6 - \sin a_4 \cdot x^5, \\ x'^i = x^i, \quad i = 1, 4, 7, 8, 9. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогично (8), при $Y = X_5$ из (6) получим группу одновременных вращений вокруг осей $Ox^2$ и $Ox^5$, а при $Y = X_6$ – группу одновременных вращений вокруг осей $Ox^3$ и $Ox^6$. Композиция однопараметрических групп вращений определяет трехпараметрические преобразования поворотов $O$ проекций $P_1(x)$ и $P_2(x)$ по формулам:

$$P_1(x') = OP_1(x), \quad P_2(x') = OP_2(x), \quad OO^T = I, \quad \det O = 1.$$

При $Y = X_7$ из (6) получается преобразование, для которого введем обозначение

$$\Pi : \quad x'^7 = -2\,a_7 x^8 + x^7.$$

При $Y = X_8$ получается однопараметрическая группа одновременного растяжения проекции $P_1(x)$ и координаты $x^7$. Для данного преобразования введем обозначение

$$R_1 : \quad P_1(x') = a_8 P_1(x), \quad x'^7 = a_8^2 x^7.$$

Из (6) при $Y = X_9$ вычисляется однопараметрическая группа однородных растяжений проекций $P_1(x)$, для которой введем обозначение

$$R_2 : \quad P_1(x') = a_9 P_1(x).$$

Композиция полученных групп преобразований образует 9: параметрическую группу внутренних автоморфизмов.

Рассмотрим, как внутренние автоморфизмы действуют на различные координатные проекции вектора $\vec{x}$ (4). На проекции координатного вектора $\vec{x}$ действуют следующие группы автоморфизмов: на проекции $P_2$ действуют только повороты $O$; на проекции $P_1$ действуют повороты $O$, преобразование $\Gamma$, а также растяжения $R_1$ и $R_2$; координата $x^7$ изменяется только при преобразовании $\Pi$ и растяжении $R_1$; на проекцию, задаваемую координатами $x_8, x_9$, никакие внутренние автоморфизмы не действуют.

Кроме того, из рассмотрения табл. 1 заметим следующие дискретные автоморфизмы:

$$\varepsilon_1 : \quad P_1(x') = -P_1(x),$$

$$\varepsilon_2 : \quad x'^7 = -x^7.$$

## 3. Оптимальные системы подалгебр

В работе [4] описан алгоритм вычисления оптимальной системы подалгебр произвольной алгебры Ли и приведены примеры вычисления некоторых подалгебр конечномерных алгебр линейного одномерного уравнения теплопроводности, уравнений газовой динамики и уравнений движения изотропной несжимаемой жидкости с коэффициентами вязкости и теплопроводности, зависящими от температуры. Для моделей газовой динамики обзор построенных оптимальных систем подалгебр приведен в работе [5]. Применим данный алгоритм для вычисления оптимальной системы подалгебр алгебры $L_9$ пространственного нелинейного уравнения теплопроводности без источника с изотропным тензором теплопроводности, имеющим степенную зависимость от температуры.

Рассмотрим табл. 1 коммутаторов базисных операторов алгебры $L_9$. Из таблицы видно, что четырехмерное подпространство, натянутое на векторы базиса $\{X_1, X_2, X_3, X_9\}$, является идеалом $J_4$ алгебры $L_9$, а пятимерное подпространство, натянутое на векторы $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$, является подалгеброй $L_5$ алгебры $L_9$. В свою очередь, подалгебру $L_5$ можно разложить в прямую сумму своих идеалов $J_{51} = \{X_4, X_5, X_6\}$ и $J_{52} = \{X_7, X_8\}$. Таким образом, справедливо разложение:

$$L_9 = L_5 \overset{\bullet}{\oplus} J_4 = (J_{51} \oplus J_{52}) \overset{\bullet}{\oplus} J_4. \tag{9}$$

Обозначим координаты оператора одномерных подалгебр через $x^i$, двумерных подалгебр – $x^i$, $y^i$, трехмерных подалгебр – $x^i$, $y^i$, $z^i$, четырехмерных подалгебр – $x^i$, $y^i$, $z^i$, $w^i$ и т.д.

## 4. Оптимальная система подалгебр алгебры $L_5$

Вычислим оптимальную систему подалгебр алгебры $L_5$. Согласно разложению (9) алгебра является прямой суммой своих идеалов $J_{51}$ и $J_{52}$:

$$L_5 = \{X_4, X_5, X_6\} \oplus \{X_7, X_8\} = J_{51} \oplus J_{52} \tag{10}$$

Используя алгоритм, описанный в работе [4], вычислим сначала ОСП идеала $J_{51}$, а затем согласно (10) будем прибавлять к каждому оператору из ОСП идеала $J_{51}$ (в том числе и к нулевому оператору) линейную комбинацию базисных операторов идеала $J_{52}$, дополняющую операторы из ОСП идеала $J_{51}$ до операторов из алгебры $L_5$. Далее, с помощью внутренних автоморфизмов приведем операторы подалгебр из $L_5$ к наиболее простому виду (сделать минимум произвольных координат операторов). Таким способом найдем ОСП алгебры $L_5$, каждый представитель которой имеет своей проекцией одну из подалгебр ОСП идеала $J_{51}$ или нулевую проекцию.

Сначала найдем ОСП идеала $J_{51}$. Одномерная подалгебра – это произвольный оператор из идеала $J_{51}$, базисный оператор которого имеет вид $X = x^4X_4 + x^5X_5 + x^6X_6$. Данный оператор можно представить в виде матрицы-строки для координат базисного оператора $\begin{pmatrix} x^4 & x^5 & x^6 \end{pmatrix}$. Применив преобразование поворота $O$ и замену базиса, получим $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если $\varepsilon = 0$, то получим нулевую подалгебру, а если $\varepsilon = 1$ – одномерную подалгебру $\{X_4\}$.

Далее рассмотрим произвольную двумерную подалгебру идеала $J_{51}$, которую можно представить в виде матрицы для координат базисных операторов $\begin{pmatrix} x^4 & x^5 & x^6 \\ y^4 & y^5 & y^6 \end{pmatrix}$. Применив преобразование $O$ и замену базиса, матрицу приведем к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Однако для такого базиса не выполняется условие подалгебры $[X_4, X_5] = X_6 \neq \lambda X_4 + \mu X_5$. Таким образом, двумерных подалгебр в ОСП идеала $J_{51}$ нет.

Базис трехмерной подалгебры из $J_{51}$ можно представить в виде действительной невырожденной матрицы $\begin{pmatrix} x^4 & x^5 & x^6 \\ y^4 & y^5 & y^6 \\ z^4 & z^5 & z^6 \end{pmatrix}$. Тогда с помощью замены базиса данную матрицу можно привести к единичной. Получим трехмерную подалгебру: $\{X_4, X_5, X_6\}$. Условие подалгебры выполняется. Итак, ОСП идеала $J_{51}$ состоит из трех подалгебр: одномерной, трехмерной и нулевой.

Далее, вычислим все подагебры из $L_5$, которые имеют нулевую проекцию в $J_{51}$. Одномерная подалгебра имеет матричное представление координат базисного оператора $\begin{pmatrix} x^7 & x^8 \end{pmatrix}$. Если $x^8 \neq 0$, то преобразование П делает $x^7 = 0$, а замена базиса приводит к подалгебре вида $\{X_8\}$.

Если $x^8 = 0$, то замена базиса приводит к подалгебре $\{X_7\}$. Итак, существуют 2 одномерные подалгебры в $L_5$ с нулевой проекцией в $J_{51}$.

Двумерная подалгебра с нулевой проекцией имеет вид $\{X_7, X_8\}$. Подалгебр размерности выше 2 с нулевой проекцией нет, т.к. операторы становятся линейно-зависимыми. Итак, в $L_5$ имеется нулевая, 2 одномерные и 1 двумерная подалгебры с нулевой проекцией в $J_{51}$.

Одномерная подалгебра в $L_5$ с проекцией $\{X_4\}$ в $J_{51}$ имеет матричное представление координат оператора $\begin{pmatrix} 1 & x^7 & x^8 \end{pmatrix}$. Если $x^8 \neq 0$, то преобразование $\Pi$ делает $x^7 = 0$, а замена базиса приводит к подалгебре $\{X_4 + \alpha X_8\}$. Если $x^8 = 0$, то преобразования $R_1$ и $\varepsilon_2$ приводят к подалгебре $\{X_4 + X_7\}$. Итак, имеются 2 одномерные подалгебры в $L_5$ с проекцией $\{X_4\}$ в $J_{51}$.

Двумерная подалгебра в $L_5$ с проекцией $\{X_4\}$ в $J_{51}$ имеет матричное представление координат операторов $\begin{pmatrix} 1 & x^7 & x^8 \\ 0 & y^7 & y^8 \end{pmatrix}$. Если $y^8 \neq 0$, то преобразование $\Pi$ делает $y^7 = 0$, замена базиса делает $y^8 = 1$, $x^8 = 0$, а преобразования $R_1$ и $\varepsilon_2$ приводят к подалгебре $\{X_4 + \varepsilon X_7, X_8;\ \varepsilon = 0, 1\}$. В случае $\varepsilon = 1$ условие подалгебры не выполняется, т.к. $[X_4 + X_7, X_8] = 2X_7 \neq \lambda(X_4 + X_7) + \mu X_8$. Если $\varepsilon = 0$, то получаем подалгебру $\{X_4, X_8\}$. Если $y^8 = 0$, то замена базиса делает $y^7 = 1$, $x^7 = 0$, что приводит к подалгебре $\{X_4 + \alpha X_8, X_7\}$. Итак, существуют 2 двумерные подалгебры в $L_5$ с проекцией $\{X_4\}$ в $J_{51}$.

Трехмерная подалгебра в $L_5$ с проекцией $\{X_4\}$ в $J_{51}$ только одна: $\{X_4, X_7, X_8\}$.

Трехмерная подалгебра в $L_5$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в $J_{51}$ имеет матричное представление координат операторов $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x^7 & x^8 \\ 0 & 1 & 0 & y^7 & y^8 \\ 0 & 0 & 1 & z^7 & z^8 \end{pmatrix}$. Вычислив всевозможные коммутаторы подалгебры, находим, что условие подалгебры выполняется тогда и только тогда, если $x^7 = y^7 = z^7 = x^8 = y^8 = z^8 = 0$. Т.е. получаем исходную проекцию $\{X_4, X_5, X_6\}$.

Четырехмерная подалгебра в $L_5$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в $J_{51}$ имеет матричное представление координат операторов

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x^7 & x^8 \\ 0 & 1 & 0 & y^7 & y^8 \\ 0 & 0 & 1 & z^7 & z^8 \\ 0 & 0 & 0 & w^7 & w^8 \end{pmatrix}$. Если $w^8 \neq 0$, то преобразование $\Pi$ делает $w^7 = 0$, замена базиса делает $w^8 = 1$, $x^8 = y^8 = z^8 = 0$, а условия подалгебры дают $x^7 = y^7 = z^7 = 0$ и приводят к подалгебре $\{X_4, X_5, X_6, X_8\}$. Если $w^8 = 0$, то замена базиса делает $w^7 = 1$, $x^7 = y^7 = z^7 = 0$, а условия подалгебры дают $x^8 = y^8 = z^8 = 0$. Приходим к подалгебре $\{X_4, X_5, X_6, X_7\}$.

Пятимерной подалгеброй в $L_5$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в $J_{51}$ является сама $L_5$. Таким образом, существует 1 трехмерная, 2 четырехмерные и 1 пятимерная подалгебра с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в $J_{51}$.

Итак, доказана следующая лемма.

**Лемма 1.** *Оптимальная система подалгебр алгебры Ли $L_5$ с коммутаторами из таблицы 1 с точностью до внутренних автоморфизмов и дискретных автоморфизмов $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ состоит из 12 классов неподобных подалгебр. Классы представлены в табл. 2*

Табл. 2

| r | i | Базис | r | i | Базис |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $4 + \alpha 8$ | 3 | 1 | 4, 5, 6 |
| | 2 | 4+7 | | 2 | 4, 7, 8 |
| | 3 | 7 | 4 | 1 | 4, 5, 6, 7 |
| | 4 | 8 | | 2 | 4, 5, 6, 8 |
| 2 | 1 | 4, 8 | 5 | 1 | 4, 5, 6, 7, 8 |
| | 2 | $4 + \alpha 8$; 7 | | | |
| | 3 | 7, 8 | | | |

В таблице r – размерность подалгебры; i – порядковый номер подалгебры в данной размерности; $\alpha$ – произвольная постоянная.

## 5. Оптимальная система подалгебр алгебры $L_9$

Далее, согласно (9) алгебра $L_9$ есть полупрямая сумма подалгебры $L_5$ и идеала $J_4$:

$$L_9 = L_5 \overset{\bullet}{\oplus} J_4 = \{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\} \overset{\bullet}{\oplus} \{X_1, X_2, X_3, X_9\}. \tag{11}$$

Действуя аналогично предыдущему, с помощью доказанной леммы можно построить ОСП алгебры $L_9$, взяв в качестве проекций в $L_5$ подалгебры из табл. 2 и добавляя к их операторам части операторов из идеала $J_4$.

Сначала определим ОСП идеала $J_4$, которая совпадает с подалгебрами из оптимальной системы алгебры $L_9$, имеющими нулевую проекцию на $L_5$. Одномерные подалгебры в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$ имеют матричное представление $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \end{pmatrix}$. Если $x^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(x) = 0$, а замена базиса дает подалгебру $\{X_9\}$. Если $x^9 = 0$, то поворот $O$ и замена базиса приводят к подалгебре $\{X_1\}$. Итак, имеется 2 одномерные подалгебры в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$: $\{X_1\}$ – подалгебра 1.1 в табл. 3 и $\{X_9\}$ – подалгебра 1.2 в табл. 3.

Двумерные подалгебры в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$ имеют матричное представление $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \end{pmatrix}$. Если $y^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(y) = 0$, а замена базиса делает $y^9 = 1$, $x^9 = 0$. Поворот $O$ делает $P_1(x) = \begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. После замены базиса получаем подалгебру $\{X_1, X_9\}$. Если $y^9 = 0$, то поворот $O$ делает $P_1(y) = \begin{pmatrix} y^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а замена базиса делает $y^1 = 1$, $x^1 = 0$. Далее, поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ дает $x^3 = 0$. Если $x^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(x) = 0$, а замена базиса дает $x^9 = 1$ и приходим к полученной выше подалгебре. Если $x^9 = 0$, то замена базиса делает $x^2 = 1$ и получаем подалгебру $\{X_1, X_2\}$. Итак, имеется 2 двумерные подалгебры в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$: $\{X_1, X_9\}$ – подалгебра 2.2 в табл. 3 и $\{X_1, X_2\}$ – подалгебра 2.1 в табл. 3.

Трехмерные подалгебры в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$ имеют матричное представление $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \end{pmatrix}$. Если $z^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(z) = 0$, а замена базиса делает $z^9 = 1$, $x^9 = y^9 = 0$. Поворот $O$ делает $P_1(y) = \begin{pmatrix} y^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Далее, поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ делает $x^3 = 0$, а замена базиса делает $y^1 = 1$. Получаем подалгебру $\{X_1, X_2, X_9\}$. Если $z^9 = 0$, то поворот $O$ делает $P_1(z) = \begin{pmatrix} z^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а замена базиса делает $z^1 = 1$, $x^1 = y^1 = 0$. Далее, поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$делает $x^3 = 0$, и матрица подалгебры принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & x^2 & 0 & x^9 \\ 0 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если $x^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $x^2 = 0$, а замена базиса дает $x^9 = 1$, $y^9 = 0$. Далее, поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ делает $y^3 = 0$, а замена базиса делает $y^2 = 1$. Приходим к полученной выше подалгебре. Если $x^9 = 0$, то замена базиса делает $x^2 = 1$, $y^2 = 0$. Если $y^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $y^3 = 0$ и снова получаем ту же подалгебру. Если $y^9 = 0$, то замена базиса делает $y^3 = 1$ и получаем подалгебру $\{X_1, X_2, X_3\}$. Итак, имеется 2 трехмерные подалгебры в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$: $\{X_1, X_2, X_9\}$ – подалгебра 3.2 в табл. 3 и $\{X_1, X_2, X_3\}$ – подалгебра 3.1 в табл. 3.

Четырехмерная подалгебра в $L_9$ с нулевой проекцией на $L_5$ совпадает с идеалом $J_4$ – подалгебра 4.1 в табл. 3.

Для того чтобы вычислить остальные подалгебры из ОСП алгебры $L_9$, необходимо согласно (11) к каждой подалгебре из леммы добавлять части операторов из идеала $J_4$. При этом одномерные проекции на подпространство $L_5$ будут иметь подалгебры Н размерности dim Н $= 1 \div 5$. Подалгебр более высоких размерностей с одномерными проекциями на подпространство $L_5$ не существует, т.к., операторы становятся линейно-зависимыми. Аналогично, двумерные проекции на подпространство $L_5$ имеют подалгебры Н размерности dim Н $= 2 \div 6$; трехмерные проекции имеют подалгебры размерности dim Н $= 3 \div 7$; четырехмерные проекции имеют подалгебры размерности dim Н $= 4 \div 8$; пятимерную проекцию имеют подалгебры размерности dim Н $= 5 \div 9$. В работе будут приведены примеры вычислений подалгебр всех размерностей в содержательных случаях. Результаты всех вычислений приводятся в табл. 3.

Рассмотрим одномерную подалгебру 1.1 из табл. 2. Одномерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство $L_5$ будут иметь следующее матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \end{pmatrix}$. Если $\alpha+\sigma x^9 \neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(x)=0$ и получаем следующую подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\ \beta\neq-\alpha/\sigma\}$. Если $\alpha+\sigma\, x^9=0$, то после замены параметра $\alpha/\sigma\to\alpha$ преобразование $\Gamma$ делает $P_1(x)=\begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и дает подалгебру $\{X_4+\sigma\,\alpha\, X_8+\varepsilon\, X_1-\alpha\, X_9\}$. Если $\varepsilon=0$, то эту подалгебру можно объединить с предыдущей. Получим подалгебру без ограничений на значение параметра $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9\}$. Если $\varepsilon=1$, то получаем следующую подалгебру $\{X_4+\ X_1+\alpha(\sigma\ X_8-\ X_9)\}$. Итак, имеется 2 одномерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на $L_5$: $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9\}$ – подалгебра 1.3 в табл. 3 и $\{X_4+\ X_1+\alpha(\sigma\ X_8-\ X_9)\}$ – подалгебра 1.4 в табл. 3.

Двумерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство $L_5$ будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \end{pmatrix}$. Если $y^9\neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(y)=0$, а замена базиса делает $y^9=1$, $x^9=0$. Поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ делает $x^3=0$, а из условия подалгебры $[X_4+\alpha\, X_8+x^1X_1+x^2X_2,\ X_9]=\sigma\, x^1X_1+\sigma\, x^2X_2=0$ следует, что это возможно при $x^1=x^2=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8,\, X_9\}$. Если $y^9=0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(x)=\begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$делает $y^3=0$. Далее, условие подалгебры дает $y^2=0$, а замена базиса делает $y^1=1$, $x^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\, X_1\}$. Итак, существуют 2 двумерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на $L_5$: $\{X_4+\alpha\, X_8,\, X_9\}$ – подалгебра 2.3 в табл. 3 и $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\, X_1\}$ – подалгебра 2.4 в табл. 3.

Трехмерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство $L_5$ будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \end{pmatrix}$. Если $z^9\neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(z)=0$, а замена базиса делает $z^9=1$, $x^9=y^9=0$. Поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ делает $x^3=0$. Условие подалгебры для коммутатора 1 и 2 операторов приводит к однородной системе уравнений $\begin{cases} y^2(\lambda+\alpha)+y^3=0 \\ y^2-(\lambda+\alpha)y^3=0 \end{cases}$ с определителем $\Delta=-(\lambda+\alpha)^2-1\neq 0$, откуда следует $y^2=y^3=0$. Замена базиса делает $y^1=1$, $x^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8,\ X_1,\, X_9\}$. Если $y^9\neq 0$, то, поменяв 2 последние строки местами, приходим к уже рассмотренному случаю. Если $y^9=z^9=0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(x)=\begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ делает $y^3=0$. Получаем следующее представление подалгебры $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & 0 & 0 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & 0 \end{pmatrix}$. Условие подалгебры для коммутатора 1 и 2 операторов приводит к системе уравнений $\begin{cases} \mu\, z^1=-(\lambda+\alpha+\sigma\, x^9)y^1 \\ \mu\, z^2=-(\lambda+\alpha+\sigma\, x^9)y^2 \\ \mu\, z^3=y^2 \end{cases}$.
Имеются 2 возможности. 1) $y^2\neq 0$. Из последнего уравнения системы следует $\mu\neq 0$, $z^3\neq 0$. Тогда замена базиса делает $y^2=1$, $z^2=0$, $z^3=1$ и из первого уравнения системы следует $z^1=0$. Из условия подалгебры для коммутатора 1 и 3 операторов следует $y^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8+\varepsilon\, X_1+\beta\, X_9,\, X_2,\, X_3\}$. Если $\varepsilon=0$, то имеем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\, X_2,\, X_3\}$. Если $\varepsilon=1$ и $\alpha+\sigma\,\beta\neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $x^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\, X_2,\, X_3;\ \beta\neq-\alpha/\sigma\}$, которая вкладывается в предыдущую. Если $\varepsilon=1$ и $\alpha+\sigma\,\beta=0$, то имеем подалгебру $\{X_4+\ X_1+\alpha(\sigma\ X_8-\ X_9),\ X_2,\ X_3\}$. 2) $y^2=0$. Замена базиса делает $y^1=1$, $x^1=z^1=0$, а из условия подалгебры для 1 и 3 операторов следует $z^2=z^3=0$. Т.е. в этом случае операторы линейно-зависимы. Итак, существуют 3 трехмерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на $L_5$: $\{X_4+\alpha\, X_8,\ X_1,\, X_9\}$ – подалгебра 3.3 в табл. 3, $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\, X_2,\, X_3\}$ – подалгебра 3.4 в табл. 3 и $\{X_4+\ X_1+\alpha(\sigma\ X_8-\ X_9),\ X_2,\ X_3\}$ – подалгебра 3.5 в табл. 3.

Четырехмерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство $L_5$ будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \end{pmatrix}$. Возможны два случая. 1) Если $w^9 \neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(w) = 0$, а замена базиса делает $w^9 = 1$, $x^9 = y^9 = z^9 = 0$. Поворот $O$ вокруг оси $Ox^1$ делает $z^3 = 0$. Далее, можно считать, что $z^2 = 1$, т.к. это можно сделать либо переменой местами операторов 2 и 3, либо заменой координат в операторе 3. Замена базиса делает $x^2 = y^2 = 0$. Условие подалгебры для коммутатора 1 и 3 операторов приводит к системе уравнений $\begin{cases} -\alpha\, z^1 = \gamma\, y^1 + \kappa\, z^1 \\ -\alpha = \kappa \\ 1 = \gamma\, y^3 \end{cases}$, откуда следует $y^1 = 0$, $y^3 \neq 0$. Далее, замена базиса делает $y^3 = 1$, $x^3 = 0$. Из условия подалгебры для коммутатора 1 и 4 операторов следует, что $x^1 = 0$. И, наконец, условие подалгебры для коммутатора 1 и 2 операторов приводит к системе уравнений $\begin{cases} \mu\, z^1 = 0 \\ -\alpha = \lambda \\ -1 = \mu \end{cases}$, откуда следует $z^1 = 0$. Т.о. получаем подалгебру $\{X_4 + \alpha\, X_8,\, X_3,\, X_2,\, X_9\}$. 2) Если $y^9 = z^9 = w^9 = 0$, то операторы подалгебры линейно-независимы, если выполняются неравенства: $y^1 \neq 0$, $z^2 \neq 0$, $w^3 \neq 0$. Тогда замена базиса приводит к подалгебре $\{X_4 + \alpha\, X_8 + \beta\, X_9,\, X_1,\, X_2,\, X_3\}$. Итак, существуют 2 четырехмерные подалгебры в $L_9$ с проекцией$\{X_4+\alpha X_8\}$ на $L_5$: $\{X_4 + \alpha\, X_8,\, X_3,\, X_2,\, X_9\}$ – подалгебра 4.2 в табл. 3 и подалгебра 4.3 в табл. 3: $\{X_4 + \alpha\, X_8 + \beta\, X_9,\, X_1,\, X_2,\, X_3\}$.

Пятимерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство $L_5$ будут иметь невырожденное матричное представление

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \end{pmatrix}.$$

Операторы подалгебры линейно-независимы, если выполняются неравенства: $y^1 \neq 0$, $z^2 \neq 0$, $w^3 \neq 0$, $s^9 \neq 0$. Тогда замена базиса приводит к подалгебре $\{X_1, X_2, X_3, X_9\}$. Т.о., имеется 1 пятимерная подалгебра в $L_9$ с проекцией $X_4 + \alpha X_8$ на $L_5$: $X_4 + \alpha X_8, X_1, X_2, X_3, X_9$ – подалгебра 5.1 в табл. 3.

Далее рассмотрим пятимерную подалгебру 5.1 из табл. 2. Шестимерные подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство $L_5$ будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^9 \end{pmatrix}$. Условия подалгебры для коммутаторов первых 3 операторов друг с другом дают $x^9 = y^9 = z^9 = 0$. Имеется 2 возможности. 1) Если $t^9 \neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(t) = 0$, а замена базиса делает $t^9 = 1$, $w^9 = s^9 = 0$. Далее, условие подалгебры для коммутаторов 1 и 6 операторов дает $P_1(x) = 0$; 2 и 6 операторов дает $P_1(y) = 0$; 3 и 6 операторов дает $P_1(z) = 0$; 4 и 6 операторов дает $P_1(w) = 0$, а 5 и 6 операторов дает $P_1(s) = 0$. Получаем подалгебру $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9\}$. 2) Если $t^9 = 0$, то условие подалгебры для коммутаторов 1 и 6 операторов приводит к однородной системе с ненулевым детерминантом $\begin{cases} \lambda\, t^2 + t^3 = 0 \\ t^2 - \lambda\, t^3 = 0 \end{cases}$, откуда следует $t^2 = t^3 = 0$. Замена базиса делает $t^1 = 1$. Условие подалгебры для коммутаторов 2 и 6 операторов дает $[X_5 + y^1 X_1 + y^2 X_2 + y^3 X_3,\ X_1] = -X_3 = 0$, что невозможно. Т.о., во втором случае подалгебр нет. Итак, существует одна шестимерная подалгебра $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9\}$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство $L_5$ – подалгебра 6.7 в табл. 3.

Семимерной подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство $L_5$ не существует, т.к. не выполняются условия подалгебры. В качестве примера вычисления семимерной подалгебры возьмем подалгебру с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_8\}$ – подалгебру 4.2 из табл. 2 леммы. Ее матричное представление есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u^1 & u^2 & u^3 & u^9 \end{pmatrix}$. Условия подалгебры для коммутаторов первых трех операторов друг с другом дают $x^9 = y^9 = z^9 = 0$. Имеются 2 возможности. 1) Если $u^9 \neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(u) = 0$, а замена базиса делает $u^9 = 1$, $w^9 = s^9 = t^9 = 0$. Далее можно считать, что $t^2 = 1$, т.к. это можно сделать либо переменой местами операторов 5 и 6, либо заменой координат в операторе 6. Тогда замена базиса делает $s^2 = 0$, а условие подалгебры коммутатора 2 и 5 операторов приводит к однородной системе с ненулевым детерминантом $\begin{cases} \gamma\, s^1 - s^3 = 0 \\ s^1 + \gamma\, s^3 = 0 \end{cases}$, откуда следует $s^1 = s^3 = 0$. Т.е. операторы линейно-зависимы. 2) Если $s^9 = t^9 = u^9 = 0$, то операторы $5{\div}7$ подалгебры линейно-независимы, если $s^1 \neq 0,\ \ t^2 \neq 0,\ \ u^3 \neq 0$. Заменой базиса получаем подалгебру $\{X_4, X_5, X_6, X_8, X_1, X_2, X_3\}$. Итак, существует одна семимерная подалгебра $\{X_4, X_5, X_6, X_8, X_1, X_2, X_3\}$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_8\}$ на подпространство $L_5$ – подалгебра 7.4 в табл. 3.

Рассмотрим пример вычисления восьмимерной подалгебры в $L_9$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство $L_5$.

Матричное представление подалгебры имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^1 & u^2 & u^3 & u^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^1 & v^2 & v^3 & v^9 \end{pmatrix}$.

Условия подалгебры для коммутаторов первых трех операторов друг с другом дают $x^9 = y^9 = z^9 = 0$. Имеются 2 возможности. 1) Если $v^9 \neq 0$, то преобразование $\Gamma$ делает $P_1(v) = 0$, а замена базиса делает $v^9 = 1$, $w^9 = s^9 = t^9 = u^9 = 0$. Далее, как и выше, можно считать, что $u^2 = 1$. Тогда замена базиса делает $t^2 = 0$, а условие подалгебры коммутатора 2 и 6 операторов приводит к однородной системе с ненулевым детерминантом $\begin{cases} \chi\, t^1 - t^3 = 0 \\ t^1 + \chi\, t^3 = 0 \end{cases}$, откуда следует $t^1 = t^3 = 0$. Т.е. операторы линейно-зависимы. 2) Если $t^9 = u^9 = v^9 = 0$, то три последних оператора подалгебры линейно-независимы, если $t^1 \neq 0,\ \ u^2 \neq 0,\ \ v^3 \neq 0$. Замена базиса делает $P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P_1(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а также $P_1(x) = P_1(y) = P_1(z) = P_1(w) = P_1(s) = 0$. Далее, условие подалгебры коммутатора 4 и 5 операторов дает $[X_7 + w^9 X_9,\ X_8 + s^9 X_9] = 2X_7 = \omega(X_7 + w^9 X_9)$, откуда следует $w^9 = 0$. Т.о. получаем подалгебру 8.3 в табл. 3: $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 + \alpha\, X_9, X_1, X_2, X_3\}$.

Очевидно, что девятимерной подалгеброй с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство $L_5$ в $L_9$ является сама алгебра $L_9$, что достигается заменой базиса в соответствующем матричном представлении. Это – подалгебра 9.1 в табл. 3.

Аналогично, согласно (11) вычисляются подалгебры всевозможных размерностей из $L_9$ с проекциями на подпространство $L_5$ из табл. 2 леммы. При фиксированных параметрах некоторые подалгебры будут вкладываться в уже вычисленные подалгебры из оптимальной системы, а другие подалгебры будут самостоятельными представителями ОСП. Таким образом, вычисляется оптимальная система подалгебр алгебры $L_9$. Результатом вычислений будет следующая теорема.

**Теорема 1.** *Оптимальная система подалгебр алгебры Ли $L_9$ с коммутаторами из табл. 1 с точностью до внутренних автоморфизмов и дискретных автоморфизмов $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ состоит из 117 классов неподобных подалгебр, представленных в табл. 3, где $\alpha$, $\beta$ – произвольные постоянные; $\sigma \neq 0$ – показатель степени у коэффициентов уравнения* (1).

Табл. 3

| r | i | Базис | Проекция в $L_5$ |
|---|---|---|---|
| 9 | 1 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 | 5.1 |
| 8 | 1 | 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 9 | 4.1 |
| | 2 | 4, 5, 6, 8, 1, 2, 3, 9 | 4.2 |
| | 3 | $4, 5, 6, 7, 8+\alpha 9, 1, 2, 3$ | 5.1 |
| 7 | 1 | 4, 5, 6, 1, 2, 3, 9 | 3.1 |
| | 2 | 4, 7, 8, 1, 2, 3, 9 | 3.2 |
| | 3 | 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3 | 4.1 |
| | 4 | $4, 5, 6, 8+\alpha 9, 1, 2, 3$ | 4.2 |
| 6 | 1 | 4, 8, 1, 2, 3, 9 | 2.1 |
| | 2 | $4+\alpha 8, 7, 1, 2, 3, 9$ | 2.2 |
| | 3 | 7, 8, 1, 2, 3, 9 | 2.3 |
| | 4 | 4, 5, 6, 1, 2, 3 | 3.1 |
| | 5 | $4+\alpha 9, 7, 8+\beta 9, 1, 2, 3$ | 3.2 |
| | 6 | 4, 7, 8, 2, 3, 9 | 3.2 |
| | 7 | 4, 5, 6, 7, 8, 9 | 5.1 |
| 5 | 1 | $4+\alpha 8, 1, 2, 3, 9$ | 1.1 |
| | 2 | $4+7, 1, 2, 3, 9$ | 1.2 |
| | 3 | 7, 1, 2, 3, 9 | 1.3 |
| | 4 | 8, 1, 2, 3, 9 | 1.4 |
| | 5 | 4, 8, 2, 3, 9 | 2.1 |
| | 6 | $4+\alpha 9, 8+\beta 9, 1, 2, 3$ | 2.1 |
| | 7 | $4+\alpha 8, 7, 2, 3, 9$ | 2.2 |
| | 8 | $4+\alpha 8+\beta 9, 7, 1, 2, 3$ | 2.2 |
| | 9 | 7, 8, 2, 3, 9 | 2.3 |
| | 10 | $7, 8+\alpha 9, 1, 2, 3$ | 2.3 |
| | 11 | $4+\alpha 1+\beta 9, 7, \sigma 8-9, 2, 3; \quad \beta \neq 0$ | 3.2 |
| | 12 | $4+\alpha 9, 7, 8+\beta 9, 2, 3; \quad \beta \neq -1/\sigma$ | 3.2 |
| | 13 | $4+\alpha 1, 7, \sigma 8+\beta 1-9, 2, 3; \quad \alpha^2+\beta^2=1$ | 3.2 |
| | 14 | 4, 7, 8, 1, 9 | 3.2 |
| | 15 | $4, 7+1, \sigma 8+\alpha 1+9, 2, 3$ | 3.2 |
| | 16 | 4, 5, 6, 7, 9 | 4.1 |
| | 17 | 4, 5, 6, 8, 9 | 4.2 |
| | 18 | $4, 5, 6, 7, 8+\alpha 9$ | 5.1 |
| 4 | 1 | 1, 2, 3, 9 | 0 |
| | 2 | $4+\alpha 8, 2, 3, 9$ | 1.1 |
| | 3 | $4+\alpha 8+\beta 9, 1, 2, 3$ | 1.1 |
| | 4 | $4+7, 2, 3, 9$ | 1.2 |
| | 5 | $4+7+\alpha 9, 1, 2, 3$ | 1.2 |
| | 6 | 7, 1, 2, 9 | 1.3 |
| | 7 | $7+\alpha 9, 1, 2, 3$ | 1.3 |
| | 8 | 8, 1, 2, 9 | 1.4 |
| | 9 | $8+\alpha 9, 1, 2, 3$ | 1.4 |
| | 10 | 4, 8, 1, 9 | 2.1 |
| | 11 | $4+\alpha 9, 8+\beta 9, 2, 3$ | 2.1 |

| r | i | Базис | Проекция в $L_5$ |
|---|---|---|---|
| | 12 | $4+\alpha 1,\ \sigma 8+\beta 1-9,\ 2,\ 3;\quad \alpha^2+\beta^2=1$ | 2.1 |
| | 13 | $4+\alpha 8,\ 7,\ 1,\ 9$ | 2.2 |
| | 14 | $4+\alpha 9,\ 7+\beta 9,\ 2,\ 3;\quad \beta\neq 0$ | 2.2 |
| | 15 | $4+\alpha 1,\ 7+1,\ 2,\ 3$ | 2.2 |
| | 16 | $4+\alpha 8+\beta 9,\ 7,\ 2,\ 3$ | 2.2 |
| | 17 | $4+\alpha(\sigma 8-9)+1,\ 7,\ 2,\ 3$ | 2.2 |
| | 18 | $7,\ 8,\ 1,\ 9$ | 2.3 |
| | 19 | $7,\ 8+\alpha 9,\ 2,\ 3$ | 2.3 |
| | 20 | $7,\ 1+\sigma 8-9,\ 2,\ 3$ | 2.3 |
| | 21 | $7+1,\ \sigma 8+9,\ 2,\ 3$ | 2.3 |
| | 22 | $4,\ 5,\ 6,\ 9$ | 3.1 |
| | 23 | $4,\ 7,\ 8,\ 9$ | 3.2 |
| | 24 | $4+\alpha 9,\ 7,\ 8+\beta 9,\ 1$ | 3.2 |
| | 25 | $4,\ 5,\ 6,\ 7+\alpha 9$ | 4.1 |
| | 26 | $4,\ 5,\ 6,\ 8+\alpha 9$ | 4.2 |
| 3 | 1 | $1,\ 2,\ 3$ | 0 |
| | 2 | $1,\ 2,\ 9$ | 0 |
| | 3 | $4+\alpha 8,\ 1,\ 9$ | 1.1 |
| | 4 | $4+\alpha 8+\beta 9,\ 2,\ 3$ | 1.1 |
| | 5 | $4+1+\alpha(\sigma 8-9),\ 2,\ 3$ | 1.1 |
| | 6 | $4+7,\ 1,\ 9$ | 1.2 |
| | 7 | $4+7+\beta 9,\ 2,\ 3$ | 1.2 |
| | 8 | $4+7+1,\ 2,\ 3$ | 1.2 |
| | 9 | $7,\ 1,\ 9$ | 1.3 |
| | 10 | $7+\alpha 9,\ 3,\ 2$ | 1.3 |
| | 11 | $7+1,\ 3,\ 2$ | 1.3 |
| | 12 | $8,\ 1,\ 9$ | 1.4 |
| | 13 | $8+\alpha 9,\ 3,\ 2$ | 1.4 |
| | 14 | $8+1,\ 3,\ 2$ | 1.4 |
| | 15 | $4,\ 8,\ 9$ | 2.1 |
| | 16 | $4+\alpha 9,\ 8+\beta 9,\ 1$ | 2.1 |
| | 17 | $4+\alpha 8,\ 7,\ 9$ | 2.2 |
| | 18 | $4+\alpha 8+\beta 9,\ 7,\ 1$ | 2.2 |
| | 19 | $4+\alpha 9,\ 7+\beta 9,\ 1$ | 2.2 |
| | 20 | $7,\ 8,\ 9$ | 2.3 |
| | 21 | $7,\ 8+\alpha 9,\ 1$ | 2.3 |
| | 22 | $7+2,\ \sigma 8+9,\ 1$ | 2.3 |
| | 23 | $7,\ \sigma 8+2-9,\ 1$ | 2.3 |
| | 24 | $4,\ 5,\ 6$ | 3.1 |
| | 25 | $4,\ 7+\alpha 1,\ \sigma 8+9;\ \alpha\neq 0$ | 3.2 |
| | 26 | $4+\alpha 9,\ 7,\ 8+\beta 9$ | 3.2 |
| 2 | 1 | $1,\ 2$ | 0 |
| | 2 | $1,\ 9$ | 0 |
| | 3 | $4+\alpha 8,\ 9$ | 1.1 |
| | 4 | $4+\alpha 8+\beta 9,\ 1$ | 1.1 |
| | 5 | $4+7,\ 9$ | 1.2 |
| | 6 | $4+7+\alpha\, 9,\ 1$ | 1.2 |
| | 7 | $7,\ 9$ | 1.3 |
| | 8 | $7+\alpha\, 9,\ 1$ | 1.3 |
| | 9 | $7+2,\ 1$ | 1.3 |

| r | i | Базис | Проекция в $L_5$ |
|---|---|---|---|
| | 10 | $8,\ 9$ | 1.4 |
| | 11 | $8+\alpha 9,\ 1$ | 1.4 |
| | 12 | $8+2,\ 1$ | 1.4 |
| | 13 | $4+\alpha 9,\ 8+\beta 9$ | 2.1 |
| | 14 | $4+\alpha 1,\ \sigma 8+\beta 1-9;\ \alpha^2+\beta^2=1$ | 2.1 |
| | 15 | $4+\alpha 8+\beta 9,\ 7$ | 2.2 |
| | 16 | $4+\alpha 9,\ 7+\beta 9;\ \beta\neq 0$ | 2.2 |
| | 17 | $4+1+\alpha(\sigma 8-9),\ 7$ | 2.2 |
| | 18 | $4+\alpha(\sigma 8+9),\ 7+1;\ \alpha\neq 0$ | 2.2 |
| | 19 | $4+\alpha 1,\ 7+1$ | 2.2 |
| | 20 | $7,\ 8+\alpha 9$ | 2.3 |
| | 21 | $7+1,\ \sigma 8+9$ | 2.3 |
| | 22 | $7,\ \sigma 8+1-9$ | 2.3 |
| 1 | 1 | $1$ | 0 |
| | 2 | $9$ | 0 |
| | 3 | $4+\alpha 8+\beta 9$ | 1.1 |
| | 4 | $4+1+\alpha(\sigma 8-9)$ | 1.1 |
| | 5 | $4+7+1$ | 1.2 |
| | 6 | $4+7+\alpha 9$ | 1.2 |
| | 7 | $7+1$ | 1.3 |
| | 8 | $7+\alpha 9$ | 1.3 |
| | 9 | $8+\alpha 9$ | 1.4 |
| | 10 | $\sigma 8+1-9$ | 1.4 |

На рисунке 1 показана гистограмма распределения числа подалгебр N в оптимальной системе от их размерности r. Видно, что на подалгебрах размерности 3 и 4 достигается максимум числа подалгебр.

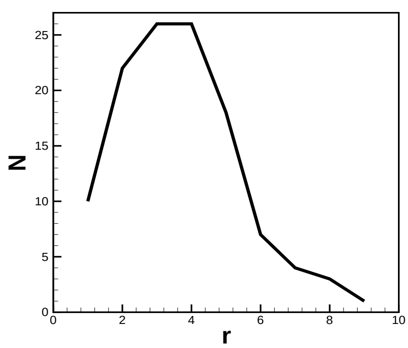



Рис. 1

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н., профессору Салавату Валеевичу Хабирову за постановку задачи и постоянное внимание к данной работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. *Основы механики гетерогенных сред*, М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. *Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях* // Дифференциальные уравнения. Т. 19, № 7. 1983. С. 1215–1223.
3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 399 с.
4. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды* Новосибирск: изд. НГТУ. 2012. 659 с.
5. Хабиров С.В. *Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 2. 2011. С. 87–90.

Айдар Мартисович Ильясов,
РН-УфаНИПИнефть,
ул. Революционная, 96/2,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: AMIlyasov@gmail.com

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 67-77.

УДК 517.5

# БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ ИЗ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

**К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ**

**Аннотация.** Рассматривается вопрос о существовании безусловных базисов из воспроизводящих ядер в функциональном гильбертовом пространстве целых функций. Доказано, что при выполнении некоторых условий безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует. Показано, что в конкретных пространствах некоторые уже известные теоремы об отсутствии безусловных базисов являются следствиями этих результатов.

**Ключевые слова:** гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, безусловные базисы.

## 1. Введение

Пусть $H$ – функциональное гильбертово пространство целых функций. То есть функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$. Тогда каждый функционал $\delta_z$ порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром. Функция $\|k_z(\lambda)\|_H = (k(z,z))^{\frac{1}{2}}$ называется функцией Бергмана пространства $H$. Основные свойства воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах изложены в работе [1]. Обозначим $K(z) = \|k_z(\lambda)\|_H^2$. Далее наложим на пространство $H$ дополнительные условия:

$$K(z) > 0, z \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

если $f \in H$ и $z_0$ — нуль функции $f(z)$, то

$$\frac{f(z)}{z - z_0} \in H. \tag{2}$$

Система элементов $e_k$, $k = 1, 2, ...$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [2]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для для любого набора чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2 \le || \sum_{k=1}^{n} c_k e_k ||^2 \le C \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 ||e_k||^2.$$

Известно (см. [3], [4]), что если система $e_k$, $k = 1, 2, ...,$ — безусловный базис, то любой элемент пространства $H$ единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov, Unconditional bases of reproducing kernels in Hilbert spaces of entire functions.

© Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. 2013.

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"№ 14.B37.21.0358.

*Поступила 12 декабря 2012 г.*

причем

$$c\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2 \le ||x||^2 \le C\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2||e_k||^2. \tag{3}$$

Для данной последовательности комплексных чисел $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ рассмотрим систему $\{k(\lambda, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях на последовательность $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ соответствующая система из воспроизводящих ядер может являться безусловным базисом в пространстве $H$.

В двойственной формулировке задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядрах в гильбертовом пространстве целых функций становится задачей об интерполяции. В некоторых специальных случаях через преобразования Фурье-Лапласа задача оказывается эквивалентной задаче о безусловных базисах из экспонент. Базовыми примерами являются классические ряды Фурье в $L_2(-\pi,\pi)$, теорема об интерполяции в пространстве Пэли-Винера (теорема Котельникова В.А.).

В весовых пространствах целых функций вида

$$F_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}): \ \|f\|^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\, dm(z) < \infty\}, \tag{4}$$

где $\varphi(z)$ — субгармоническая функция, $dm(z)$ — мера Лебега, задача о безусловных базисах из воспроизводящих ядер рассматривались во многих работах. Из недавних работ укажем [5], [6], [8], [9].

В данной работе в параграфе 3 мы доказываем, что при выполнении некоторых условий безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространстве $H$ не существует. В параграфе 4 мы показываем как из доказанных теорем следуют некоторые уже известные теоремы в конкретных пространствах.

## 2. Формулировка основных результатов

В параграфе 3 будет доказана теорема:

**Теорема 1.** *Если система $\{k(\lambda, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве $H$, то существует целая функция $L$ с простыми нулями в точках $z_j$, $j = 1, 2, ...$, для которой выполняется соотношение:*

$$\frac{1}{P}K(z) \le \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_j)}{|L'(z_j)|^2 |z - z_j|^2} \le PK(z),\ z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

*где $P$ — некоторая положительная постоянная.*

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций $u$, измеряющую отклонение данной функции от гармонических функций. Для непрерывной функции $u$, для $z \in \mathbb{C}$ и положительного числа $p$ через $\tau(u, z, p)$ обозначим супремум всех таких $r > 0$, для которых выполняется условие

$$\inf\{\sup_{w\in B(z,r)} |u(w) - h(w)|,\ h - \text{гармонична в } B(z, r)\} \le p.$$

Здесь $B(z, r)$ — круг с центром в точке $z$ и радиусом $r$. Непосредственно из определения следует, что если $\tau(u, z_0, p) = \infty$ для некоторой точки $z_0$, то $\tau(u, z, p) \equiv \infty$. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Если для функции $u$ характеристика $\tau(u, z, p)$ конечна, то функция $\tau(z) = \tau(u, z, p)$ удовлетворяет условию Липшица: для всех $z_1$ и $z_2$*

$$|\tau(z_1) - \tau(z_2)| \le |z_1 - z_2|.$$

Простое доказательство этой леммы можно найти в [7].

В работе [10] показано (лемма 1.1), что в случае, когда $u$ — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau = \tau(u, \lambda, p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $u$ в круге $B(\lambda, \tau)$, то

$$\max_{z \in \overline{B}(\lambda,\tau)} (H(z) - u(z)) = 2p.$$

Функция

$$\ln K(z) = 2 \sup_{||F|| \le 1} \ln |F(z)|$$

является субгармонической и непрерывной на всей плоскости (мы предполагаем, что $K(z) > 0$). В продолжении этой статьи через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w), z, \ln(5P))$, где $P$ — константа из соотношения (5). Итак,

$$\inf\{ \sup_{z \in \overline{B}(\lambda,\tau(\lambda))} |\ln K(z) - h(z)|, \text{ h гармонична в } B(z, \tau(z))\} = \ln(5P).$$

Следующая теорема доказана в [7] (см. теорема 1):

**Теорема 2.** *Пусть $L(z)$ — целая функция с простыми нулями $z_i$, $i = 1, 2, ...$, при некотором $P$ удовлетворяющая двусторонней оценке*

$$\frac{1}{P} K(z) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \le PK(z).$$

*Тогда*

*1) В любом круге $B(z, 2\tau(z))$ содержится хотя бы один нуль $z_i$ функции $L$.*

*2) Для любых $i, j,\ i \ne j$, выполняется неравенство*

$$|z_i - z_j| \ge \frac{\max(\tau(z_i), \tau(z_j))}{10P^{\frac{3}{2}}}.$$

*3) Для любого $i$ в круге $B(z_i, \frac{\tau(z_i)}{20P^{\frac{3}{2}}})$ справедливо соотношение*

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(z) \le \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \le PK(z).$$

В параграфе 3 будут доказаны теоремы 3,4:

**Теорема 3.** *Пусть $z_i,\ i = 1, 2, ...,$ — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы. Тогда в любом конечном множестве нулей $B$, содержащем хотя бы два нуля, найдется индекс $n$ так, что*

$$\sum_{z_i \in B,\, i \ne n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2} \le (4P)^{12}.$$

**Следствие.**

*Пусть $z_i$, $i = 1, 2, ...,$ — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы и $b = \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$. Тогда для любого конечного множества нулей $B$, содержащем хотя бы два нуля, найдется индекс $n$ так, что*

$$\sum_{z_i \in B,\, i \ne n} \int_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z - z_n|^2} \le 4^{10} P^9.$$

**Теорема 4.** *Пусть $H$ — функциональное гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Предположим, что для любого положительного числа $p$ найдется число $\delta = \delta(p) > 0$, такое, что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{z \in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda) \tag{6}$$

*и $\tau(z) = o(|z|)$, при $|z| \longrightarrow \infty$. Тогда в пространстве $H$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.*

Небольшая модификация доказательства этой теоремы приводит к заметному ослаблению условий.

**Теорема 5.** *Пусть $H$ — функциональное гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям (1) и (2). Предположим, что для любого положительного числа $p$ найдется число $\delta = \delta(p) > 0$ и последовательность кругов $B(\zeta_j, R_j)$ (своя для каждого числа $p$), такие, что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in B(\zeta_j, R_j)$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{z \in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda).$$

*Кроме того,*

$$\max_{z \in \overline{B}(\zeta_j, R_j)} \tau(z) = o(R_j), \;\; j \longrightarrow \infty.$$

*Тогда в пространстве $H$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.*

## 3. Доказательство основных утверждений

**Теорема 1.**

*Доказательство.* Пусть $k(\lambda, z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z) k(\lambda, z_j)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Заметим, что $c_j(z_k) = \delta_j^k$, где $\delta_j^k$ — символ Кронеккера. Пусть $\{S_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ биортогональная система к системе $k(\lambda, z_j)$, то есть $(S_j(\lambda), k(\lambda, z_k)) = \delta_j^k$. Тогда

$$(k(\lambda, z), S_j(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z)(k(\lambda, z_k), S_j(\lambda)),$$

следовательно, $\overline{S_j(z)} = c_j(z)$. Поэтому $S_j(z_k) = \delta_k^j$. Заметим, что $z_k$, $k \neq j$ являются простыми нулями функции $S_j(z)$. В самом деле, если бы для некоторого $m \neq j$ величина $S_j'(z_m)$ обращалась бы в 0, то функция $(z_j - z_m)S_j(z)/(z - z_m)$, лежащая в $H$ (в силу (2)), обращалась бы в 0 в точках $z_k$, $k \neq j$, и равнялась бы 1 в точке $z_j$, то есть во всех точках $z_k$, $k = 1, 2, 3, ...$, совпадала бы с функцией $S_j(z)$. Но в силу полноты системы $\{k(\lambda, z_k)\}$ в пространстве $H$ система точек $z_k$, $k = 1, 2, 3, ...$, является множеством единственности для пространства $H$. Тем самым, функции $(z_j - z_m)S_j(z)/(z - z_m)$ и $S_j(z)$ должны были бы совпадать тождественно.

Функция $L(z) = S_1(z)(z - z_1)$ является целой функцией. Точки $z_k$, $k = 1, 2, ...$, — ее простые нули. Очевидно,

$$S_1(z) = \frac{L(z)}{L'(z_1)(z - z_1)}.$$

При $j > 1$

$$\frac{L(z)}{L'(z_j)(z - z_j)} = \frac{S_1(z)}{L'(z_j)} + \frac{S_1(z)(z_j - z_1)}{L'(z_j)(z - z_j)} \in H$$

и совпадает с $S_j(z)$ во всех точках $z_k$, $k = 1, 2, ...$. Снова в силу полноты системы $\{k(\lambda, z_k)\}$

$$S_j(z) = \frac{L(z)}{L'(z_j)(z - z_j)}, \; j = 2, 3, ...,$$

поэтому

$$k(\lambda, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{L(z)}}{\overline{L'(z_i)(z - z_i)}} k(\lambda, z_i),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пользуясь (3), получим утверждение теоремы. Изложенное выше на самом деле означает, что система

$$\frac{L(z)}{L'(z_j)(z - z_j)},\ j = 1, 2, ...,$$

есть биортогональная система к исходной системе из воспроизводящих ядер.

Теорема 1 доказана. □

**Теорема 3.**

*Доказательство.* По условию теоремы для любого $z$ выполняется оценка

$$\sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z). \tag{7}$$

Поскольку множество $B$ конечно, то существует такой номер $n$, что

$$\frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} = \min_{z_i \in B} \left( \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 \tau^2(z_i)} \right).$$

По пункту 3 теоремы 2 для точек $z$, лежащих на границе круга $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$, справедлива оценка

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(z) \leq 20^2 P^3 \frac{K(z_n)|L(z)|^2}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)}$$

или

$$\frac{K(z)}{|L(z)|^2} \leq 4^2 5^8 P^{11} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)}.$$

Отсюда и из оценки (7) получим

$$4^2 5^8 P^{11} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} \geq \frac{1}{P} \sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2}.$$

Следовательно, для точек $z$, лежащих на границе круга $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$,

$$4^2 5^8 P^{12} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} \geq \sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 \tau^2(z_i)} \cdot \frac{\tau^2(z_i)}{|z - z_i|^2}.$$

Учитывая выбор номера $n$, для точек $z$ на границе $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$ имеем

$$4^2 5^8 P^{12} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} \geq \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} \sum_{z_i \in B} \frac{\tau^2(z_i)}{|z - z_i|^2}$$

или

$$\sum_{z_i \in B} \frac{\tau^2(z_i)}{|z - z_i|^2} \leq 4^2 5^8 P^{12}. \tag{8}$$

По пункту 2 теоремы 2 для указанных точек $z$ при $i \neq n$ выполняется оценка

$$|z - z_i| \leq |z - z_n| + |z_n - z_i| = \frac{\tau(z_n)}{20P^{\frac{3}{2}}} + |z_n - z_i| \leq \frac{3}{2}|z_n - z_i|,$$

поэтому из (8) вытекает требуемая оценка

$$\sum_{z_i\in B,\, i\neq n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_n - z_i|^2} \le (4P)^{12}.$$

Теорема 3 доказана. □

**Следствие из теоремы 3.**

*Доказательство.* Поскольку для точек $z \in B(z_i, b\tau(z_i))$ имеем

$$|z - z_n| \ge |z_i - z_n| - |z - z_i| \ge \frac{1}{2}|z_i - z_n|,$$

то

$$\int_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z - z_n|^2} \le \frac{4\pi b^2 \tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2}.$$

Тогда

$$\sum_{z_i\in B,\, i\neq n} \int_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z - z_n|^2} \le 4\pi b^2 (4P)^{12} = \frac{4\pi}{400P^3}(4P)^{12} \le 4^{10}P^9.$$

□

**Теорема 4.**

*Доказательство.* Воспользуемся следующим утверждением (см. [11], стр. 216).

**Лемма** (Лемма о покрытиях шарами)

*Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^p$ покрыто шарами так, что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $S(x)$ радиуса $r(x)$. Если $\sup_{x\in A} r(x) < \infty$, то из системы $\{S(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{S(x_k)\}$, покрывающую все множество $A$ и имеющую кратность, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства.*

Нетрудно убедиться в том, что $N(2) = 6$.

Проведем доказательство от противного: допустим, что условия теоремы выполнены, но в пространстве $H$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер $\{k(\lambda, z_i)\}$. Тогда верны теоремы 1,2 и 3. В условии доказываемой теоремы положим $p = \ln(5P)$ и пусть $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, \ln(5P))$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, и число $R$ будем считать таким большим, чтобы выполнялось условие

$$\max_{|z|\le R} \tau(z) \le \varepsilon R. \tag{9}$$

Такие $R$ можно найти по условию на $\tau(z)$. В самом деле, найдется $R'$ такое, что при $|z| \ge R'$ будет выполняться $\tau(z) < \varepsilon|z|$. Если взять $R > \frac{2R'}{\varepsilon}$, то при $|z| \in [\frac{\varepsilon}{2}R; R]$ будем иметь $\tau(z) < \varepsilon|z| \le \varepsilon R$. По лемме 1 выполняется соотношение $\tau(z) \le \tau(0) + |z|$, поэтому если $|z| \in [\tau(0); \frac{\varepsilon}{2}R]$, то $\tau(z) \le 2|z| \le \varepsilon R$. Наконец, выбирая $R$ больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}\max_{|z|\le\tau(0)} \tau(z)$, получим соотношение (9).

Рассмотрим систему кругов $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$, $\lambda \in B(0, R)$. По п.1 теоремы 2 в каждом из этих кругов содержится хотя бы одно $z_i$, и эти круги покрывают весь круг $B(0, R)$. По лемме о покрытиях шарами можно выделить не более чем счетный набор кругов $B_n = B(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$, покрывающих круг $B(0, R)$, при этом каждая точка этого круга попадает не более чем в $N(2) = 6$ кругов покрытия. В каждом из кругов $B_n$ выберем по одному $z_{i(n)}$. При этом некоторые $z_{i(n)}$ могут оказаться выбранными неоднократно, но по свойствам выделенного покрытия кратность выбора одного показателя не больше шести. Перенумеруем систему выбранных показателей, присвоив им номер круга, в котором данный показатель выбран. Получим набор чисел $\{w_n\}$, в котором каждое число повторяется не более шести раз. К полученному набору применим теорему 3. Найдется номер $m$ так, что с учетом кратности будет выполняться оценка

$$\sum_{w_n \neq w_m} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq 6(4P)^{12}. \tag{10}$$

В наших обозначениях $w_n \in B_n = B_n(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$. Далее рассмотрим такие $n$, что $w_m \notin B'_n = B_n(\lambda_n, 3\tau(\lambda_n))$. Тогда для любого $w \in B_n$ имеем $|w - w_m| \geq \tau(\lambda_n)$. Кроме того,

$$|w_n - w_m| \leqslant |w_n - w| + |w - w_m| \leq 4\tau(\lambda_n) + |w - w_m| \leq 5|w - w_m|,$$

или

$$\frac{1}{|w - w_m|^2} \leq \frac{25}{|w_n - w_m|^2},\ w \in B_n,\ w_m \notin B'_n.$$

Интегрируя это неравенство по кругу $B_n$, получим

$$\int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq \frac{100\pi\tau^2(\lambda_n)}{|w_n - w_m|^2},\ w_m \notin B'_n.$$

Так как $w_n \in B(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$, то по условию (6) $\tau^2(w_n) \geq \delta^2\tau^2(\lambda_n)$. Таким образом, из последней оценки и из (10) следует соотношение

$$\sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq \frac{100\pi}{\delta^2} \sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq \frac{600(4P)^{12}}{\delta^2} := C. \tag{11}$$

Если номер $n$ такой, что $w_m \in B'_n$, то для любого $w \in B_n$ имеем

$$|w - w_m| \leq |w - \lambda_n| + |w_m - \lambda_n| \leq 2\tau(\lambda_n) + 3\tau(\lambda_n) = 5\tau(\lambda_n).$$

По выбору числа $R$ имеем $|w - w_m| \leq 5\varepsilon R$, то есть круги $B_n$ полностью лежат в круге $B(w_m, 5\varepsilon R)$. Это значит, что круги покрытия, номера которых участвуют в суммировании в (11), покрывают множество $C(R) = B(0, R) \setminus B(w_m, 5\varepsilon R)$. Следовательно,

$$\int_{C(R)} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \leq C.$$

Применим замену переменных $w = R\zeta$, $w_m = R\zeta_m$, $\zeta_m \in B(0, 1 + 2\varepsilon)$, получим

$$\int_{B(0,1)\setminus B(\zeta_m, 5\varepsilon)} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta - \zeta_m|^2} \leq C.$$

Число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, устремив $\varepsilon$ к нулю, получим противоречие.

Теорема 4 доказана. □

## 4. Весовые гильбертовы пространства целых функций

В этом параграфе мы рассмотрим более конкретные гильбертовы пространства.

Предварительно докажем утверждение, которое при некоторых условиях на субгармоническую функцию $u$ позволяет связать асимптотическое поведение характеристики $\tau(u, z, p)$ с поведением оператора Лапласа функции $u$.

**Лемма 2.** *Пусть субгармоническая на плоскости функция $u$ дважды непрерывно дифференцируема, и для любого числа $p > 0$ существует число $b = b(p) \geq 1$ такое, что выполняется условие*

$$\frac{1}{b} \leq \frac{\Delta u(w)}{\Delta u(z)} \leq b,\ \ w \in B(z, \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}). \tag{12}$$

*Тогда выполняются оценки*

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta u(z)}} \le \tau(u,z,p) \le \sqrt{\frac{8pb}{\Delta u(z)}}. \tag{13}$$

*Доказательство.* Для краткости введем обозначение $\rho(z) = (\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}$. Как уже отмечалось, величину $\tau = \tau(u,z,p)$ можно определить из условия

$$\max_{w\in\overline{B}(z,\tau)} (H_u(w) - u(w)) = 2p,$$

где $H_u$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $u$ в круге $B(z,\tau)$. По формуле Грина

$$h_u(w) - u(w) = \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)d\mu_u(\zeta),$$

где $h_u$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции $u$ в круге $B(z,r)$, $G(w,\zeta)$ — функция Грина этого круга и $\mu_u$ — ассоциированная мера функции $u$. В нашем случае $2\pi d\mu_u(\zeta) = \Delta u(\zeta)dm(\zeta)$, значит, величину $\tau$ можем определить из условия

$$\max_{w\in\overline{B}(z,\tau)} \int_{B(z,\tau)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) = 2p.$$

Если положить $r = \sqrt{\frac{8p}{b}}\rho(z)$ ($r \le \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}$), то

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \le b\Delta u(z) \max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi}.$$

Функция $v(w) = |w-z|^2$ субгармонична, ее ассоциированная мера тождественно равна $\frac{2}{\pi}$, а наименьшая гармоническая мажоранта в круге $B(z,r)$ тождественно равна $r^2$, поэтому

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi} = \frac{1}{4}\max_{w\in\overline{B}(z,r)} (r^2 - |w-z|^2) = \frac{r^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \le \frac{br^2}{4}\Delta u(z),$$

и в условиях теоремы

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \le \frac{br^2}{4}\Delta u(z) = 2p.$$

Отсюда следует нижняя оценка для $\tau = \tau(u,z,p)$.

Аналогично, взяв $r = \sqrt{8pb}\rho(z)$, получим оценку:

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}dm(\zeta) \ge \frac{\Delta u(z)}{b} \max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi} \ge$$
$$\ge \frac{\Delta u(z)}{b}\cdot\frac{r^2}{4} = 2p.$$

Отсюда следует верхняя оценка для $\tau = \tau(u,z,p)$. □

Покажем, что теоремы 4 и 5 позволяют единообразно описывать ситуации отсутствия безусловных базисов в различных пространствах.

А) В работе [9] доказано, что если $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ — субгармоническая дважды непрерывно дифференцируемая на плоскости функция и для $\rho(z) = (\Delta\varphi(z))^{-\frac{1}{2}}$ выполнены условия:

$$0 < \inf_{r>0} \rho(r) \ \text{ и } \ \rho(r) = o(r), \ \ r \to \infty, \tag{14}$$

а также

$$\rho(r+\rho(r)) = (1+o(1))\rho(r), \;\; r\to\infty \;\text{ и }\; \rho(2r)\asymp\rho(r), \;\; r>0, \tag{15}$$

то в пространстве $F_\varphi$ (4) безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Условие $\rho(2r)\asymp\rho(r), \;\; r>0$ означает, что найдутся константы $c, C>0$, такие что

$$c < \frac{\rho(2r)}{\rho(r)} < C$$

для всех $r>0$.

Условия (14) означают, что $\varphi(x)$ растет быстрее, чем $(\ln x)^2$, и не быстрее, чем $x^2$ при $x\to\infty$.

Из выполнения (15) следует, что для $\varphi(z)$ выполнено условие (12) леммы 4.1, а значит, выполняются оценки (13).

Тогда из условий (14) следуют оценки:

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta\varphi(z)}} \le \tau(\ln K(\lambda), z, p) \le \sqrt{\frac{8pb}{\Delta\varphi(z)}}.$$

Таким образом, выполняются предположения теоремы 4, что означает отсутствие безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

Б) Рассмотрим пространство Смирнова $E_2(D)$ и пространство Бергмана $B_2(D)$, где $D$ — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости.

Пространство $E_2(D)$ — это пополнение пространства полиномов относительно нормы

$$\|p\|^2 = \int_{\partial D} |p(z)|^2\, ds(z),$$

где $ds(z)$ — элемент дуги границы $D$.

Пространство $B_2(D)$ состоит из функций, аналитических в области $D$ и интегрируемых с квадратом по плоской мере Лебега:

$$B_2(D) = \{f\in H(D): \;\; \int_D |f(z)|^2\, dm(z) < \infty\}.$$

Система $\{e^{\lambda z}, \; \lambda\in\mathbb{C}\}$ полна в этих пространствах. Это обстоятельство позволяет описать сопряженные пространства $E_2^*(D)$ и $B_2^*(D)$ в терминах преобразований Фурье-Лапласа. Каждому линейному непрерывному функционалу $S$ в этих пространствах поставим в соответствие целую функцию $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, $\lambda\in\mathbb{C}$, которая называется преобразованием Фурье-Лапласа функционала $S$.

В работе [12] показано, что преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $E_2^*(D)$ и гильбертова пространства целых функций $\widehat{E}_2(D)$ с нормой:

$$||F||^2 = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} d\Delta(\varphi) dr, \tag{16}$$

где

$$\Delta(\varphi) = \int_0^\varphi h(\alpha)d\alpha + h'(\varphi), \;\; h(\varphi) = \max_{z\in\overline{D}} Re\, ze^{i\varphi},$$

$$K(\lambda) = \|e^{\lambda z}\|^2_{E_2(D)} = \int_{\partial D} |e^{\lambda z}|^2\, ds(z).$$

В работе [13] доказан изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ и гильбертова пространства целых функций $\widehat{B}_2(D)$ с нормой, которая задается формулой (16), где

$$K(\lambda) = \|e^{\lambda z}\|^2_{B_2(D)} = \int_D |e^{\lambda z}|^2\, dm(z). \tag{17}$$

Благодаря этому, задачи о безусловных базисах из экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах $E_2(D)$ и $B_2(D)$ оказываются эквивалентными задачам о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в сопряженных пространствах целых функций.

В работе [7] доказано, что если на границе области есть точка с конечной ненулевой кривизной, то в пространстве Бергмана безусловные базисы из экспонент не существуют. Это может быть выведено из теоремы 5, так как функция Бергмана в сопряженном пространстве совпадает с функцией (17) и в некотором угле комплексной плоскости $\tau(\lambda) \asymp \sqrt{|\lambda|}$ (см. лемму 7 в [7]).

В работе [14] доказано, что если на границе области есть дуга, в точках которой кривизна отграничена от нуля и от бесконечности постоянными, то в пространстве Смирнова безусловные базисы из экспонент не существуют. Эта теорема аналогичным образом может быть получена из теоремы 5.

В) Пусть $I$ — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на $I$, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

В работах [15], [16], [17] описано пространство $\widehat{L}^2(I,h)$. Доказано, что пространство $\widehat{L}^2(I,h)$ изоморфно (как банахово пространство) пространству целых функций $F$, удовлетворяющих условиям

$$|F(z)| \leq C_F\sqrt{K(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

$$||F||^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)} d\widetilde{h}'(x)dy < \infty,$$

где

$$K(z) = \int_I |e^{2zt}| e^{-2h(t)}dt, \tag{18}$$

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - h(t)).$$

Таким образом, задача о безусловных базисах из экспонент в пространстве $L^2(I,h)$ оказывается эквивалентной задаче о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в сопряженном пространстве целых функций $\widehat{L}^2(I,h)$, и функция Бергмана в нем определяется по формуле (18). Значит, теорема 4 или теорема 5 могут применяться как тест на отсутствие безусловных базисов из экспонент в пространстве $L^2(I,h)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Aronszajn *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. 1950. V. 68, № 3. P. 337–404.
2. Никольский Н.К., Павлов Б.С., Хрущев С.В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер, I* // Препринт ЛОМИ. С. 8–80.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука, 1965. 448 с.
4. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига.* М.: Наука, 1980.
5. K. Seip *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, I* // Reine Angew. Math. 429 (1992). P. 91–106.
6. K. Seip, R. Wallsten *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space, II* // Reine Angew. Math. 429 (1992). P. 107–113.
7. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 6. С. 69–90.

8. A. Borichev, R. Dhuez, K. Kellay *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis 242 (2007), №2. P. 563–606.
9. A. Borichev, Yu.Lyubarskii *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 9 (2010). P. 449-461.
10. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций* // Сиб. мат. ж. 1985. Т.26, № 4. С. 159–175.
11. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука,1966.
12. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова* // Тр. МИАН, 200 (1991), 245–254.
13. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана* // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68, № 1. С. 5–42.
14. Луценко В.И. *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.
15. Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 5. С. 80–87.
16. Луценко В.И. *Теорема Пэли–Винера на неограниченном интервале* // Исследования по теории приближений. Уфа, 1989. С. 79–85.
17. Напалков В.В., Башмаков Р.А., Юлмухаметов Р.С. *Асимптотическое поведение интегралов Лапласа и геометрические характеристики выпуклых функций* // ДАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 20–22.
18. Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 1. С. 3–15.

Константин Петрович Исаев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `orbit81@list.ru`

Юлмухаметов Ринад Салаватович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yulmukhametov@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 78-95.

УДК 517.95

# ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

**В.А. КОРНЕЕВ**

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для уравнения первого порядка в дивергентной форме с правой частью независящей от искомой функции и разрывным начальным условием. Впервые такое уравнение было указано в работе Бюргерса (1940) и является модельным для системы уравнений, описывающим нестационарное движение газа. Различные свойства решения этой задачи рассматривались в работах Олейник О.А. (1957), Уизема Дж. (1977)(Whitham), Кружкова С.Н.(1970), Панова Е.Ю.(2006). Исходная задача сведена к задаче Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с непрерывным начальным условием. К этой задаче предложено применить метод сингулярных характеристик, разработанный А.А. Меликяном для игровых задач и задач управления. Эффективность методики продемонстрирована на примере когда в исходном уравнении под знаком производной по пространственной переменной стоит кубический полином от искомой функции, а граничное условие задается в виде "повышающейся"ступеньки. Гамильтониан в модифицированной задаче представляет собой полином третьей степени от частной производной от искомой функции, а граничное условие задается кусочно-линейной, выпуклой вниз функцией с изломом в начале координат. Выделены области параметров, для которых построение обобщенного решения для обеих задач возможно, и описана процедура построения решения. Показано, что решение содержит негладкие особенности, называемые рассеивающей и экивокальной поверхностями согласно терминологии дифференциальных игр. Построение решения проиллюстрировано рисунками.

**Ключевые слова:** уравнение Гамильтона-Якоби, обобщенное решение, метод характеристик.

**Mathematics Subject Classification:** 35R01, 49J20, 49N70.

## 1. Введение

Во многих задачах о распространении волн рассматривается непрерывное распределение какого-либо вещества или некоторое состояние среды. В одномерном случае (плоские течения), полагая переменную $x$ координатой времени, а переменную $y$ – пространственной координатой, можно определить плотность $v(x, y)$ на единицу длины и расход $q(x, y)$ в единицу времени. Определим скорость течения $w(x, y)$ равенством $w = q/v$. Предполагая, что исследуемое вещество сохраняется, можно считать, что скорость изменения его полного количества в любом интервале $y_1 < y < y_2$ должна компенсироваться суммарным

V.A. Korneev, Construction of generalized solution for first order divergence type equation.

© Корнеев В.А. 2013.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00472-а, 13-01-00384-а).

*Поступила 11 сентября 2012 г.*

потоком через сечения $y_1$, $y_2$, т.е.

$$\frac{d}{dx}\int_{y_1}^{y_2} v(x,y)dy + q(x,y_2) - q(x,y_1) = 0.$$

Если $v(x,y)$ имеет непрерывные производные, то можно перейти к пределу $y_1 \to y_2$ и получить закон сохранения

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Простейшая задача о распространении волн получается в том случае, когда, исходя из теоретических или эмпирических соображений, можно постулировать некоторую функциональную связь между $q$ и $v$ в виде $q{=}\varphi(v)$. Тогда получаем закон сохранения в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

В газовой динамике ([1, с. 9], [2, с. 13]) уравнение (1) применяется для приближенного построения разрывных решений течения идеального газа, лишенного вязкости и теплопроводности.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial y} = f_1(x,y,v), \quad x \geq x_0, \\ &v(x_0,y) = \psi_1(y), \quad x,y \in R^1, \quad f_1(x,y,v),\, \varphi(v) \in C^\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\psi_1(y)$ – ограниченная кусочно-гладкая функция. Если $f_1(x,y,v) \equiv 0$, это уравнение согласно вышеизложенному носит название закона сохранения, а также транспортного уравнения. Если свободный член $f_1(x,y,v)$ не зависит от $v$, то его можно рассматривать как внешний источник, возбуждающий волны ([2, с. 68]).

Большое количество физических задач, приводящих к задаче (2) и ее обобщениям, рассмотрено в [2, с. 32–34], [3]. Впервые уравнение из (2) было указано в работе Бюргерса [4] и является модельным для системы уравнений, описывающим нестационарное движения газа. В работе О.А. Олейник [5] для случая $\varphi_{vv}(v) \neq 0$ доказана единственность обобщенного решения задачи (2). Дальнейшее развитие такой подход получил развитие в работах С. Н. Кружкова [6] и Е.Ю. Панова [7], где изучаются существование, единственность и устойчивость обобщенных решений уравнения (2). Уравнение (2) в физике принято называть квазилинейным уравнением переноса или неоднородным уравнением переноса. Уравнение переноса описывает различные процессы, связанные с распространением частиц в веществе ([8]).

**Определение 1.0**. Пусть у функции $v(x,y)$, определенной в области $\Omega$, есть несколько компонент гладкости $\Omega_1, \Omega_2 ..., \Omega_n$ и, соответственно, несколько линий разрыва первого рода $\Gamma_1, \Gamma_2 ..., \Gamma_k$, причем

$$\Omega = (\bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i)$$

Функцию $v(x,y)$ согласно работам [1], [9], [10] назовем *обобщенным решением* уравнения (2) в области $\Omega$, если выполнены следующие условия:

1) в областях гладкости $\Omega_i, i = 1, ..., n$ $v(x,y)$ удовлетворяет (2) в классическом смысле;

2) на линиях разрыва y = y(x) выполнено условие Ранкина-Гюгонио

$$y'(x){=}\frac{[\varphi(v)]}{[v]} \equiv \frac{\varphi(v_2(x)){-}\varphi(v_1(x))}{v_2(x) - v_1(x)}, \text{ где } v_1(x){=}v(x,y(x)-0),\ v_2(x){=}v(x,y(x)+0)$$

за исключением конечного числа точек пересечений $\Gamma_i, i = 1, ..., k$.

3) Выполнено условие устойчивости разрыва: при $v_2 > v_1$ ($v_2 < v_1$) график функции $\varphi(v)$ лежит не ниже (соответственно не выше) хорды, соединяющей точки этого графика с абсциссами $v_1, v_2$. Это условие может быть записано в виде неравенств

$$\frac{\varphi(v_*) - \varphi(v_2)}{v_* - v_2} \leq y'(x) \leq \frac{\varphi(v_*) - \varphi(v_1)}{v_* - v_1}, \quad y = y(x),$$

которые выполнено для всех $v_*$, лежащих между значениями $v_1, v_2$.

При $\varphi''_{vv}(v) \neq 0$ условия устойчивости обобщенного решения упрощаются и имеют вид

$$\varphi'_v(v_2) \leq y'(x) \leq \varphi'_v(v_1).$$

В работе [10] для задачи (2) с нулевой правой частью ($f_1(x, y, v) \equiv 0$) доказано, что обобщенное решение из определения 1.0 является энтропийным. В работе [7] для задачи (2) с нулевой правой частью в предположениях, что $y \in R^n$, $\varphi \in C^1$, а производная $\varphi'(v)$ и функция начальных условий $\psi_1(y)$ из класса локально-ограниченных функций $L^\infty_{loc}(R^n)$ удовлетворяют ограничениям на рост

$$\begin{aligned} &|\varphi'(v)| \leq C_0(1 + |v|^{p-1}),\ p > 1,\ C_0 = const, \\ &\alpha = (p-1)^{-1},\ |\psi_1(y)| \leq M(1 + |y|^\alpha) \text{ п.в. на } R^n \end{aligned} \tag{3}$$

доказаны существование и единственность решения $v(x, y)$ в классе функций из

$$\begin{aligned} &B_\alpha = \{v(x, y) \in L^\infty_{loc}(\Pi_T) |\ \exists M = M(x) \in L^\infty_{loc}([x_0, x_0 + T)), \\ &|v(x, y)| \leq M(x)(1 + y^\alpha) \text{ п.в. на } \Pi_T.\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Pi_T = (x_0, x_0 + T) \times R^n,\ x_0 < x_0 + T \leq +\infty$.

В [7] для задачи (2) с функцией $\varphi(v) = |v|^{p-1}v, p > 1$ и $f_1(x, y, v) \equiv 0$ построено семейство ненулевых обобщенных решений, не принадлежащих классу $B_\alpha$.

В данной работе полагаем, что $f_1(x, y, v)$ не зависит от $v$. Тогда можно рассмотреть задачу Коши

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(\frac{\partial u}{\partial y}) = f(x, y), \quad u(x_0, y) = \psi(y), \quad x, y \in R^1, \\ &f(x, y) = \int_{y_0}^{y} f_1(x, y) dy, \quad \psi(y) = \int_{y_0}^{y} \psi_1(y) dy, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

дифференцируя решение которой по координате $y$ можно получить решение задачи (2). Здесь значение $y_0$ выбирается любым из интервала гладкости $\psi_1(y)$. Функция $\psi(y)$ — непрерывная негладкая функция. Задача (5) представляет собой краевую задачу для уравнения Гамильтона-Якоби, возникающую в теории управления, механике, физике. В теории управления уравнение из (5) составляет основу динамического программирования и называется основным уравнением или уравнением Беллмана-Айзекса. Для широкого класса задач [11], [12] была доказана идентичность вязкого решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби и функции оптимального результата задачи (функции Беллмана-Айзекса, цены игры). Поэтому, метод сингулярных характеристик ([13]) применим для решения задачи (5).

## 2. Определение непрерывного обобщенного решения

Рассмотрение неавтономных задач управления и дифференциальных игр приводит к краевой задаче

$$\left\{ \begin{aligned} &H(x, S(x), p) = 0,\ p = \partial S / \partial x = S_x,\ x \in \Omega \subset R^n, \\ &S(x) = w(x),\ x \in M \subset \partial\Omega,\ x, p \in R^n, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

в которой функция $H$ и множество $M$ имеют вид

$$\begin{cases} H = p_1 + H^*(x_1, \dots, x_n,\, S,\, p_2, \dots, p_n), \\ M = \{x \in R^n :\; x_1 = c_1 = const\}. \end{cases} \tag{7}$$

Множество $\Omega$ представляет собой полупространство (или слой) справа или слева от множества $M$. Функции $H^*, w$ непрерывны по своим переменным на множествах $\Omega \times R^n$ и $M$ соответственно. Уравнение $H = 0$ из (6) с функцией $H$ вида из (7) обычно называют уравнением Гамильтона-Якоби. Задача (6) может не иметь классического решения $S(x) \in C^1(\Omega)$, даже при наличии гладкости функций $H$ и $w$.

Задача (6),(7) называется начальной (терминальной), если

$$\Omega = \{x \in R^n : x_1 > c_1\} \ (\{x \in R^n : x_1 < c_1\}). \tag{8}$$

Приведем определение обобщенного решения М. Дж. Крэндалла и П.Л. Лионса [14] для краевой задачи (6),(7).

**Определение 1.1**. Непрерывная функция $S : \Omega \to R^1$ называется *обобщенным (вязкостным)* решением начальной задачи (6)–(8), если для любой пробной функции $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$ в точках локального минимума (максимума) разности $S(x) - \varphi(x)$, справедливо неравенство

$$H(x_0, S(x_0), \varphi_x(x_0)) \geq 0 \ \ (H(x_0, S(x_0), \varphi_x(x_0)) \leq 0). \tag{9}$$

В случае терминальной задачи неравенства (9) противоположны.

В работе [11, с. 38-42] дано определение минимаксного решения, доказана эквивалентность минимаксного и обобщенного (вязкостного) решений. При условии, что функция $H(x, s, p)$ для задачи (6)-(8) невозрастающая по $s$ и липшицева по $p$ доказано существование и единственность минимаксного решения.

В работе [15] доказано, что обобщенное решение задачи Коши для квазилинейного уравнения (2) является селектором супердифференциала минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби (5). В частности, гладкое минимаксное решение задачи (5) с гамильтонианом, не зависящим от искомой функции, после дифференцирования по фазовой переменной, является обобщенным решением задачи (2) в смысле определения (1.0). Вопросы связи двух разных определений обобщенного решения рассматриваются также в работах [1], [16].

В работе [6] для задачи (2), рассматриваемой в полосе $x \in [0, T], y \in R^1$, доказаны существование и единственность обобщенного решения в классе ограниченных измеримых функций. Рассмотренная далее задача (13),(14) соответствует требованиям, сформулированным в этой работе.

Согласно вышесказанному для построения обобщенного решения задачи (2), в которой правая часть не зависит от искомой функции, путем интегрирования уравнения и начальных условий по координате $y$ можно свести задачу (2) к задаче (5), которая представляет собой частный случай задачи (6)–(8) с гамильтонианом, независящим от искомой функции. В полученной задаче для построения обобщенного решения в смысле определения 1.1 можно использовать метод сингулярных характеристик.

## 3. Метод характеристик. Сингулярные многообразия

Для локального построения классического решения задачи (6) методом характеристик достаточно существования вторых производных у функций $S(x), H(x, S, p)$ ([18, с. 114] ). Тогда построение классического решения задачи (6) сводится к интегрированию системы регулярных характеристик

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - pH_S. \tag{10}$$

с начальными условиями

$$x_1 = c_1,\ \ x_i = z_{i-1},\ \ p_i(c_1, z) = \frac{\partial w(c_1, z)}{\partial z_i},\ \ i = 2, ..., n,\ \ z = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in R^{n-1},$$
$$p_1 = -H^*(c_1, z_1 \ldots, z_{n-1},\ w(c_1, y),\ p_2, \ldots, p_n),\ \ S(c_1, z) = w(c_1, z).$$

Параметром дифференцирования в уравнениях (10) можно считать координату $x_1$. В окрестности точек, в которых функции $S, H$ не обладают указанными свойствами гладкости, упомянутая процедура построения решения, вообще говоря, не работоспособна.

**Определение 2.1.** Регулярной точкой обобщенного решения уравнения (6) будем называть любую внутреннюю точку $x^0$ области $\Omega$ определения решения $S(x)$, в окрестности $D$ которой функция $S(x)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет основному уравнению $H(x, S(x), p) = 0$ из (6) с дважды дифференцируемой $H(x, S, p)$ в окрестности точки $(x^0, S(x^0), p^0) \in R^{2n+1}$, $p^0 = S_x(x^0)$. Все точки, не являющиеся регулярными, назовем сингулярными. Сингулярное множество состоит из сингулярных точек ([13, c. 57]).

Для случая когда сингулярные множества представляют собой поверхности их можно классифицировать по характеру поведения регулярных характеристик и степени гладкости функций $S(x), H(x, S, p)$ в их окрестности. Приведем кратко эту классификацию для начальной задачи. Здесь и далее при описании различных видов поведения характеристик идет речь о поведении их фазовых компонент.

*Рассеивающая поверхность.* С обеих сторон подходят регулярные характеристики, $S(x) \notin C^1$.

*Экивокальная поверхность.* Регулярные характеристики с одной стороны подходят, а с другой отходят, $S(x) \notin C^1$ . Для $H \in C^1$ характеристики отходят с касанием.

*Поверхность переключения.* Схожая с экивокальной, но $S(x) \in C^1$, $H \notin C^1$.

*Универсальная поверхность.* Регулярные характеристики отходят в обе стороны, $S(x) \in C^1$ и $H(x, S, p) \notin C^1$.

*Фокальная поверхность.* Схожая с универсальной, $S(x) \notin C^1$. При $H \in C^1$ характеристики отходят от поверхности с касанием. Если фокальная поверхность вырождается в точку, получаем вершину интегральной воронки.

В точках сингулярной поверхности выполнена следующая лемма ([13, c. 60]).

**Лемма 1.** Пусть $S(x)$ – обобщенное решение задачи (6), (7), представимое в окрестности $D$ сингулярной поверхности $\Gamma$ равенством

$$S(x) = min\left[S^+(x),\ S^-(x)\right]\ \ S^+(x), S^-(x) \in C^1(D). \tag{11}$$

Тогда на поверхности $\Gamma$ для проверочной функции $h(\tau)$ выполнено условие

$$\begin{aligned} &h(\tau) = H(x, S(x), p^+(1{+}\tau)/2{+}p^-(1{-}\tau)/2) \le 0,\ \ |\tau| \le 1,\ \ x \in \Gamma, \\ &p^s = \partial S^s/\partial x,\ \ s = +, -, \quad h(-1) = h(1) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Если задача (6),(7) – терминальная или обобщенное решение $S(x)$ представимо в виде $S(x) = max\,[S^+(x),\ S^-(x)]$, неравенство (12) меняет знак.

Для доказательства Леммы 1 достаточно в (9) в качестве пробной функции взять $\varphi(x) = S^+(1+\tau)/2 + S^-(1-\tau)/2$.

## 4. Постановка задачи. Общий вид функции $h(\tau)$

Рассмотрим задачу Коши:

$$v_x{+}\varphi_y(v) = f, \quad x \ge 0, \quad \varphi(v) = av^3{+}bv^2{+}cv{+}d; \quad x, y \in R^1, \tag{13}$$

$$v(0, y) = \psi_1(y) = \begin{cases} \rho_1, & y > 0 \\ \rho_2 & y < 0. \end{cases} \tag{14}$$

для различных значений параметров $a, b, c, d, e, f$. Если положить $\rho_1{=}g{+}1$, $\rho_2{=}g{-}1$, то следуя процедуре, описанной во введении, получаем начальную задачу Гамильтона-Якоби

$$H = p + \varphi(q) - fy = 0,\ \varphi(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d; \tag{15}$$

$$S(0, y) = |y| + gy, p = \partial S/\partial x,\ q = \partial S/\partial y, \quad x > 0. \tag{16}$$

Решение задачи (13), (14) для $a = 0$, $f = 0$ имеет два вида сингулярностей, см. например, [2].

При $\rho_1 > \rho_2, b > 0$ выходящие из начала координат две характеристики с различными граничными условиями образуют пространство между ними, которое заполняется веером характеристик. Это первый вид сингулярности.

Для значений $\rho_2 > \rho_1, b > 0$ возникает второй вид сингулярности – ударная волна, происходит опрокидывание волны, характеристики пересекаются.

Этим особенностям согласно § 3 соответствуют вершина интегральной воронки и рассеивающая поверхность (см. [17, с. 1664-1673]). Там же [17, с. 1664-1673] рассмотрена задача (13), (14) для случая $\rho_2 > \rho_1$ и показано, что кроме рассеивающей поверхности обобщенное решение соответствующей начальной задачи Гамильтона-Якоби содержит экивокальную поверхность. Покажем, что случаю $\rho_1 > \rho_2$ свойственны аналогичные особенности решения.

Поскольку функция $S(0, y)$ из (16) представима в виде

$$S(0, y){=}max\,[y(-1{+}g), y(1{+}g)]\,,$$

то следует ожидать, что в окрестности особых поверхностей

$$S(x, y){=}max\left[S^+(x, y),\ S^-(x, y)\right].$$

Дальнейшее построение решения подтвердило это предположение.

Заметим, что для задачи (15),(16) функция $h(\tau)$ из (12) имеет вид

$$h\,(\tau)\ =\ \frac{1}{4}\,\left(\tau^2 - 1\right)(\alpha\tau + \beta)(q^+ - q^-)^2, \quad \tau \in [-1; 1], \tag{17}$$

$$\alpha = a(q^+ - q^-)/2, \quad \beta = 3a\,(q^+ + q^-)/2 + b. \tag{18}$$

Смена знака функции $h(\tau)$ происходит только за счет линейного множителя по $\tau$. Поэтому условие $h(\tau) \geq 0$ равносильно неравенству

$$\mu(\tau) = \alpha\tau + \beta \leq 0, \quad \tau \in [-1; 1]. \tag{19}$$

Далее мы выясним при каких соотношениях между параметрами возможно существование различных сингулярных поверхностей и приведем процедуру построения решения.

## 5. Первичное решение. Рассеивающая поверхность

Уравнения регулярных характеристик (10) для задачи (15), (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = 1, \quad \dot{y} = H_q = \varphi_q(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \\ \dot{p} &= -H_x = 0, \quad \dot{q} = -H_y = f, \quad \dot{S} = pH_p + qH_q. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь параметром дифференцирования можно считать координату $x$. Используя равенства (15),(16) и дифференцируя функцию $S(0, y)$, получаем начальные условия для системы (20) в произвольной точке $(0, y_0)$ оси $y$:

$$x = 0, \quad y = y_0, \quad p = -\varphi(q_0) + fy_0, \quad q = sgn\, y_0 + g, \quad S = |y_0| + gy_0. \tag{21}$$

Отсюда следует, что все регулярные характеристики задачи (20) – кубические параболы на плоскости $x, y$

$$y_q(x, x_0, y_0){=}a\,(x{-}x_0)^3 f^2{+}(3\,aq{+}b)(x{-}x_0)^2 f{+}(3\,aq^2{+}2\,bq{+}c)(x{-}x_0) + y_0. \tag{22}$$

Согласно (20)–(22) в окрестности границы – оси $y$ для граничных значений

$$x_0 = 0, \quad q_0 = \begin{cases} q_{01} = g+1, & y_0 > 0 \\ q_{02} = g-1, & y_0 < 0 \end{cases} \tag{23}$$

получаем – два семейства кривых: верхнее и нижнее соответственно

$$\left.\begin{aligned} &y_{xak1}(x,0,y_0) = y_0 + ax^3f^2 + (3\,a\,(g{+}1) + b)\,x^2f + \\ &\quad + \left(3\,a\,(g{+}1)^2 + 2\,b\,(g{+}1) + c\right)x, \\ &y_{xak2}(x,0,y_0) = y_0 + ax^3f^2 + (3\,a\,(g{-}1) + b)\,x^2f + \\ &\quad + \left(3\,a\,(g{-}1)^2 + 2\,b\,(g{-}1) + c\right)x. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Заметим что при $a = 0$, $f \neq 0$ регулярные характеристики из (22), (24) представляют собой квадратичные функции по $x$, но решение задачи строится аналогично решению, разобранному Уиземом для случая $a = 0$, $f = 0$ с линейными регулярными характеристиками. Для $a = 0$, $f \neq 0$ новых особенностей не возникает и полностью сохраняется характер поведения решения. Поэтому далее полагаем, что $a \neq 0$, $f \neq 0$. Случай $a = 0$, $f \neq 0$ приведем как простую ситуацию при построении интегральной воронки.

Рассмотрим разность регулярных характеристик (24), исходящих из начала координат

$$y_{xak1}(x,0,0) - y_{xak2}(x,0,0) = 6\,fax^2 + (12\,ag + 4\,b)\,x. \tag{25}$$

Из (25) следует, что если параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\left[\begin{array}{l} 3ag + b < 0, \\ 3ag + b = 0, \quad fa < 0, \end{array}\right. \tag{26}$$

то два семейства регулярных траекторий с значениями $q_0 = \pm 1 + g$ пересекаются друг с другом в окрестности начала координат и не возникает область, незаполненная регулярными траекториями. В этом и следующем пункте полагаем выполненными условия (26).

Интегрируя выражение $\dot{S} = pH_p + qH_q$ вдоль траекторий системы (20) и подставляя затем в него значения $x_0 = 0$, $q_0$ из (23) и $y_0$ из (22), положив $y = y_q(x, x_0, y_0)$, получим функцию $S(x,y)$, называемую первичным решением задачи (15),(16)

$$\left.\begin{aligned} &S(x,y) = max\,[S_1(x,y),\ S_2(x,y)]\,, \\ &S_i(x,y) = q_{0i}y - \frac{a}{4}f^3x^4 - \left(aq_{0i} + \frac{b}{3}\right)f^2x^3 - \\ &- \left(3\,aq_{0i}{}^2 + 2bq_{0i} + c\right)\frac{fx^2}{2} - \left(aq_{0i}{}^3 + bq_{0i}{}^2 + cq_{0i} + d\right)x + fxy, \\ &q_{0i} = g - (-1)^i,\ i = 1,2. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Далее будут приведены примеры построения областей, в которых первичное решение представляет *обобщенное* решение задачи (15),(16). Равенство $S = S_1$ $(S = S_2)$ имеет место выше (ниже) кубической параболы, которую определяет условие непрерывности $S_1 = S_2$ :

$$y_{disp}(x) = ax^3f^2 + (3\,ag + b)\,x^2f + \left(3\,ag^2 + 2\,bg + a + c\right)x. \tag{28}$$

Для рассеивающей поверхности (28) справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} &q^+ = q_1(x) = g{+}1{+}fx, \quad q^- = q_2(x) = g{-}1{+}fx, \\ &\alpha = a(q^+ {-} q^-)/2 = a, \quad \beta = 3\,a(q^+ + q^-)/2 + b = 3a(g + fx) + b. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

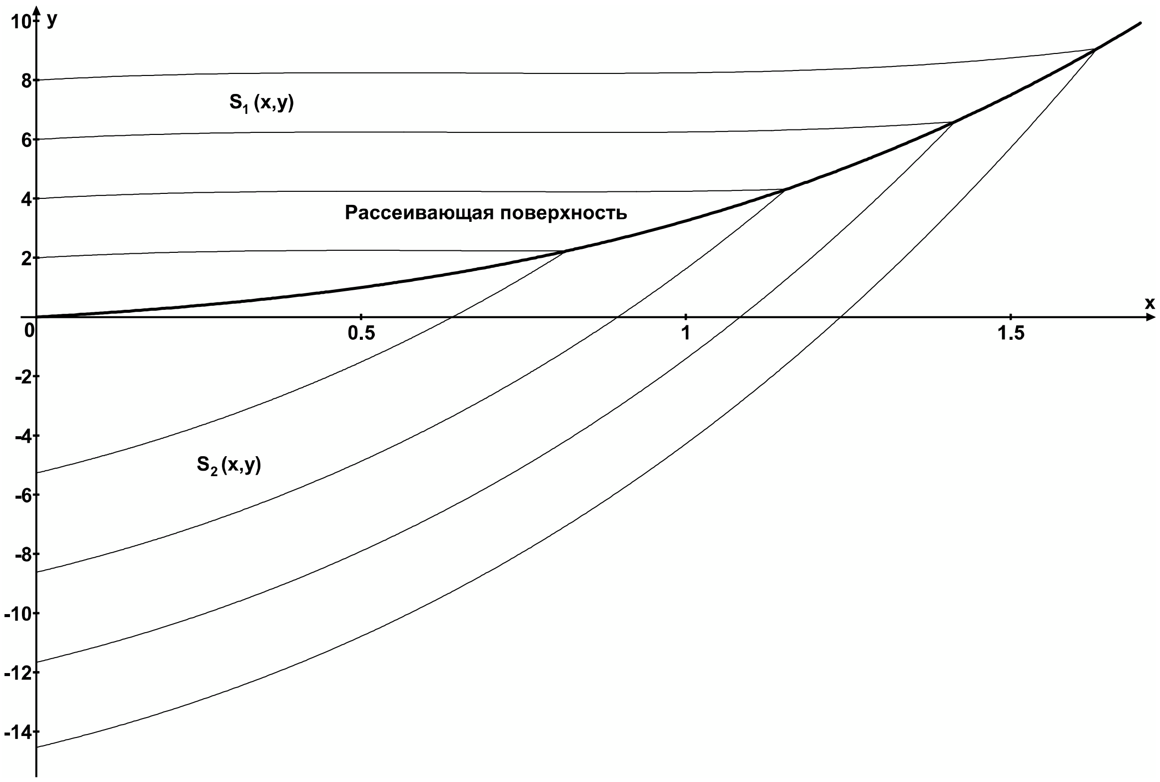



Рис. 1. Рассеивающая поверхность

Из (29) и Леммы 1 получаем необходимое условие существования поверхности (кривой) (28)

$$\max_{\tau\in[-1;1]}\mu(\tau) = |a| + 3a(g + fx) + b \le 0 \qquad (30)$$

Вводя функцию $disp(x)$

$$disp(x) = |a| + 3a(g + fx) + b \qquad (31)$$

и, замечая, что $disp(0) = |a|+3ag+b$, получаем, что рассеивающая кривая (28) существует в окрестности начала координат только когда выполнено одно из условий

$$|a| + 3ag + b < 0 \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} |a| + 3ag + b = 0, \\ fa \le 0. \end{array}\right. . \qquad (32)$$

Условия (32) более сильные чем условие (26). В случае выполнения условия (26) и нарушения условий (32) из начала координат выходит экивокальная поверхность (кривая), методика построения которой разбирается в следующем пункте.

Для значений

$$\left[\begin{array}{l} |a| + 3ag + b \le 0, \\ fa \le 0, \end{array}\right. \qquad (33)$$

$disp(x)\le 0$ при $x\in[0, +\infty)$ и рассеивающая поверхность (кривая) распространяется от начала координат до бесконечности. Процедуру построения рассеивающей кривой и обобщенного решения для случая (33) поясняет рис. 1. Построение проведено для значений

$$a{=}1,\ \ b{=}{-}a{-}3\,a\,g{=}1/2,\ \ c{=}0,\ d{=}0,\ \ g{=}{-}1/2,\ \ f{=}{-}1.$$

Жирная кривая представляет собой рассеивающую кривую, делящую полуплоскость $(x, y), x > 0$ на две области, в каждой из которых решение задачи (15), (16) дается функциями $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$ как указано на рисунке. Решение задачи (13), (14) в этих областях дается соотношениями

$$v_1(x, y) = g + 1 + f\,x, \quad v_2(x, y) = g - 1 + f\,x \qquad (34)$$

Тонкими линиями изображены регулярные характеристики. Мы получили Лемму 2.

**Лемма 2.** Для значений параметров (33) решение задачи (15), (16) дается соотношениями (27), а решение задачи (13), (14) при $\rho_1 = g + 1$, $\rho_2 = g - 1$ дается соотношениями

$$v(x,y) = \begin{cases} g+1+f\,x, & y > y_{disp}(x) \\ g-1+f\,x, & y < y_{disp}(x). \end{cases} \tag{35}$$

Для значений

$$\left[ \begin{array}{l} |a| + 3ag + b < 0, \\ fa > 0, \end{array} \right. \tag{36}$$

$disp(x)$ обращается в 0 при

$$x^* = -\frac{|a| + 3ag + b}{3af}.$$

Значению $x^*$ при $a > 0$ соответствует точка $(x_1^*, y_1^*)$, а при $a < 0$ точка $(x_2^*, y_2^*)$ на рассеивающей кривой (28)

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{a(-1)^i - 3\,ag - b}{3af}, \quad i = 1, 2, \\ y_i^* &= -\frac{((-1)^{i+1}a + b + 3\,ag)\,(9\,a^2g^2 + 6\,agb + (-1)^i 3\,a^2 g - 2\,b^2 + (-1)^i ba + 10\,a^2 + 9\,ac)}{27\,a^2 f}. \end{aligned} \tag{37}$$

Именно в этих точках происходит касание параболы (28) одной из характеристик первичного решения (24). При $a > 0$ одна из характеристик (критическая) верхнего семейства парабол (24) касается параболы (28) в точке $(x_1^*, y_1^*)$. При $a < 0$ одна из характеристик (критическая) нижнего семейства парабол (24) касается параболы (28) в точке $(x_2^*, y_2^*)$. Переход рассеивающей кривой в другой тип особенности может происходить именно в этих точках.

Поскольку $x_2^* - x_1^* = 2/(3f)$ и $x_1^* \neq x_2^*$ для любых $a \neq 0$ и $f \neq 0$ рассеивающая поверхность не может переходить в фокальную поверхность или в интегральную воронку и наоборот.

Из вышесказанного следует, что условие одностороннего касания в точках $(x_1^*, y_1^*)$ при $a > 0$ и $f > 0$, $(x_2^*, y_2^*)$ при $a < 0$ и $f < 0$ выделяет из всех упомянутых выше особых поверхностей экивокальную поверхность.

## 6. Построение экивокальной поверхности

В этом параграфе мы полагаем выполненным условие (36). На экивокальной поверхности в общем случае выполнены три необходимых условия в виде равенств – уравнение (6), условия касания и непрерывности

$$H(x, S(x), p) = 0, \quad \left\langle H_p, p - \partial S^+/\partial x \right\rangle = 0, \quad F_1(x, S) \equiv S - S^+(x) = 0. \tag{38}$$

Здесь $S^+(x)$ – гладкая функция, совпадающая с решением по ту из сторон поверхности, где регулярные характеристики не касаются поверхности. В работе [19] показано, что в общем случае (6) экивокальная поверхность (линия) для $H \in C^1$ строится интегрированием системы:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = H_p, \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - pH_S - \frac{\{\{H, F_1\}, H\}}{\{\{F_1, H\}, F_1\}} \left( p - \frac{\partial S^+}{\partial x} \right), \\ &F_1(x, S) \equiv S - S^+(x), \quad \{F, H\} = \langle F_x + pF_s, H_p \rangle - \langle H_x + pH_s, F_p \rangle. \end{aligned} \tag{39}$$

Левые части равенств (38) суть первые интегралы системы (39).В обозначениях задачи (15), (16) $S^+(x_1,x_2)=S^+(x,y)$. Используя (15), (27), (38), (39) получаем дифференциальные уравнения с начальными условиями для экивокальной кривой

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}{=}H_q,\ \frac{dq}{dx}{=}{-}\frac{S^+_{xx}{+}f\varphi_q(q)}{(S^+_y{-}q)\varphi_{qq}(q)},\\&x{=}x^*_1,\ y(x^*_1){=}y^*_1,\ S^+(x,y){=}S_2(x,y),\ q{=}g{+}1{+}f\,x^*_1\quad\text{при}\quad a{>}0, f{>}0,\\&x{=}x^*_2,\ y(x^*_2){=}y^*_2,\ S^+(x,y){=}S_1(x,y),\ q{=}g{-}1{+}f\,x^*_2\quad\text{при}\quad a{<}0, f{<}0.\end{aligned}\tag{40}$$

Уравнение $\dot{x}{=}H_p{=}1$ и уравнение для $p$ здесь опущены, так как $p$ в (40) не входит. После интегрирования уравнений (40) значения $p$ для обеих экивокальных кривых находятся из равенства $H{=}0$, а величина $S$ находится интегрированием после определения остальных переменных.

**Случай a>0, f>0**. С помощью (40) можно получить, что экивокальная кривая, исходящая из точки $(x^*_1,y^*_1)$ при $a>0$ и $f>0$ определяется решением задачи Коши

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=\varphi_q,\quad \frac{dq}{dx}=\frac{(3\,afx-3\,a+2\,b+3\,ag+3\,aq)\,f}{2(3\,aq+b)},\\&x=x^*_1,\qquad y=y^*_1,\qquad q=q^*_1=q(x^*_1)=g+1+fx^*_1=\frac{2a-b}{3a}.\end{aligned}\tag{41}$$

Система (41) имеет аналитическое решение, удовлетворяющее Лемме 1 на отрезке $[x^*_1,x_{m1}]$

$$\begin{aligned}&y_{eq1}(x)=y^*_1-\frac{2(\varphi(q)-\varphi(q^*_1))}{f},\quad q_{eq1}(x){=}q^*_1{-}\frac{f}{2}(x{-}x^*_1){=}\frac{1{-}g{-}fx}{2}{-}\frac{b}{2a},\\&x_{m1}=-\frac{3\,ag-3\,a+b}{3fa},\quad y_{m1}=y_{eq1}(x_{m1}),\quad x\in[x^*_1,x_{m1}].\end{aligned}\tag{42}$$

Действительно, проверочная функция $\mu(\tau)$ для экивокальной поверхности (42) имеет вид

$$\mu(\tau)=\mu_1(\tau)=\frac{(1-\tau)\,(3\,xfa-3\,a+3\,ag+b)}{4}\le 0,\quad \tau\in[-1;1].\tag{43}$$

Равенство $\mu_1(\tau)=0$ при $\tau\ne 1$ достигается для $x=x_{m1}$, где $x_{m1}$ – абсцисса точки $(x_{m1},y_{m1})$ из (42), в которой она заканчивается, поскольку при $x>x_{m1}$ неравенство $\mu_1(\tau)\le 0$ для $\tau\ne 1$ будет нарушено. В этой точке числитель и знаменатель правой части второго уравнения из (41) обращаются в ноль и именно в этой точке происходит совпадение значений $q_{eq1}(x),q_2(x)$ а также значений производных функций $y_{xak2}(x,x_{m1},y_{m1})$ и $y_{eq1}(x)$ из (42), т.е. происходит касание экивокальной поверхности характеристикой из нижнего семейства парабол. Далее экивокальная кривая переходит в регулярную характеристику.

Построение рассеивающей и экивокальной поверхностей для случая, когда $a>0$ и $f>0$ иллюстрирует рис. 2 для значений параметров $a=1$, $b=-1$, $c=d=0$, $g=-2/3$, $f=1/3$.

Жирные сплошная и пунктирные линии на рис. 2 делят полуплоскость $x>0$ на три области, в каждой из которых обобщенное решение задается своей формулой. В областях, примыкающих к оси $y$, обобщенное решение задачи (15), (16) задается формулами $S_1(x,y)$ и $S_2(x,y)$ соответственно для областей, лежащих выше и ниже рассеивающей кривой $0A$.

Опишем процедуру построения значений функции обобщенного решения $S(x,y)=S_{eq1}(x,y)$ в области выше экивокальной кривой $AB$. Координаты точки на экивокальной кривой $AB$ будем обозначать через $\xi,\ \eta,$ т.е. $\xi=x,\ \eta=y.$ Значения функции

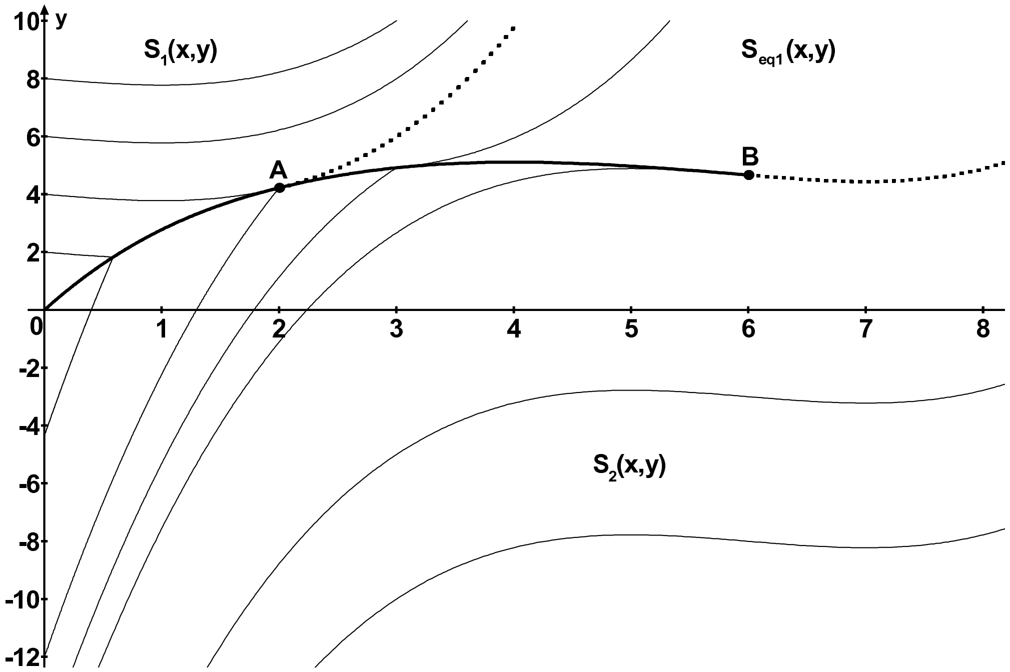



Рис. 2. $0A$ - рассеивающая поверхность, $AB$ - экивокальная поверхность

$S_{eq1}(\,\xi,\,\eta)$ на экивокальной кривой (42) определяются соотношениями

$$S_{eq1}(\,\xi,\,\eta) = S_2(x_1^*, y_1^*) + \int\limits_{x_1^*}^{\xi} (p + q\,H_q)\,dx =$$

$$= S_2(x_1^*, y_1^*) + \int\limits_{x_1^*}^{\xi} (-\varphi(q_{eq1}(x)) + f\eta(x) + q_{eq1}(x)\,\varphi_q(q_{eq1}(x))\,dx, \tag{44}$$

$$\eta = y_1^* + \int\limits_{x_1^*}^{\xi} H_q\,dx = y_1^* + \int\limits_{x_1^*}^{\xi} \varphi_q(q_{eq1}(x))\,dx, \qquad \xi \in [x_1^*, x_{m1}].$$

Из области, прилегающей снизу к экивокальной кривой $AB$, регулярные характеристики приходят на нее, функция обобщенного решения $S(x,y)$ в этой области совпадает с функцией $S_2(x,y)$. В области, прилегающей сверху к экивокальной кривой $AB$, строится семейство характеристик $y_{eq1x}(x,\xi)$ согласно уравнениям (20) касательное к экивокальной поверхности $AB$

$$y_{eq1x}(x,\xi) = a\,(x-\xi)^3 f^2 + (3\,aq_{eq1}(\xi) + b)(x-\xi)^2 f +$$
$$+ (3\,aq_{eq1}^2(\xi) + 2\,bq_{eq1}(\xi) + c)(x-\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in [x_1^*, x_{m1}], \quad \xi \le x. \tag{45}$$

Решение в этой области обозначим $S_{eq1}(x,y)$. Семейство характеристик $y_{eq1x}(x,\xi)$ для рис. 2 задается формулами

$$y_{eq1x}(x,\xi)=\frac{x^3}{9}-\frac{x^2\,\xi}{2}+\frac{3\,x\,\xi^2}{4}-\frac{\xi^3}{3}+x^2-3\,x\,\xi+\frac{3\,\xi^2}{2}+\frac{8\,x}{3}+\frac{2}{3}.$$

Построение функции $S_{eq1}(x,y)$ для задачи (15), (16) и функции $v_{eq1}(x,y)$ для соответствующей задачи (13), (14) проводится интегрированием вдоль семейства характеристик $y_{eq1x}(x,\xi)$

$$S_{eq1}(x,y)=S_{eq1}(\xi,\eta(\xi))+\int\limits_{\xi}^{x}(p+q\,H_q)\,dx'=S_{eq1}(\xi,\eta(\xi))+$$

$$+\int\limits_{x_1^*}^{\xi}(f y_{eq1x}(x',\xi)-\varphi(q_{eq1x}(x',\xi))+q_{eq1x}(x',\xi)\,\varphi_q(q_{eq1x}(x',\xi))\,dx', \tag{46}$$

$$v_{eq1}(x,y)=q_{eq1x}(x,\xi),\ \ q_{eq1x}(x,\xi)=q_{eq1}(\xi)+f\,(x-\xi)=\frac{1-g-3\,f\,\xi}{2}-\frac{b}{2a}+f\,x,$$

$$x\in[\xi,x_{m1}],\ \ y=y_{eq1x}(x,\xi),\xi\in[x_1^*,x_{m1}].$$

**Случай a<0, f<0**. Эквивокальная кривая, исходящая из точки $(x_2^*,y_2^*)$ при $a<0$ и $f<0$, определяется решением задачи Коши

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=\varphi_q,\quad \frac{dq}{dx}=\frac{(3\,afx+3\,a+2\,b+3\,ag+3\,aq)\,f}{2(3\,aq+b)},\\ &x=x_2^*,\qquad y=y_2^*,\qquad q=q_2^*=q(x_2^*)=g-1+fx_2^*=-\frac{2a+b}{3a}.\end{aligned} \tag{47}$$

Система (47) имеет аналитическое решение, удовлетворяющее Лемме 1 на отрезке $[x_2^*,x_{m2}]$

$$\begin{aligned}&y_{eq2}(x)=y_2^*-\frac{2(\varphi(q)-\varphi(q_2^*))}{f},\quad q_{eq2}(x)=q_2^*-\frac{f}{2}(x-x_2^*)=\frac{-1-g-fx}{2}-\frac{b}{2a},\\ &x_{m2}=-\frac{3\,ag+3\,a+b}{3fa},\quad y_{m2}=y_{eq2}(x_{m2}).\end{aligned} \tag{48}$$

Действительно, проверочная функция $\mu(\tau)$ для эквивокальной поверхности (48) имеет вид

$$\mu(\tau)=\mu_2(\tau)=\frac{(1+\tau)\,(3\,xfa+3\,a+3\,ag+b)}{4}\leq 0,\quad \tau\in[-1;1]. \tag{49}$$

Равенство $\mu_2(\tau)=0$ при $\tau\neq-1$ достигается для $x=x_{m2}$, где $x_{m2}$ – абсцисса точки $(x_{m2},y_{m2})$, в которой она заканчивается, поскольку при $x>x_{m2}$ неравенство $\mu_2(\tau)\leq 0$ для $\tau\neq-1$ будет нарушено. В этой точке числитель и знаменатель правой части второго уравнения из (47) обращаются в ноль и именно в этой точке происходит совпадение значений $q_1(x), q_{eq2}(x)$ а также значений производных функций $y_{xak1}(x)$ и $y_{eq2}(x)$ из (48), т.е. происходит касание эквивокальной кривой характеристикой из верхнего семейства парабол. Далее эквивокальная кривая переходит в регулярную характеристику. Построение функций $S_{eq2}(\xi,\eta)$, $S_{eq2}(x,y)$, $v_{eq2}(x,y)$ для задач (15),(16) и (13),(14) проводится аналогично случаю $a>0, f>0$

$$
\begin{gathered}
S_{eq2}(\,\xi,\,\eta){=}S_2(x_2^*,y_2^*){+}\int\limits_{x_2^*}^{\xi}(-\varphi(q_{eq2}(x)){+}f\eta(x){+}q_{eq2}(x)\,\varphi_q(q_{eq2}(x))\,dx,\\
\eta{=}y_2^*{+}\int\limits_{x_2^*}^{\xi}\varphi_q(q_{eq2}(x))\,dx,\quad S_{eq2}(x,y)=S_{eq2}(\xi,\eta(\xi)){+}\\
{+}\int\limits_{x_2^*}^{\xi}(fy_{eq2x}(x',\xi){-}\varphi(q_{eq2x}(x',\xi)){+}q_{eq2x}(x',\xi)\,\varphi_q(q_{eq2x}(x',\xi))\,dx',\\
v_{eq2}(x,y){=}q_{eq2x}(x,\xi),\;\; q_{eq2x}(x,\xi)=q_{eq2}(\xi)+f\,(x-\xi),\;\; x{\in}[\xi,x_{m2}],\\
y{=}y_{eq2x}(x,\xi),\xi\in[x_2^*,x_{m2}].
\end{gathered}
\tag{50}
$$

Изложенное сформулируем в виде Леммы 3.

**Лемма 3.** Для значений параметров (36) полуплоскость $x\geq 0$ делится на три области кривыми, элементами которых служат: ось ординат, рассеивающая кривая (28)

$$
y{=}y_{disp}(x),\;\; x{\in}[0,x^*],\quad x^*{=}\begin{cases} x_1^*, & a>0,\;\; f>0\\ x_2^*, & a<0,\;\; f<0\end{cases},\;\; y^*{=}y_{disp}(x^*),
$$

экивокальная кривая из (42),(48)

$$
y{=}y_{eq}(x),\;\; x{\in}[x^*,x_m],\quad y_{eq}(x)=\begin{cases} y_{eq1}(x), & a>0,\;\; f>0\\ y_{eq2}(x), & a<0,\;\; f<0\end{cases},
$$

$$
x_m=\begin{cases} x_{m1}, & a>0,\;\; f>0\\ x_{m2}, & a<0,\;\; f<0\end{cases},
$$

и две регулярные характеристики $y_1(x)$, $x{\in}[x^*,+\infty)$, $y_2(x)$, $x{\in}[x_m,+\infty)$, $y_m{=}y_{eq}(x_m)$

$$
y_1(x)=\begin{cases} y_{xak1}(x,x^*,y^*), & a>0,\;\; f>0\\ y_{xak2}(x,x^*,y^*), & a<0,\;\; f<0\end{cases},
$$

$$
y_2(x)=\begin{cases} y_{xak2}(x,x_m,y_m), & a>0,\;\; f>0\\ y_{xak1}(x,x_m,y_m), & a<0,\;\; f<0\end{cases}.
$$

В двух областях, примыкающих к оси $y$, соответственно для верхней и нижней областей обобщенное решение задачи (15), (16) задается формулами $S_1(x,y)$ и $S_2(x,y)$ из (27), а решение задачи (13), (14) при $\rho_1{=}g{+}1$, $\rho_2{=}g{-}1$ дается соотношениями (34). В третьей области, примыкающей к экивокальной кривой, обобщенное решение задач (15), (16) и (13), (14) задается формулами из (46) для $a>0, f>0$ и (49) для $a<0, f<0$.

## 7. Отсутствие фокальной поверхности

Покажем что в задачах, описываемых уравнением (15), независимо от граничных условий фокальная поверхность отсутствует. На фокальной поверхности должны быть выполнены необходимые условия - само уравнение (6), условие непрерывности $w(x,y){=}S^{(1)}(x,y){-}S^{(2)}(x,y){=}0$, условия касания регулярными характеристиками поверхности $w(x,y){=}0$, т.е. должны быть выполнены условия касания с обеих ее сторон. Выписывание этих условий приводит к системе уравнений относительно векторов $(p_1,q_1)$,

$(p_2, q_2)$, $(p_i = \partial S^{(i)}/\partial x,\ q_i = \partial S^{(i)}/\partial y,\ i = 1, 2)$

$$\left.\begin{aligned} &p_1 + \varphi(q_1) - fy = 0; \quad p_2 + \varphi(q_2) - fy = 0,\\ &p_1 - p_2 + (q_1 - q_2)\varphi_q(q_i) = 0,\\ &\quad \varphi_q(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \quad i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Фокальную поверхность можно строить, решая систему уравнений ([13])

$$\begin{cases} \dot{y} = H_{q_1} = \bar{H}_{q_2}, \quad \dot{S} = q_1 H_{q_1} - H^* = q_2 \bar{H}_{q_2} - \bar{H}^*, \quad H^* = \varphi(q_1) - fy\\ \dot{q_1} = K(x, y, q_1, q_2), \quad \dot{q_2} = K(x, y, q_2, q_1),\\ K(x, y, q_1, q_2) = \dfrac{[H_x + H_y\, H_{q_1}]^*}{(q_1 - q_2)H_{q_1 q_1}} - \dfrac{H_{q_1 x} + H_{q_1 y}\, H_{q_1}}{H_{q_1 q_1}}. \end{cases} \tag{52}$$

Черта сверху означает замену аргументов $p_1, q_1$ на $p_2, q_2$, квадратные скобки со звездочкой означают скачок функции на предполагаемой фокальной поверхности $\Gamma_f$, т.е. $[f]^* = f(p_1, q_1) - f(p_2, q_2)$.

Рассмотрение системы (51) приводит к системе двух уравнений относительно $q_1, q_2$

$$(q_1 - q_2)^2\,(2\,aq_1 + b + aq_2) = 0$$
$$-\,(q_1 - q_2)^2\,(aq_1 + b + 2\,aq_2) = 0,$$

имеющей только совпадающие решения $q_1 \equiv q_2$. Поэтому система (51) имеет только решения $p_1 \equiv p_2$, $q_1 \equiv q_2$, т.е. выполнение условий (51) приводит к гладкости искомого решения $S(x, y)$ и фокальная поверхность отсутствует.

## 8. Интегральная воронка

Пусть теперь условие (26) нарушено, т.е. выполнено условие

$$\left[\begin{array}{l} 3ag + b > 0,\\ 3ag + b = 0, \quad fa > 0. \end{array}\right. \tag{53}$$

Как было отмечено в § 5 между регулярными траекториями с значениями $q_0 = \pm 1 + g$ в окрестности начала координат возникает область, незаполненная регулярными траекториями. Эту область пытаемся заполнить регулярными траекториями (22), не удовлетворяющим условиям (23). На рис. 3 приведен пример такого удачного заполнения этой области регулярными характеристиками с значениями $q_0 \in [-1 + g, +1 + g]$ для случая $a = 0$. Под рисунком приведены соответствующие значения параметров. Для значений $a = 0$ всегда удается заполнить все пространство регулярными характеристиками, выходящими из оси ординат.

При $a \neq 0$ может возникать ситуация когда между регулярными траекториями, выходящими из начала координат со значениями $q_0 = \pm 1 + g$, возникает пространство, которое не удается заполнить регулярными траекториями (22). Пример такой ситуации приведен на рис. 4. Параметры выбраны таким образом, чтобы в (25) линейный член по $x$ обращался в 0, а квадратичный был положителен, т.е. $3ag + b = 0, fa > 0$. Для этих значений параметров регулярные характеристики с значениями $q_0 = \pm 1 + g$ имеют общую касательную в начале координат и нет других регулярных характеристик с такой же касательной, поскольку в (22) линейный член по $x$ содержит квадратичный множитель по $q_0$. Отсюда следует, что в данном случае нельзя выбором $q_0$ обеспечить заполнение всей области $x > 0$ регулярными характеристиками, выходящими из начала координат. В п. 6 было доказано отсутствие фокальной поверхности. Поэтому для таких значений параметров методика, применяемая в данной работе, решения не дает.

Очевидно, что если коэффициенты при линейном и квадратичном членах по $x$ в (22) суть возрастающие функции от $q_0$ на отрезке $[-1 + g, 1 + g]$, то выпускаемые из начала

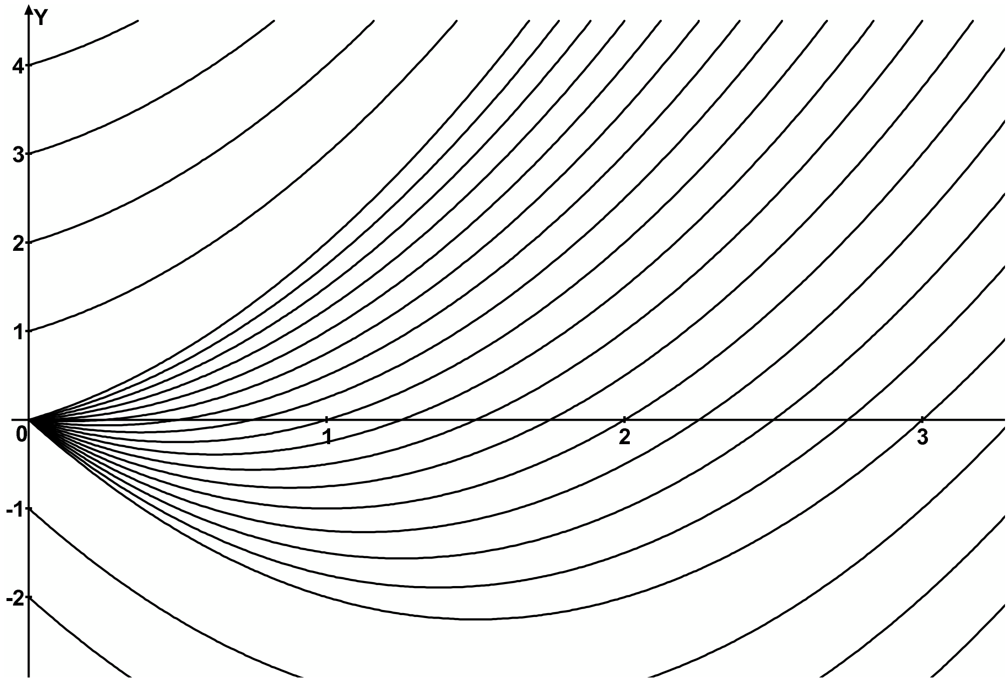



Рис. 3. Интегральная воронка: $a = 0$, b=1,c=d=0, f=1, g=-0.5

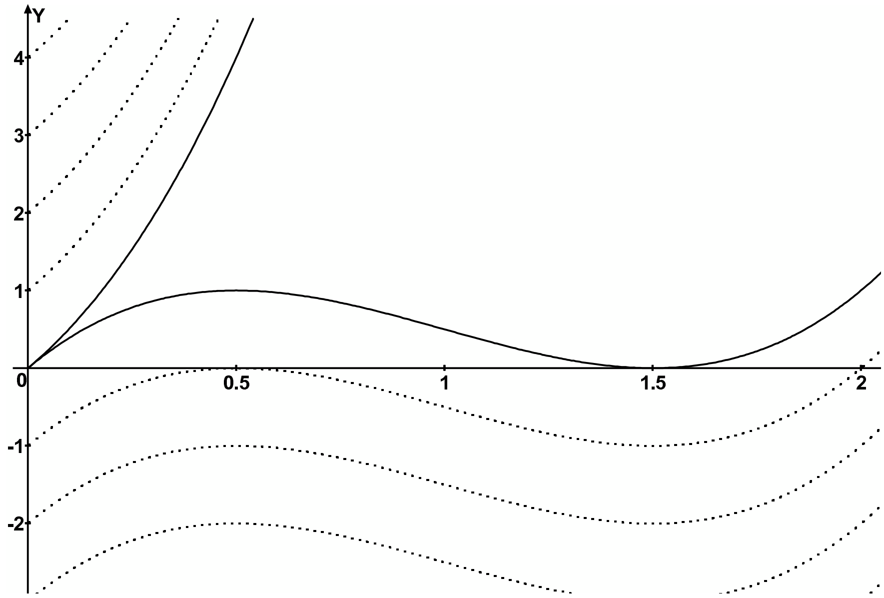



Рис. 4. $a = 2, b = 3, c = 0, f = 1, g = -0.5$

координат регулярные характеристики с значениями $q_0 \in [-1+g, +1+g]$ заполняют область, образуемую регулярными траекториями, выходящими из начала координат со значениями $q_0 = \pm 1 + g$. Лемма 4 описывает построение решения в этом случае.

**Лемма 4.** Пусть параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\left[\begin{array}{lll} g > +1 - \dfrac{b}{3\,a} & \textit{при} \quad a > 0, & f > 0, \\ g < -1 - \dfrac{b}{3\,a} & \textit{при} \quad a < 0, & f < 0. \end{array}\right.$$

Тогда регулярные характеристики выходящие из оси ординат однозначно заполняют всю областm $x > 0$. Полуплоскость $x \geq 0$ делится на три области кривыми, элементами которых служат: ось ординат и две регулярные кривые $y_{xak1}(x, 0, 0)$, $y_{xak2}(x, 0, 0)$. В двух областях, примыкающих к оси $y$, соответственно для верхней и нижней областей обобщенное решение задачи (15),(16) задается формулами $S_1(x, y)$ и $S_2(x, y)$ из (27), а решение задачи (13), (14) при $\rho_1{=}g{+}1$, $\rho_2{=}g{-}1$ дается соотношениями (34). В третьей области, расположенной между кривыми $y_{xak1}(x, 0, 0)$, $y_{xak2}(x, 0, 0)$, обобщенные решения задач (15),(16) и (13), (14) задаются формулами $S_3(x, y)$, $v_3(x, y)$ в неявном виде

$$S_3(\,x, y){=}\int\limits_0^x (p{+}q\,H_q)\,dx{=}\int\limits_0^x (f y_3(x, q_0){-}\varphi(q_3(x, q_0)){+}q_3(x, q_0)\,\varphi_q(q_3(x, q_0)))\,dx,$$

$$v_3(x, y) = q_3(x, q_0), \quad q_3(x, q_0){=}q_0{+}f\,x,$$

$$y{=}y_3(x, q_0){=}a\,x^3 f^2{+}(3\,aq_0{+}b)x^2 f{+}(3\,aq_0{}^2{+}2\,bq_0{+}c)x, \quad q_0 \in [g{-}1, g{+}1]$$

На рис. 5 приведен пример построения интегральной воронки для рассматриваемого случая. Заметим, что в случае не выполнения условий Леммы 4 и выполнения условий (36) за экивокальной поверхностью также следует интегральная воронка (волна разрежения).

## 9. Выводы

Задача Коши для известного квазилинейного уравнения первого порядка с правой частью, независящей от искомой функции и разрывным начальным условием, сведена к задаче Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с непрерывным начальным условием. К этой задаче предложено применить метод сингулярных характеристик, разработанный А.А.Меликяном для игровых задач и задач управления. Эффективность методики продемонстрирована на примере квазилинейной задачи (3.1), (3.2) для случая когда исходная функция $\varphi$, входящая в уравнение представляет собой кубический полином от искомой функции, а граничное условие задается в виде "повышающейся"ступеньки. Выделены области параметров, для которых построение обобщенного решения квазилинейной задачи (3.1), (3.2) возможно и выписана подробная процедура построения решения. Соответствующие формулы для построения решения задачи (3.1), (3.2), так и для построения решения вспомогательной начальной задачи Гамильтона-Якоби (3.3),(3.4), приведены в леммах 2-4.

Описанная методика построения обобщенного решения применялась в работах [20], [21].

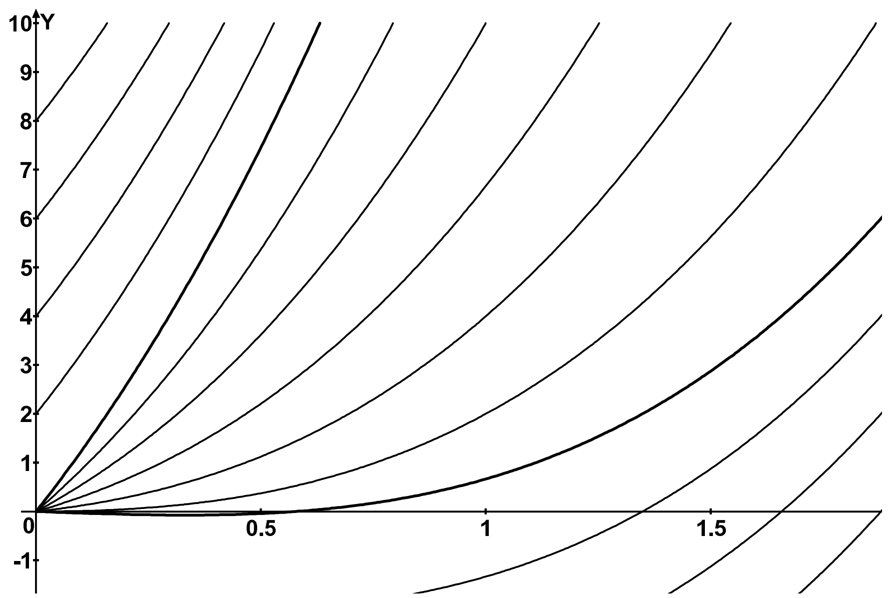



Рис. 5. Интегральная воронка: $a = 1$, b=1, c=d=0, f=1, g=2/3

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнения и их приложения к газовой динамике.* М.: Наука. 1968. 592 с.
2. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир. 1977. 624 с.
3. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М.: Наука. 1989. 336 с.
4. J. Burgers *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence* // Nederl. Alcad. Wefensh. Proc. Acad. Sci.Amsterdam 43. 1940. P. 3–12.
5. Олейник О.А. *Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений* // УМН. 12:3(75). 1957. С. 3–73.
6. Кружков С.Н. *Квазилинейные уравнения первого по рядка со многими независимыми переменными* // Матем. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 228—255.
7. Панов Е.Ю. *О классах корректности локально ограниченных обобщённых энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка* // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Том 12, вып. 5. С. 175–188.
8. Берков Н.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б., Пушкарь Е.А., Шишанин О.Е.; Под ред. засл. раб. ВШ РФ, проф.Миносцева В.Б. *Курс высшей математики: Учебное пособие для ВТУЗов. Часть 3.* М.: МГИУ. 2007.494 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.* М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 416 с.
10. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. *Уравнения с частными производными первого порядка: Учебное пособие.* М.: МГУ. 1999. 94 с.
11. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
12. P.L. Lions and P.E. Souganidis *Differential Games, Optimal Control and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Bellman's and Isaacs' Equations* // SIAM Journal of Control and Optimization. Vol.23, No 4. 1985. P. 566–583.

13. A.A. Melikyan *Generalized Characteristics of First Order PDEs.* Applications in Optimal Control and Differential Games Boston: Birkhauser. 1998. 320 p.
14. M.G. Crandall, P.L. Lions *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations* // Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1983), P. 1–42. MR0690039
15. Колпакова Е.А. *Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона-Якоби и законов сохранения* // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 16, № 5. 2010. С. 95–102.
16. Кузнецов Н.Н., Рождественский Б.Л. *Построение обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения* // УМН. 14:2(86). 1959. С. 211–215.
17. Корнеев В.А. *Построение обобщенного решения уравнения в дивергентной форме методом характеристик|* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. №12. С. 1664–1673.
18. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964. 830 с.
19. Меликян А.А. *О построении слабых разрывов в задачах оптимального управления и дифференциальных игр* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. №1. С. 45–50.
20. Корнеев В.А., Меликян А.А. *Построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби методом характеристик* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. №6. С. 168–177.
21. Корнеев В.А. *Численное построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №1. С. 92–98.

Всеслав Александрович Корнеев,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН),
просп. Вернадского 101, корп. 1,
119526, г. Москва, Россия
E-mail: `korneev@ipmnet.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 96-120.

УДК 517.5

# ЗАМКНУТОСТЬ МНОЖЕСТВА СУММ РЯДОВ ДИРИХЛЕ.

**А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА**

**Аннотация.** В работе рассматриваются ряды Дирихле. Изучается проблема замкнутости множества сумм таких рядов в пространстве функций аналитических в выпуклой области комплексной плоскости с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. Получены необходимые и достаточные условия, при которых каждая функция из замыкания линейной оболочки системы экспонент с положительными показателями представляется рядом Дирихле. Эти условия формулируются только при помощи геометрических характеристик последовательности показателей и выпуклой области.

**Ключевые слова:** экспонента, выпуклая область, ряд Дирихле, целая функция, инвариантное подпространство.

**Mathematics Subject Classification:** 41A05, 41A30.

## 1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. В работе рассматриваются ряды Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z). \qquad (1)$$

Известно (см., например, [1], гл. II, §1, п. 4), что при некотором естественном условии на показатели $\lambda_k$ ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на компактах в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < \gamma\}$ к аналитической функции и расходится в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez > \gamma\}$. Число $\gamma$ называемое абсциссой сходимости, вычисляется по формуле, которая является аналогом формулы Коши-Адамара для степенных рядов (см., например, [1], гл. II, §1, п. 4, теорема 2.1.2). Отметим еще, что разложение функций в ряд Дирихле всегда единственное (см., например, [1], гл. II, §1, п. 3).

Пусть $D$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ обозначает пространство функций, аналитических в $D$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из $D$. Цель работы — выяснить условия, при которых совокупность сумм рядов (1), полуплоскости сходимости которых содержат область $D$, является замкнутым подмножеством пространства $H(D)$.

Эта совокупность содержит линейную оболочку системы $\mathcal{E} = \{\exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$, а сама является частью подпространства $W(\Lambda, D)$ — замыкания в $H(D)$ линейной оболочки $\mathcal{E}$. Подпространство $W(\Lambda, D)$ замкнуто и инвариантно относительно оператора дифференцирования. Система $\mathcal{E}$ представляет из себя набор собственных функций этого оператора в $W(\Lambda, D)$, а последовательность $\Lambda$ является его спектром. Из определения подпространства $W(\Lambda, D)$ сразу вытекает, что оно допускает спектральный синтез, т.е. каждая его функция есть предел линейных комбинаций собственных функций. Легко заметить, что

A.S. Krivosheyev, O.A. Krivosheyeva, A closedness of set of Dirichlet series sum.

© Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. 2013.

Работа выполнена при поддержке программы ФЦП (соглашение № 14.B37.21.0358).

*Поступила 28 мая 2013 г.*

замкнутость в $H(D)$ множества сумм рядов (1) эквивалентна тому, что каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1), который равномерно сходится на компактных подмножествах области $D$. Если $W(\Lambda, D)$ нетривиально (т.е. система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$), и выполнено последнее, то говорят, что в подпространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Двойственной к проблеме фундаментального принципа в нетривиальном замкнутом инвариантном подпространстве в $H(D)$, допускающем спектральный синтез, является проблема интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в области $D$. Исследования обеих проблем, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Обзор основных результатов, полученных в ходе этих исследований, имеется в работах [2] и [3]. Критерий фундаментального принципа (а вместе с ним и интерполяции) в произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространствах, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях получен в работах [3] и [4]. Однако этот критерий формулируется в терминах существования некоторого специального семейства целых функций, обращающихся в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, и имеющих подходящие оценки снизу. В общем случае (особенно для неограниченных областей $D$) остается открытым вопрос о том, при каких условиях на последовательность $\Lambda$ и область $D$ существует подобное семейство функций.

В данной работе получено полное решение проблемы замкнутости множества сумм рядов (1) для произвольной выпуклой области $D$ и, в частности, проблемы фундаментального принципа в случае положительного спектра. При этом, в отличие от работы [3], используются простые геометрические характеристики последовательности $\Lambda$.

Во втором параграфе собраны вспомогательные результаты. В частности, строятся указанные выше последовательности целых функций (леммы 7,9), а также целая функция из $W(\Lambda, \mathbb{C})$, которая не представляется рядом (1) ни в каком открытом подмножестве плоскости (лемма 3).

Основные результаты работы приведены в третьем параграфе (теоремы 1-4). В частности, здесь доказывается, что множество сумм рядов Дирихле, сходящихся в заданной полуплоскости, замкнуто тогда и только тогда, когда $S_\Lambda > -\infty$. Величина $S_\Lambda$ введена в работе [3] (ее определение приводится во втором параграфе). Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна (см., например, [1], гл. II, §6, п. 2), но при этом, в отличие от последнего, эффективна для любой комплексной последовательности.

## 2. Предварительные результаты

Нам понадобятся некоторые сведения из теории целых функций экспоненциального типа, т.е. функций $f$, удовлетворяющих оценке: $\ln|f(z)| \leqslant A + B|z|$, $z \in \mathbb{C}$, где $A, B > 0$ зависят от $f$. Верхним и нижним индикаторами $f$ (субгармонической функции $\ln|f|$) называются соответственно функции

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t}, \quad \underline{h}_f(\lambda) = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(\lambda,\delta)} \frac{\ln|f(tz)|}{t} dxdy, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $z = x + iy$. Из этих определений и теоремы Хартогса о верхнем пределе семейства субгармонических функций нетрудно получить неравенство $\underline{h}_f(\lambda) \leqslant h_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Говорят (см. [5], гл. III), что $f$ имеет (вполне) регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t\to\infty, t\notin E} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $E$ — множество нулевой относительной меры на луче $(0, +\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0, r)$ бесконечна мала по сравнению с $r$ при $r \to +\infty$. Имеется ряд других эквивалентных этому определений регулярности роста. Приведем одно из них.

Функция $f$ называется (см. [6], гл. 4, определение 4.1) функцией регулярного роста, если $\underline{h}_f(\lambda) = h_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Верхний индикатор $h_f$ является выпуклой положительно однородной порядка один функцией, которая совпадает с опорной функцией выпуклого компакта $K$ (точнее говоря, комплексно сопряженного с $K$ компакта), называемого сопряженной диаграммой $f$ (см., напр., [7], гл. I, §5, теорема 5.4 (Полиа)):

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda) = \sup_{z \in K} Re(\lambda z),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел с единственной предельной точкой $\infty$. Символом $n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)$ обозначим число точек $\lambda_k$, попавших в сектор $\{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t \in (0, r)\}$. Говорят (см. [5], гл. II, §1), что $\Lambda$ имеет угловую плотность (при порядке один), если для всех $\varphi_1, \varphi_2$ за исключением, быть может, счетного множества существует предел

$$\tau(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \lim_{r \to \infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)}{r}.$$

Множество $\Lambda$ называется правильно распределенным, если оно имеет угловую плотность и существует

$$\lim_{r \to \infty} \sum_{|\lambda_k| < r} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Согласно теореме 4 главы III книги [5] функция $f$ имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее нулевое множество (с учетом кратностей) является правильно распределенным. При этом, если $K$ — сопряженная диаграмма $f$, то за исключением, быть может, счетного числа значений $\varphi_1, \varphi_2$ верно равенство (см. [5], гл. II, §1, формула (2.07))

$$\tau(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \frac{1}{2\pi} s(\varphi_1, \varphi_2, K), \tag{2}$$

где $s(\varphi_1, \varphi_2, K)$ — длина дуги границы $\partial K$, заключенная между точками опоры $z(\varphi_1) \in \partial K$ и $z(\varphi_2) \in \partial K$ соответственно опорных прямых $l(\varphi_1) = \{z : Re(ze^{i\varphi_1}) = H_K(e^{i\varphi_1})\}$ и $l(\varphi_2) = \{z : Re(ze^{i\varphi_2}) = H_K(e^{i\varphi_2})\}$. За исключением не более чем счетного числа значений $\varphi$ (соответствующих прямолинейным участкам границы) опорная прямая $l(\varphi)$ имеет единственную точку опоры $z(\varphi)$. Из двух дуг, соединяющих точки $z(\varphi_1)$ и $z(\varphi_2)$, выбирается та, у которой каждая ее точка является точкой опоры некоторой прямой $l(\varphi)$ (зависящей от нее) со значением параметра $\varphi$ из отрезка $[\varphi_1, \varphi_2]$. В случае, когда $K$ — отрезок длины $\tau$ (и только в этом случае), величина дуги $s(\varphi_1, \varphi_2, K)$, где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ отличны от двух противоположных чисел $\varphi_0$ и $-\varphi_0$, принимает лишь одно из трех возможных значений: 0, если интервал $(\varphi_1, \varphi_2)$ не содержит ни одно из этих чисел, $\tau$, если он содержит только одно из них, и $2\tau$, если $-\varphi_0, \varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

Пусть $D$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H^*(D)$ — пространство сильно сопряженное к $H(D)$. Преобразование Лапласа $f(\lambda) = \nu(\exp(\lambda z))$ устанавливает изоморфизм (см., например, [8], гл. III, §12, теорема 12.3) между $H^*(D)$ и пространством $P_D$, состоящим из целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в области $D$. По теореме Хана-Банаха, неполнота системы $\mathcal{E} = \{\exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ в $H(D)$ (т.е. нетривиальность $W(\Lambda, D)$) равносильна существованию ненулевого линейного непрерывного функционала $\nu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на элементах системы. Таким образом, неполнота $\mathcal{E}$ равносильна существованию функции $f \in P_D$, которая обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $n(r, \Lambda)$ обозначает число ее членов, попавших в полуинтервал $(0, r]$.

Говорят, что $\Lambda$ имеет плотность $\tau(\Lambda)$ (измерима), если существует предел

$$\tau(\Lambda) = \lim_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Максимальной плотностью последовательности $\Lambda$ называется величина

$$\tau_0(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to 0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Отметим, что согласно лемме из параграфа E3 главы VI книги [9] верхний предел по $\delta \to 0$ в определении $\tau_0(\Lambda)$ можно заменить на предел (т.е. он всегда существует). Положим

$$\underline{\tau}(\Lambda) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}, \quad \overline{\tau}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Величины $\underline{\tau}(\Lambda)$ и $\overline{\tau}(\Lambda)$ называются соответственно нижней и верхней плотностью последовательности $\Lambda$. Последняя является измеримой тогда и только тогда, когда $\underline{\tau}(\Lambda) = \overline{\tau}(\Lambda)$. Нетрудно заметить, что верны неравенства

$$\underline{\tau}(\Lambda) \leqslant \overline{\tau}(\Lambda) \leqslant \tau_0(\Lambda). \tag{3}$$

Первое вытекает непосредственно из определений. Второе для случая $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$ следует из соотношений

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \geq \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{\delta r} - \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} =$$

$$= \frac{\overline{\tau}(\Lambda)}{\delta} - (1-\delta)\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{(1-\delta)\delta r} = \frac{\overline{\tau}(\Lambda)}{\delta} - (1-\delta)\frac{\overline{\tau}(\Lambda)}{\delta} = \overline{\tau}(\Lambda),\ \delta > 0.$$

Если же $\overline{\tau}(\Lambda) = +\infty$, то из последовательности $\Lambda$ нетрудно выделить подпоследовательность $\Lambda'$ со сколь угодно большой конечной верхней плотностью. Тогда по доказанному получаем: $\overline{\tau}(\Lambda') \leqslant \tau_0(\Lambda') \leqslant \tau_0(\Lambda)$. Следовательно, $\tau_0(\Lambda) = +\infty$, т.е. неравенство (3) верно и в этом случае. Схожие выкладки показывают, что в случае, когда последовательность имеет плотность $\tau(\Lambda)$, верно равенство $\tau_0(\Lambda) = \tau(\Lambda)$. В общем случае второе неравенство в (3) может быть строгим. Действительно, рассмотрим следующий пример. Пусть $\Lambda = \cup_{m=1}^{\infty}\Lambda_m$, где $\Lambda_m = \{\lambda_k, k(m) \leqslant k < k(m+1)\}$, $\lambda_{k(m)+j} = 10^m + j$, $0 \leqslant j < k(m+1) - k(m)$, $m = 1, 2, \ldots$, и $k(1) = 1$, $k(m+1) - k(m) = 10^{m-1}$ при $m > 1$. Непосредственным подсчетом нетрудно получить соотношения: $\overline{\tau}(\Lambda) \leqslant 1/9$, $\tau_0(\Lambda) = 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — комплексная последовательность. Следуя работе [3], положим

$$q_{\Lambda}^{j}(z,\delta) = \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|), k\neq j} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right).$$

Здесь $B(w,r)$ — открытый круг с центром в $w$ и радиуса $r$. Модуль функции $q_{\Lambda}^{j}(z,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|)$, $k \neq j$, около $z$. В случае, когда такие точки отсутствуют, считаем, что $q_{\Lambda}^{j}(z,\delta) \equiv 1$. Отметим, что модуль каждого из сомножителей в определении $q_{\Lambda}^{j}$ в круге $B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$ (для $\delta \in (0,1)$), т.е. при $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1 \leqslant \delta_2$, то число сомножителей в определении $q_{\Lambda}^{j}(z,\delta_1)$ не превосходит числа сомножителей в определении $q_{\Lambda}^{j}(z,\delta_2)$, и каждый из сомножителей для $q_{\Lambda}^{j}(z,\delta_1)$ по модулю не меньше соответствующего сомножителя для $q_{\Lambda}^{j}(z,\delta_2)$. Таким образом, если $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 < 1/3$, то $|q_{\Lambda}^{j}(z,\delta_1)| \geq |q_{\Lambda}^{j}(z,\delta_2)|$, $z \in B(\lambda_j, \delta_2|\lambda_j|)$. Положим $S_{\Lambda} = 0$, если $\Lambda$ состоит из конечного числа элементов, и

$$S_{\Lambda} = \lim_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln|q_{\Lambda}^{k}(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|}$$

в противном случае. Это определение корректно, поскольку согласно последнему неравенству предел по $\delta$ всегда существует. В силу сказанного выше $S_\Lambda \leqslant 0$. Отметим, что коэффициент 3 в определении $q_\Lambda^j$ выбран лишь для удобства (см. [3], замечание 1 к теореме 5.1). Он обеспечивает неположительность величины $S_\Lambda$. Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна, но при этом эффективна для любой комплексной последовательности (а не только для измеримой положительной последовательности и комплексной последовательности нулевой плотности). Наряду с $S_\Lambda$ введем еще величину

$$\tilde{S}_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{\delta|\lambda_k|}.$$

Как и для $S_\Lambda$, верно неравенство $\tilde{S}_\Lambda \leqslant 0$. Если $\tilde{S}_\Lambda$ конечна, то, очевидно, $S_\Lambda = 0$. В качестве примера рассмотрим последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Учитывая неравенство $n! \geq (n/3)^n$, имеем:

$$|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)| \geq \prod_{\lambda_m\in B(\lambda_k,\delta\lambda_k),m\neq k}\left|\frac{\lambda_m-\lambda_k}{3\delta\lambda_m}\right| \geq \frac{(m(k,\delta)!h^{m(k,\delta)})^2}{(3\delta(1+\delta)\lambda_k)^{2m(k,\delta)}} \geq \frac{(m(k,\delta)h)^{2m(k,\delta)}}{(9\delta(1+\delta)\lambda_k)^{2m(k,\delta)}},$$

где $m(k,\delta)$ — максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $m(k,\delta)h < \delta\lambda_k$. Следовательно,

$$\tilde{S}_\Lambda \geq \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{2m(k,\delta)\ln(m(k,\delta)h/9\delta(1+\delta)\lambda_k)}{\delta\lambda_k} \geq -\frac{2\ln 9}{h}.$$

**Лемма 1.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $\tilde{S}_\Lambda > -\infty$. Тогда максимальная плотность $\tau_0(\Lambda)$ конечна.*

**Доказательство.** Пусть $\delta \in (0,1)$. Используя определение $q_\Lambda^j$, получаем:

$$\ln|q_\Lambda^j(\lambda_j,\delta)| = \ln\left|\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_j,\delta\lambda_j),k\neq j}\left(\frac{\lambda_j-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)\right| \leqslant \ln\left|\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_j,\delta\lambda_j),k\neq j}\left(\frac{\delta\lambda_j}{3\delta\lambda_k}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left(\frac{\lambda_j}{3(1-\delta)\lambda_j}\right)^{(m(j,\delta)-1)} = -(m(j,\delta)-1)\ln(3(1-\delta)),$$

где $m(j,\delta)$ — число точек $\lambda_k$, попавших в круг $B(\lambda_j,\delta\lambda_j)$, т.е. $m(j,\delta) = n((1+\delta)\lambda_j,\Lambda) - n((1-\delta)\lambda_j,\Lambda)$, если точка $(1+\delta)\lambda_j$ не принадлежит $\Lambda$, и число $m(j,\delta)$ на единицу меньше в противном случае. Следовательно, имеем:

$$\tilde{S}_\Lambda = \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{\delta\lambda_k} \leqslant \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{j\to\infty}\frac{-\ln(3(1-\delta))m(j,\delta)}{\delta\lambda_j} =$$

$$= -\varlimsup_{\delta\to 0}\ln(3(1-\delta))\varlimsup_{j\to\infty}\frac{m(j,\delta)}{\delta\lambda_j} = -\ln 3\varlimsup_{\delta\to 0}\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n((1+\delta)|\lambda_j|,\Lambda)-n((1-\delta)|\lambda_j|,\Lambda)}{\delta\lambda_j}.$$

Покажем, что двойной верхний предел в последнем равенстве оценивается снизу величиной $\tau_0(\Lambda)$. Если $\tau_0(\Lambda) = 0$, то это очевидно. Для каждого $\delta \in (0,1)$ через $r_k(\delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим последовательность, реализующую верхний предел по $r \to \infty$ в определении максимальной плотности. Пусть $\tau_0(\Lambda) > 0$. Тогда можно считать, что любой полуинтервал $((1-\delta)r_k(\delta), r_k(\delta)]$ содержит некоторое ненулевое число точек последовательности $\Lambda$. Произвольным образом выберем одну из них и через $j(k,\delta)$ обозначим ее номер. Поскольку $\lambda_{j(k,\delta)} \leqslant r_k(\delta) \leqslant \lambda_{j(k,\delta)}/(1-\delta)$, то нетрудно заметить, что верно вложение $((1-\delta)r_k(\delta), r_k(\delta)] \subset ((1-\tilde{\delta})\lambda_{j(k,\delta)}, (1+\tilde{\delta})\lambda_{j(k,\delta)}]$, где $\tilde{\delta} = \delta/(1-\delta)$. Следовательно,

$$\tau_0(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} = \varlimsup_{\delta\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{n(r_k(\delta),\Lambda)-n((1-\delta)r_k(\delta),\Lambda)}{\delta r_k(\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\delta\to 0}\frac{\tilde\delta}{\delta}\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n((1+\tilde\delta)\lambda_j,\Lambda)-n((1-\tilde\delta)\lambda_j,\Lambda)}{\tilde\delta\lambda_j} =$$

$$=\varlimsup_{\tilde\delta\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n((1+\tilde\delta)\lambda_j,\Lambda)-n((1-\tilde\delta)\lambda_j,\Lambda)}{\tilde\delta\lambda_j}.$$

Таким образом, с учетом предыдущего получаем $\tilde S_\Lambda \leqslant -\ln 3\tau_0(\Lambda)$. Отсюда следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Если $S_\Lambda > -\infty$, то $\overline\tau(\Lambda) < +\infty$.*

**Доказательство.** Предположим, что $\overline\tau(\Lambda)=+\infty$. Тогда для каждого $A>0$ найдется подпоследовательность $\Lambda(A)$ последовательности $\Lambda$ такая, что верхняя плотность $\overline\tau(\Lambda(A))$ конечна и больше чем $A$. Фиксируем $\delta\in(0,1)$ и $A>0$. Имеем:

$$\overline\tau(\Lambda(A))=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda(A))}{r}\leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda(A))-n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}+\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}=$$

$$=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda(A))-n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}+(1-\delta)\overline\tau(\Lambda(A)).$$

Отсюда для любого $A>0$ получаем

$$\delta A\leqslant \delta\overline\tau(\Lambda(A))\leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda(A))-n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}\leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{r}.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{r}=+\infty,\qquad \delta\in(0,1).$$

Пусть $\delta\in(0,1/2)$. Выберем последовательность $r_j\to+\infty$ такую, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{n(r_j,\Lambda)-n((1-\delta)r_j,\Lambda)}{r_j}=+\infty.$$

Можно считать, что для каждого $j\geq 1$ полуинтервал $((1-\delta)r_j,r_j]$ содержит некоторые точки последовательности $\Lambda$. Пусть $\lambda_{k_j}$ одна из таких точек. Тогда верно вложение $((1-\delta)r_j,r_j]\subset((1-2\delta)\lambda_{k_j},(1+2\delta)\lambda_{k_j})$. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty}\frac{m(k_j,2\delta)}{\lambda_{k_j}}=+\infty,$$

где $m(k_j,2\delta)$ определено в лемме 1. Как и в этой лемме, получаем

$$\ln|q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j},2\delta)|\leqslant -(m(k_j,2\delta)-1)\ln(3(1-2\delta)).$$

Следовательно, имеем:

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{\lambda_k}\leqslant \lim_{\delta\to 0}\varliminf_{j\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j},2\delta)|}{\lambda_{k_j}}\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\delta\to 0}\ln(3(1-2\delta))\varliminf_{j\to\infty}\frac{-(m(k_j,2\delta)-1)}{\lambda_{k_j}}=-\ln 3\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{j\to\infty}\frac{(m(k_j,2\delta)-1)}{\lambda_{k_j}}=-\infty.$$

Это противоречит условию. Таким образом, $\overline\tau(\Lambda)<+\infty$. Лемма доказана.

Через $S(z,r)$ будем обозначать окружность с центром в точке $z$ и радиуса $r>0$. Доказательство следующих двух утверждений основано на идеях доказательства теоремы 3.1 в работе [10].

**Лемма 3.** *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $S_\Lambda=-\infty$. Тогда существует целая функция $g\in W(\Lambda,\mathbb C)$, которая не раскладывается в ряд Дирихле по системе $\mathcal E=\{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^\infty$ ни на каком открытом подмножестве плоскости.*

**Доказательство.** Предположим вначале, что $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$. По условию $S_\Lambda = -\infty$. Поэтому найдутся последовательность положительных чисел $\{\delta_p\}$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$ такие, что $\delta_p \to 0$ при $p \to \infty$ и

$$\lim_{p\to 0} \frac{\ln |q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|}{\lambda_{k(p)}} = -\infty. \tag{4}$$

Можно считать, что

$$\lambda_{k(p+1)} \geq 2\lambda_{k(p)}, \quad \delta_p < 1/4, \quad p \geq 1. \tag{5}$$

Рассмотрим функции

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} \frac{exp(\lambda z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{k(p)}) q_\Lambda^{k(p)}(\lambda, \delta_p)}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Найдем оценки сверху на $|g_p|$. Имеем

$$|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda, \delta_p)| = \left| \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_{k(p)}, \delta_p\lambda_{k(p)}), k\neq k(p)} \frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta_p\lambda_k} \right| \geq$$

$$\geq \left( \frac{4\delta_p\lambda_{k(p)}}{3\delta_p(1+\delta_p)\lambda_{k(p)}} \right)^{m(k(p),\delta_p)} \geq 1, \quad \lambda \in S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)}),$$

где $m(k(p), \delta_p)$ определено в лемме 1. Следовательно, верны неравенства

$$|g_p(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} \frac{exp(\lambda z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{k(p)}) q_\Lambda^{k(p)}(\lambda, \delta_p)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 5\lambda_{k(p)}\delta_p \sup_{\lambda \in S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} \left| \frac{exp(\lambda z)}{(\lambda - \lambda_{k(p)})} \right| \leqslant \sup_{\lambda \in S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} |exp(\lambda z)| \leqslant$$

$$\leqslant exp(Re(\lambda_{k(p)} z) + 5\delta_p\lambda_{k(p)}|z|), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \tag{7}$$

где $c_p = \sqrt{|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|}$, $p \geq 1$. Покажем, что этот ряд сходится равномерно на любом компактном подмножестве плоскости. Пусть $R > 0$. В силу (4) найдется номер $p_0$ такой, что $|c_p| \leqslant exp(-2R\lambda_{k(p)})$, $p \geq p_0$. Тогда с учетом (6) имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_p| \max_{|z|\leqslant R} |g_p(z)| \leqslant A + \sum_{p=p_0}^{\infty} exp(-2R\lambda_{k(p)} + R\lambda_{k(p)} + 5\delta_p R\lambda_{k(p)}) < +\infty.$$

Последняя оценка здесь выполнена благодаря неравенствам $\lambda_{k(p+1)} \geq 2\lambda_{k(p)}$, $p \geq 1$, и тому, что $\delta_p \to 0$ при $p \to \infty$.

Таким образом, функция $g(z)$ является целой и лежит в пространстве $W(\Lambda, \mathbb{C})$. Предположим, что она представляется рядом (1) на некотором открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$, содержащем точку $z_0$. Тогда по теореме Абеля для рядов Дирихле (см., например, [1], гл. II, §1, п. 2) ряд (1) сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : Re z < Re z_0\}$. На открытом подмножестве $\Pi \cap U$ его сумма равна $g(z)$. Поэтому он сходится к $g(z)$ во всей полуплоскости $\Pi$. Поскольку верхняя плотность $\overline{\tau}(\Lambda)$ конечна, то существует (см., например, [1], гл. IV, §1, п. 1) биортогональная к $\mathcal{E}$ последовательность функционалов $\{\nu_k\} \subset H^*(\Pi) \subset H^*(\mathbb{C})$, т.е. $\nu_k(exp(\lambda_k z)) = 1$, $k \geq 1$, и

$\nu_k(exp(\lambda_j z)) = 0$, если $k \neq j$. Так как ряд (1) сходится в топологии пространства $H(\Pi)$, то верны равенства

$$\nu_k(g) = d_k, \quad k \geq 1. \tag{8}$$

Используя вычеты и определение функции $g_p$, получаем

$$g_p(z) = b_{k(p)} exp(\lambda_{k(p)} z) + \sum_{\lambda_k \in ((1-\delta_p)\lambda_{k(p)}, (1+\delta_p)\lambda_{k(p)}), k \neq k(p)} b_k exp(\lambda_k z),$$

где $b_{k(p)} = (q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p))^{-1}$, $p \geq 1$. В силу (5) интервалы $((1-\delta_p)\lambda_{k(p)}, (1+\delta_p)\lambda_{k(p)})$ попарно не пересекаются. Тогда, учитывая сходимость ряда (7) в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ и равенства (8), получаем

$$|d_{k(p)}| = |\nu_{k(p)}(g)| = |c_p b_{k(p)}| = \left(\sqrt{\left|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)\right|}\right)^{-1}, \quad p \geq 1.$$

Из (4) следует, что для каждого $z \in \mathbb{C}$

$$|d_{k(p)}| exp(Re(\lambda_{k(p)} z)) \to +\infty, \quad p \to \infty.$$

Это противоречит сходимости ряда (1) в полуплоскости $\Pi$. Таким образом, функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ не раскладывается в ряд по системе $\mathcal{E}$ ни на каком открытом подмножестве плоскости.

Остается рассмотреть ситуацию, когда $\overline{\tau}(\Lambda) = +\infty$. В этом случае не существует (см., например, [1], гл. I, §1, теорема 1.1.2) $f \in P_\mathbb{C}$ (целой функции экспоненциального типа), которая обращается в ноль во всех точках $\lambda_k$. Следовательно, система $\mathcal{E}$ полна в $H(\mathbb{C})$, т.е. $W(\Lambda, \mathbb{C}) = H(\mathbb{C})$. Пусть $\lambda_0 > 0$ отлична от точек $\lambda_k$, $k \geq 1$. Предположим, что функция $exp(\lambda_0 z) \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ представляется рядом (1) на некотором открытом подмножестве комплексной плоскости. Как и выше, это представление распространяется на некоторую полуплоскость. Тогда в этой полуплоскости верно равенство

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k exp(\lambda_k z),$$

где $d_0 = -1$. В начале работы отмечалось, что представление рядом Дирихле всегда является единственным. Поэтому должны быть выполнены соотношения $d_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Получили противоречие. Лемма доказана.

**Следствие.** *Пусть $D$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что множество сумм рядов (1), сходящихся в области $D$, замкнуто в пространстве $H(D)$. Тогда $S_\Lambda > -\infty$ и $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$.*

**Доказательство.** Если $S_\Lambda = -\infty$, то по лемме 3 существует функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C}) \subset W(\Lambda, D)$, которая не раскладывается в ряд (1) в области $D$. Это противоречит условию. Таким образом, $S_\Lambda > -\infty$. Тогда по лемме 2 $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$. Следствие доказано.

**Лемма 4.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $\tilde{S}_\Lambda = -\infty$. Тогда для каждого $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ и функция $g \in W(\Lambda, G)$, где $G = (\{z : Rez < \tau\delta\} \cap B(0, \tau)) \cup \{z : Rez < 0\}$, которая представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = 0$.*

**Доказательство.** Положим

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \tag{9}$$

где $c_p = exp(-6\tau\delta\mu_{m(p)})$,

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\mu_{m(p)},5\delta\mu_{m(p)})} \frac{exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda - \mu_{m(p)})q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\lambda,\delta)}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

а последовательность $\tilde{\Lambda} = \{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ является частью $\Lambda$. Числа $a_p \geq 1$ мы выберем ниже. Сейчас же определим число $\delta$, построим $\tilde{\Lambda}$ и подберем номера $m(p)$. Для этого, прежде всего, заметим, что согласно условию $\tilde{S}_\Lambda = -\infty$. Поэтому найдется $\delta \in (0, 1/4)$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ последовательности $\Lambda$, удовлетворяющие условию

$$\ln |q_{\Lambda}^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta)| \leqslant -6\tau\delta\lambda_{k(p)}, \quad p = 1, 2, \dots \tag{10}$$

При этом можно считать, что

$$\lambda_{k(p+1)} \geq 2\lambda_{k(p)}, \quad p = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ будем искать в виде объединения $\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_p$. Фиксируем $p = 1, 2, \dots$ Если $n((1+\delta)\lambda_{k(p)}, \Lambda) - n((1-\delta)\lambda_{k(p)}, \Lambda) - 1 < 12\tau\delta\lambda_{k(p)} + 1$, то в качестве $\Lambda_p$ возьмем множество всех точек последовательности $\Lambda$, попавших в круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$. В противном случае поместим в $\Lambda_p$ точку $\lambda_{k(p)}$ и еще столько точек из $\Lambda$, попавших в круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$, чтобы число точек $l(p)$ множества $\Lambda_p$ удовлетворяло оценкам

$$12\tau\delta\lambda_{k(p)} \leqslant l(p) - 1 < 12\tau\delta\lambda_{k(p)} + 1. \tag{12}$$

Отметим, что в силу (11) и выбора числа $\delta$ круги $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$, $p = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются. Поэтому множества $\Lambda_p$, $p = 1, 2, \dots$, также попарно не пересекаются. Будем считать, что элементы $\mu_m$ последовательности $\tilde{\Lambda}$ пронумерованы по возрастанию. Через $m(p)$, $p = 1, 2, \dots$, обозначим номер, для которого $\mu_{m(p)} = \lambda_{k(p)}$. Имеют место неравенства

$$\ln |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta)| \leqslant -6\tau\delta\mu_{m(p)}, \quad p = 1, 2, \dots \tag{13}$$

Действительно, функция $q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}$ состоит из сомножителей, построенных по точкам множества $\Lambda_p$. Если оно совпадает с множеством точек из $\Lambda$, попавших в круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$, то $q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta) = q_{\Lambda}^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta)$, и (13) вытекает из (11). В противном случае, учитывая (12) и неравенство $\delta < 1/4$, как и в лемме 1 получаем:

$$\ln |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta)| \leqslant -(l(p)-1)\ln(3(1-\delta)) \leqslant (-(l(p)-1))/2 \leqslant -6\tau\delta\mu_{m(p)}.$$

Покажем теперь, что верхняя плотность последовательности $\tilde{\Lambda}$ конечна. Согласно (12) верны неравенства

$$\frac{n((1+\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda})}{\mu_{m(p)}} \leqslant 12\tau\delta + \frac{2}{\mu_{m(p)}}, \quad p = 1, 2, \dots \tag{14}$$

Пусть $r > 0$ и $p(r)$ — максимальный из номеров $p = 1, 2, \dots$, для которых интервалы $(0, r)$ и $((1-\delta)\mu_{m(p)}, (1+\delta)\mu_{m(p)})$ пересекаются. Тогда верно неравенство $r > (1-\delta)\mu_{m(p(r))}$. Так как все точки $\mu_m$ лежат в объединении $\cup_{p=1}^{\infty}((1-\delta)\mu_{m(p)}, (1+\delta)\mu_{m(p)})$ и $\mu_{m(p)} = \lambda_{k(p)}$, $p = 1, 2, \dots$, то с учетом (14) и (11) получаем

$$\frac{n(r, \tilde{\Lambda})}{r} \leqslant \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{n((1+\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda})}{r} \leqslant \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{12\tau\delta\mu_{m(p)} + 2}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{12\tau\delta\mu_{m(p)} + 2}{(1-\delta)\mu_{m(p(r))}} \leqslant \frac{p(r)}{(1-\delta)2^{p(r)-2}\mu_{m(1)}} + \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{12\tau\delta}{(1-\delta)2^{p(r)-p}}.$$

Отсюда следует, что величина $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda})$ конечна.

Найдем оценки сверху на модули функций $g_p$. Поскольку $a_p \geq 1$, то мы имеем:

$$|a_p q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\lambda, \delta)| \geq |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\lambda, \delta)| = \left| \prod_{\mu_m \in B(\mu_{m(p)}, \delta\mu_{m(p)}), m \neq m(p)} \frac{(\lambda - \mu_m)}{3\delta\mu_m} \right| \geq$$

$$\geq \prod_{\mu_m \in B(\mu_{m(p)}, \delta\mu_{m(p)}), m \neq m(p)} \frac{4\delta\mu_{m(p)}}{3\delta\mu_m} \geq 1, \quad \lambda \in S(\mu_{m(p)}, 5\delta\mu_{m(p)}).$$

Следовательно, верны неравенства

$$|g_p(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda \in S(\mu_{m(p)}, 5\delta\mu_{m(p)})} \frac{exp(\lambda z) d\lambda}{a_p(\lambda - \mu_{m(p)}) q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda \in S(\mu_{m(p)}, 5\delta\mu_{m(p)})} |exp(\lambda z)| \leqslant exp(Re(\mu_{m(p)} z) + 5\delta\mu_{m(p)}|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Покажем, что ряд (9) сходится равномерно на компактных подмножествах области $D = \{z : Rez < \tau\delta\} \cap B(0, \tau)$. Пусть $z \in D$ и $|z| \leqslant \tau - \beta$. Из последней оценки с учетом определения коэффициентов $c_p$ и (11) получаем

$$|g(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} exp(Re(\mu_{m(p)} z) + 5\delta\mu_{m(p)}|z| - 6\tau\delta\mu_{m(p)}) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} exp(-5\beta\delta\mu_{m(p)}) < \infty.$$

Члены ряда (9) являются целыми функциями. Следовательно, $g(z)$ — функция, аналитическая в области $D$. Отметим, что сказанное верно при любом выборе чисел $a_p \geq 1$, $p = 1, 2, \ldots$ Покажем теперь, что при подходящем выборе этих чисел функция $g(z)$ раскладывается в ряд Дирихле, прямая сходимости которого совпадает с мнимой осью. Используя теорию вычетов, для каждого $p = 1, 2, \ldots$ получаем:

$$g_p(z) = a_p^{-1} \left( b_{m(p)} exp(\mu_{m(p)} z) + \sum_{\mu_m \in \Lambda_p, m \neq m(p)} b_m exp(\mu_m z) \right),$$

где $b_{m(p)} = (q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta))^{-1}$. Пусть $p = 1, 2, \ldots$ Для каждого номера $m$ такого, что $\mu_m \in \Lambda_p$, положим $d_m = c_p b_m a_p{}^{-1}$. В силу (13) и определения $c_p$ верно неравенство

$$\max_{m: \mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln |c_p b_m|}{\mu_{m(p)}} \geq \frac{-6\tau\delta\mu_{m(p)} - \ln |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta)|}{\mu_{m(p)}} \geq 0.$$

Поэтому найдется число $a_p \geq 1$, при котором

$$\max_{m: \mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln |d_m|}{\mu_{m(p)}} = \max_{m: \mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln |c_p b_m| - \ln a_p}{\mu_{m(p)}} = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m exp(\mu_m z). \tag{16}$$

Поскольку верхняя плотность $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda})$ конечна, то, очевидно, величина $\lim_{m \to \infty} \ln m / \mu_m$ равна нулю. Поэтому (см., напр., [1], гл. II, §1, теорема 2.1.2, [11]) для ряда (16) имеет место формула Коши-Адамара

$$\gamma = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{\ln |d_m|}{\mu_m},$$

где $\gamma$ — абсцисса сходимости этого ряда. При этом в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < \gamma\}$ ряд (16) сходится абсолютно (см., напр., [1], гл. II, §1, следствие из теоремы 2.1.1, [11]). В силу (15)

$$\gamma = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln |d_m|}{\mu_m} = \overline{\lim_{p\to\infty}} \max_{m:\mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln |d_m|}{\mu_m} = 0.$$

Таким образом, мнимая ось является прямой сходимости ряда (16). Так как он сходится абсолютно в левой полуплоскости, то суммы рядов (9) и (16) совпадают в пересечении $\{z \in \mathbb{C} : Rez < 0\} \cap D$. Это означает, что функция $g \in W(\Lambda, G)$ и представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = 0$. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\tilde{\Lambda} = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить, что $\Lambda$ является частью $\tilde{\Lambda}$ ($\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$) или $\tilde{\Lambda}$ является пополнением $\Lambda$, если существует подпоследовательность $\{\mu_{n(k)}\}$, совпадающая с $\{\lambda_k\}$. Известная теорема Ж. Полиа (см., напр., [9], гл. VI, § E3) утверждает, что любая последовательность с конечной максимальной плотностью является частью некоторой измеримой последовательности с той же плотностью. Поскольку этот результат является важным для дальнейших исследований и понимания общей картины, мы приведем его доказательство. Метод, который при этом будет использоваться для построения пополнения, как нам кажется, является более простым, чем метод из книги [9].

**Лемма 5.(теорема Полиа).** *Пусть максимальная плотность последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ конечна. Тогда существует ее измеримое пополнение $\tilde{\Lambda}$ такое, что $\tau(\tilde{\Lambda}) = \tau_0(\Lambda)$.*

**Доказательство.** Последовательность $\tilde{\Lambda}$ будем искать в виде объединения $\cup_{m=1}^{\infty}\Lambda_m$, где $\Lambda_m = \{\mu_n, n(m) \leqslant n < n(m+1)\}$, $m = 1, 2, \dots$ и $n(1) = 1$. Множества $\Lambda_m$ построим по индукции. Пусть $\alpha = 1/\tau_0(\Lambda)$ и $m = 1$. Если полуинтервал $(0, \alpha]$ содержит точки из $\Lambda$, то полагаем $\mu_n = \lambda_n$, $1 \leqslant n < n(2)$, где $n(2)$ — минимальный из номеров $k$, для которого верно неравенство $\lambda_k > \alpha$. В противном случае полагаем $\mu_1 = \alpha$ и $n(2) = 2$. Предположим, что мы уже построили множества $\Lambda_m$ для всех $m < p$. Определим теперь $\Lambda_p$. Пусть $s_p$ — число точек последовательности $\Lambda$, попавших в полуинтервал $(\alpha(p-1), \alpha p]$ (может оказаться, что $s_p = 0$). Если общее число точек множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{p-1}$ не превосходит $p-1$ и $s_p = 0$, то полагаем $n(p+1) = n(p) + 1$ и $\Lambda_p = \{\mu_{n(p)}\}$, где $\mu_{n(p)} = \alpha p$. В противном случае в качестве $\Lambda_p$ возьмем множество, состоящее из всех точек $\Lambda$, попавших в $(\alpha(p-1), \alpha p]$ (если $s_p = 0$, то $\Lambda_p$ пусто). При этом полагаем $n(p+1) = n(p) + s_p$.

Покажем, что $\tilde{\Lambda}$ — искомая последовательность. Пусть $\lambda_k$ — произвольная точка из $\Lambda$, и номер $m$ таков, что полуинтервал $(\alpha(m-1), \alpha m]$ содержит $\lambda_k$. Тогда $s_m \neq 0$ и по построению множество $\Lambda_m$, а вместе с ним и последовательность $\tilde{\Lambda}$, содержат $\lambda_k$. Следовательно, $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$. Используя индукцию, докажем теперь неравенства

$$n(\alpha m, \tilde{\Lambda}) \geq m, \quad m = 1, 2, \dots \tag{17}$$

По построению каждый полуинтервал $(\alpha(m-1), \alpha m]$ пересекает $\tilde{\Lambda}$ по множеству $\Lambda_m$. Поэтому $n(\alpha m, \tilde{\Lambda})$ совпадает с общим числом точек множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$. Пусть $m = 1$. Тогда $n(\alpha, \tilde{\Lambda}) = 1$, если $s_1 = 0$, и $n(\alpha, \tilde{\Lambda}) = s_1 \geq 1$ в противном случае. Предположим, что (17) доказано для всех $m < p$. Если $n(\alpha(p-1), \tilde{\Lambda}) > p-1$, то $n(\alpha p, \tilde{\Lambda}) \geq n(\alpha(p-1), \tilde{\Lambda}) \geq p$. Пусть $n(\alpha(p-1), \tilde{\Lambda}) \leqslant p-1$. Тогда с учетом (17) получаем: $n(\alpha(p-1), \tilde{\Lambda}) = p-1$. В этом случае по построению $n(\alpha p, \tilde{\Lambda}) = n(\alpha(p-1), \tilde{\Lambda}) + 1 = p$, если $s_p = 0$, и $n(\alpha p, \tilde{\Lambda}) = n(\alpha(p-1), \tilde{\Lambda}) + s_p \geq p$ в противном случае. Таким образом, неравенство (17) верно для всех $m$. Учитывая его, получаем

$$\underline{\tau}(\tilde{\Lambda}) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \tilde{\Lambda})}{r} \geq \underline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n(\alpha p(r), \tilde{\Lambda})}{\alpha p(r) + \beta(r)} = \underline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n(\alpha p, \tilde{\Lambda})}{\alpha p} \geq \frac{1}{\alpha} = \tau_0(\Lambda), \tag{18}$$

где $\beta(r) \in (0,\alpha]$ при $r \geq 1$. Остается доказать неравенство $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}) \leqslant \tau_0(\Lambda)$. Предположим, что $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}) \geq \tau_0(\Lambda) + 3\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (2) $\tau_0(\tilde{\Lambda}) \geq \tau_0(\Lambda) + 3\varepsilon$. Выше отмечалось, что при определении максимальной плотности вместо верхнего предела по $\delta$ можно брать предел. Поэтому найдется $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r,\tilde{\Lambda})}{\delta r} \geq \tau_0(\Lambda) + 2\varepsilon, \quad \delta \in (0,\delta_0). \tag{19}$$

Уменьшая при необходимости $\delta_0 > 0$, можно считать, что верно также неравенство

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \leqslant \tau_0(\Lambda) + \varepsilon, \quad \delta \in (0,\delta_0). \tag{20}$$

Фиксируем $\delta \in (0,\delta_0)$. Если для некоторого $r > 0$ полуинтервал $((1-\delta)r, r]$ не содержит точек $\tilde{\Lambda}$, отличных от точек $\Lambda$, то $n(r,\tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r,\tilde{\Lambda}) = n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)$. Отметим, что по построению все точки $\tilde{\Lambda}$, не принадлежащие $\Lambda$, имеют вид $\mu_{n(p)} = \alpha p$, где $p$ пробегает некоторую подпоследовательность $P$ натуральных чисел. Таким образом, с учетом (19) и (20) для каждого достаточно большого $r > 0$ найдется максимальный номер $p(r) \in P$ такой, что $\alpha p(r) \in ((1-\delta)r, r]$. В силу максимальности $p(r)$ каждый непустой полуинтервал $(\alpha p(r), r]$ не содержит точек $\tilde{\Lambda}$, отличных от точек $\Lambda$. Поэтому

$$n(r,\tilde{\Lambda}) - n(\alpha p(r),\tilde{\Lambda}) = n(r,\Lambda) - n(\alpha p(r),\Lambda).$$

При доказательстве неравенства (18) мы показали, что $n(\alpha p(r),\tilde{\Lambda}) = p(r)$. Следовательно,

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r,\tilde{\Lambda})}{\delta r} \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda) - n(\alpha p(r_j),\Lambda)}{\delta r_j} + \varlimsup_{r\to\infty} \frac{p(r_j) - n((1-\delta)r_j,\tilde{\Lambda})}{\delta r_j},$$

где $r_j \to \infty$ реализует верхний предел слева в этом неравенстве. Так как $\alpha p(r) \in ((1-\delta)r, r]$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\alpha p(r_j)/r_j$ сходится к некоторому $\alpha\gamma \in [1-\delta, 1]$. Тогда с учетом (20) получаем:

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda) - n(\alpha p(r_j),\Lambda)}{\delta r_j} \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda) - n((\alpha\gamma - \tilde{\delta})r_j,\Lambda)}{\delta r_j} =$$

$$= (1-\alpha\gamma+\tilde{\delta}) \varlimsup_{j\to\infty} \frac{n(r_j,\Lambda) - n((\alpha\gamma - \tilde{\delta})r_j,\Lambda)}{(1-\alpha\gamma+\tilde{\delta})\delta r_j} \leqslant \frac{(1-\alpha\gamma+\tilde{\delta})}{\delta}(\tau_0(\Lambda)+\varepsilon),$$

где $\tilde{\delta} > 0$ такое, что $\delta + \tilde{\delta} \in (0,\delta_0)$. Пусть $m_j$ — максимальное натуральное число, такое, что $\alpha m_j \leqslant (1-\delta)r_j$. В силу (17) имеем:

$$\varlimsup_{j\to\infty} \frac{p(r_j) - n((1-\delta)r_j,\tilde{\Lambda})}{\delta r_j} \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{p(r_j) - n(\alpha m_j,\tilde{\Lambda})}{\delta r_j} = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{(1-\delta)}{\delta\alpha}.$$

Таким образом, получаем:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r,\tilde{\Lambda})}{\delta r} \leqslant \frac{(1-\alpha\gamma+\tilde{\delta})}{\delta}(\tau_0(\Lambda)+\varepsilon) + \frac{\gamma}{\delta} - \frac{(1-\delta)}{\delta\alpha} =$$

$$= \frac{\tilde{\delta}(\tau_0(\Lambda)+\varepsilon) + (1-\alpha\gamma)\varepsilon}{\delta} + \tau_0(\Lambda) \leqslant \frac{\tilde{\delta}(\tau_0(\Lambda)+\varepsilon)}{\delta} + \varepsilon + \tau_0(\Lambda).$$

Поскольку $\tilde{\delta}$ можно считать сколь угодно малым, то последнее неравенство противоречит (19). Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}) \leqslant \tau_0(\Lambda)$. Вместе с (18) это завершает доказательство.

**Замечание.** Доказательство леммы полностью сохранится, если вместо строго возрастающей последовательности $\Lambda$ взять неубывающую, т.е. так называемую кратную последовательность.

**Лемма 6.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел с конечной максимальной плотностью $\tau_0(\Lambda)$. Тогда существует целая функция $f$ экспоненциального типа и регулярного роста, обращающаяся в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, сопряженная диаграмма которой является отрезком мнимой оси $[-i\pi\tau_0(\Lambda), i\pi\tau_0(\Lambda)]$. При этом для всех $\lambda$, не лежащих на вещественной оси, верно равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t} = \pi\tau_0(\Lambda)|Im\lambda|,$$

*и сходимость является равномерной для всех $\lambda = exp(i\varphi)$ в угле $\alpha < \varphi < \pi-\alpha$, $\alpha \in (0,\pi)$.*

**Доказательство.** По лемме 5 существует пополнение $\tilde{\Lambda} = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\Lambda$ такое, что $\tau(\tilde{\Lambda}) = \tau_0(\Lambda)$. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$

Она обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Поскольку $\tilde{\Lambda}$ измерима, то легко проверить, что нулевое множество $f(\lambda)$ является правильно распределенным. Поэтому $f$ имеет регулярный рост. По теореме 5.9 в книге [7], гл. I, §5 выполнено требуемое равенство, из которого легко следует, что отрезок $[-i\pi\tau_0(\Lambda), i\pi\tau_0(\Lambda)]$ является сопряженной диаграммой функции $f$. Лемма доказана.

Пусть $R \subset \mathbb{C}$ и $\delta > 0$. Через $R^{\delta}$ обозначим объединение кругов $B(z, \delta|z|)$, где $z$ пробегает множество $R$.

**Лемма 7.** *Пусть $D$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел с конечной максимальной плотностью $\tau_0(\Lambda)$. Предположим, что подпространство $W(\Lambda, D)$ нетривиально, $H_D(1) < +\infty$ и пересечение опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ с границей области $D$ содержит отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Тогда для каждого компакта $L \subset D$ и любого $\delta > 0$ существует функция $f \in P_D$, обращающаяся в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, и такая, что для некоторого $T(\delta) > 0$ луч $(T(\delta), +\infty)$ лежит на множестве $R^{\delta}$, где $R = \{z : \ln|f(z)| \geq H_L(z)\}$.*

**Доказательство.** По условию подпространство $W(\Lambda, D)$ нетривиально. Поэтому, как отмечалось выше, найдется целая функция $f_1 \in P_D$, обращающаяся в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Пусть $K_1$ — сопряженная диаграмма функции $f_1$. Так как $K_1$ — компакт в области $D$, то верно неравенство

$$H_{K_1}(z) < H_D(z), \quad z \neq 0. \tag{21}$$

Согласно лемме 6 существует целая функция $\tilde{f}_2$ экспоненциального типа, обращающаяся в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, сопряженная диаграмма которой $K = [-\pi\tau_0(\Lambda), \pi\tau_0(\Lambda)]$. Кроме того, для всех $z$, не лежащих на вещественной оси, имеем:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|\tilde{f}_2(tz)|}{t} = \pi\tau_0(\Lambda)|Imz|, \tag{22}$$

причем сходимость является равномерной для всех $z = exp(i\varphi)$ в угле $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$, $\alpha \in (0,\pi)$. Из условия вытекает, что для некоторого $w_0 \in \mathbb{C}$ отрезок $K_2 = K + w_0$ лежит на границе области $D$. Следовательно, верно неравенство

$$H_{K_2}(z) \leqslant H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{23}$$

Компакт $K_2$ является сопряженной диаграммой $f_2(z) = \tilde{f}_2(z)exp(w_0 z)$, которая согласно лемме 6 является целой функцией экспоненциального типа и регулярного роста. Кроме того, она обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Рассмотрим функцию

$$f_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) exp\left(\frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Она является целой, имеет первый порядок роста и возможно бесконечный тип (см., напр., [1], гл. I, §1, теоремы 1.1.3 и 1.1.5). Так как $f_1$ и $f_2$ делятся на $f_\Lambda$, то функции $\ln|f_1| - \ln|f_\Lambda|$ и $\ln|f_2| - \ln|f_\Lambda|$ являются субгармоническими в плоскости и имеют первый порядок роста (см. [5], гл. I, §9, следствие из теоремы 12). Тогда по теореме 5 из работы [12] для каждого $\tau \in (0,1)$ найдутся целая функция $\varphi_\tau(z)$, постоянная $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln|\varphi_\tau(z)| - \psi_\tau(z)| \leqslant C \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \tag{24}$$

где $\psi_\tau(z) = \tau(\ln|f_1(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|) + (1-\tau)(\ln|f_2(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|)$. Причем $E$ может быть покрыто кружками $B_i = B(z_i, \gamma_i)$, $i \geq 1$, такими, что $\Sigma\gamma_i < \infty$. Положим $f_\tau(z) = \varphi_\tau(z) f_\Lambda(z)$, $\tau \in (0,1)$. Тогда $f_\tau$ — целая функция.

Фиксируем компакт $L \subset D$, число $\delta > 0$ и покажем, что в качестве искомой функции $f$ можно взять $f_\tau$ для некоторого $\tau \in (0,1)$. Прежде всего, заметим, что $f_\tau$ обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Далее, т.к. $K_1$ и $K_2$ — сопряженные диаграммы соответственно функций $f_1$ и $f_2$, то с учетом указанной выше теоремы Полиа для индикаторов из (21),(23),(24) и "малости"исключительного множества $E$ нетрудно получить оценку (см., напр., [3], теорема 4.3)

$$h_{f_\tau}(z) < H_D(z), \quad z \neq 0, \quad \tau \in (0,1).$$

Это означает, что сопряженная диаграмма $f_\tau$ лежит в области $D$, т.е. $f_\tau \in P_D$ для любого $\tau \in (0,1)$. Остается подобрать $\tau \in (0,1)$ такое, что для некоторого $T(\delta) > 0$ луч $(T(\delta), +\infty)$ лежит на множестве $R^\delta$, если при определении $R$ в качестве $f$ взять $f_\tau$.

По теореме об оценке снизу целой функции конечного порядка и типа на окружностях (см., напр., [1], гл. I, §1, теорема 1.1.9) существует число $a > 0$ и неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел $\{r_p\}_{p=1}^\infty$ такие, что

$$r_{p+1} \leqslant (1 + \delta/2) r_p, \quad \ln|f_1(z)| \geq -a|z|, \quad |z| = r_p, \ p \geq 1. \tag{25}$$

Поскольку отрезок $K_2 = K + w_0$ лежит на границе области $D$, а отрезок $K$ содержит начало координат, то точка $w_0$ лежит на пересечении границы области $D$ и опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$. Следовательно, с учетом того, что $L$ — компакт в $D$, найдутся $\varepsilon > 0$ и $\tilde{\delta} \in (0, \delta/2)$, для которых выполнено неравенство

$$Re(w_0 z) > H_L(z) + 4\varepsilon|z|, \quad z \in B(1, \tilde{\delta}). \tag{26}$$

Выберем, наконец, $\tau \in (0,1)$ такое, что

$$-\tau Re(w_0 z) > -\varepsilon|z|, \quad -\tau a \geq -\varepsilon. \tag{27}$$

Так как сумма радиусов исключительных кружков $B_i$, $i \geq 1$ конечна, то существует номер $p_0$ такой, что для всех $p \geq p_0$ на дуге окружности $|z| = r_p$, лежащей в верхней полуплоскости и в кольце $B(r_p, \tilde{\delta} r_p) \setminus B(r_p, \tilde{\delta} r_p/2)$, найдется точка $z_p \notin E$. При этом можно считать, что выполнены неравенства $C \ln|z_p| < \varepsilon|z_p|$, $p \geq p_0$, а в силу (22) и неравенства $\ln|\tilde{f}_2(z_p)| > \pi\tau_0(\Lambda)|Imz_p| - \varepsilon|z_p|$, $p \geq p_0$. Тогда с учетом (24)-(27) получаем

$$ln|f_\tau(z_p)| \geq \tau \ln|f_1(z_p)| + (1-\tau) ln|f_2(z_p)| - \varepsilon|z_p| \geq -\tau a|z_p| +$$

$$+(1-\tau)(\ln|\tilde{f}_2(z_p)| + Re(w_0 z_p)) - \varepsilon|z_p| \geq -3\varepsilon|z_p| + (1-\tau)\ln|\tilde{f}_2(z_p)| + Re(w_0 z_p) \geq$$

$$\geq H_L(z_p) + 4\varepsilon|z_p| - 3\varepsilon|z_p| - (1-\tau)\varepsilon|z_p| > H_L(z_p), \quad p \geq p_0. \tag{28}$$

Положим $T(\delta) = r_{p_0}$ и пусть $z \in (T(\delta), +\infty)$. Выберем номер $p \geq p_0$ такой, что $r_p \leqslant z < r_{p+1}$. Тогда в силу (25) и выбора $\tilde{\delta}$ имеем:

$$|z_p - z| \leqslant |z_p - r_p| + |r_p - z| < \tilde{\delta} r_p + r_{p+1} - r_p < \delta r_p = \delta |z_p|.$$

Таким образом, согласно (28) получаем: $z \in B(z_p, \delta|z_p|) \subset R^\delta$. Лемма доказана.

Положим

$$q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta) = q_\Lambda^k(z, \delta) \frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}, \quad k \geq 1.$$

Как и для функций $q_\Lambda^j(z, \delta)$ выполнено неравенство

$$|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta_1)| \geq |q_\Lambda(z, \lambda_j, \delta_2)|, \quad z \in B(\lambda_j, \delta_2\lambda_j), \tag{29}$$

если $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 < 1/3$ и $B(\lambda_k, \delta_1\lambda_k) \subset B(\lambda_j, \delta_2\lambda_j)$.

**Лемма 8.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $S_\Lambda = 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, 1/3)$ такое, что для любых $\gamma, \theta \in (0, 1]$ и некоторого номера $k_0 = k_0(\varepsilon, \delta, \gamma, \theta)$ выполнены неравенства:*

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -\varepsilon|z|, \quad z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \setminus \bigcup_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \ k \geq k_0, \tag{30}$$

*где $\rho_j(\gamma) = \min\{\gamma/2, (\lambda_j - \lambda_{j-1})/2, \ (\lambda_{j+1} - \lambda_j)/2\}$, $j \geq 1$ и $\lambda_0 = 0$.*

**Доказательство.** Фиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно условию $S_\Lambda = 0$. Следовательно, по определению $S_\Lambda$ найдутся $\delta \in (0, 1/9)$ и номер $k_1$ такие, что

$$\ln|q_\Lambda^j(\lambda_j, 3\delta)|/\lambda_j \geq -\frac{\varepsilon}{6}, \quad j \geq k_1. \tag{31}$$

Как и в лемме 1 получаем

$$\ln|q_\Lambda^j(\lambda_j, 3\delta)| \leqslant -(m(j, 3\delta) - 1)\ln(3(1 - 3\delta)),$$

где $m(j, 3\delta)$ — число точек $\lambda_k$, попавших в круг $B(\lambda_j, 3\delta\lambda_j)$. Отсюда, увеличивая при необходимости номер $k_1$, с учетом (31) и выбора числа $\delta$ имеем:

$$m(j, 3\delta) \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_j}{6\ln 2} + 1 \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_j}{3}, \quad j \geq k_1. \tag{32}$$

Пусть $\gamma, \theta \in (0, 1]$ и $z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma))$. Тогда в силу определения чисел $\rho_j(\gamma)$ для всех $l \neq j$ верно неравенство $|z - \lambda_l| \geq |\lambda_j - \lambda_l|/2$. Отсюда и из (31), (32) получаем

$$\ln|q_\Lambda^j(z, 3\delta)| \geq \ln|q_\Lambda^j(\lambda_j, 3\delta)| - m(j, 3\delta)\ln 2 \geq -\varepsilon\lambda_j/2, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \ j \geq k_1. \tag{33}$$

Если $\rho_j(\gamma) = \gamma/2$, то найдется номер $k_2 \geq k_1$ такой, что

$$\frac{1}{\lambda_j}\ln\left|\frac{z - \lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| \geq \frac{1}{\lambda_j}\ln\frac{\gamma\theta}{12\delta\lambda_j} \geq -\varepsilon/4, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_2.$$

Рассмотрим теперь случай $\rho_j(\gamma) = (\lambda_{j+1} - \lambda_j)/2$. Так как $\rho_j(\gamma) \leqslant 1/2$, то для некоторого $k_3 \geq k_2$ и всех номеров $j \geq k_3$, соответствующих данному случаю, круг $B(\lambda_{j+1}, 3\delta\lambda_{j+1})$ содержит точку $\lambda_j$. Поэтому одним из слагаемых суммы, образующей величину $\ln|q_\Lambda^{j+1}(z, 3\delta)|$, является $\ln|(z - \lambda_j)/9\delta\lambda_j|$. Как отмечалось выше, все эти слагаемые являются неположительными в круге $B(\lambda_{j+1}, 3\delta\lambda_{j+1})$. Следовательно, верно неравенство

$$\ln\left|\frac{z - \lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| \geq \ln|q_\Lambda^{j+1}(z, 3\delta)|, \quad z \in B(\lambda_{j+1}, 3\delta\lambda_{j+1}), \quad j \geq k_3.$$

Следовательно, в силу (31)

$$\ln\frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{9\delta\lambda_j} \geq -\frac{\varepsilon\lambda_{j+1}}{6}, \quad j \geq k_3.$$

Отсюда для некоторого $k_4 \geq k_3$ получаем

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| = \ln\frac{\theta\rho_j(\gamma)}{9\delta\lambda_j} = \ln\frac{\theta}{2} + \ln\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{9\delta\lambda_{j(p)}} \geq \ln\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon\lambda_{j+1}}{6} =$$

$$= \ln\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon(\lambda_j + 2\rho_j(\gamma))}{6} \geq \ln\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon\lambda_j}{6} - \frac{1}{6} \geq -\frac{\varepsilon\lambda_j}{4}, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_4.$$

Случай $\rho_j(\gamma) = (\lambda_j - \lambda_{j-1})/2$ рассматривается аналогично. Таким образом, можно считать, что во всех случаях

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| \geq -\frac{\varepsilon\lambda_j}{4}, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_4.$$

Отсюда с учетом (33) и определения функции $q_\Lambda(z, \lambda_j, 3\delta)$ получаем

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_j, 3\delta)| \geq -3\varepsilon\lambda_j/4, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_4. \tag{34}$$

Поскольку $\delta < 1/3$, то для каждой точки $\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ круг $B(\lambda_j, 3\delta|\lambda_j|)$ содержит круг $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$. Выберем номер $k_0 \geq k_4$ такой, что $j \geq k_4$, если $\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ и $k \geq k_0$. Можно считать, что $S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)) \subset B(\lambda_j, 3\delta|\lambda_j|)$ при $j \geq k_4$. Тогда согласно (29) и (34) имеем:

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -3\varepsilon\lambda_j/4, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad \lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|),\ k \geq k_0.$$

Следовательно, для всех $k \geq k_0$ и всех $j$ таких, что $\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ верно неравенство

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -3\varepsilon(1+\delta)\lambda_k/4 \geq -5\varepsilon\lambda_k/6, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)).$$

Кроме того, при $\delta < 1/3$ верно также неравенство

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq 0, \quad z \in S(\lambda_k, 5\delta|\lambda_k|), \quad k \geq 1.$$

Тогда по принципу минимума в области $B(\lambda_k, 5\delta|\lambda_k|) \setminus \cup_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma))$ гармоническая функция $\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)|$ удовлетворяет оценке

$$ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -5\varepsilon\lambda_k/6, \quad k \geq k_0.$$

Следовательно,

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -\frac{5\varepsilon|z|}{6(1-\delta)} \geq -\varepsilon|z|, \quad z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \setminus_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)),\ k \geq k_0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 9.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $S_\Lambda = 0$. Тогда для каждого $\tilde\varepsilon > 0$ существует ее пополнение $\Lambda_{\tilde\varepsilon} = \{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ ($\Lambda_{\tilde\varepsilon}$ — строго возрастающая) и число $\gamma_0 \in (0,1)$ такие, что выполнены неравенства*

$$\left|\ln|f(\lambda)| - \frac{\pi|Im\lambda|}{\gamma_0}\right| \leqslant \tilde\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (E_1 \cup E_2 \cup B(0,T)), \tag{35}$$

*где $f$ — целая функция экспоненциального типа,*

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right) \quad, E_1 = \bigcup_{k=1}^\infty B(\pm\lambda_k, \theta\rho_k(\gamma_0)), \quad E_2 = \bigcup_{n=1}^\infty B(\pm\tilde\mu_n(\gamma_0), \theta\gamma_0/2),$$

*$\rho_k(\gamma_0)$, $k \geq 1$, определены в лемме 8, $\tilde\mu_n(\gamma_0) = \gamma_0 n - \gamma_0/2$, $n \geq 1$, $\theta \in (0,1)$ и $T > 0$ зависит от $\theta, \tilde\varepsilon$.*

**Доказательство.** Так как $S_\Lambda = 0$, то по лемме 2 верхняя плотность $\overline{\tau}(\Lambda)$ конечна. Пусть $\gamma > 0$. Прежде всего, построим пополнение $\Lambda(\gamma) = \{\mu_n(\gamma)\}_{n=1}^\infty$ последовательности $\Lambda$. Будем искать его в виде объединения $\cup_{m=1}^\infty \Lambda_m(\gamma)$, где $\Lambda_m(\gamma) = \{\mu_n(\gamma), n(m) \leqslant n < n(m+1)\}$, $m = 1, 2, \ldots$, и $n(1) = 1$. Множества $\Lambda_m(\gamma)$ построим по индукции. Пусть $m = 1$. Если полуинтервал $(0, \gamma]$ содержит точки из $\Lambda$, то полагаем $\mu_n(\gamma) = \lambda_n$, $1 \leqslant n < n(2)$, где $n(2)$

— минимальный из номеров $k$, для которого верно неравенство $\lambda_k > \gamma$. В противном случае полагаем $\mu_1(\gamma) = \gamma/2$ и $n(2) = 2$. Предположим, что мы уже построили множества $\Lambda_m(\gamma)$ для всех $m < p$. Определим теперь $\Lambda_p(\gamma)$. Пусть $s_p$ — число точек последовательности $\Lambda$, попавших в полуинтервал $(\gamma(p-1), \gamma p]$ (может оказаться, что $s_p = 0$). Если общее число точек множеств $\Lambda_1(\gamma), \ldots, \Lambda_{p-1}(\gamma)$ не превосходит $p-1$ и $s_p = 0$, то полагаем $n(p+1) = n(p)+1$ и $\Lambda_p(\gamma) = \{\mu_{n(p)}(\gamma)\}$, где $\mu_{n(p)}(\gamma) = \gamma p - \gamma/2$. В противном случае в качестве $\Lambda_p(\gamma)$ возьмем множество, состоящее из всех точек $\Lambda$, попавших в $(\gamma(p-1), \gamma p]$ (если $s_p = 0$, то $\Lambda_p(\gamma)$ пусто). При этом полагаем $n(p+1) = n(p) + s_p$.

Пусть $\lambda_k$ — произвольная точка из $\Lambda$, и номер $m$ таков, что полуинтервал $(\gamma(m-1), \gamma m]$ содержит $\lambda_k$. Тогда $s_m \neq 0$ и по построению множество $\Lambda_m(\gamma)$, а вместе с ним и последовательность $\Lambda(\gamma)$, содержат $\lambda_k$. Следовательно, $\Lambda \subset \Lambda(\gamma)$. Используя индукцию, докажем теперь неравенства

$$n(\gamma m, \Lambda(\gamma)) \geq m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

По построению каждый полуинтервал $(\gamma(m-1), \gamma m]$ пересекает $\Lambda(\gamma)$ по множеству $\Lambda_m(\gamma)$. Поэтому $n(\gamma m, \Lambda(\gamma))$ совпадает с общим числом точек множеств $\Lambda_1(\gamma), \ldots, \Lambda_m(\gamma)$. Пусть $m = 1$. Тогда $n(\gamma, \Lambda(\gamma)) = 1$, если $s_1 = 0$, и $n(\gamma, \Lambda(\gamma)) = s_1 \geq 1$ в противном случае. Предположим, что (36) доказано для всех $m < p$. Если $n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) > p-1$, то $n(\gamma p, \Lambda(\gamma)) \geq n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) \geq p$. Пусть $n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) \leqslant p-1$. Тогда по допущению индукции получаем: $n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) = p-1$. В этом случае по построению $n(\gamma p, \Lambda(\gamma)) = n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma) + 1 = p$, если $s_p = 0$, и $n(\gamma p, \Lambda(\gamma)) = n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) + s_p \geq p$ в противном случае. Таким образом, неравенство (36) верно для всех $m$.

По построению каждая из групп $\Lambda_m(\gamma)$ либо целиком состоит из некоторых точек $\lambda_k$, либо пуста, либо состоит из одной точки $\mu_{n(m)}(\gamma)$, не входящей в последовательность $\Lambda$. Покажем, что при $\gamma < 1/\overline{\tau}(\Lambda)$ имеется бесконечное число групп последнего вида. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого $r_0 > 0$ бесконечный интервал $(r_0, +\infty)$ не содержит точек последовательности $\Lambda(\gamma)$, отличных от $\lambda_k$. Поэтому

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda(\gamma))}{r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda) - n(r_0, \Lambda) + n(r_0, \Lambda(\gamma))}{r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda)}{r} = \overline{\tau}(\Lambda).$$

С другой стороны, в силу (36) имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda(\gamma))}{r} \geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{n(\gamma m, \Lambda(\gamma))}{\gamma m} \geq \frac{1}{\gamma} > \overline{\tau}(\Lambda).$$

Получили противоречие. Следовательно, имеется бесконечное число групп указанного вида. Пусть $I(\gamma)$ — объединение всех полуинтервалов $(\gamma m, \gamma(m+1)]$, соответствующих таким группам. Тогда $J(\gamma) = (0, +\infty) \setminus I(\gamma)$ является объединением ограниченных полуинтервалов $(\gamma m_j(\gamma), \gamma p_j(\gamma)]$, $j \geq 1$.

Пусть $j \geq 1$. Согласно определению $I(\gamma)$ группа $\Lambda_{m_j(\gamma)}(\gamma)$ состоит из одной точки $\mu_{n(m_j(\gamma))}(\gamma)$, не входящей в последовательность $\Lambda$. Тогда по построению $n(\gamma(m_j(\gamma) - 1), \Lambda(\gamma)) \leqslant m_j(\gamma) - 1$ и $s_{m_j(\gamma)} = 0$. Следовательно, $n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) \leqslant m_j(\gamma)$. Вместе с (36) это дает нам равенство

$$n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) = m_j(\gamma), \quad j \geq 1. \tag{37}$$

Группа $\Lambda_{p_j(\gamma)+1}(\gamma)$ аналогична группе $\Lambda_{m_j(\gamma)}(\gamma)$. Поэтому также по построению выполнено неравенство $n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) \leqslant p_j(\gamma)$. Отсюда с учетом (36) имеем

$$n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) = p_j(\gamma), \quad j \geq 1. \tag{38}$$

Пусть $\delta' > 0$. Согласно определению $J(\gamma)$ все точки $\lambda_k$ лежат на множестве $J(\gamma)$, и ни одна из точек последовательности $\Lambda(\gamma)$, отличная от $\lambda_k$, $k \geq 1$, не принадлежит $J(\gamma)$. Следовательно, в силу (37) и (38) для всех $j \geq 1$ имеем

$$p_j(\gamma) - m_j(\gamma) = n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) - n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) = n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda) - n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda). \tag{39}$$

Так как $\Lambda$ имеет конечную верхнюю плотность, то для некоторого $C > 0$ верно неравенство $n(r, \Lambda) \leqslant Cr$. Поэтому из (39) следует, что

$$p_j(\gamma) - m_j(\gamma) \leqslant n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda) \leqslant C\gamma p_j(\gamma) \leqslant \delta' p_j(\gamma), \quad j \geq 1,$$

для всех $\gamma < \min\{1/\overline{\tau}(\Lambda), \delta'/C\} = \gamma(\delta')$. Отсюда легко получить оценку

$$p_j(\gamma) - m_j(\gamma) \leqslant \delta'' m_j(\gamma), \quad j \geq 1, \quad \gamma < \gamma(\delta'), \tag{40}$$

где $\delta'' = \delta'/(1-\delta')$.

Фиксируем $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}/5)$. Покажем, что для некоторого $\gamma > 0$ в качестве искомой последовательности $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}$ можно взять $\Lambda(\gamma)$. Прежде всего, согласно лемме 8 по заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta \in (0, 1/3)$ такое, что выполнено (30).

Введем новую последовательность $\tilde{\Lambda}(\gamma) = \{\tilde{\lambda}_k(\gamma)\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел, которые пронумерованы по возрастанию. Она представляет из себя объединение групп $\tilde{\Lambda}_j(\gamma)$, $j \geq 1$, где $\tilde{\Lambda}_j(\gamma) = \{\gamma p_j(\gamma) + \gamma/2, \gamma(p_j(\gamma)+1) + \gamma/2, \ldots, \gamma m_j(\gamma) - \gamma/2\}$. Рассмотрим функции

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad L(\lambda, \gamma) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\tilde{\lambda}_k(\gamma))^2}\right).$$

Последовательность $\Lambda$ имеет конечную верхнюю плотность. По построению $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}(\gamma)) \leqslant 1/\gamma$. Поэтому (см., напр., [1], гл. I, § 1, теорема 1.1.5) $L(\lambda)$ и $L(\lambda, \gamma)$ являются целыми функциями экспоненциального типа. Сравним их поведение. Для этого воспользуемся результатом из работы [13]. В силу (39) и (40) последовательность $\tilde{\Lambda}(\gamma)$ является $\delta''$-близкой к $\Lambda$, т.е.

$$|\lambda_k - \tilde{\lambda}_k(\gamma)| \leqslant \delta''|\lambda_k|, \quad k \geq 1, \tag{41}$$

а, значит, и асимптотически $\delta''$-близкой к последовательности $\Lambda$ (в терминологии работы [13]). Поскольку в нашем случае суммы обратных величин нулей соответственно функций $L(\lambda)$ и $L(\lambda, \gamma)$, лежащих в круге $B(0, r)$, равны нулю для любого $r > 0$, то при $\delta'' \in (0, 1/2)$ по теореме B из работы [13] (где полагаем $\alpha = 1/2, \beta = 1$) выполнено неравенство

$$|\ln|L(\lambda)| - \ln|L(\lambda, \gamma)|| \leqslant A\sqrt{\delta''}|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E(\delta''), \tag{42}$$

где $A > 0$ не зависит от $\delta''$, множество $E(\delta'')$, которое является объединением кругов $B_i = B(\xi_i, \sigma_i)$, $i \geq 1$, имеет линейную плотность, не превосходящую $\sqrt[4]{\delta''}$:

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{|\xi_i| \leqslant r} \sigma_i \leqslant \sqrt[4]{\delta''}, \tag{43}$$

и центрировано с объединением нулевых множеств функций $L(\lambda)$ и $L(\lambda, \gamma)$, т.е. каждая точка этих множеств лежит по крайней мере в одном круге $B_i$, и каждый из кругов $B_i$ содержит по крайней мере одну точку этого объединения. Очевидно, можно считать, что $E(\delta'')$ симметрично относительно начала координат.

Выберем $\delta' > 0$ такое, что для $\delta'' = \delta'/(1-\delta')$ выполнены неравенства

$$A\sqrt{\delta''} < \varepsilon, \quad \sqrt[4]{\delta''} < \delta/12. \tag{44}$$

Фиксируем $\gamma_0 \in (0, \gamma(\delta'))$, $\gamma_0 < 1$, и покажем, что последовательность $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}} = \Lambda(\gamma_0)$ — искомая. Пусть $\theta \in (0, 1)$ и $k_0$ — номер, для которого верно (30) для $\gamma = \gamma_0$. Согласно (43) и (44) найдем $r_0 > 0$ такое, что

$$\frac{1}{r} \sum_{|\xi_i| \leqslant r} \sigma_i \leqslant \delta/11, \quad r \geq r_0. \tag{45}$$

Выберем номер $k_1 \geq k_0$ так, что $\lambda_k \geq r_0$ и $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0) \geq r_0$ для всех $k \geq k_1$, и пусть $B_i$ — произвольный круг множества $E(\delta'')$, содержащий какую-нибудь точку $\lambda_k$ или $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)$ с номером $k \geq k_1$. Если $\lambda_k \in B_i$, то согласно (45) в случае $|\xi_i| \leqslant \lambda_k$ верно неравенство $\sigma_i \leqslant \delta\lambda_k/11$, а в случае $|\xi_i| \geq \lambda_k$ — неравенство $\sigma_i \leqslant \delta|\xi_i|/11$, и тогда с учетом включений $\lambda_k \in B_i$, $\delta \in (0,1/3)$ получаем: $\lambda_k \geq |\xi_i|(1-\delta/11)$ и $\sigma_i \leqslant \delta|\xi_i|/11 \leqslant \delta\lambda_k/11(1-\delta/11) \leqslant 3\delta\lambda_k/32$. Ситуация $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0) \in B_i$ разбирается аналогично. Таким образом, в силу (41) и (44) имеем:

$$\sigma_i \leqslant \max\{3\delta\lambda_k/32, 3\delta\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)/32\} \leqslant 3\delta(1+\delta'')\lambda_k/32 \leqslant 13\delta\lambda_k/128 \leqslant \delta\lambda_k/9.$$

Отсюда следует, что $B_i$ лежит либо в круге $B(\lambda_k, 2\delta\lambda_k/9)$, либо в круге $B(\tilde{\lambda}_k(\gamma_0), 2\delta\lambda_k/9)$. Следовательно, с учетом (41) и (44) имеет место вложение $B_i \subset B(\lambda_k, \delta\lambda_k/3)$.

Пусть $B_j \cap B(\lambda_k, \delta\lambda_k) \neq \emptyset$. Тогда в силу (45) $|\xi_i| \leqslant (1+\delta)\lambda_k/(1-\delta/11) \leqslant 11\delta\lambda_k/8$. Поэтому, используя еще раз (45), находим, что сумма диаметров всех кругов $B_j$, которые пересекают $B(\lambda_k, \delta\lambda_k)$, не превосходит $\delta\lambda_k/4$. Это означает, что для некоторого $t \in (1/2, 1)$ окружность $S(\lambda_k, t\delta\lambda_k)$ не пересекает множество $E(\delta'')$. Тогда согласно (42) и (44) имеем оценку

$$\ln|L(\lambda)| \geq \ln|L(\lambda,\gamma_0)| - \varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in S(\lambda_k, t\delta\lambda_k), \quad k \geq k_1.$$

Напомним, что модуль функции $q_\Lambda(\lambda, \lambda_k, \delta)$ не превосходит единицы в круге $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$. Поэтому для всех $\lambda \in S(\lambda_k, t\delta\lambda_k)$ верно неравенство

$$\ln|L(\lambda,\gamma_0)| \leqslant \ln|L(\lambda)| - \ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)| + \varepsilon(1+t\delta)\lambda_k \leqslant \ln|L(\lambda)/q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)| + 2\varepsilon\lambda_k,$$

которое продолжается в круг $B(\lambda_k, t\delta\lambda_k)$, т.к. $\ln|L(\lambda)/q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)|$ — гармоническая, а $\ln|L(\lambda,\gamma_0)|$ — субгармоническая функции в $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$. Тогда с учетом (30) получаем

$$\ln|L(\lambda,\gamma_0)| \leqslant \ln|L(\lambda)| + 2\varepsilon\lambda_k + \varepsilon|\lambda| \leqslant \ln|L(\lambda)| + 4\varepsilon|\lambda|,$$
$$\lambda \in B(\lambda_k, t\delta\lambda_k) \setminus \bigcup_{\lambda_j \in B(\lambda_k,\delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma_0)), \quad k \geq k_1, \tag{46}$$

При этом объединение кругов $B(\pm\lambda_k, t\delta\lambda_k)$, $k \geq k_1$ покрывает все те круги $B_i$ множества $E(\delta'')$, каждый из которых содержит какую-нибудь точку $\pm\lambda_k$ или $\pm\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)$ с номером $k \geq k_1$. Нетрудно заметить, что оставшаяся часть множества $E(\delta'')$ (которая не покрывается указанным объединением) лежит в круге $B(0, T_1)$ для некоторого $T_1 > 0$. Таким образом, из (46) получаем

$$\ln|L(\lambda)| \geq \ln|L(\lambda,\gamma_0)| - 4\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\geq 1} B(\pm\lambda_k, \theta\rho_k(\gamma_0)) \cup B(0,T_1). \tag{47}$$

Отметим еще, что нули функции $L(\lambda,\gamma_0)$ находятся друг от друга на расстоянии, не меньшем чем $\gamma_0$. Поэтому согласно примеру, разобранному перед леммой 1, величина $\tilde{S}_{\tilde{\Lambda}(\gamma_0)}$ конечна, а, значит, $S_{\tilde{\Lambda}(\gamma_0)} = 0$. Следовательно, к последовательности $\tilde{\Lambda}(\gamma_0)$ так же, как и к $\Lambda$, можно применить лемму 8 и, используя точно такие же рассуждения как и выше, получить оценку (для некоторого $T_2 > 0$)

$$\ln|L(\lambda,\gamma_0)| \geq \ln|L(\lambda)| - 4\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\geq 1} B(\pm\tilde{\lambda}_k(\gamma_0), \theta\gamma_0/2) \cup B(0,T_2). \tag{48}$$

Рассмотрим функции

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\mu_n(\gamma_0))^2}\right), \quad \tilde{L}(\lambda,\gamma_0) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\tilde{\mu}_n(\gamma_0))^2}\right),$$

где $\tilde{\mu}_n(\gamma_0) = \gamma_0 n - \gamma_0/2$, $n \geq 1$. Нетрудно показать, что $\Lambda(\gamma_0)$ имеет конечную верхнюю плотность (она не превосходит $\overline{\tau}(\Lambda) + 1/\gamma_0$). Поэтому (см., напр., [1], гл. I, § 1, теорема 1.1.5) $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Последовательность $\tilde{\Lambda}(\gamma_0)$ имеет плотность $1/\gamma_0$ и является регулярным множеством (см. [5], гл. II, §1). Следовательно, $\tilde{L}(\lambda,\gamma_0)$ имеет регулярный рост, и ее сопряженная диаграмма совпадает с отрезком мнимой оси $[-i\pi/\gamma_0, i\pi/\gamma_0]$ (см. [1], гл. I, §2, теорема 1.2.9). Поскольку нулевое множество $\tilde{L}(\lambda,\gamma_0)$ регулярно, то (см. [5], гл. II, §1, теорема 5) верно равенство

$$\ln|\tilde{L}(\lambda,\gamma_0)| = \frac{\pi|Im\lambda|}{\gamma_0} + o(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B(\pm\tilde{\mu}_n(\gamma_0), \theta\gamma_0/2), \tag{49}$$

где $o(\lambda)$ зависит от $\theta \in (0,1]$ и $o(\lambda)/|\lambda| \to 0$, когда $|\lambda| \to \infty$.

По построению

$$\ln|f(\lambda)| - \ln|\tilde{L}(\lambda,\gamma_0)| = \ln|L(\lambda)| - \ln|L(\lambda,\gamma_0)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, каждая точка $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)$ совпадает с одной из точек $\tilde{\mu}_n(\gamma_0)$. Поэтому с учетом выбора числа $\varepsilon > 0$ из (47)–(49) получаем (35). Лемма доказана.

**Лемма 10.** *Пусть $D$ — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что множество сумм рядов (1), сходящихся в области $D$, замкнуто в пространстве $H(D)$. Тогда система $\mathcal{E} = \{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $H(D)$.*

**Доказательство.** Если выполнены условия данной леммы, то по следствию из леммы 3 верно неравенство $\overline{\tau}(\Lambda) < \infty$. Тогда, как и выше, существует целая функция экспоненциального типа $f$, которая обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Предположим, что некоторый сдвиг $z_0 + K$ сопряженной диаграммы $K$ функции $f$ лежит в области $D$. Тогда функция $exp(z_0\lambda)f(\lambda)$ лежит в пространстве $P_D$ и обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Это означает, что система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Так будет, например, когда $D$ совпадает с плоскостью или с полуплоскостью.

Пусть область $D$ отлична от плоскости и полуплоскости. Предположим, что система $\mathcal{E}$ полна в пространстве $H(D)$. Тогда по условию каждая функция из $H(D)$ представляется рядом (1) в области $D$. По теореме Абеля для рядов Дирихле (см., например, [1], гл. II, §1, п. 4) каждый такой ряд сходится равномерно на компактах в полуплоскости $\{z : Rez < H_D(1)\}$ (которая может совпадать с плоскостью, если $H_D(1) = +\infty$). Следовательно, каждая функция из $H(D)$ аналитически продолжается в эту полуплоскость, что невозможно. Таким образом, $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Лемма доказана.

## 3. Основные результаты

Пусть $D$ — неограниченная выпуклая область. Положим

$$J(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : H_D(\lambda) = +\infty\}.$$

Если $D = \mathbb{C}$, то $J(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В случае, когда $D$ — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : Re(ze^{i\varphi}) < a\}$, множество $J(D)$ представляет из себя плоскость с разрезом по лучу $\{\lambda = te^{i\varphi} : t \geq 0\}$. Если же $D$ — полоса $\{z \in \mathbb{C} : Re(ze^{i\varphi}) < a, Re(ze^{i(\varphi+\pi)}) < b\}$, то $J(D) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda = te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$. В остальных случаях область $D$ не содержит ни одной прямой. Однако $D$ всегда содержит некоторый луч $\{z = z_0 + te^{i\varphi}, t \geq 0\}$. При этом множество $J(D)$ является углом раствора строго меньше $2\pi$ и содержит открытый угол раствора $\pi$ — полуплоскость $\{\lambda = te^{i\psi} : -\varphi - \frac{\pi}{2} < \psi < -\varphi + \frac{\pi}{2}, t > 0\}$. Будем говорить, что $D$ узкая, если $D$ — полоса или $J(D)$ совпадает с открытой полуплоскостью. В противном случае будем говорить, что $D$ — широкая.

Для узкой области $D$ существует единственное значение $\psi \in [0,\pi)$, такое, что $H_D(e^{i\psi}) < +\infty$ и $H_D(e^{i\psi+\pi}) < +\infty$. Оно соответствует граничным лучам $\{\lambda = te^{i\psi} : t > 0\}$ и $\{\lambda = te^{i\psi+\pi} : t > 0\}$ множества $J(D)$. Выпуклый компакт $K$ при помощи некоторого сдвига может быть помещен в узкую область $D$ тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$H_D(e^{i\psi}) + H_D(e^{i\psi+\pi}) > H_K(e^{i\psi}) + H_K(e^{i\psi+\pi}).$$

Если $D$ — широкая область, то для любого выпуклого компакта $K$ найдется сдвиг, который помещает его в область $D$. Таким образом, если последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\overline{\tau}(\Lambda) < \infty$, то как и в лемме 10 система $\mathcal{E} = \{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $H(D)$.

**Теорема 1.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $D$ — неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что положительная вещественная полуось лежит на границе множества $J(D)$, но не принадлежит ему. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$ (т.е. аналитически продолжается в полуплоскость и представляется там рядом);*

*2) $S_\Lambda = 0$.*

**Доказательство.** Пусть $z_0 \in D$. По условию положительная вещественная полуось лежит на границе множества $J(D)$. Следовательно, один из лучей $l_1 = \{z = z_0 + te^{i\pi/2}, t \geq 0\}$, $l_2 = \{z = z_0 + te^{-i\pi/2}, t \geq 0\}$ (возможно оба) лежит в области $D$. Пусть для определенности это будет луч $l_1$. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ такое, что круг $B(z_0, 2\varepsilon_0)$ содержится в $D$. Тогда область $l_1 + B(z_0, 2\varepsilon_0)$ также содержится в $D$. По лемме 9 существуют целая функция экспоненциального типа $f$, обращающаяся в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, и число $\gamma_0 > 0$, которые удовлетворяют неравенству (35) (для $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0$). Пусть $K$ — сопряженная диаграмма функции $f$. Тогда согласно (35) для всех точек $\lambda$, не лежащих на вещественной оси, имеем

$$H_K(\lambda) = h_f(\lambda) \leqslant \pi|Im\lambda|/\gamma_0 + \varepsilon_0|\lambda|.$$

Поскольку опорная функция непрерывна, то это неравенство продолжается на всю плоскость. Пусть $t_0 > \pi/\gamma_0$. Рассмотрим функцию $f_0(\lambda) = f(\lambda)exp(\lambda\tilde{z}_0)$, где $\tilde{z}_0 = z_0 + t_0 e^{i\pi/2}$. Ее сопряженной диаграммой является компакт $K + \tilde{z}_0$, который, как нетрудно заметить, лежит в области $l_1 + B(z_0, 2\varepsilon_0)$, а значит, и в $D$. Таким образом, $f_0$ принадлежит пространству $P_D$ и обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Это означает, что система $\mathcal{E} = \{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $H(D)$.

Теперь мы можем применить теорему 5.1 из работы [3]. Если выполнено 1), то согласно этой теореме верно равенство $S_\Lambda = 0$ (в условиях леммы величина $S_\Lambda(D)$, участвующая в цитируемой теореме, совпадает с $S_\Lambda$).

Докажем обратное. Предположим, что выполнено 2) и покажем, что тогда имеет место утверждение 5) из теоремы 5.1 в работе [3]. Пусть $L$ — произвольный выпуклый компакт в области $D$. Тогда $H_D(\lambda) > H_L(\lambda)$, $\lambda \neq 0$. Согласно определению опорной функции и непрерывности опорной функции компакта найдем точку $z_1 \in D$ и числа $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$, для которых верно неравенство

$$Rez_1 - \tilde{\varepsilon} > H_L(\lambda), \quad \lambda \in B(1, \tilde{\delta}). \tag{50}$$

Уменьшая при необходимости $\tilde{\varepsilon} > 0$, можно считать, что круг $B(z_1, 2\tilde{\varepsilon})$ лежит в области $D$. Тогда $D$ содержит также и область $l_1 + B(z_1, 2\tilde{\varepsilon})$. Пусть число $\gamma_0 \in (0,1)$ и функция $f(\lambda)$ удовлетворяют неравенству (35). Положим $f_1(\lambda) = f(\lambda)exp(\lambda\tilde{z}_1)$, где $\tilde{z}_1 = z_1 + t_1 e^{i\pi/2}$ и $t_1 > \pi/\gamma_0$. Функция $f_1$ обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$. Кроме того, ее сопряженная диаграмма лежит в области $l_1 + B(z_1, 2\tilde{\varepsilon})$, а значит и в $D$, т.е. $f_1 \in P_D$.

Пусть $\delta > 0$. Покажем, что для некоторого $T(\delta) > 0$ каждая точка $\lambda_k$ такая, что $|\lambda_k| > T(\delta)$ принадлежит множеству $R^\delta$, где $R = \{z : \ln|f_1(\lambda)| \geq H_L(\lambda)\}$.

Положим $T(\delta) = \max\{T, \gamma_0/\tilde{\delta}, \gamma_0/\delta\}$, где $T > 0$ такое же, как в (35). Пусть $|\lambda_k| > T(\delta)$. Тогда $|\lambda_k - i\gamma_0 - \lambda_k| \leqslant \delta\lambda_k < \delta|\lambda_k - i\gamma_0|$ и в силу (35) имеем:

$$\ln|f(\lambda_k - i\gamma_0)| \geq \frac{|Im(\lambda_k - i\gamma_0)|}{\gamma_0} - \tilde{\varepsilon}|\lambda_k - i\gamma_0| = \pi - \tilde{\varepsilon}|\lambda_k - i\gamma_0| \geq -\tilde{\varepsilon}\lambda_k.$$

Отсюда с учетом (50) и однородности опорной функции получаем

$$\ln|f_1(\lambda_k - i\gamma_0)| = \ln|f(\lambda_k - i\gamma_0)| + Re(\tilde{z}_1(\lambda_k - i\gamma_0)) \geq -\tilde{\varepsilon}\lambda_k + \lambda_k Re\tilde{z}_1 + \gamma_0 Im\tilde{z}_1 =$$
$$= -\tilde{\varepsilon}\lambda_k + \lambda_k Re z_1 + \gamma_0 Im\tilde{z}_1 \geq H_L(\lambda_k - i\gamma_0).$$

Здесь мы считаем, что $Im\tilde{z}_1 \geq 0$. Если $Im\tilde{z}_1 < 0$, то вместо $\lambda_k - i\gamma_0$ нужно взять $\lambda_k + i\gamma_0$.

Мы показали, что $\lambda_k \in R^\delta$, если $|\lambda_k| > T(\delta)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 5.1 из работы [3], а также утверждение 5) этой теоремы. Поэтому верно и ее утверждение 2), согласно которому каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области $D$. Тогда то по теореме Абеля для рядов Дирихле (см., например, [1], гл. II, §1, п. 2,4) каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Re z < H_D(1)\}$. Теорема доказана.

Отметим, что любая полуплоскость $D = \{z : Re z < a\}$, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому имеет место

**Следствие.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $D = \{z : Re z < a\}$. Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $D$ тогда и только тогда, когда $S_\Lambda = 0$.*

**Теорема 2.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $D$ — неограниченная широкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что положительная вещественная полуось принадлежит множеству $J(D)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ во всей плоскости представляется рядом (1);*

*2) $S_\Lambda > -\infty$.*

**Доказательство.** Как отмечалось выше, в условиях теоремы система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Тогда по теореме 5.1 из работы [3], из утверждения 1) данной теоремы следует 2).

Докажем обратное. Проверим, что верно утверждение 5) из теоремы 5.1 в работе [3]. Неравенство $S_\Lambda > -\infty$ выполнено согласно 2). Остальные пункты утверждения 5) указанной теоремы в нашем случае выполнены тривиально, т.к. все точки $\lambda_k$ принадлежат положительной вещественной полуоси, которая лежит в $J(D)$. Таким образом, в силу теоремы 5.1 в работе [3] каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области $D$. Поскольку опорная функция $D$ неограничена на положительной вещественной полуоси, то по теореме Абеля для рядов Дирихле каждый такой ряд сходится во всей плоскости. Теорема доказана.

В частном случае для $D = \mathbb{C}$ получаем

**Следствие.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из $W(\Lambda, \mathbb{C})$ во всей плоскости представляется рядом (1);*

*2) $S_\Lambda > -\infty$;*

*3) Каждая функция из $W(\Lambda, \mathbb{C})$ представляется рядом (1) на некотором открытом подмножестве плоскости.*

**Доказательство.** Утверждения 1) и 2) эквивалентны согласно теореме 2. Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) тривиальна. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) вытекает из леммы 3. Следствие доказано.

**Теорема 3.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, $D$ — неограниченная узкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что положительная вещественная полуось принадлежит множеству $J(D)$ и $\psi \in [0, \pi)$ такое, что $H_D(e^{i\psi}) < +\infty$ и $H_D(e^{i\psi+\pi}) < +\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ во всей плоскости представляется рядом (1);*

*2) $S_\Lambda > -\infty$ и*

$$|\sin\psi| \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \overline{\lim_{r\to+\infty}} \sum_{r\leqslant\lambda_k<ar} Re\frac{1}{\lambda_k} < \frac{1}{2\pi}\left(H_D(e^{i\psi}) + H_D(e^{i\psi+\pi})\right). \qquad (51)$$

**Доказательство.** Если выполнено 1), то по лемме 10 система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Тогда, как нетрудно заметить, из теоремы 2 в работе [14] следует (51). Применяя теперь теорему 5.1 из работы [3], получаем 2).

Обратно, если верно (51), то по теореме 2 из работы [14] система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Тогда по теореме 5.1 из работы [3] верна импликация 2) $\Rightarrow$ 1). Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел,* $D$ *— выпуклая область в* $\mathbb{C}$ *такая, что функция* $H_D(\lambda)$ *ограничена в окрестности* $\lambda = 1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из* $W(\Lambda, D)$ *представляется рядом (1) в полуплоскости* $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$*;*

*2) Система* $\mathcal{E}$ *не полна в* $H(D)$, $S_\Lambda = 0$, $\tau_0(\Lambda) < +\infty$, *и пересечение опорной прямой* $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ *с границей области* $D$ *содержит отрезок длины* $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

**Доказательство.** Пусть верно утверждение 2). Покажем, что выполнены все условия теоремы 3.6 в работе [3]. Условия 1) и 2) этой теоремы выполнены, т.к. $S_\Lambda = 0$. Условия 3) и 4) выполнены тривиально, т.к. все точки $\lambda_k$ принадлежат положительной вещественной полуоси, в окрестности которой опорная функция области $D$ ограничена. Остается проверить условие 5). Такая проверка уже осуществлена в лемме 7. Согласно ей условие 5) теоремы 3.6 из работы [3] также выполнено. Тогда в силу этой теоремы и предложения 2.10 работы [3] каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области $D$. Как и выше, по теореме Абеля для рядов Дирихле получаем отсюда утверждение 1) данной теоремы.

Пусть теперь верно утверждение 1). Предположим, что $\tilde{S}_\Lambda = -\infty$. Тогда по лемме 4 для каждого $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ и функция $g_\tau \in W(\Lambda, G)$, где $G = (\{z : Rez < \tau\delta\} \cap B(0,\tau)) \cup \{z : Rez < 0\}$, которая представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = 0$. Положим $X = \partial D \cap \{z : Rez = H_D(1)\}$. По условию $H_D(\lambda)$ ограничена в окрестности $\lambda = 1$. Поэтому $X$ является либо точкой, либо отрезком. Если $X$ состоит из одной точки, то обозначим ее $z_0$. В противном случае через $z_0$ обозначим середину отрезка $X$. Пусть $\tau > 0$ строго больше длины $X$ (возможно равной нулю). Тогда область $\tilde{G} = G + z_0 - \tilde{\delta}$ для некоторого $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$ содержит $D$. Положим $g(z) = g_\tau(z - z_0 + \tilde{\delta})$. Функция $g$ принадлежит пространству $W(\Lambda, \tilde{G}) \subset W(\Lambda, D)$ и представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = Rez_0 - \tilde{\delta} = H_D(1) - \tilde{\delta}$. Поскольку разложение в ряд Дирихле является единственным, то это противоречит утверждению 1).

Таким образом, $\tilde{S}_\Lambda > -\infty$. Отсюда, как уже отмечалось, следует равенство $S_\Lambda = 0$. Кроме того, по лемме 1 максимальная плотность $\tau_0(\Lambda)$ конечна, а по лемме 10 система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Остается показать, что множество $X$ имеет длину не меньше, чем $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

Предположим, что длина $X$ равна $2\pi\tau' < 2\pi\tau_0(\Lambda)$. Выберем $\alpha > 0$ такое, что $\tau' + \alpha < \tau_0(\Lambda)$. Рассмотрим области

$$D'' = \{z : Rez < H_D(1)\} \cap \{z : Re(ze^{-i\beta}) < Re((z_0 + i(\tau' + \alpha))e^{-i\beta})\} \cap$$

$$\cap \{z : Re(ze^{i\beta})) < Re((z_0 - i(\tau' + \alpha))e^{i\beta})\}, \quad D' = D'' \cap \{z : Rez > b\}.$$

Нетрудно заметить, что область $D''$ является неограниченной выпуклой, и для некоторого $\beta > 0$ содержит $D$, а область $D' \subset D''$ представляет из себя равнобедренную трапецию (когда $b < H_D(1)$), основания которой параллельны мнимой оси. Одно из них лежит на опорной прямой $\{z : Rez = H_D(1)\}$ к области $D$, содержит $X$ и имеет длину $2\pi(\tau' + \alpha)$. Длина другого строго больше, чем $2\pi(\tau' + \alpha)$, и она увеличивается при уменьшении $b$. Выберем $b \in \mathbb{R}$ такое, что эта длина становится строго больше, чем $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Тогда область $D'$ содержит некоторый сдвиг отрезка $[-i\pi\tau_0(\Lambda), i\pi\tau_0(\Lambda)]$. Пусть $f$ — функция, существование которой утверждается в лемме 6. Так как $f$ обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, то система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D')$. Поэтому подпространство $W(\Lambda, D')$ нетривиально.

Предположим, что каждая функция из $W(\Lambda, D')$ представляется рядом (1) в области $D'$. Поскольку она ограничена, то по теореме 5.2 из работы [3] существует целая функция $\varphi$ экспоненциального типа, которая обращается в ноль в точках $\lambda_k$, $k \geq 1$, имеет регулярный рост всюду в плоскости, и ее сопряженная диаграмма совпадает с замыканием области $D'$. Тогда согласно (2) за исключением не более чем счетного числа значений $\varphi$ верно равенство

$$\tau(-\varphi, \varphi, \tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2\pi} s(-\varphi, \varphi, D'), \tag{52}$$

где $\tilde{\Lambda}$ — нулевое множество $f$, $s(-\varphi, \varphi, D')$ — длина дуги $\gamma(\varphi)$ границы $\partial D'$, заключенная между точками опоры $z(\varphi)$, $z(-\varphi) \in \partial D'$ соответственно опорных прямых $l(\pm\varphi) = \{z : Re(ze^{\pm\varphi i}) = H'_D(e^{\pm\varphi i})\}$. Поскольку $\Lambda$ является частью множества $\tilde{\Lambda}$, которое измеримо, то за исключением не более чем счетного числа значений $\varphi$ имеем:

$$\tau_0(\Lambda) = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \leqslant \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(-\varphi,\varphi,r,\Lambda) - n(-\varphi,\varphi,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} =$$

$$= \overline{\lim_{\delta\to 0}} \left( \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(-\varphi,\varphi,r,\Lambda)}{\delta r} - \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(-\varphi,\varphi,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \right) =$$

$$= \overline{\lim_{\delta\to 0}} \left( \frac{\tau(-\varphi,\varphi,\tilde{\Lambda})}{\delta} - \frac{(1-\delta)\tau(-\varphi,\varphi,\tilde{\Lambda})}{\delta} \right) = \tau(-\varphi,\varphi,\Lambda).$$

Для достаточно малых $\varphi$ дуга $\gamma(\varphi)$ совпадает с основанием трапеции $D'$, длина которого равна $2\pi(\tau' + \alpha)$. Поэтому в силу (52) должно быть верно неравенство $\tau_0(\Lambda) \leqslant \tau' + \alpha$. Это противоречит выбору числа $\alpha$.

Таким образом, существует функция $g' \in W(\Lambda, D')$, которая не представляется рядом (1) в области $D'$. Рассмотрим теперь область $\tilde{D}' = D' \cap \{z : Rez < a\}$, где $b < a < H_D$ (1). Она лежит в $D'$ и является равнобедренной трапецией, основания которой параллельны мнимой оси. Одно из них совпадает с тем основанием $D'$, которое имеет длину строго больше $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Выберем число $a$ такое, что другое основание $\tilde{D}'$ также имеет длину строго больше $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Система $\mathcal{E}$ не полна в $H(\tilde{D}')$ по тем же причинам, что и для $H(D')$. Тогда по уже доказанной импликации 2) $\Rightarrow$ 1) функция $g' \in W(\Lambda, \tilde{D}')$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z : Rez < a\}$. Объединение последней и области $D'$ содержит $D''$. Поэтому $g' \in W(\Lambda, \tilde{D}') \cap H(D'')$. Поскольку область $D''$ неограничена, то согласно теореме 8.1 из работы [15] верно также включение $g' \in W(\Lambda, D'')$. Область $D$ лежит в $D''$. Следовательно, $g' \in W(\Lambda, D)$. В силу утверждения 1) функция $g'$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$, которая содержит $D'$. Это противоречит выбору $g'$.

Таким образом, отрезок $X$ имеет длину не меньше, чем $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Теорема доказана.

**Замечание.** Если последовательность $\Lambda$ имеет плотность $\tau(\Lambda)$ (и тогда $\tau(\Lambda) = \tau_0(\Lambda)$), то система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$ тогда и только тогда, когда область $D$ содержит некоторый вертикальный отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$ (см. [16], гл. III, §1, теорема 3.1.6). Если же область $D$ неограничена, то, как и выше, условие о том, что система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$, можно либо исключить либо заменить на (51).

**Следствие 1.** *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, $D$ — неограниченная широкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что функция $H_D(\lambda)$ ограничена в окрестности $\lambda = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$;*

*2) $S_\Lambda = 0$, $\tau_0(\Lambda) < +\infty$ и пересечение опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ с границей области $D$ содержит отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$.*

**Следствие 2.** *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел,* $D$ *— неограниченная узкая выпуклая область в* $\mathbb{C}$ *такая, что функция* $H_D(\lambda)$ *ограничена в окрестности* $\lambda = 1$ *и* $\psi \in [0,\pi)$ *такое, что* $H_D(e^{i\psi}) < +\infty$ *и* $H_D(e^{i\psi+\pi}) < +\infty$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) Каждая функция из* $W(\Lambda, D)$ *представляется рядом (1) в полуплоскости* $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$*;*

*2) Выполнено (51),* $S_\Lambda = 0$*,* $\tau_0(\Lambda) < +\infty$*, и пересечение опорной прямой* $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ *с границей области* $D$ *содержит отрезок длины* $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
2. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 5–186.
3. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
4. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Критерий справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ. 2012. Т. 46. № 4. С. 14–30.
5. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
6. Лелон П., Л. Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных.* Мир, М., 1989.
7. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
8. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука, 1982.
9. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge University Press, 1997.
10. Кривошеева О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. 2011. Т.23. № 2. С. 162–205.
11. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 2. С. 43–56.
12. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. 1985. Т. 11. С. 257–282.
13. Красичков И.Ф. *Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней* // Математический сборник. 1966. Т. 70(112). № 2. С. 198–231.
14. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Математический сборник. 1989. Т. 180. № 5. С. 706–719.
15. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Математический сборник. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
16. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980.



Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `kriolesya2006@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 121-129.

УДК 517.958:533.7

# ИНВАРИАНТНЫЕ И ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ ГАЛИЛЕЕВЫХ ПЕРЕНОСОВ И РАСТЯЖЕНИЯ

**Е.В. МАКАРЕВИЧ**

**Аннотация.** В работе рассмотрена трехмерная подалгебра, вложенная в четырехмерную подалгебру, с целью найти множество решений для сопряжения с решениями на подалгебрах большей размерности. Хотя цель еще не достигнута, но получены инвариантные решения ранга 1 и все возможные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. Получены следующие результаты: две подмодели – инвариантная и частично инвариантная, 7 решений, зависящих от произвольной функции, и 19 точных решений.

**Ключевые слова:** газовая динамика, иерархия подмоделей, инвариантное решение, частично инвариантное решение.

**Mathematics Subject Classification:** 35Q35, 35B06.

## 1. Введение

Уравнения газовой динамики (УГД)

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, D\rho + \rho\nabla \cdot \vec{u} = 0, DS = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ – полная производная по времени, $\vec{u}$ – вектор скорости, $p$ – давление, $\rho$ – плотность, $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ – квадрат скорости звука, с уравнением состояния с разделенной плотностью

$$\rho = h(p)S \tag{2}$$

(S – функция энтропии) допускают двенадцатимерную алгебру Ли операторов $L_{12}$ [1]. Оптимальная система неподобных подалгебр для УГД с уравнением состояния (2) приведена в [2, табл. 3]. На примере пятимерной самонормализованной подалгебры рассмотрена иерархия подмоделей УГД, составлен граф всех вложенных в нее подалгебр. Подмодели вложены друг в друга так, что решение инвариантной подмодели надалгебры является частным решением инвариантной подмодели подалгебры [3]. В работе [4] построено и исследовано частично инвариантное решение на четырехмерной подалгебре из графа $\Gamma_5$ [3].

В настоящей статье рассмотрена трехмерная подалгебра, вложенная в четырехмерную подалгебру из работы [4], с целью найти множество решений для сопряжения с решениями на подалгебрах большей размерности. Хотя цель еще не достигнута, но получены инвариантная подмодель ранга 1 и все возможные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. Получено 23 решения, зависящих от нескольких постоянных, которые обозначены буквами $v_0, w_0, \rho_0, K_0, P_0, h_0, x_0, n, C, C_i, i = 0, 1, 2$. Все решения записаны с точностью до преобразований, допускаемых УГД.

---

E.V. Makarevich, Invariant and partially invariant solutions with respect to Galilean shifts and dilatation.

© Макаревич Е.В. 2013.

Работа выполнена при поддержке гранта №11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.
*Поступила 6 марта 2013 г.*

Справедлив общий факт об иерархии вложенных друг в друга подмоделей: инвариантных, частично инвариантных, дифференциально-инвариантных [5].

## 2. Инвариантные решения

Рассмотрим трехмерную подалгебру 3.23 [2, табл. 3] с базисом в декартовой системе координат: $\{t\partial_y+\partial_v, t\partial_z+\partial_w, b(t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z)+t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w+2\rho\partial_\rho\}, b\neq 0, b\neq -1$. Точечные инварианты вычислены в работе [3, табл. 1]. Представление решения имеет вид:

$$\begin{aligned}&u=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}u_1(x_1)), v=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}v_1(x_1)+y), w=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}w_1(x_1)+z),\\&\rho=|t|^{\frac{2}{b+1}}\rho_1(x_1), S=|t|^{\frac{2}{b+1}}S_1(x_1), p=p(x_1), x_1=|t|^{-\frac{b}{b+1}}x.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь и далее предполагаем $\rho_1\neq 0$, иначе решение не имеет физического смысла. Уравнение состояния (2) принимает вид:

$$\rho_1=h(p)S_1.\tag{4}$$

Введем обозначение

$$\bar u_1=u_1-b(b+1)^{-1}x_1,\tag{5}$$

тогда подстановка (3),(5) в УГД (1) дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned}&p_{x_1}=\rho_1\left((1-b)(1+b)^{-1}\bar u_1-\bar u_1\bar u_{1x_1}+b(b+1)^{-2}x_1\right),\\&\bar u_1 v_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}v_1,\\&\bar u_1 w_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}w_1,\\&\bar u_1\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}+\bar u_{1x_1}=-(3b+4)(b+1)^{-1},\\&\bar u_1 S_{1x_1}=-2(b+1)^{-1}S_1.\end{aligned}\tag{6}$$

При исследовании подмодели возникает несколько случаев. Если $\bar u_1=0$, то $\rho_1=0$, и решение не имеет физического смысла. Пусть $\bar u_1\neq 0$. Введем новую переменную $s$ (с точностью до постоянного слагаемого) по формуле:

$$ds=\bar u_1^{-1}dx_1.\tag{7}$$

Интегрируя систему (4),(6),(7), получим набор интегралов, зависящих от пяти постоянных $v_0, w_0, \rho_0, S_0, h_0$

$$\begin{aligned}&v_1=v_0e^{-\frac{b}{b+1}s}, w_1=w_0e^{-\frac{b}{b+1}s}, \rho_1x_{1s}=\rho_0e^{-\frac{3b+4}{b+1}s},\\&S_1=S_0e^{-\frac{2}{b+1}s}, h(p)x_{1s}=h_0e^{-\frac{3b+2}{b+1}s}.\end{aligned}\tag{8}$$

Если в последнем равенстве $h(p)\neq const$, то система сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{3b+2}{b+1}+\frac{x_{1ss}}{x_{1s}}=\rho_0e^{-\frac{3b+4}{b+1}s}\left(\frac{b-1}{b+1}x_{1s}+x_{1ss}-\frac{b}{(b+1)^2}x_1\right)\varphi\left(\frac{h_0}{x_{1s}}e^{-\frac{3b+2}{b+1}s}\right),\tag{9}$$

где введена суперпозиция функций $\varphi=(h'h^{-1})\circ h^{(-1)}$, а $\rho_0$ – не существенная постоянная (растяжением по $x_1$ ее можно сделать 1).

Если $h(p)=const$, то $x_{1s}=x_0e^{-\frac{3b+2}{b+1}s}$, и возможны три случая.

1) $b\neq-\dfrac{2}{3}, b\neq-\dfrac{4}{3}$. Тогда за счет сдвига по $s$ делаем $x_0=1$. Решение системы (6) задается формулами

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+\frac{3b+2}{b+1}C, v_1=v_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}}, w_1=w_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}},\\&\rho_1=\rho_0|x_1-C|^{\frac{2}{3b+2}}, p=\frac{3b+2}{b+1}\rho_0|x_1-C|^{\frac{3b+4}{3b+2}}\left(\frac{(b+2)(3b+2)}{(b+1)(3b+4)}C-x_1\right).\end{aligned}\tag{10}$$

2) $b = -\dfrac{4}{3}$. За счет сдвига по $s$ делаем $x_0 = 1$. Решение задается формулами

$$
\begin{aligned}
&u_1 = -2x_1 + 6C, v_1 = v_0(x_1 - C)^{\frac{2}{3}}, w_1 = w_0(x_1 - C)^{\frac{2}{3}},\\
&\rho_1 = \rho_0(x_1 - C)^{-1}, p = -6\rho_0 x_1 - 12\rho_0 C \ln|x_1 - C|.
\end{aligned} \tag{11}
$$

3) $b = -\dfrac{2}{3}$. Тогда $x_{1s} = C, h = h_0 C^{-1}$. Решение задается формулами

$$
\begin{aligned}
&u_1 = -2x_1 + C, v_1 = v_0 e^{\frac{2}{C}x_1}, w_1 = w_0 e^{\frac{2}{C}x_1},\\
&\rho_1 = \rho_0 e^{-\frac{6}{C}x_1}, p = \rho_0 C e^{-\frac{6}{C}x_1}(x_1 - \frac{2}{3}C).
\end{aligned} \tag{12}
$$

Решения УГД в физических переменных получаются по формулам (3), в которые подставляется (8) с некоторым решением уравнения подмодели (9) или (10),(11),(12). Далее пишем формулы только для $u_1, v_1, w_1, \rho_1, p$.

## 3. Регулярные частично инвариантные решения ранга 1, дефекта 1, зависящие от всех пространственных переменных

На подалгебре 3.23 строим частично инвариантное решение ранга 1, дефекта 1. Из выражений для инвариантов находим скорости и плотность, при этом давление предполагаем функцией общего вида. Представление решения имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&u = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} u_1(x_1)), v = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} v_1(x_1) + y), w = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} w_1(x_1) + z),\\
&\rho = |t|^{\frac{2}{b+1}} \rho_1(x_1), p = p(x, y, z, t), x_1 = |t|^{-\frac{b}{b+1}} x.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Из уравнения состояния (2) определяется энтропия

$$
|t|^{\frac{2}{b+1}} \rho_1(x_1) = h(p) S. \tag{14}
$$

При подстановке представления (13) и (14) в УГД (1) определяются все производные давления, что дает выражение для давления

$$
p = |t|^{-\frac{b}{b+1}} (C_1 y + C_2 z) + P(x_1) + K(t). \tag{15}
$$

После этого УГД переходят в систему уравнений с одной независимой переменной $x_1$

$$
\rho_1\left((b+1)^{-1} u_1 + (b(b+1)^{-1} x_1 - u_1)\, u_{1x_1}\right) = P_{x_1}, \tag{16}
$$

$$
\rho_1\left(-b(b+1)^{-1} v_1 + (b(b+1)^{-1} x_1 - u_1)\, v_{1x_1}\right) = C_1, \tag{17}
$$

$$
\rho_1\left(-b(b+1)^{-1} w_1 + (b(b+1)^{-1} x_1 - u_1)\, w_{1x_1}\right) = C_2, \tag{18}
$$

$$
\rho_{1x_1} \rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1} x_1 - u_1\right) - 2(b+1)^{-1} = u_{1x_1} + 2, \tag{19}
$$

а также функциональное переопределенное равенство

$$
\begin{aligned}
h' h^{-1}((b+1)^{-1} |t|^{-\frac{b}{b+1}} (C_1 y + C_2 z) - \left(b(b+1)^{-1} x_1 - u_1\right) P_{x_1} + t K_t +\\
+ C_1 v_1 + C_2 w_1) = 2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1} \rho_1^{-1} \left(b(b+1)^{-1} x_1 - u_1\right).
\end{aligned} \tag{20}
$$

где $P$ – произвольная функция от $x_1$, $K$ – произвольная функция от $t$. Рассмотрим случай, когда решение зависит от всех пространственных переменных: ${C_1}^2 + {C_2}^2 \neq 0$. Тогда из равенства (20) исключим выражение

$$
|t|^{-\frac{b}{b+1}} (C_1 y + C_2 z) = p - P(x_1) - K(t),
$$

справедливое в силу (15). Получим равенство по независимым переменным $t, x_1, p$. Дифференцирование по $t$ дает равенство

$$
h' \left(-(b+1)^{-1} K + t K_t\right)_t = 0. \tag{21}
$$

Пусть первый множитель в (21) не равен нулю $h' \neq 0$. В этом случае из (21) определяется функция $K = K_0|t|^{\frac{1}{b+1}} - C_0(b+1)$, $K_0, C_0$ – постоянные. Давление записывается в виде $p = |t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1 y + C_2 z) + P(x_1) + K_0|t|^{\frac{1}{b+1}} - C_0(b+1)$. Уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} &(b+1)^{-1}(p-P) + C_0 - \left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) P_{x_1} + C_1 v_1 + C_2 w_1 = \\ &\qquad = h{h'}^{-1}\left(2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

В этом равенстве $2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) \neq 0$, так как иначе придем к противоречию в равенстве (22). Дифференцируем (22) по $p$:

$$\left(h{h'}^{-1}\right)' = (b+1)^{-1}\left(2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)\right)^{-1}.$$

В этом равенстве переменные $x_1, p$ разделились, поэтому обе части равенства постоянные. Из последнего равенства находим $h = h_0(p+P_0)^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma \neq 0$. Если заменить $p + P_0$ на $p$, $h_0 S$ на $S$, то $h = p^{\frac{1}{\gamma}}$, уравнение состояния примет вид $\rho = p^{\frac{1}{\gamma}} S$. В УГД (1) вместо уравнения для энтропии можно написать уравнение для давления $Dp + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0$. Подставим функцию $h$ в (22) и соберем коэффициенты при $p$. Получим следующую переопределенную систему уравнений: (16), (17), (18), а также

$$\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) P_{x_1} + (b+1)^{-1}P = C_1 v_1 + C_2 w_1 + C_0, \tag{23}$$

$$\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) = (2-\gamma^{-1})(b+1)^{-1}, \tag{24}$$

$$u_{1x_1} = -(2b+2+\gamma^{-1})(b+1)^{-1}. \tag{25}$$

Из (25) находим $u_1 = -(2b+2+\gamma^{-1})(b+1)^{-1}x_1 + C(b+1)^{-1}$, $C$ – постоянная. Тогда уравнение (24) принимает вид

$$\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}\left((3b+2+\gamma^{-1})x_1 - C\right) = 2 - \gamma^{-1}. \tag{26}$$

Пусть в (26) $3b+2+\gamma^{-1} = 0$. Если $\gamma^{-1} = 2$, то $b = -\dfrac{4}{3}$ и (26) принимает вид $\rho_{1x_1}C = 0$. Случай $C \neq 0$ приводит к не физическому решению ($\rho = 0$). При $C = 0$ решение задается формулами

$$\begin{aligned} &u_1 = 4x_1, v_1 = -\frac{1}{4}C_1{\rho_1}^{-1}, w_1 = -\frac{1}{4}C_2{\rho_1}^{-1}, {\rho_1}^2 = \frac{{C_1}^2 + {C_2}^2}{144(-{x_1}^2 + {x_0}^2)}, \\ &p = t^{-4}(C_1 y + C_2 z) + \frac{1}{12}({C_1}^2 + {C_2}^2){\rho_1}^{-1} + K_0|t|^{-3}, x_1 = t^{-4}x. \end{aligned} \tag{27}$$

Если $\gamma^{-1} \neq 2$, то интегрирование приводит к противоречию: $C_1 = C_2 = 0$.

Пусть $3b+2+\gamma^{-1} \neq 0$. При $\gamma^{-1} = 2$ получаем четыре решения с разными значениями параметра $b$.

1) $b = -2$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = -2C, v_1 = v_0(x_1 + C) - \frac{1}{2}C_1{\rho_0}^{-1}, w_1 = w_0(x_1 + C) - \frac{1}{2}C_2{\rho_0}^{-1}, \\ &\rho_1 = \rho_0, p = t^{-2}(C_1 y + C_2 z) + 2\rho_0 C(x_1 + C) + K_0 t^{-1} + \frac{1}{2}{\rho_0}^{-1}({C_1}^2 + {C_2}^2), \end{aligned} \tag{28}$$

где $x_1 = t^{-2}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 2\rho_0 C$.

2) $b = -\dfrac{8}{5}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{4}{3}x_1, v_1 = v_0{x_1}^2 - \frac{3}{8}C_1{\rho_0}^{-1}, w_1 = w_0{x_1}^2 - \frac{3}{8}C_2{\rho_0}^{-1}, \\ &\rho_1 = \rho_0, p = |t|^{-\frac{8}{3}}(C_1 y + C_2 z) - \frac{2}{9}\rho_0{x_1}^2 + K_0|t|^{-\frac{5}{3}} + \frac{9}{40}{\rho_0}^{-1}({C_1}^2 + {C_2}^2). \end{aligned} \tag{29}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{8}{3}}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 + \dfrac{2}{9}\rho_0 = 0$.

3) $b = -\dfrac{3}{2}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = 2x_1, v_1 = v_0 {x_1}^3 - \frac{1}{3}C_1{\rho_0}^{-1}, w_1 = w_0{x_1}^3 - \frac{1}{3}C_2{\rho_0}^{-1},\\ &\rho_1 = \rho_0, p = |t|^{-3}(C_1 y + C_2 z) - \rho_0 {x_1}^2 + K_0|t|^{-2} + \frac{1}{6}{\rho_0}^{-1}({C_1}^2 + {C_2}^2). \end{aligned} \tag{30}$$

где $x_1 = |t|^{-3}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 0$.

4) $b = -\dfrac{5}{3}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = x_1 - \frac{3}{2}C, v_1 = v_0(x_1 + C)^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}C_1{\rho_0}^{-1}, w_1 = w_0(x_1 + C)^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}C_2{\rho_0}^{-1},\\ &\rho_1 = \rho_0, p = |t|^{-\frac{5}{2}}(C_1 y + C_2 z) + \frac{15}{4}\rho_0 C(x_1 + C) + K_0|t|^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}{\rho_0}^{-1}({C_1}^2 + {C_2}^2). \end{aligned} \tag{31}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{5}{2}}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 0$.

При $\gamma^{-1} \neq 2$ система разрешима только при следующих значениях параметров $b$ и $\gamma^{-1}$:

5) $b = -\dfrac{3}{2}, \gamma^{-1} = \dfrac{3}{2}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = x_1 - 2C, v_1 = v_0|x_1 + C|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}},\\ &w_1 = w_0|x_1 + C|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 + C|^{-\frac{1}{2}},\\ &p = |t|^{-3}(C_1 y + C_2 z) + 12\rho_0 C|x_1 + C|^{\frac{1}{2}} + K_0|t|^{-2}, \end{aligned} \tag{32}$$

где $x_1 = |t|^{-3}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 0, {C_1}^2 + {C_2}^2 = 24{\rho_0}^2 C$.

6) $b = -\dfrac{13}{9}, \gamma^{-1} = \dfrac{5}{3}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{7}{4}x_1 - \frac{3}{2}C, v_1 = v_0|x_1 + C|^{\frac{13}{6}} - \frac{2}{5}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}},\\ &w_1 = w_0|x_1 + C|^{\frac{13}{6}} - \frac{2}{5}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 + C|^{-\frac{1}{2}},\\ &p = |t|^{-\frac{13}{4}}(C_1 y + C_2 z) + \frac{1}{8}\rho_0|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}(110C - 7x_1) + K_0|t|^{-\frac{9}{4}}, \end{aligned} \tag{33}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{13}{4}}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 0, {C_1}^2 + {C_2}^2 = \dfrac{1755}{32}{\rho_0}^2 C$.

7) $b = -\dfrac{8}{5}, \gamma^{-1} = \dfrac{6}{5}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = -\frac{8}{3}C, v_1 = v_0(x_1 + C) - \frac{3}{4}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}},\\ &w_1 = w_0(x_1 + C) - \frac{3}{4}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 + C|^{-\frac{1}{2}},\\ &p = |t|^{-\frac{8}{3}}(C_1 y + C_2 z) + \frac{80}{9}\rho_0 C|x_1 + C|^{\frac{1}{2}} + K_0|t|^{-\frac{5}{3}}, \end{aligned} \tag{34}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{8}{3}}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 0, {C_1}^2 + {C_2}^2 = \dfrac{320}{81}{\rho_0}^2 C$.

Пусть $h(p) = h_0$ – постоянная, тогда (21) тождественно выполнено. В этом случае получаем систему: (16), (17), (18), а также $u_1 = -2x_1 + C$,

$$\rho_{1_{x_1}}{\rho_1}^{-1}\left((3b+2)(b+1)^{-1}x_1 - C\right) = 2(b+1)^{-1}.$$

Возникает еще четыре случая с различными значениями параметра $b$.

8) Если $b=-\dfrac{2}{3}$, то из последнего уравнения следует $C\neq 0$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+C, v_1=v_0e^{\frac{2}{C}x_1}-\frac{1}{4}C_1{\rho_0}^{-1}e^{\frac{6}{C}x_1}, w_1=w_0e^{\frac{2}{C}x_1}-\frac{1}{4}C_2{\rho_0}^{-1}e^{\frac{6}{C}x_1},\\&\rho_1=\rho_0e^{-\frac{6}{C}x_1}, p=t^2(C_1y+C_2z)+\rho_0Ce^{-\frac{6}{C}x_1}(x_1-\frac{2}{3}C)+K(t).\end{aligned}\tag{35}$$

где $x_1=t^2x$, $K(t)$ – произвольная функция.

9) Если $b=-\dfrac{4}{3}$, заменим $C$ на $6C$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+6C, v_1=|x_1-C|^{\frac{2}{3}}(v_0+\frac{1}{2}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{\frac{1}{3}}),\\&w_1=|x_1-C|^{\frac{2}{3}}(w_0+\frac{1}{2}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{\frac{1}{3}}), \rho_1=\rho_0(x_1-C)^{-1},\\&p=t^{-4}(C_1y+C_2z)-6\rho_0x_1-12\rho_0C\ln|x_1-C|+K(t).\end{aligned}\tag{36}$$

где $x_1=t^{-4}x$.

10) $b=-2$. Заменим $C$ на $4C$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+4C, v_1=|x_1-C|^{\frac{1}{2}}(v_0+\frac{1}{4}C_1{\rho_0}^{-1}\ln|x_1-C|),\\&w_1=|x_1-C|^{\frac{1}{2}}(w_0+\frac{1}{4}C_2{\rho_0}^{-1}\ln|x_1-C|), \rho_1=\rho_0|x_1-C|^{-\frac{1}{2}},\\&p=t^{-2}(C_1y+C_2z)-4\rho_0|x_1-C|^{\frac{1}{2}}x_1+K(t),\end{aligned}\tag{37}$$

где $x_1=t^{-2}x$.

11) $b\neq-\dfrac{2}{3}, b\neq-\dfrac{4}{3}, b\neq-2$. Заменим $C$ на $\dfrac{3b+2}{b+1}C$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+\frac{3b+2}{b+1}C, v_1=v_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}}-\frac{b+1}{b+2}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{-\frac{2}{3b+2}},\\&w_1=w_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}}-\frac{b+1}{b+2}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{-\frac{2}{3b+2}}, \rho_1=\rho_0|x_1-C|^{\frac{2}{3b+2}},\\&p=|t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1y+C_2z)+\frac{3b+2}{b+1}\rho_0|x_1-C|^{\frac{3b+4}{3b+2}}\left(\frac{(b+2)(3b+2)}{(b+1)(3b+4)}C-x_1\right)+K(t).\end{aligned}\tag{38}$$

## 4. Регулярные частично инвариантные решения, зависящие от одной пространственной переменной

Пусть в (15) $C_1=C_2=0: p=P(x_1)+K(t)$. Если $K(t)=const$, то получим инвариантную подмодель, рассмотренную в п.2, поэтому полагаем $K(t)\neq const$. Введем обозначение по формуле (5), тогда из УГД следуют дифференциальные уравнения

$$P_{x_1}=\rho_1\left((1-b)(b+1)^{-1}\bar{u}_1-\bar{u}_1\bar{u}_{1x_1}+b(b+1)^{-2}x_1\right),\tag{39}$$

$$\bar{u}_1v_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}v_1,\tag{40}$$

$$\bar{u}_1w_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}w_1,\tag{41}$$

$$\bar{u}_1\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}+\bar{u}_{1x_1}=-(3b+4)(b+1)^{-1},\tag{42}$$

а также переопределенное равенство

$$h'h^{-1}(\bar{u}_1P_{x_1}+tK_t)=\bar{u}_1\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}+2(b+1)^{-1}.\tag{43}$$

Если $P = P_0$ – постоянная, то в (43) переменные $t, x_1$ разделяются и определяется $K(t) : h(K(t) + P_0) = h_0|t|^{\frac{C}{b+1}}$. Из (42),(39) следует $\bar{u}_1 = -b(b+1)^{-1}x_1$ или $\bar{u}_1 = (b+1)^{-1}x_1$. В первом случае решение (39)–(43) задается формулами

$$u_1 = 0, v_1 = v_0 x_1, w_1 = w_0 x_1, \rho_1 = \rho_0 |x_1|^{\frac{2b+4}{b}}, p = K(t) + P_0. \tag{44}$$

Во втором случае решение задается формулами

$$u_1 = x_1, v_1 = v_0|x_1|^{-b}, w_1 = w_0|x_1|^{-b}, \rho_1 = \rho_0|x_1|^{-3b-5}, p = K(t) + P_0. \tag{45}$$

Далее полагаем $P \neq const$. В уравнении (43) $\bar{u}_1 P_{x_1} + tK_t \neq 0$, иначе придем к противоречию $K(t) = const$. Если при этом $h(p) = h_0$ – постоянная, то этот случай совпадает с аналогичным случаем из п.3 при $C_1 = C_2 = 0$. Если $h' \neq 0$, из (43) следует $\bar{u}_1 \rho_{1x_1} {\rho_1}^{-1} + 2(b+1)^{-1} \neq 0$. Дифференцируем (43) по $t$ и по $x_1$:

$$\left(\frac{h'}{h}\right)' (\bar{u}_1 P_{x_1} + tK_t) + \frac{h'}{h}\left(1 + t\frac{K_{tt}}{K_t}\right) = 0, \tag{46}$$

$$\left(\frac{h'}{h}\right)' (\bar{u}_1 P_{x_1} + tK_t)P_{x_1} + \frac{h'}{h}(\bar{u}_1 P_{x_1})_{x_1} = \left(\bar{u}_1 \frac{\rho_{1x_1}}{\rho_1}\right)_{x_1}. \tag{47}$$

Подставим (43), (46) в (47), разделим на $P_{x_1}$ и дифференцируем по $x_1$:

$$\left(\frac{(\bar{u}_1 P_{x_1})_{x_1}}{P_{x_1}}\right)_{x_1} = \left(\frac{\bar{u}_1(\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1})_{x_1}}{\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1} + 2(b+1)^{-1}}\right)_{x_1} + \left(\frac{(\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1})_{x_1}}{P_{x_1}(\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1} + 2(b+1)^{-1})}\right)_{x_1} tK_t. \tag{48}$$

Переменные в (48) разделяются.

Пусть коэффициент при $tK_t$ не равен нулю, тогда $K(t) = \ln|t|$, и в (43) переменные разделяются. С заменой (7) (при $\bar{u}_1 \neq 0$) получим интегралы и подмодель из одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} &v_1 = v_0 e^{-\frac{b}{b+1}s}, w_1 = w_0 e^{-\frac{b}{b+1}s}, \rho_1 x_{1s} = \rho_0 e^{-\frac{3b+4}{b+1}s}, \\ &h = h_0 e^{np}, p = \ln|t| - n^{-1}\ln|x_{1s}| - \left((3b+2)n^{-1}(b+1)^{-1} + 1\right)s, \end{aligned} \tag{49}$$

$$n^{-1}\left(\frac{3b+2}{b+1} + \frac{x_{1ss}}{x_{1s}}\right) + 1 = \rho_0 e^{-\frac{3b+4}{b+1}s}\left(\frac{b-1}{b+1}x_{1s} + x_{1ss} - \frac{b}{(b+1)^2}x_1\right). \tag{50}$$

Если в (48) коэффициент при $tK_t$ равен нулю, то $(\ln\rho_1)_{ss} = C_1 P_s((\ln\rho_1)_s + 2(b+1)^{-1})$. Система (39)–(43) разрешима только в случае, когда $C_1 = 0$, иначе путем сложных рассуждений придем к противоречию. Если $\bar{u}_1 \neq 0$, введем переменную $s$ по формуле (7), тогда из (40)–(42) определяются $\rho_1 = \rho_0 e^{\frac{C-2}{b+1}s}, \bar{u}_1 = u_0 e^{-\frac{3b+2+C}{b+1}s}$, $v_1, w_1$ – по формулам из (49).

Если $3b + 2 + C \neq 0$, то $x_1 = -(b+1)(3b+2+C)^{-1}e^{-\frac{3b+2+C}{b+1}s} + x_0$. Тогда

$$\begin{aligned} &\bar{u}_1 = -(3b+2+C)(b+1)^{-1}(x_1 - x_0), v_1 = v_0|x_1 - x_0|^{\frac{b}{3b+2+C}}, \\ &w_1 = w_0|x_1 - x_0|^{\frac{b}{3b+2+C}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 - x_0|^{-\frac{C-2}{3b+2+C}} \end{aligned} \tag{51}$$

с новыми постоянными $v_0, w_0, \rho_0$. Из (46), (47) следует равенство $\dfrac{(\bar{u}_1 P_{x_1})_{x_1}}{P_{x_1}} = 1 + t\dfrac{K_{tt}}{K_t} = C_0$, $C_0$ – постоянная. Если $C_0 \neq 0$, то $p = C_1|x_1 - x_0|^{-\frac{C_0(b+1)}{3b+2+C}} + C_2|t|^{C_0} + P_0$, из (43) находим $h(p) = h_0|p - P_0|^{\frac{C}{C_0(b+1)}}$. Подстановка найденных функций в (39) и изучение совместности дает три решения.

1) $C_0 = -\dfrac{6b+6+C}{b+1}$. Решение задается формулами:

$$u_1 = -(2b+2+C)(b+1)^{-1}x_1, v_1 = v_0|x_1|^{\frac{b}{3b+2+C}}, w_1 = w_0|x_1|^{\frac{b}{3b+2+C}},$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1|^{-\frac{C-2}{3b+2+C}}, p = C_1|x_1|^{\frac{6b+6+C}{3b+2+C}} + C_2|t|^{-\frac{6b+6+C}{b+1}} + P_0, \tag{52}$$

где $C_1$ определено равенством
$C_1(6b+6+C)(b+1)^2 = \rho_0(2b+2+C)(3b+3+C)(3b+2+C)$.

2) $C = -2(b+1)$. Решение задается формулами:

$$u_1 = b(b+1)^{-1}x_0, v_1 = v_0(x_1-x_0), w_1 = w_0(x_1-x_0),$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1-x_0|^{\frac{2b+4}{b}}, p = C_1|x_1-x_0|^{-\frac{C_0(b+1)}{b}} + C_2|t|^{C_0} + P_0, \tag{53}$$

где $C_1$ определено равенством $C_1C_0(b+1)^3 = b\rho_0x_0(3b+2+C)$.

3) $C = -3(b+1)$. Решение задается формулами:

$$u_1 = x_1 - (b+1)^{-1}x_0, v_1 = v_0|x_1-x_0|^{-b}, w_1 = w_0|x_1-x_0|^{-b},$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1-x_0|^{-3b-5}, p = C_1|x_1-x_0|^{C_0(b+1)} + C_2|t|^{C_0} + P_0, \tag{54}$$

где $C_1$ определено равенством $C_1C_0(b+1)^3 = b\rho_0x_0(3b+2+C)$.

Если $C_0 = 0$, то $p = -C_1(b+1)(3b+2+C)^{-1}\ln|x_1-x_0| + C_2\ln|t| + P_0$. Из (43) находим $h(p) = h_0e^{\frac{C}{(b+1)(C_1+C_2)}}$. Подстановка найденных функций в (39) и изучение совместности дает еще три решения.

4) $C = -6(b+1)$. Решение задается формулами:

$$u_1 = 4x_1 - \frac{3b+4}{b+1}x_0, v_1 = v_0|x_1-x_0|^{-\frac{b}{3b+4}}, w_1 = w_0|x_1-x_0|^{-\frac{b}{3b+4}},$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1-x_0|^{-2}, p = \frac{C_1(b+1)}{3b+4}\ln|x_1-x_0| + C_2\ln|t| + P_0, \tag{55}$$

где $C_1(b+1) = 12\rho_0(3b+4)$.

5) $b = -\frac{4}{3}, C = -\frac{4}{3}$. Решение задается формулами:

$$u_1 = 4x_0, v_1 = v_0(x_1-x_0), w_1 = w_0(x_1-x_0), \rho_1 = \rho_0(x_1-x_0)^{-1},$$
$$p = -\frac{1}{4}C_1\ln|x_1-x_0| + C_2\ln|t| + P_0, \tag{56}$$

6) $b = -\frac{4}{3}, C = -1$. Решение задается формулами:

$$u_1 = x_1 + 3x_0, v_1 = v_0|x_1-x_0|^{\frac{4}{3}}, w_1 = w_0|x_1-x_0|^{\frac{4}{3}}, \rho_1 = \rho_0|x_1-x_0|^{-1},$$
$$p = -\frac{1}{3}C_1\ln|x_1-x_0| + C_2\ln|t| + P_0. \tag{57}$$

Если $3b+2+C = 0$, то $x_1 = const$ противоречие.

Если $\bar{u}_1 = 0$, то $b = -\frac{4}{3}$. Получим решение

$$u_1 = 4x_1, v_1 = 0, w_1 = 0, p = \ln|t| + P(x_1), \rho_1 = -\frac{1}{12}x_1^{-1}P_{x_1}, \tag{58}$$

где $P_{x_1}$ – любая функция.

## 5. Заключение

На подалгебре 3.23 из оптимальной системы работы [2] получено две подмодели: (9) – инвариантная ранга 1 и (50) – частично инвариантная ранга 1 дефекта 1, семь решений (35), (36), (37), (38), (44), (45), (58), зависящих от одной произвольной функции, и точные решения (10)–(12), (27)–(34), (44), (45), (52)–(57), зависящие от нескольких постоянных. Минимальное число постоянных – 4, максимальное число постоянных – 8.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика.* // ПММ, Т. 58, Вып. 4, 1994. С. 30–55.
2. Макаревич Е.В. *Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной плотностью* // Сибирские электронные математические известия, Т. 8, 2011. С. 19–38.
3. Макаревич Е.В. *Иерархия подмоделей уравнений газовой динамики с уравнением состояния с разделенной плотностью* // Сибирские электронные математические известия, Т. 9, 2012. С. 306–328.
4. Макаревич Е.В. *Коллапс или мгновенный источник газа на прямой* // Уфимский математический журнал, Т. 4, Вып. 4, 2012. С. 119–129.
5. S.V. Khabirov *Hierarchy of submodels of differential equations* // Archives of ALGA, V. 9. 2012. p. 79–94.

Елена Владимировна Макаревич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Makarevich_EV@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 130-143.

УДК 517.9

# КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В $H(\mathbb{C})$ С УЗЛАМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

**С.Г. МЕРЗЛЯКОВ, С.В. ПОПЕНОВ**

**Аннотация.** В пространстве всех целых функций изучена проблема кратной интерполяции функциями из замкнутого подпространства, инвариантного относительно оператора дифференцирования. Дискретное множество узлов кратной интерполяции лежит на вещественной оси комплексной плоскости. Доказательство основано на переходе от этого подпространства к его подпространству, состоящему из сумм всех рядов экспонент, которые сходятся в топологии равномерной сходимости на компактах. Получен критерий разрешимости проблемы кратной интерполяции с вещественными узлами рядами экспонент в терминах расположения показателей экспонент.

**Ключевые слова:** целая функция, кратная интерполяция, ряд экспонент, идеал, представление Фишера.

**Mathematics Subject Classification:** 30E05, 46N20.

## 1. Предварительные сведения

Обозначим через $H(\mathbb{C})$ пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В качестве следствия из классических теорем Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера получается, что разрешима следующая проблема кратной интерполяции функциями из $H(\mathbb{C})$ (см. ([1], стр. 32)).

*Для любой локально аналитической функции $\omega$ на заданном дискретном множестве точек $\{\mu_k\}$ в комплексной плоскости (которые будем называть узлами интерполяции) и натуральных чисел $m_k$ (которые будем называть кратностями узлов $\mu_k$, $k \in \mathbb{N}$) существует целая функция $g$,, такая что $|\omega(z) - g(z)| = O(|z - \mu_k|^{m_k})$ при $z \to \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$.*

Это утверждение равносильно разрешимости проблемы кратной интерполяции целыми функциями в традиционной формулировке.

*Для произвольного дискретного множества узлов интерполяции $\mu_k \in \mathbb{C}$ с кратностями $m_k$, и для любых интерполяционных данных*

$$b_k^j \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k \in \mathbb{N}$$

*существует такая целая функция $g$, что*

$$g^{(j)}(\mu_k) = b_k^j,\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Если рассматривать конечное число узлов интерполяции $\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$, с кратностями $m_k$, то изучалась проблема интерполяции не только многочленами, но и функциями из ядра линейных и нелинейных дифференциальных операторов в различных функциональных пространствах, например, многоточечная задача Валле Пуссена ([2]). В категории

S.G. Merzlyakov, S.V. Popenov, Interpolation with multiplicity by series of exponentials in $H(\mathbb{C})$ with nodes on the real axis.

© Мерзляков С.Г., Попёнов С.В. 2013.

Работа поддержана РФФИ (грант №11-01-00572-а).

*Поступила 15 апреля 2013 г.*

пространств голоморфных функций, для случая конечномерного ядра дифференциального оператора с постоянными коэффициентами конечного порядка, эта проблема равносильна алгебраической задаче существования и единственности решений неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, что приводит к известным результатам ([3]) о разрешимости и единственности глобальной голоморфной задачи Коши (или голоморфной многоточечной задачи Валле Пуссена), и имеются также некоторые продвижения в случае дифференциальных операторов в частных производных специального вида в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ ([4]–[6]).

В монографии [7] рассматриваются вычислительные аспекты проблемы интерполяции конечными суммами экспонент в конечном числе узлов.

Отметим также, что в обзорах [8], [9] сформулирована нерешенная проблема интерполяции функциями из бесконечномерного ядра так называемого алгебраического дифференциального оператора в пространстве $H(\mathbb{C})$ и указаны некоторые результаты.

Обозначим через $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального типа с традиционной $(LN^*)$-топологией, которая обеспечивает топологический изоморфизм между сильным сопряженным пространством $H^*(\mathbb{C})$ и пространством $P_{\mathbb{C}}$, реализующийся с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(\mathbb{C})$. Точнее, линейное непрерывное взаимнооднозначное преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(\mathbb{C})$ определяется следующим образом: $\mathcal{L} : F \longmapsto \mathcal{L}F(z) = \left\langle F_\lambda, e^{\lambda z} \right\rangle$, $\mathcal{L}F \in P_{\mathbb{C}}$, и далее используется обычная двойственность.

Каждая функция $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, $\varphi \not\equiv 0$ порождает в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ линейный непрерывный сюръективный оператор свертки $M_\varphi : H(\mathbb{C}) \longmapsto H(\mathbb{C})$, действие которого на функциях $f \in H(\mathbb{C})$ определяется следующим образом (подробности в [10], [11], и ниже, в доказательстве Теоремы 1):

$$M_\varphi[f](z) = \langle F_\lambda, f(z+\lambda) \rangle, \; z \in \mathbb{C},$$

где $F = \mathcal{L}^{-1}\varphi \in H^*(\mathbb{C})$. Целая функция экспоненциального типа $\varphi$ называется характеристической функцией оператора свертки $M_\varphi$.

Обозначим $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = 0\}$ — ядро оператора свертки $M_\varphi$, которое является замкнутым подпространством в $H(\mathbb{C})$, инвариантным относительно оператора дифференцирования.

В работе [12] доказана следующая теорема (см. также [13]).

**Теорема A.** *Зафиксируем некоторое число* $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Обозначим через* $\varphi$ *целую функцию экспоненциального типа, имеющую простые нули* $\lambda_n$, *причем все* $\lambda_n$ *лежат в бесконечном количестве в каждом из двух углов* $A_\alpha(0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \alpha\}$ *и* $A_\alpha(\pi) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leqslant \alpha\}$. *Пусть бесконечное дискретное множество узлов интерполяции* $\{\mu_{\pm k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *лежит на вещественной оси и* $\mu_{\pm k} \to \pm\infty, k \to +\infty$. *Обозначим через* $\psi$ *произвольную целую функцию с простыми нулями во всех узлах* $\mu_{\pm k}$, *и только в них.*

*Тогда, для любой целой функции* $g$ *существует целая функция* $f \in \operatorname{Ker} M_\varphi$, *такая, что функция* $r = (g-f)/\psi$ *является целой функцией.*

В доказательстве в работе [12] рассмотрен случай простой интерполяции (то есть кратности всех $\mu_{\pm k}$ равны 1) и отмечено, что метод доказательства можно распространить и на случай кратной интерполяции. Распространение метода доказательства Теоремы A на случай проблемы кратной интерполяции возможно, но при этом возникают серьезные технические трудности.

Заметим, что условие делимости в утверждении теоремы A равносильно тому, что $|f(z) - g(z)| = O(|z - \mu_{\pm k}|)$ при $z \to \mu_{\pm k}$, для каждого $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, в отличие от классической проблемы интерполяции функциями из пространства $H(\mathbb{C})$, в Теореме A

утверждается, что в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ разрешима следующая проблема простой интерполяции функциями из замкнутого подпространства $\operatorname{Ker} M_\varphi$ с бесконечной последовательностью узлов $\mu_{\pm k}$ с кратностями 1 на вещественной оси.
*Для любых интерполяционных данных $b_{\pm k} \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$ существует целая функция $f \in \operatorname{Ker} M_\varphi$, такая, что $f(\mu_{\pm k}) = b_{\pm k}$, $k = 1, 2, \cdots$ .*

Другими словами, в Теореме А доказана разрешимость многоточечной задачи Валле Пуссена для операторов свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$ (см. также [14]).

Формулировка утверждения Теоремы А имеет такой вид потому, что в доказательстве используются представления Фишера (см., например, [3]–[6], [12], [13] и ссылки там). Если $\psi \in H(\mathbb{C})$ обозначим через $\big(\psi\big)$ замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией $\psi$,

$$\big(\psi\big) = \{h \in H(\mathbb{C}) : h = \psi \cdot r,\, r \in H(\mathbb{C})\}.$$

Утверждение Теоремы А о разрешимости проблемы интерполяции равносильно тому, что имеет место представление Фишера

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_\varphi + \big(\psi\big),$$

где $\psi$ — произвольная целая функция, имеющая простые нули во всех узлах $\mu_{\pm k}$, и только в них.

Единственности интерполяции в условиях рассматриваемой задачи быть не может, то есть $\operatorname{Ker} M_\varphi \cap \big(\psi\big) \neq \{0\}$ (См. Предложение 1 ниже).

В связи с этим, представляется естественным переход к собственному замкнутому подпространству ядра $\operatorname{Ker} M_\varphi$, для того чтобы решать проблему интерполяции функциями из меньшего подпространства $H(\mathbb{C})$. В частности, оправданным является и то, что в теореме А рассматривается случай, когда все нули характеристической функции $\varphi$ простые.

Как известно, ядро любого оператора свертки $M_\varphi$ в $H(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез, то есть $\operatorname{Ker} M_\varphi$ совпадает с замыканием в топологии $H(\mathbb{C})$ линейной оболочки множества всех полиномиально-экспоненциальных мономов $z^\nu e^{\lambda_n z}$, содержащихся в нем.

В данной статье, в частности, будет доказана разрешимость проблемы кратной интерполяции функциями из замкнутого подпространства ядра $\operatorname{Ker} M_\varphi$, состоящего из всех целых функций $f$, которые представляются рядами экспонент, сходящимися в пространстве $H(\mathbb{C})$ :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\; z \in \mathbb{C},$$

что дает новое и более простое доказательство Теоремы А.

## 2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства полиномов из экспонент с вещественными показателями. Такие полиномы изучены в монографии [18].

Рассмотрим произвольный полином из экспонент вида

$$p(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k(z) e^{\omega_k z},\; \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_s, \tag{1}$$

где $a_k(z)$ — некоторые многочлены, и пусть $a_0 \cdot a_s \not\equiv 0$.

Из Теоремы 12.9 монографии [18] легко получить, что справедливо следующее.

**Лемма 1.** *Существует такое $c_1 > 0$, что во внешности круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant c_1\}$ выполнено: существуют положительные постоянные $c_2$, $c_3$ и два вещественных числа $m_0$, $m_s$, причем $m_0 > m_s$ или $m_0 = m_s = 0$, такие, что*

$$|p(z)| \geqslant c_2 e^{\omega_0 \operatorname{Re} z}, \tag{2}$$

*для всех $z$ в области $U_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + m_0 \ln z)\} < -c_3$, и*

$$|p(z)| \geqslant c_2 e^{\omega_s \operatorname{Re} z}, \tag{3}$$

*для всех $z$ в области $U_s = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + m_s \ln z)\} > c_3$.*

Для любого фиксированного $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим кривую $\operatorname{Re}(z + m \ln z) = c$, $m \neq 0$. Она симметрична относительно вещественной оси. Для $m > 0$ эта кривая лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < A$, $A > 0$, а для $m < 0$ она лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > -A$, $A > 0$. Если точка $z = x + iy$ лежит на этой кривой, то $\left|\frac{y}{x}\right| \to \infty$, $\arg z \to \frac{\pi}{2}$, $|z| = |y|(1 + o(1))$, при $|z| \to \infty$. Рассматриваемая кривая асимптотически приближается к показательной кривой $x + m \ln |y| = c$.

Для некоторого $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, обозначим $A_\alpha(\pi) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leqslant \alpha\}$, $A_\alpha(0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \alpha\}$.

**Лемма 2.** *Для произвольного полинома из экспонент $p$ вида (1) существует такое $r = r(p) > 0$, что для всех $z$, $|z| > r$, справедливы следующие оценки.*

*Если $\omega_0 < 0$, и $z \in A_\alpha(\pi)$, то*

$$|p(z)| \geqslant c_3 e^{(|\omega_0| \cos \alpha)|z|}. \tag{4}$$

*Если $\omega_s > 0$, и $z \in A_\alpha(0)$, то*

$$|p(z)| \geqslant c_3 e^{(\omega_s \cos \alpha)|z|}. \tag{5}$$

**Доказательство.** Легко видеть, что все точки $z$ из углов $A_\alpha(\pi)$, $A_\alpha(0)$, лежащие вне некоторого круга, лежат в областях $U_0$, $U_s$, соответственно. Поэтому, из оценок (2) и (3) полинома из экспонент $p$ в областях $U_0$ и $U_s$ для $|z| > c_1$ вытекают оценки вне некоторого круга в углах $A_\alpha(\pi)$ и $A_\alpha(0)$, соответственно. Так как в угле $A_\alpha(\pi) = \{|\arg z - \pi| \leqslant \alpha < \pi/2\}$ выполнено, что

$$\omega_0 \operatorname{Re} z = |\omega_0| \cdot |\cos(\arg z)| \cdot |z| \geqslant |\omega_0| \cdot |\cos(\pi - \alpha)| \cdot |z|,$$

то из оценки (2) получаем оценку (4). Так как в угле $A_\alpha(0) = \{|\arg z| \leqslant \alpha < \pi/2\}$ выполнено, что

$$\omega_s \operatorname{Re} z = \big(\omega_s \cos(\arg z)\big)|z| \geqslant (\omega_s \cos \alpha)|z|,$$

то из оценки (3) получаем оценку (5). Лемма 2 доказана.

Рассмотрим две произвольные бесконечные дискретные последовательности комплексных чисел $\mathcal{V}^- = \{v_{-j}\}$, и $\mathcal{V}^+ = \{v_j\}$, причем $\operatorname{Re} v_{-j} < 0$, $\operatorname{Re} v_j > 0$. Обозначим $\mathcal{V} = \mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+$. Введем следующие условия

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{|\operatorname{Re} v_{-j}|}{\ln |v_{-j}|} = \infty. \tag{6}$$

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\operatorname{Re} v_j}{\ln |v_j|} = \infty. \tag{7}$$

Если последовательности $\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+$ лежат в углах $A_\alpha(\pi)$, $A_\alpha(0)$, соответственно, то условия (6) и (7) выполняются.

Обозначим через $I_{\mathcal{V}^\pm}$ идеалы в $P_{\mathbb{C}}$,

$$I_{\mathcal{V}^-} = \{f \in P_{\mathbb{C}} : f(v_{-j}) = 0,\ j \in \mathbb{N}\}.$$

$$I_{\mathcal{V}^+} = \{f \in P_{\mathbb{C}} : f(v_j) = 0,\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Это замкнутые подпространства в $P_{\mathbb{C}}$.

**Лемма 3.** *В описанной ситуации, если для $\mathcal{V}$ выполнено хотя бы одно из условий (6) или (7), то никакой многочлен из экспонент $p \not\equiv 0$ вида (2) не может содержаться в идеалах $I_{\mathcal{V}^{\pm}}$.*

**Доказательство.** Предположим, что $p|_{\mathcal{V}^-} = 0$ или $p|_{\mathcal{V}^+} = 0$. Из оценок (2) и (3) следует, что вне некоторого круга произвольный многочлен из экспонент $p$ вида (1) не имеет нулей в областях $U_0$, $U_s$, в определении которых постоянные $c_1$, $c_2$, $m_0$, $m_s$ зависят от $p$. Легко видеть, что из условий (6) и (7) вытекает, что для любых областей $U_0$, $U_s$ такого вида найдется круг, радиус которого зависит от $p$, вне которого существуют две бесконечные последовательности точек из $\mathcal{V}^-$ и $\mathcal{V}^+$, лежащие в $U_0$ и $U_s$, соответственно. Получили противоречие. Лемма 3 доказана.

## 3. Основная теорема

Пусть задано бесконечное дискретное множество вещественных узлов интерполяции $\mathcal{M} = \mathcal{M}^- \cup \mathcal{M}^+$, где $\mathcal{M}^- = \{\mu_{-k}\}_{k=1}^{\tau_2}$, $\mu_{-k} < 0$, или $\mathcal{M}^- = \varnothing$, а $\mathcal{M}^+ = \{\mu_k\}_{k=1}^{\tau_1}$, $\mu_k \geqslant 0$, или $\mathcal{M}^- = \varnothing$. Здесь $\tau_1 \leqslant +\infty$, $\tau_2 \leqslant +\infty$.

Будем считать, что все узлы интерполяции упорядочены в порядке возрастания по индексу $k$, то есть так, что $\mu_{-k-1} < \mu_{-k}$, $\mu_k < \mu_{k+1}$. Предположим, что каждому узлу $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$ приписана кратность $m_{\pm k} \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим бесконечную дискретную последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Предположим, что выполнено условие

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = d < \infty. \tag{8}$$

Обозначим

$$\Sigma(\Lambda) = \{f \in H(\mathbb{C}) : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in \mathbb{C}\}.$$

При выполнении условия (8) на показатели $\lambda_n$, из поточечной сходимости ряда экспонент, для всех $z \in \mathbb{C}$, следует, что ряд сходится в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ ([15]).

Рассмотрим следующую проблему кратной интерполяции рядами экспонент с множеством узлов $\mathcal{M}$.

*Для произвольной целой функции $g$ найти ряд экспонент $f \in \Sigma(\Lambda)$, такой, что для всех $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$*

$$|f(z) - g(z)| = O(|z - \mu_{\pm k}|^{m_{\pm k}}),\ z \to \mu_{\pm k}.$$

Разрешимость этой проблемы равносильна следующему представлению

$$H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_{\mathcal{M}}\big).$$

Здесь через $\psi_{\mathcal{M}}$ обозначена целая функция с нулями во всех узлах $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$, с кратностями $m_{\pm k}$, и только в них. Кроме того, обозначим

$$\big(\psi_{\mathcal{M}}\big) = \{h \in H(\mathbb{C}) : h = \psi_{\mathcal{M}} \cdot r,\ r \in H(\mathbb{C})\} \tag{9}$$

— замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией $\psi_{\mathcal{M}}$.

**Теорема 1.** *1. Пусть множество узлов $\mathcal{M}^+$ — конечное или пустое. В пространстве $H(\mathbb{C})$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$, тогда, и только тогда, когда для некоторого $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ множество $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ — бесконечное.*

*2. Пусть оба множества узлов $\mathcal{M}^-$ и $\mathcal{M}^+$ — бесконечные. В пространстве $H(\mathbb{C})$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ с множеством узлов*

$\mathcal{M}$, *тогда, и только тогда, когда для некоторого* $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ *оба множества* $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ *и* $\Lambda \cap A_\alpha(0)$ *— бесконечные.*

**Доказательство.**

Докажем необходимость условий в п. 1 и п. 2.

Пусть в условиях п.1 проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ разрешима. Предположим, что для любого $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ множество $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ — конечное или пустое. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} = 0.$$

Для $x < 0$ рассмотрим функцию

$$h(x) = \sup_n \{x \operatorname{Re}\lambda_n - |\lambda_n|\},\ h(x) < \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \Sigma(\Lambda)$. Докажем, что для всех $x < 0$ справедлива оценка $|f(x)| \leqslant Ce^{h(x)}$, $C > 0$. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, e^{x \operatorname{Re}\lambda_n} \leqslant e^{h(x)} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, e^{|\lambda_n|}.$$

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ обозначим $B = d + 2\varepsilon + 1$, где величина $d$ определена в условии (8). В доказательстве Т 3.1.1 монографии [15] показано, что существует постоянная $A > 0$, такая, что $\left|c_n e^{\lambda_n z}\right| \leqslant A$, для всех $z$, $|z| \leqslant B$, и всех $n \in \mathbb{N}$.

Отсюда следует, что $|c_n| \leqslant Ae^{-B|\lambda_n|}$. Получили, что для всех $x < 0$

$$|f(x)| \leqslant Ae^{h(x)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(1-B)|\lambda_n|} = Ae^{h(x)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(d+2\varepsilon)|\lambda_n|}.$$

Из условия (8) следует, что $(d + \varepsilon)\,|\lambda_n| \geqslant \ln n$, $n \geqslant n_0$, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(d+2\varepsilon)|\lambda_n|} < \infty.$$

Доказанная оценка показывает, что все функции $f$ из $\Sigma(\Lambda)$ имеют контролируемую скорость роста при $x \to -\infty$. А это означает, что рассматриваемая проблема простой интерполяции функциями из ядра этого оператора свертки неразрешима для интерполяционных данных, имеющих большую скорость роста, чем это диктуется этой оценкой. Получили противоречие. Необходимость условий в п.1 доказана.

Необходимость условий в п.2 доказывается аналогично.

Докажем достаточность условий в п. 1 и п. 2.

В ситуации п.1 достаточно показать, что имеет место представление

$$H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_1\big),$$

где $\psi_1$ — некоторая целая функция, имеющая бесконечное множество нулей, состоящее из всех $\mu_{-k} \in \mathcal{M}^-$, с кратностями $m_{-k}$, и не более чем конечное множество нулей, состоящее из всех $\mu_k \in \mathcal{M}^+$, с кратностями $m_k$.

Аналогично, в ситуации п.2, покажем, что

$$H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_2\big),$$

где $\psi_2$ — некоторая целая функция, имеющая два бесконечных множества нулей, $\mu_{-k} \in \mathcal{M}^-$, с кратностями $m_{-k}$, и $\mu_k \in \mathcal{M}^+$, с кратностями $m_k$.

Здесь $\big(\psi_1\big)$, $\big(\psi_2\big)$ — замкнутые идеалы в $H(\mathbb{C})$, определенные в (9).

Подпространство $\Sigma(\Lambda)$, вообще говоря, не замкнутое в $H(\mathbb{C})$. Отметим еще следующее. Если утверждения теоремы доказаны для $\Lambda_0 \subset \Lambda$, то они доказаны и для $\Lambda$. В дальнейшем мы перейдем к замкнутому подпространству в $\Sigma(\Lambda)$.

Из результатов монографии [10], стр.268, вытекает следующее утверждение.

*Для того чтобы любая целая функция из замыкания линейной оболочки системы полиномиально-экспоненциальных мономов с множеством показателей, имеющим конечную верхнюю плотность с учетом кратностей, представлялась в виде ряда экспонент, необходимо и достаточно, чтобы $\delta < \infty$, где $\delta$ — индекс конденсации Бернштейна-Леонтьева, определенный ниже.*

Для дальнейшего доказательства, с учетом сказанного, перейдем к подпоследовательностям показателей из $\Lambda$.

В ситуации п. 1 выберем бесконечную подпоследовательность $\{t_\nu\} \in \Lambda \cap A_\alpha(\pi)$, $\nu \in \mathbb{N}$, так, чтобы последовательность $\{t_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ удовлетворяла условию

$$|t_{\nu+1}| > 2|t_\nu|. \tag{10}$$

В ситуации п. 2 выберем две бесконечные подпоследовательности $\{t_{2n-1}\}$ из $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ и $\{t_{2n}\}$ из $\Lambda \cap A_\alpha(0)$ так, чтобы для последовательности $\{t_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ выполнялось условие разделенности (10).

Обозначим через $G$ целую функцию с простыми нулями $t_\nu$,

$$G(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{t_\nu}\right),$$

где $t_\nu$ — любая из двух выбранных подпоследовательностей.

*Функция $G$ имеет минимальный тип при порядке 1 и $\operatorname{Ker} M_G$ состоит из всех целых функций $f(z)$, которые представляются рядами экспонент,*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{t_\nu z},\ z \in \mathbb{C},$$

*сходящимися в топологии пространства $H(\mathbb{C})$.*

Так как подпространство $\operatorname{Ker} M_G$ допускает спектральный синтез, это утверждение вытекает из Теоремы 4.2.4 монографии [10]. Покажем, что в результате выбора $t_\nu$ индекс конденсации $\delta = 0$, где

$$\delta = \limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{|t_\nu|} \ln \frac{1}{|G'(t_\nu)|}.$$

В обоих случаях для множества нулей $\{t_\nu\}$ функции $G$ выполнено условие (10), поэтому функция $G$ имеет минимальный тип при порядке 1. Для такой функции всегда $\delta \geqslant 0$, так как производная $G'$ также имеет нулевой тип при порядке 1, то есть

$$\frac{1}{|G'(t_\nu)|} \geqslant e^{-\varepsilon|t_\nu|},\ \varepsilon > 0,\ \nu \geqslant \nu_0.$$

Верны оценки

$$|G'(t_\nu)| \geqslant \frac{1}{|t_\nu|} \prod_{j\neq\nu}\left(\left|1 - \frac{|t_\nu|}{|t_j|}\right|\right).$$

$$\ln|G'(t_\nu)| \geqslant \ln\frac{1}{|t_\nu|} + \sum_{j<\nu}\ln\Big(\frac{|t_\nu|}{|t_j|} - 1\Big) + \sum_{j>\nu}\ln\Big(1 - \frac{|t_\nu|}{|t_j|}\Big).$$

Второе слагаемое положительное, и далее, с учетом (10) получаем, что

$$\frac{1}{|G'(t_\nu)|} \leqslant |t_\nu| e^{-A},\ A = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big).$$

Видим, что $\delta \leqslant 0$. Итак $\delta = 0$.

Обозначим $\Lambda^- = \Lambda \cap A_\alpha(\pi)$, $\Lambda^+ = \Lambda \cap A_\alpha(0)$. Множества могут быть конечными, а одно из них и пустым. В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что в ситуации п.1 $\Lambda = \Lambda^-$, а в ситуации п.2 $\Lambda = \Lambda^- \cup \Lambda^+$, причем члены последовательности $\Lambda$ удовлетворяют условию разделенности (10) в указанном выше смысле. Обозначим через $G_1, G_2$ — целые функции с нулевыми множествами $\Lambda^-$, $\Lambda$, соответственно.

С учетом этих соглашений и обозначений, из доказанного выше следует, что $\operatorname{Ker} M_{G_1} = \Sigma(\Lambda^-)$, и $\operatorname{Ker} M_{G_2} = \Sigma(\Lambda)$. Поэтому, для доказательства достаточности условий в двух утверждениях теоремы 1 достаточно показать, что в условиях каждого из них пространство $H(\mathbb{C})$ допускает соответствующее представление Фишера:

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_1} + \big(\psi_1\big).$$

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_2} + \big(\psi_2\big).$$

Целые функции $\psi_1$, $\psi_2$ определены в начале доказательства. Будет доказано, что для $k = 1$ и $k = 2$ верны следующие два утверждения.
($I$) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_{G_k} + \big(\psi_k\big)$ *— всюду плотное в пространстве* $H(\mathbb{C})$;
($II$) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_{G_k} + \big(\psi_k\big)$ *— замкнутое в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

В дальнейшем используется схема доказательства, приведенная в работе [13], которая основана на двойственности с использованием преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов из сильного сопряженного пространства $H^*(\mathbb{C})$.

Определим раздельно непрерывную билинейную форму $[\cdot,\cdot] : H(\mathbb{C}) \times P_\mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$, согласно формуле $[\psi, \varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi\rangle$, $\psi \in H(\mathbb{C})$, $\varphi \in P_\mathbb{C}$. С помощью отображения $\varphi \longmapsto [\cdot, \phi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \cdot\rangle$, где $\mathcal{L}^{-1}\varphi \in H^*(\mathbb{C})$, задается изоморфизм между $P_\mathbb{C}$ и сильным сопряженным пространством $H^*(\mathbb{C})$. Согласно введенной двойственности, любая функция из пространства $P_\mathbb{C}$ взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из $H^*(\mathbb{C})$.

Каждая функция $G \in P_\mathbb{C}$, $G \not\equiv 0$ порождает в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ оператор свертки $M_G : P_\mathbb{C} \longmapsto P_\mathbb{C}$,

$$M_G[\psi](z) = \big[S_z\big(\psi(\lambda)\big), G_\lambda\big] = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}G)_\lambda, \psi(z+\lambda)\big\rangle\,,$$

где $S_z$ — оператор сдвига: $S_z\big(\psi(\lambda)\big) = \psi(\lambda + z)$.

Известно, что $M_G$ линейный, непрерывный и сюръективный оператор. Сопряженный оператор к оператору свертки $M_G$ это оператор $A_G$ умножения на характеристическую функцию $G$, действующий на функциях $\omega \in P_\mathbb{C}$ следующим образом: $\omega \longmapsto G \cdot \omega$.

Как известно, ($M^*$)-пространство $H(\mathbb{C})$ является рефлексивным, то есть его сильное второе сопряженное пространство $H^{**}(\mathbb{C})$ канонически изоморфно пространству $H(\mathbb{C})$. Поэтому отображение $\psi \longmapsto [\psi, \cdot]$, с учетом этого канонического изоморфизма, определяет изоморфизм между ($M^*$)-пространством $H(\mathbb{C})$ и сильным сопряженным $P_\mathbb{C}^*$, и любая функция из $H(\mathbb{C})$ взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из сильно сопряженного пространства $P_\mathbb{C}^*$.

Более точно, это отображение понимается следующим образом: канонический изоморфизм $H(\mathbb{C})$ и $H^{**}(\mathbb{C})$ имеет вид $\psi \longmapsto \Theta\psi = F_\psi$, $F_\psi \in P_\mathbb{C}^*$, $\langle F_\psi, \varphi\rangle = [\psi, \varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi\rangle$. Здесь $\psi \in H(\mathbb{C})$, $\varphi \in P_\mathbb{C}$.

Каждая функция $\psi \in H(\mathbb{C})$, $\psi \not\equiv 0$ порождает в пространстве целых функций экспоненциального типа $P_\mathbb{C}$ оператор свертки $\widetilde{M}_\psi : P_\mathbb{C} \longmapsto P_\mathbb{C}$, $\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big[(\Theta\psi)_\lambda, S_z\big(\varphi(\lambda)\big)\big]$, где $S_z$ — оператор сдвига, $S_z\big(\varphi(\lambda)\big) = \varphi(\lambda + z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Далее получаем, что $\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}S_z\varphi)_\lambda,\, \psi(\lambda)\big\rangle = \big\langle e^{z\lambda}(\mathcal{L}^{-1}\varphi)_\lambda,\, \psi(\lambda)\big\rangle = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}\varphi)_\lambda,\, e^{z\lambda}\psi(\lambda)\big\rangle$, $\varphi \in P_\mathbb{C}$.

Используя известную формулу для обратного преобразования Бореля ([10]), отсюда получается, что оператор свертки $\widetilde{M}_\psi$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi(\lambda)e^{z\lambda}\gamma_\varphi(\lambda)\,d\lambda,\ \varphi \in P_{\mathbb{C}},$$

где $\gamma_\varphi$ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией $\varphi$, а $C$ – спрямляемый замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции $\gamma_\varphi$. Целая функция $\psi$ называется характеристической функцией оператора свертки $\widetilde{M}_\psi$.

Известно, что $\widetilde{M}_\psi$ линейный, непрерывный и сюръективный оператор. Обозначим $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi = \{f \in P_{\mathbb{C}} : \widetilde{M}_\psi[f] = 0\}$.

Оператор $\widetilde{M}_\psi$ является сопряженным к оператору $\widetilde{A}_\psi$ умножения на целую функцию $\psi$ в пространстве $H(\mathbb{C})$, действующему на функциях $g \in H(\mathbb{C})$ следующим образом: $g \longmapsto \psi\cdot g$. Оператор $\widetilde{A}_\psi$ является линейным и непрерывным, а его образ совпадает с замкнутым идеалом $(\psi)$.

Если $X_1$ — подпространство в топологическом векторном пространстве $X$, через $X_1^0$ обозначим его поляру (или аннулятор), то есть множество функционалов из $X^*$, которые обращаются в нуль на $X_1$.

С учетом введенной двойственности, поляра $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0$ совпадает с идеалом, определяемым как

$$\big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}} = \{h \in P_{\mathbb{C}} : h = G\cdot r;\ r \in P_{\mathbb{C}}\},$$

причем $\big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}} = \big(G\big) \cap P_{\mathbb{C}}$, и идеал $\big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}}$ — замкнутое подпространство в $P_{\mathbb{C}}$ (доказательство этих утверждений будет приведено ниже). С учетом введенной двойственности, поляра $\big((\psi)\big)^0$ совпадает с $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Так как $\big(\operatorname{Ker} M_G + (\psi)\big)^0 = \big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 \cap \big((\psi)\big)^0$, доказано, с учетом двойственности, что $\big(\operatorname{Ker} M_G + (\psi)\big)^0 = \big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}} \cap \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Из Леммы 2 работы [16] следует, с учетом двойственности, что подпространство $\operatorname{Ker} M_G + \big(\psi\big)$ — замкнутое в $H(\mathbb{C})$, тогда, и только тогда, когда подпространство $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 + \big((\psi)\big)^0 = \big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ — замкнутое в $P_{\mathbb{C}}$.

Получили, что для $k = 1$ и $k = 2$ утверждения $(I)$ и $(II)$ выше равносильны следующим двум двойственным утверждениям в $(LN^*)$-пространстве $P_{\mathbb{C}}$.

$(I^*)$ *Справедливо равенство* $\big(G_k\big)_{P_{\mathbb{C}}} \cap \operatorname{Ker}\widetilde{M}_{\psi_k} = \{0\}$.

$(II^*)$ *Подпространство* $\big(G_k\big)_{P_{\mathbb{C}}} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_{\psi_k}$ *— замкнутое в пространстве* $P_{\mathbb{C}}$.

Важным моментом в доказательстве двойственных утверждений $(I^*)$ и $(II^*)$ является следующий известный факт (см., например, [17]).

*Пусть $f$ — произвольная целая функция, имеющая нулевое множество $\{t_k\}$, причем $t_k$ имеют кратности $p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Замкнутое подпространство $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_f$ в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ представляет собой линейную оболочку системы всех мономов вида $\{z^\nu e^{t_k z}\}$, $\nu = 0, 1, \cdots, p_k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, то есть оно состоит только из полиномов из экспонент:*

$$\operatorname{Ker}\widetilde{M}_f = \{p \in P_{\mathbb{C}} : p(z) = \sum_{k=1}^{u_p} a_k(z)e^{t_k z}\}.$$

*Здесь, для любого $k \in \mathbb{N}$, функции $a_k$ — произвольные многочлены степеней не выше $p_k - 1$, соответственно.*

Это несложно доказываемый фундаментальный принцип для $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ в пространстве $P_{\mathbb{C}}$.

В условиях каждого из п.1 и п.2 теоремы 1 докажем утверждение $(I^*)$.

В условиях как п.1, так и п.2, пусть функция $p \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_k}$, $p \not\equiv 0$, тогда она представляет собой полином из экспонент

$$p(z) = \sum_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^-}} a_{-j}(z) e^{\mu_{-j} z} + \sum_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^+}} a_k(z) e^{\mu_k z},$$

который имеет вид (1). Справа стоят конечные суммы по конечным подмножествам $Fin_{\mathcal{M}^-} \subset \mathcal{M}^-$, $\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^+} \subset \mathcal{M}^+$. В этом представлении учитываем, что возможен случай, когда $\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^-} = \varnothing$ или $\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^+} = \varnothing$, и поэтому используем соглашение: для произвольной последовательности $\{b_k\}$, $\sum\limits_{\varnothing} b_k = 0$.

Покажем, что в условиях п.1 и п.2 полином из экспонент $p \not\equiv 0$ не может принадлежать $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$.

Это следует из Леммы 3. Действительно, согласно условию Теоремы 1, $\Lambda^- \subset A_\alpha(\pi)$, откуда следует, что для последовательности $v_{-k} = \lambda_{-k}$ выполнено условие (6) Леммы 3.

Кроме того, нужно показать, что $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} = I_{\mathcal{V}^-}$. По определению, $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \subset I_{\mathcal{V}^-}$. Далее, согласно теореме Линделефа для функций из пространства $P_{\mathbb{C}}$, $\big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}} = \big(G\big) \cap P_{\mathbb{C}}$, то есть верно и обратное включение.

Идеал $I_{\mathcal{V}^-}$ из Леммы 3 — замкнутый, так как топология в $P_{\mathbb{C}}$ сильнее топологии равномерной сходимости на компактах. Доказано, что идеал $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$ замкнут в $P_{\mathbb{C}}$.

Утверждение $(I^*)$ в условиях п.1 доказано. Для доказательства Утверждения $(I^*)$ в условиях п.2 осталось только заметить, что идеал $(G_2)_{P_{\mathbb{C}}}$ содержится в идеале $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$.

Получили, что, как в условиях п.1, так и п.2 теоремы, у нас имеются алгебраические прямые суммы $(G_k)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_k}$, $k = 1, 2$. В условиях каждого из п.1 и п.2 теоремы 1, докажем замкнутость этих подпространств в $P_{\mathbb{C}}$ (то есть докажем утверждение $(II^*)$). Как известно ([19]), в $(LN^*)$ — пространстве $P_{\mathbb{C}}$ замкнутость любого подпространства $X$ равносильна его секвенциальной замкнутости.

В условиях п.1 рассмотрим произвольную последовательность $\{g_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, функций из алгебраической прямой суммы $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$ и предположим, что она сходится в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ к функции $g \in P_{\mathbb{C}}$. Покажем, что предельная функция $g$ принадлежит $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$.

Сходимость $\{g_l\}$ в $(LN^*)$-топологии пространства $P_{\mathbb{C}}$ означает следующее:
1. $\{g_l\}$ сходится к $g$ в топологии пространства $H(\mathbb{C})$;
2. Существуют такие $A > 0$, $B > 0$, что для всех $l \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|g_l(z)| \leqslant A e^{B|z|},\ z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Последовательность $\{g_l\}$ состоит из функций вида $g_l = p_l + R_l$, где функции $R_l \in (G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$, то есть $R_l | \Lambda^- = 0$, а функции $p_l \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$.

Если в последовательности $\{g_l\}$ содержится бесконечно много членов с $R_l \equiv 0$, то $g \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$. Если в $\{g_l\}$ содержится бесконечно много членов с $p_l \equiv 0$, то $g \in (G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$. Для таких последовательностей $\{g_l\}$ функция $g \in (G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$.

Следовательно, далее можно считать, что последовательность $\{g_l\}$ такова, что $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$ для всех $l$.

В силу фундаментального принципа для ядра $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$ в пространстве $P_{\mathbb{C}}$

$$p_l(z) = \sum_{\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^-}} a^{(l)}_{-j}(z) e^{\mu_{-j} z} + \sum_{\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^+}} a^{(l)}_k(z) e^{\mu_k z}. \tag{12}$$

Если для некоторого фиксированного $l$ в этом представлении $\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^-} \neq \varnothing$, то есть имеется хотя бы один $a^{(l)}_{-j} \not\equiv 0$, соответствующий показателю $\mu_{-j}$, обозначим через $q_l$ — номер минимального из всех таких $\mu_{-j}$. Если для некоторого фиксированного $l$ в этом представлении $\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^+} \neq \varnothing$, то есть имеется хотя бы один $a^{(l)}_k \not\equiv 0$, соответствующий показателю $\mu_k$, обозначим через $u_l$ — номер максимального из всех таких $\mu_k$.

Пусть последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество $\{q_l\}$ бесконечное. Покажем, что оно ограниченное.

По условию п.1 для произвольной последовательности $\{g_l\}$ множество $\{u_l\}$ пустое или ограниченное. Тогда без ограничения общности можно считать, что в представлениях полиномов из экспонент $\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^-} \neq \varnothing$ для всех $l$. Действительно, достаточно рассмотреть $\widetilde{g}_l = g_l \cdot e^{-az}$, для некоторого $a \in \mathbb{R}^+$. Тогда $a^{(l)}_{-q_l} \not\equiv 0$ для всех $l$.

Предположим, что множество чисел $\{q_l\}$ является неограниченным.

Все $p_l$ имеют вид (1). Так как $a^{(l)}_{-q_l} \not\equiv 0$, используя оценку (4) из леммы 2 и оценку (11), получаем следующую оценку функции $R_l = g_l - p_l$, $R_l \not\equiv 0$, :

$$|R_l(z)| \geqslant |p_l(z)| - |g_l(z)| \geqslant c_3 e^{(|\mu_{-q_l}|\cos\alpha)|z|} - Ae^{B|z|},$$

для всех $z$ в области $A_\alpha(\pi)$, $|z| > r$. Здесь $r = r(l)$. По предположению, существует $\mu_{-q_{l_0}}$, такое, что $|\mu_{-q_{l_0}}| > \dfrac{B}{\cos\alpha}$.

Видим, что $|R_{l_0}(z)| > 0$ для всех $z$ в области $A_\alpha(\pi)$, $|z| > r_1(l_0)$. Получаем противоречие, так как, в силу условия п.1 теоремы 1, в области $A_\alpha(\pi)$, $|z| > r_1(l_0)$, лежит бесконечная дискретная последовательность из $\Lambda^-$, а нам дано, что $R_{l_0}|_{\Lambda^-} = 0$.

Доказано следующее: если последовательность функций $g_l = p_l + R_l$ из $(G_1)_{P_\mathbb{C}} \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$ сходится в $P_\mathbb{C}$, то $|\mu_{-q_l}| \leqslant \dfrac{B}{\cos\alpha}$ для всех $l$, и множество чисел $\{q_l\}$ в представлениях полиномов из экспонент является ограниченным. Множество чисел $\{u_l\}$ для любой последовательности $\{g_l\}$ конечное или пустое по условию утверждения п.1.

Следовательно, последовательность полиномов из экспонент $\{p_l\}$ принадлежит некоторому конечномерному подпространству $X \subset \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$. Утверждение $(I^*)$ означает, что все элементы сходящейся последовательности $g_l = p_l + R_l$ лежат в алгебраической прямой сумме $X \oplus (G_1)_{P_\mathbb{C}}$.

В любом топологическом векторном пространстве алгебраическая прямая сумма конечномерного подпространства и замкнутого подпространства является замкнутым подпространством ([20], стр. 41). Итак, предельная функция $g$ последовательности $g_l = p_l + R_l$ принадлежит $\mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1} \oplus (G_1)_{P_\mathbb{C}}$. Утверждение $(II^*)$ доказано.

Из утверждений $(I^*)$ и $(II^*)$ вытекает утверждение п.1 Теоремы 1.

В условиях п.2 докажем, что алгебраическая прямая сумма $(G_2)_{P_\mathbb{C}} \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_2}$ — замкнутое подпространство в $P_\mathbb{C}$. По условию п. 2, имеется два бесконечных множества узлов интерполяции $\mu_k$ с кратностями $m_k$ и узлов интерполяции $\mu_{-k}$ с кратностями $m_{-k}$. Кроме того, в углах $A_\alpha(\pi)$ и $A_\alpha(0)$ лежат две бесконечные последовательности точек из $\Lambda^-$ и $\Lambda^+$, соответственно.

Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность функций $\{g_l\} \subset \mathrm{Ker}\,M_{G_2} \oplus \big(\psi_2\big)$, вида $g_l = R_l + p_l$, $l \in \mathbb{N}$, где $p_l \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$, $R_l \in (G_2)_{P_\mathbb{C}}$. Как и при доказательстве замкнутости $(G_1)_{P_\mathbb{C}} \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$ выше, можно считать, что $p_l \not\equiv 0$, $R_l \not\equiv 0$ для всех $l$. Полиномы из экспонент $p_l \not\equiv 0$ имеют представление (12). Если последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество чисел $\{u_l\}$ конечное или пустое, выше доказано, что множество чисел $\{q_l\}$ ограниченное.

Пусть последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество чисел $\{u_l\}$ бесконечное.

Если последовательность $\{p_l\}$ такова, что в ней имеется бесконечное множество членов, в представлении которых имеются отрицательные показатели, то можно считать, что $a^{(l)}_{-q_l} \not\equiv 0$ для всех членов такой последовательности. Этого можно достичь, переходя к подпоследовательности. Далее, как в доказательстве утверждения п.1, доказываем, что множество чисел $\{q_l\}$, соответствующих всем таким членам, является ограниченным. Кроме того, для дальнейшего отметим, что для любой последовательности такого типа без ограничения общности можно считать, что $a^{(l)}_{u_l} \not\equiv 0$ для всех $l$.

Если же в последовательности $\{p_l\}$ таких членов не более конечного числа, можно считать, что $a^{(l)}_{u_l} \not\equiv 0$ для всех $l$, рассматривая $\widetilde{g}_l = g_l \cdot e^{az}$, для некоторого $a \in \mathbb{R}^+$.

По предположению, для последовательности $\{p_l\}$ каждого из последних двух типов множество $\{u_l\}$ неограниченное. Последовательность $\{g_l\}$ удовлетворяет оценке (11). Так как $a^{(l)}_{u_l} \not\equiv 0$ для всех $l$, получаем, используя оценку (5) Леммы 2 и оценку (11), что для всех $z$ в области $A_\alpha(0)$, $|z| > r$, $r = r(l)$,

$$|R_l(z)| \geqslant c_3 e^{(\mu_{u_l} \cos\alpha)|z|} - Ae^B|z|.$$

Отсюда, так как множество $\Lambda^+$ бесконечное, как и выше, в доказательстве утверждения п.1, приходим к противоречию и заключаем, что множество чисел $\{u_l\}$, соответствующих произвольной сходящейся последовательности $\{u_l\}$, является ограниченным. Из предыдущего рассмотрения следует, что оба множества чисел $\{q_l\}$ и $\{u_l\}$, участвующие в представлении произвольной сходящейся последовательности $\{g_l\}$ полиномов из экспонент, являются ограниченными. Завершается доказательство теми же рассуждениями, как в доказательстве утверждения п.1.

Утверждение п.2, а значит, и Теорема 1 доказаны.

## 4. Обсуждение условий, примеры

Покажем, что единственности интерполяции в условиях рассматриваемой задачи быть не может.

Пусть множество $\Lambda$ удовлетворяет условию (8). Кроме того, пусть множество $\Lambda$ и множество узлов $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Теоремы 1, тогда разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент $f$ из $\Sigma(\Lambda)$ с узлами $\mathcal{M}$. Пусть $\psi = \psi_{\mathcal{M}}$ — некоторая целая функция с нулевым множеством $Z_\psi = \mathcal{M}$, с учетом кратностей.

**Предложение 1.** *Подпространство* $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big) \neq \{0\}$, *более того, оно — бесконечномерное.*

**Доказательство.** По Теореме 1 имеет место представление $\operatorname{Ker} M_\varphi + \big(\psi\big) = H(\mathbb{C})$. Покажем, что $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big) \neq \{0\}$.

Существует $g \in \big(\psi\big)$, $g \not\equiv 0$, $g \notin \Sigma(\Lambda)$, и существует такое $x_0 \in \mathbb{R}$, что $g(x_0) \neq 0$, $\psi(x_0) \neq 0$. Обозначим через $\psi_1$ — целую функцию с нулевым множеством $Z_{\psi_1} = \mathcal{M} \cup \{x_0\}$, тогда идеал $\big(\psi_1\big)$ является собственным подмножеством $\big(\psi\big)$.

По Теореме 1 $H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_1\big)$, в частности $g = f + \psi_1 \cdot r$, где $f \in \Sigma(\Lambda)$, причем функция $f \not\equiv 0$, поскольку $g \notin \big(\psi_1\big)$. Функция $r \in H(\mathbb{C})$ и $r \not\equiv 0$, так как $g \notin \Sigma(\Lambda)$.

Так как $r \not\equiv 0$, а $f = g - \psi_1 \cdot r$, видим, что $f \in \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big)$ и $f \not\equiv 0$. Первое утверждение доказано.

Заметим, что $f \notin \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_1\big)$, так как $f(x_0) = g(x_0) \neq 0$. Доказано, что имеет место строгое включение $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_1\big) \subset \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big)$.

Предположим, что подпространство $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big)$ конечномерное. Продолжая указанную процедуру, получим последовательность строгих включений $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_{k+1}\big) \subset \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_k\big)$. Через конечное число шагов получим, что $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_{l_0}\big) = \{0\}$. Это противоречит тому, что уже доказано выше. Предложение 2 доказано.

В заключение обратимся к более общей ситуации, описанной перед Леммой 3. Рассмотрим бесконечную дискретную последовательность комплексных чисел $\mathcal{V} = \mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+$, где

$\mathcal{V}^+ = \{v_j\}$, $\mathcal{V}^- = \{v_{-j}\}$, — бесконечные дискретные последовательности, причем $\operatorname{Re} v_j > 0$, $\operatorname{Re} v_{-j} < 0$. Пусть выполнены условия (6) и (7) из Леммы 3. Предположим, что множества $\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+$ представляют собой множества нулей целых функций экспоненциального типа $\Phi_1, \Phi_2$, соответственно.

Для произвольного дискретного множества $\Omega = \{\omega_k\}$, $\omega_k \in \mathbb{R}$, с множеством кратностей $\{n_k\}$, обозначим через $\psi_\Omega$ целую функцию, имеющую простые нули в точках $\omega_k$ с кратностями $n_k$, и только в них.

**Замечание 1.** Из леммы 3 вытекает, что справедливы следующие два утверждения. *Подпространства* $\operatorname{Ker} M_{\Phi_1} + \big(\psi_\Omega\big)$ *и* $\operatorname{Ker} M_{\Phi_2} + \big(\psi_\Omega\big)$ *являются всюду плотными в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

Действительно, $I_{\mathcal{V}^-} = (\Phi_1)_{P_\mathbb{C}}$. Это показано в доказательстве теоремы 1. Поэтому, в силу Леммы 3, $\big(\Phi_1\big)_{P_\mathbb{C}} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\Omega} = \{0\}$, так как любая функция из $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\Omega}$ имеет вид (1), в силу фундаментального принципа для $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\Omega}$ в пространстве $P_\mathbb{C}$. Это двойственное утверждение равносильно первому утверждению. Второе получается после преобразования $z \to -z$ плоскости $\mathbb{C}$.

Обсудим два примера, связанных с существенностью условий, накладываемых на множество показателей экспонент $\Lambda$ и узлы интерполяции $\mathcal{M}$.

Пример 1 ниже показывает, что условия (6) и (7) в утверждениях Замечания 1 близки к необходимым. Для того чтобы упростить этот пример, заметим, что после преобразования $z \to -z$ плоскости $\mathbb{C}$, из утверждения п. 1 Теоремы 1 получается утверждение:
$1'$. *Пусть множество узлов* $\mathcal{M}^-$ *— конечное или пустое. В пространстве* $H(\mathbb{C})$ *разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из* $\Sigma(\Lambda)$ *с множеством узлов* $\mathcal{M}$, *тогда, и только тогда, когда для некоторого* $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ *множество* $\Lambda \cap A_\alpha(0)$ *— бесконечное.*

**Пример 1.** *Пусть* $\varphi(z) = z - e^z$, *а множество узлов интерполяции* $\mathcal{M}$ *содержит некоторое множество узлов* $\mu_k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$. *Проблема простой интерполяции функциями из* $\operatorname{Ker} M_\varphi$ *с множеством узлов* $\mathcal{M}$ *неразрешима, причем подпространство* $M_\varphi + \big(\psi_\mathcal{M}\big)$, *вообще говоря, не является всюду плотным в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

Легко показать, что функция $\varphi(z) = z - e^z$ имеет бесконечное множество нулей $\Lambda = \{\lambda_n, \lambda_n = x_n + iy_n\}$. Так как $\lambda_n = e^{\lambda_n}$, в частности, получаем, что $x_n - \ln|\lambda_n| = 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re}\lambda_n \to +\infty$, и для $\lambda_n$ не выполняются как условие Теоремы 1, так и условие (7). Кроме того, $\varphi'(\lambda_n) = 1 - e^{\lambda_n} = 1 - \lambda_n$. Поэтому все нули функции $\varphi$ простые, и индекс конденсации $\delta = 0$ для функции $\varphi$. Следовательно, $\operatorname{Ker} M_\varphi = \Sigma(\Lambda)$.

В частности, если множество узлов $\mathcal{M}$ содержит $\mu_0 = 0$ с кратностью $m_0 = 2$ и $\mu_1 = 1$ с кратностью $m_1 = 1$, тогда полином из экспонент $p = \varphi$ принадлежит $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\mathcal{M}} \cap \big(\varphi\big)_{P_\mathbb{C}}$, то есть в силу равносильного двойственного утверждения $(I^*)$, подпространство $M_\varphi + \big(\psi_\mathcal{M}\big)$ не является всюду плотным в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Второй пример показывает, что существуют такие операторы свертки из рассматриваемого класса, что проблема интерполяции функциями из ядра оператора свертки с произвольными комплексными узлами интерполяции $\mu_k$, вообще говоря, неразрешима.

**Пример 2.** *Пусть множество узлов интерполяции содержит точки* $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = \mu_1 + i \in \mathbb{C}$, *а* $\varphi(z) = 1 - e^{iz}$. *Тогда проблема простой интерполяции целыми функциями из* $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : f(z) = f(z+i)\}$ *неразрешима.*

В этом примере $\lambda_n = 2\pi n \in \mathbb{R}$. Все функции из ядра $M_\varphi$ являются периодическими с периодом $i$, поэтому нет возможности задавать произвольные интерполяционные данные в узлах $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = \mu_1 + i \in \mathbb{C}$.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Валентину Васильевичу Напалкову за постоянное стимулирующее общение, а также рецензентам за ряд полезных замечаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир. 1968. 279 с.
2. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Т. 1 М.: Мир. 1953. 346 с.
3. A. Meril, A. Yger *Problèmes de Cauchy globaux.* // Bull. Soc. Math. France. V. 120. 1992. pp. 87–111.
4. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир. 1986. 455 с.
5. Shapiro H.S. *An algebraic theorem of Fischer, and the holomorphic Goursat problem.* // Bull. London Math. Soc. V. 21. 21. 1989. С. 513–537.
6. A. Meril, D.C. Struppa *Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions.* // Bull. London Math. Soc.V.17. 5. 1985. pp. 469–473 .
7. P. Henrici *Applied and computational complex analysis.* V. 2. A Wiley- Interscience Publication. 1977. 662 p.
8. L.A. Rubel *Some research problems about algebraic differential equations.* // Trans. Amer. Math. Soc. V.280. 1. pp. 43–53
9. L.A. Rubel *Some research problems about algebraic differential equations II.* // Illinois Math. Soc. V.36. 1. pp. 659-681.
10. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
11. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
12. Напалков В.В., Нуятов А.А. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки.* // Матем. сб. 203:2. 2012. С. 77–86.
13. Напалков В.В., Попенов С.В. *Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера.* // Докл. РАН, Т. 381. №2. 2001. С. 164–166.
14. Напалков В.В. *Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки.* Труды матем. института имени В.А. Стеклова. 235. 2001. С. 165-168.
15. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
16. Мерзляков С.Г. *Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования.* // Матем. заметки 33:5. 1983. С. 701–713.
17. H. Muggli. *Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten.* // Comment. Math. Helv. V. 11. 1938. pp. 151-179.
18. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально - разностные уравнения.* М.: Мир. 1967. 548 с.
19. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях.* // Сб. перев. Математика. 1:1. 1957. С. 60–77.
20. Рудин У. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1975. 443 с.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `msg2000@mail.ru`

Сергей Викторович Попёнов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `spopenov@gmail.com`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 144-152.

УДК 517.9

# ТЕОРЕМА ВИНЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ С РЯДАМИ ФУРЬЕ, СУММИРУЕМЫМИ С ВЕСОМ

**И.И. СТРУКОВА**

**Аннотация.** В работе определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости, а также понятие обратимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций, коэффициенты Фурье которых суммируемы с весом.

**Ключевые слова:** банахово пространство, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, теорема Винера, абсолютно сходящийся ряд Фурье, обратимость.

**Mathematics Subject Classification:** 46J10.

## 1. Введение

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C_\omega(\mathbb{R})$ будем обозначать банахово пространство непрерывных $\omega$-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Будем говорить, что функция $f \in C_\omega(\mathbb{R})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC_\omega(\mathbb{R})$. Заметим, что $AC_\omega(\mathbb{R})$ является банаховой алгеброй (см. [1]) с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|.$$

В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом:

**Теорема 1.** *Если функция $f \in AC_\omega(\mathbb{R})$ и $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $1/f \in AC_\omega(\mathbb{R})$, т.е. $1/f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b(k)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, где $b \in l^1(\mathbb{Z})$.*

Доказательство теоремы 1 приводится в [2].

Теорема Винера обобщалась в нескольких направлениях. Отметим теорему Бохнера-Филлипса [3] для функций со значениями в банаховой алгебре, а также статьи [4], [5], в которых теорема Винера была доказана для операторов, матрицы которых имеют абсолютно суммируемые диагонали. Ссылки на исследования, связанные с приложениями результатов, имеются в [6].

I.I. Strukova, Wiener's theorem for periodic at infinity functions with summable weighted Fourier series.

© Струкова И.И. 2013.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00378).

*Поступила 30 июня 2012 г.*

В данной статье теорема Винера распространяется на класс периодических на бесконечности функций.

Далее введем множество периодических на бесконечности функций.

Пусть $X$ – комплексное банахово пространство. $End\,X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из $X$ в $X$.

Символом $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в $X$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

Символом $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим изометрическую группу операторов (или представление) $S : \mathbb{R} \to End\,C_{b,u}$, действующую по правилу

$$(S(\alpha)x)(t) = x(t+\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

**Определение 1.** Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся или стационарной на бесконечности*, если

$$S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X) \text{ для всех } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Например, функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вида $f(t) = \sin \ln(1+t^2)$ является медленно меняющейся на бесконечности.

**Определение 2.** Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$, если

$$S(\omega)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Определение периодической на бесконечности функции было предложено А.Г. Баскаковым и использовалось в статье [7].

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, а множество периодических на бесконечности функций периода $\omega$ – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

В случае $X = \mathbb{C}$ для рассматриваемых пространств будем использовать обозначения $C_{b,u}(\mathbb{R}),\ C_0(\mathbb{R}),\ C_{sl}(\mathbb{R}),\ C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$.

Отметим, что $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ – банахово пространство с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X.$$

Кроме того, $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образуют банаховы алгебры с поточечным умножением, если $X$ – банахова алгебра.

**Определение 3.** *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},$$

а функции $x_n, n \in \mathbb{Z}$, определяемые по формулам

$$x_n(t) = \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}}{\omega} \int_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

— *коэффициентами Фурье* функции $x$. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье функции $x$ абсолютно сходится, если найдутся функции $y_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Отметим, что слово "обобщенный"в дальнейшем будет опускаться.

Отметим также, что рассматриваемый ряд Фурье может не сходиться к функции $x$ и понимается как формальный ряд.

**Пример 1.** Примером функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье является функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ вида

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{n^2}\sin(\alpha_n\ln(1+t^2))\right)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t\in\mathbb{R},\ \alpha_n\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Отметим, что функции $f_n, n\in\mathbb{Z}$, построенные по функции $f$ по формуле (2), не совпадают с функциями $y_n: t\mapsto\frac{1}{n^2}\sin\alpha_n\ln(1+t^2),\ t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}$, однако, $f_n-y_n\in C_0(\mathbb{R})$.

**Замечание 1.** Если $x\in C_\omega(\mathbb{R})$, то ряд Фурье из определения 3 совпадает с обычным рядом Фурье функции $x$.

Далее будем использовать следующее обозначение:

$$e_n(t)=e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что отображение $x\mapsto P_nx=x_ne_n: C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)\to C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X),\ n\in\mathbb{Z}$ является ограниченным оператором с $\|P_n\|\le 1$. Кроме того, $Im(P_n^2-P_n)\subset C_0(\mathbb{R},X)$ для образа $Im(P_n^2-P_n)$ оператора $P_n^2-P_n$ (доказательство приводится в конце раздела 3), однако операторы $P_n,\ n\in\mathbb{Z}$ не являются проекторами.

До конца этого раздела символ $X$ будет обозначать банахову алгебру.

**Определение 4.** Функцию $x\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R},X)$, если существует функция $y\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$, такая, что $xy-1\in C_0(\mathbb{R},X)$. Функцию $y$ будем называть *обратной к $x$ относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R},X)$.

**Замечание 2.** Непосредственно из определения 4 следует, что функция $x\in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R},X)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $x=y+x_0$, где $x_0\in C_0(\mathbb{R},X)$, а функция $y\in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ такова, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\|y(t)\|_X>0$. Из определения 4 также следует, что функция $x\in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R},X)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $A>0$, что $\inf\limits_{|t|>A}\|x(t)\|_X>0$.

Нетрудно видеть, что если $y_1,y_2$ – обратные к $x\in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{R},X)$ функции, то $y_1-y_2\in C_0(\mathbb{R},X)$.

Рассмотрим функцию $a\in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ и введем обозначение $d_a(k)=\|a_k\|_\infty,\ k\in\mathbb{Z}$, где $a_k$ – $k$-й коэффициент Фурье функции $a$, определяемый по формуле (2).

Для рассматриваемой функции будем считать выполненным одно из условий следующего предположения:

**Предположение 1.** *Для функции $a\in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ выполнено одно из условий:*

*1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}d_a(k)\alpha(k)<\infty$, где $\alpha:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}_+$ – весовая функция, для которой выполнено соотношение $\lim\limits_{|k|\to\infty}\frac{\ln\alpha(k)}{|k|}=0$;*

*2) $\lim\limits_{|k|\to\infty}d_a(k)|k|^\gamma=0,\quad k\in\mathbb{Z},\ \gamma>1$;*

*3) $d_a(k)\le Const\exp(-\varepsilon|k|),\quad k\in\mathbb{Z},\ \varepsilon>0$.*

*В частности, условие выполнено, если ряд Фурье функции $a$ имеет конечное число отличных от нуля коэффициентов Фурье, т.е. существует такое $M\in\mathbb{N}$, что $d_a(k)=0,\ |k|\ge M+1$.*

Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 2.** *Если для обратимой относительно подпространства $C_0(\mathbb{R},X)$ функции $a\in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ выполнено одно из условий 1) – 3) предположения 1, то обратная к ней относительно $C_0(\mathbb{R},X)$ функция $b$ удовлетворяет соответствующим условиям:*

*1') $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}d_b(k)\alpha(k)<\infty$;*

*2')* $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_b(k)|k|^\gamma = 0$;

*3')* $d_b(k) \le Const\exp(-\varepsilon_0|k|), \quad k \in \mathbb{Z}$, *для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$.

Заметим, что величины $Const$ и $\varepsilon_0$ зависят от величин $Const$ и $\varepsilon$ из условий предположения 1.

## 2. Периодические векторы и их ряды Фурье

Пусть $\mathcal{B}$ – банахова алгебра с единицей и $\omega$ – положительное число. Рассмотрим действующую в ней $\omega-$периодическую изометрическую сильно непрерывную группу операторов (представление) $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, обладающую свойствами

$$\begin{aligned} &T(t)(ab) = T(t)a \cdot T(t)b, \\ &T(t)e = e,\ t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $a, b$ – произвольные элементы из $\mathcal{B}$, а $e$ – единица в алгебре $\mathcal{B}$.

Таким образом, каждый из операторов $T(t), t \in \mathbb{R}$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{B}$, и каждая функция $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \to \mathcal{B},\ a \in \mathcal{B}$ является непрерывной $\omega$-периодической функцией.

Из приведенных свойств непосредственно следует, что если элемент $a \in \mathcal{B}$ обратим, то

$$e = T(t)e = T(t)(aa^{-1}) = (T(t)a)T(t)a^{-1} = (T(t)a^{-1})T(t)a,\ a \in \mathcal{B},$$

и, следовательно, $(T(t)a)^{-1} = T(t)a^{-1}$.

Рассмотрим ряд Фурье (см. [8])

$$T(t)a \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R},$$

функции $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \to \mathcal{B},\ a \in \mathcal{B}$, где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Ряд $a \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ назовем *рядом Фурье* элемента $a \in \mathcal{B}$, а $a_n, n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье* этого элемента.

Если ряд Фурье элемента $a \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т.е. выполнено условие $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$, то справедливо равенство $a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$.

**Лемма 1.** *Пусть* $a \in \mathcal{B}$. *Тогда* $T(\alpha)a_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n, n \in \mathbb{Z}$, *для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$, *где* $a_n,\ n \in \mathbb{Z}$, *— коэффициенты Фурье элемента* $a$. *Причем операторы* $P_n$, *определяемые формулой* $P_n a = a_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n \in \mathbb{Z}$, *являются проекторами с* $\|P_n\| \le 1,\ n \in \mathbb{Z}$.

**Доказательство.** Возьмем произвольный элемент $a \in \mathcal{B}$ и зафиксируем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $a_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье элемента $a$, определяемые по формуле (5). Тогда для них справедлива следующая цепочка равенств

$$T(\alpha)a_n = T(\alpha)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\right) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\alpha)T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\alpha+t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}}{\omega}\int\limits_\alpha^{\omega+\alpha} T(\tau)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau =$$

$$= \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}}{\omega} \int\limits_0^\omega T(\tau) a e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} d\tau = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha} a_n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Т.е. мы показали, что $T(\alpha)a_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n, n \in \mathbb{Z}$, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем теперь, что операторы $P_n,\ n \in \mathbb{Z}$, определяемые формулой $P_n a = a_n$, являются проекторами, т.е. $P_n^2 = P_n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $a \in \mathcal{B}$. Тогда

$$P_n a = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(t) a e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} dt,\ n \in \mathbb{Z},$$

$$P_n^2 a = P_n(P_n a) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(t) a_n e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} dt = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega a_n dt = a_n = P_n a,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем теперь, что $\|P_n\| \leq 1,\ n \in \mathbb{Z}$ (при доказательстве используется свойство $\|T(t)\| = 1,\ t \in \mathbb{R}$).

$$\|P_n\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|P_n a\| = \sup_{\|a\| \leq 1} \|\frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(t) a e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} dt\| \leq$$

$$\leq \sup_{\|a\| \leq 1} \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega \|T(t)a\| dt \leq \sup_{\|a\| \leq 1} \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega \|T(t)\| \|a\| dt \leq 1.$$

Лемма доказана.

Для элемента $a \in \mathcal{B}$ рассмотрим оператор $A \in End\,\mathcal{B}$ вида

$$Ax = ax,\ x \in \mathcal{B}.$$

Оператору $A$ поставим в соответствие $\omega$-периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, определяемую формулой

$$\Phi_A(t) = T(t)AT(-t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Функции $\Phi_A$ поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$\Phi_A(t) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$A_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(t)AT(-t) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t} dt,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ назовем *рядом Фурье оператора* $A$, а операторы $A_n$ – *коэффициентами Фурье* этого оператора. Определим двустороннюю числовую последовательность $(d_A(n))$, положив $d_A(n) = \|A_n\|,\ n \in \mathbb{Z}$.

**Лемма 2.** *Для коэффициентов Фурье $A_n, n \in \mathbb{Z}$, оператора $A$ справедливы представления $A_n x = a_n x, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathcal{B}$, причем $\|A_n\| = \|a_n\|, n \in \mathbb{Z}$.*

**Доказательство.** Покажем, что $A_n x = a_n x$ для всех $x \in \mathcal{B}$.

Используя формулы (5) и (6), а также тот факт, что операторы $T(t), t \in \mathbb{R}$ образуют гомоморфизм алгебры, получаем

$$A_n x = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)AT(-t)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)(aT(-t)x)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (T(t)a)T(t)(T(-t)x)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\right)x = a_n x.$$

Для любого $x \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство $\|A_n x\| \le \|a_n\|\|x\|$.

Поскольку $a_n = A_n e$ и $\|e\| = 1$, то $\|A_n\| = \|a_n\|, n \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Отметим, что если ряд Фурье оператора $A$ абсолютно сходится, т.е.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_A(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty,$$

то функция $\Phi_A$ непрерывна в равномерной операторной топологии.

Для рассматриваемого оператора будем считать выполненным одно из условий следующего предположения:

**Предположение 2.** *Для оператора $A \in End\,\mathcal{B}$ выполнено одно из условий:*

*1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k) < \infty$, где $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ – весовая функция, для которой выполнено соотношение $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln\alpha(k)}{|k|} = 0$;*

*2) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_A(k)|k|^\gamma = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ \gamma > 1$;*

*3) $d_A(k) \le Const\exp(-\varepsilon|k|), \quad k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon > 0$.*

*В частности, условие выполнено, если ряд Фурье оператора $A$ имеет конечное число отличных от нуля коэффициентов Фурье, т.е. существует такое $M \in \mathbb{N}$, что $d_A(k) = 0,\ |k| \ge M + 1$.*

Далее используется следующая

**Теорема 3.** *Пусть оператор $A \in End\,\mathcal{B}$ обратим и для него выполнено одно из условий 1) – 3) предположения 2. Тогда обратный оператор $B = A^{-1} \in End\,\mathcal{B}$ удовлетворяет соответствующим условиям:*

*1') $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)\alpha(k) < \infty$;*

*2') $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_B(k)|k|^\gamma = 0$;*

*3') $d_B(k) \le Const\exp(-\varepsilon_0|k|), \quad k \in \mathbb{Z}$, для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.*

Данное утверждение следует из [9; теорема 1].

## 3. Элементы гармонического анализа периодических на бесконечности функций

Всюду в этом параграфе через $X$ обозначается банахова алгебра с единицей.

Ясно, что группа сдвигов $S$, определенная по формуле (1), в пространстве периодических на бесконечности функций не является периодической.

В дальнейшем символом $\mathcal{B}$ будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, которое становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом

$$\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy},\ \ \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{B}. \tag{7}$$

В нем построим изометрическую группу операторов $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, действующую по правилу

$$T(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + C_0(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где $x$ – некоторый представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$.

Поскольку

$$T(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{S(\omega)x} = S(\omega)x + C_0(\mathbb{R}, X) =$$
$$= (S(\omega)x - x) + x + C_0(\mathbb{R}, X) = x + C_0(\mathbb{R}, X) = \widetilde{x},$$

то представление $T$ является $\omega$-периодическим.

Кроме того, из сильной непрерывности представления $S$ следует сильная непрерывность представления $T$.

В терминах группы $T$ принадлежность класса $\widetilde{x}$ алгебре $\mathcal{B}$ будет означать, что $T(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$.

Ряд Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, являющейся представителем класса $\widetilde{x}$, имеет вид $x(\tau) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}$, где коэффициенты Фурье $x_n, n \in \mathbb{Z}$ определяются по формуле (2), а среднее $x_0$ имеет вид

$$x_0(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}.$$

Справедливо следующее утверждение:

**Лемма 3.** *Коэффициенты Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладают свойством: $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$.*

**Доказательство.** Вначале покажем, что среднее $x_0$ функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Возьмем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ и покажем, что $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Непосредственно из леммы (1) следует, что для класса $\widetilde{x}_0$, содержащего функцию $x_0$, справедливо равенство $T(\alpha)\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_0$, т.е. $x_0$ обладает свойством $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В силу произвольности выбора числа $\alpha \in \mathbb{R}$ из определения медленно меняющейся на бесконечности функции получаем, что $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Теперь докажем это свойство для коэффициентов Фурье $x_n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ функции $x$. Введя обозначение $y(t) = x(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ \ t \in \mathbb{R},\ \ n \in \mathbb{Z}$, получаем, что $S(\omega)y - y \in C_0(\mathbb{R}, X)$, т.е. $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Тогда среднее функции $y$, определяемое формулой $y_0(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Сравнивая последнюю формулу с формулой (2), получаем, что $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Итак, у нас имеется фактор-алгебра $\mathcal{B} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующая в ней $\omega$-периодическая сильно непрерывная изометрическая группа операторов (представление) $T$, определяемая формулой (8).

Представлению $T$ поставим в соответствие его ряд Фурье

$$T(t)\widetilde{x} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{P_n}\widetilde{x}e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},\ \widetilde{x} \in \mathcal{B}.$$

Коэффициенты Фурье представления $T$ имеют вид

$$\widetilde{P_n}\widetilde{x} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(t)\widetilde{x}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

На представителях рассматриваемых классов имеем

$$(P_n x)(\tau) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (S(t)x)(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = x_n(\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau},$$

где $x_n, n \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье функции $x$, определяемые по формуле (2).

Из формулы (5) непосредственно следует, что коэффициенты Фурье представления $T$ обладают следующим свойством

$$\widetilde{P_n}\widetilde{x} = \widetilde{x_n},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $x$ – представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$. Тогда последнее равенство означает, что $\widetilde{P_n x} = \widetilde{x_n}$, т.е. $P_n x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$. В силу того, что $\widetilde{P_n}$ являются проекторами, справедливо равенство $\widetilde{P_n}^2\widetilde{x} = \widetilde{P_n}\widetilde{x} = \widetilde{x_n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\widetilde{P_n^2 x} = \widetilde{x_n}$, т.е. $P_n^2 x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $P_n^2 x - P_n x \in C_0(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$, т.е. $Im(P_n^2 - P_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$.

Если ряд Фурье класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т.е. выполнено условие

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{x_n}\| < \infty,$$

то из свойств нормы в фактор-пространстве следует, что в этом случае можно найти такие представители $y_n$ классов $\widetilde{x_n}$, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty.$$

Заметим, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда обратим класс $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$, ее содержащий. Это утверждение непосредственно вытекает из определения 4.

## 4. Доказательство теоремы 2

Теперь для получения основного результата в качестве алгебры $\mathcal{B}$ рассмотрим фактор-алгебру $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, а в качестве представления $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$ рассмотрим $\omega$-периодическую группу изометрических операторов $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, определяемую по формуле (8).

Покажем, что группа $T$ обладает свойствами (4).

С использованием формул (7) и (8) получаем, что

$$T(t)(\widetilde{x}\widetilde{y}) = T(t)(\widetilde{xy}) = \widetilde{S(t)(xy)} = S(t)xS(t)y + C_0(\mathbb{R}, X) =$$
$$= (T(t)\widetilde{x})\,T(t)\widetilde{y},\ x \in \widetilde{x}, y \in \widetilde{y},\ t \in \mathbb{R},$$

т.е. для группы $T$ свойство (4) действительно выполняется.

Рассмотрим оператор $A \in End\,\mathcal{B}$ следующего вида

$$A\widetilde{x} = \widetilde{a}\widetilde{x}, \quad \widetilde{a} \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

Оператору $A$ поставим в соответствие $\omega$-периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, определяемую формулой

$$\Phi_A(t) = T(t)AT(-t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Для рассматриваемого оператора справедлива теорема 3.

**Доказательство теоремы 2.** Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{B} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующую в ней $\omega$-периодическую изометрическую группу операторов $T$, определяемую по формуле (8).

По обратимой функции $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, объявленной в условиях теоремы, построим класс $\widetilde{a} \in \mathcal{B}$, который также будет обратим. Обозначив обратный класс символом $\widetilde{b}$, получаем, что $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{1}$.

Введем в рассмотрение оператор $A \in End\,\mathcal{B}$, определяемый формулой (9). Это оператор умножения на элемент $\widetilde{a} \in \mathcal{B}$, причем он обратим. Тогда его обратный имеет вид

$$B\widetilde{x} = \widetilde{b}\widetilde{x}, \quad \widetilde{b} \in \mathcal{B}.$$

Для оператора $A$ справедлива теорема 3, и, значит, можно найти такой представитель $b$ класса $\widetilde{b}$, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, и он удовлетворяет сооответствующему условию из теоремы 2. Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье обратной относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции также абсолютно сходится.*

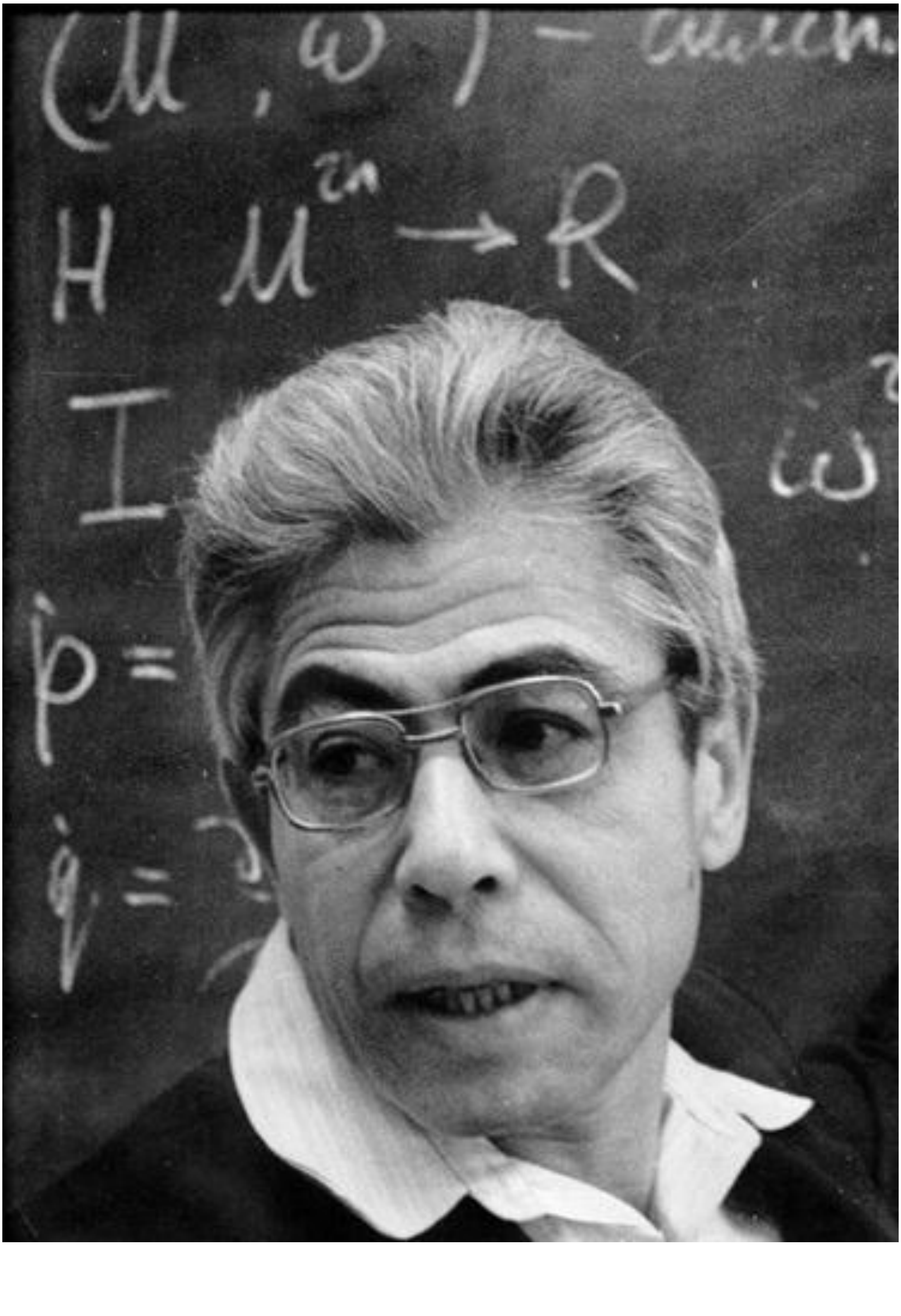
**Следствие 2.** *Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и ее ряд Фурье абсолютно сходится, то существует функция $b \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, такая, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.*

В заключение отметим, что в недавно вышедшей статье [10] были введены в рассмотрение почти периодические на бесконечности функции, и естественным образом для их рядов Фурье возникают вопросы, аналогичные рассматриваемым в данной статье.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кахан Ж.П. *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.* М.: Мир. 1976. 203 с.
2. Винер Н. *Интеграл Фурье и некоторые его приложения.* М.: Физматлит. 1963. 121 с.
3. S. Bochner, R.S. Fillips *Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings* // Ann. of math. 1942. № 3. P. 409–418.
4. Баскаков А.Г. *Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 3–26.
5. Баскаков А.Г. *Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ* // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 1. С. 14–28.
6. K. Groechenig *Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance and its applications* // Birkhaeuser, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston. 2010. P. 60–63.
7. Калужина Н.С. *Медленно меняющиеся функции, периодические на бесконечности функции и их свойства* // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–102.
8. Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов* // СМФН. 2004. Т. 9. С. 64–66.
9. Баскаков А.Г. *Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц* // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №2. С. 17–26.
10. Баскаков А.Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* / А.Г. Баскаков // УМН. 2013. Т. 68. №1(409). С. 77–128.

Ирина Игоревна Струкова,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д.1,
394006, г.Воронеж, Россия
E-mail: irina.k.post@yandex.ru




**08.01.1932 – 23.06.2013**

# Памяти Арлена Михайловича Ильина.

23 июня 2013 года ушел из жизни выдающийся ученый-математик, академик РАН, член редакционного совета Уфимского математического журнала Арлен Михайлович Ильин. Он родился 8 января 1932 года в Ленинграде и прошел долгий жизненный путь. В детстве жил в Улан-Удэ, в Батуми, в Москве, в Курганской области (эвакуация). После эвакуации вернулся с родителями в Москву, где закончил знаменитую 59-ю школу и механико-математический факультет Московского Государственного Университета. Его дипломная работа, выполненная под руководством Ольги Арсеньевны Олейник, была посвящена сильно вырождающимся эллиптическим уравнениям, зависящих от малого параметра. Результаты этой работы, опубликованные в ДАН СССР в 1955 году, сыграли значительную роль в теории дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром. Отметим, что большая часть последующих научных достижений Арлена Михайловича связана с исследованием подобных задач.

С 1954 по 1963 год Арлен Михайлович работал на кафедре дифференциальных уравнений МГУ, возглавляемой академиком Иваном Георгиевичем Петровским, и занимался исследованием асимптотики решений линейных дифференциальных параболических уравнений второго порядка при больших значениях времени, а также изучал поведение решений нелинейных дифференциальных параболических уравнений.

В 1963 году Арлен Михайлович переехал в Свердловск и начал работать в только что созданном Свердловском отделении Математического института имени В.А. Стеклова (ныне Институт математики и механики УрО РАН). Результатом сотрудничества возглавляемого им отдела математической физики и Института океанологии АН СССР стало формирование двух чрезвычайно важных для приложений новых научных направлений. Первое направление, возникшее из публикации небольшой статьи в «Математических заметках», состоит в конструировании разностных схем, позволяющих эффективно находить численные решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Второе направление связано с аналитическим исследованием нового класса задач, которые теперь называются задачами с бисингулярным возмущением.

Переехав в Уфу в 1974 году, Арлен Михайлович возглавил сектор дифференциальных уравнений Отдела физики и математики в Башкирском филиале АН СССР и полностью переключился на исследование асимптотик задач с малым параметром. Под его руководством сложился сильный коллектив выпускников Уральского и Башкирского университетов. В результате работы этой группы был детально развит метод согласования асимптотических разложений и получено его обоснование применительно к широкому классу бисингулярно возмущенных задач, не поддававшихся исследованию другими способами.

В 1988 году Арлен Михайлович вернулся в Свердловск, где стал преподавать в Уральском политехническом институте и работать в ИММ УрО РАН, сначала ведущим научным сотрудником ИММ, затем – заведующим отделом уравнений математической физики. В этот период Арленом Михайловичем было инициировано изучение нового класса задач с бисингулярным возмущением, которые связаны с теорией оптимального управления – одной из основных тематик Института.

В 2002 году Арлен Михайлович Ильин переехал в Челябинск и до последних дней работал профессором кафедры вычислительной математики Челябинского государственного университета, оставаясь научным руководителем отдела уравнений математической физики ИММ УрО РАН.

Исследования А.М. Ильина получили признание научного сообщества. В 1994 году он был избран членом-корреспондентом РАН, в 2000 году – действительным членом РАН. В 1995 году ему была присуждена премия РАН имени И.Г. Петровского за цикл работ «Асимптотические методы в математической физике» (совместно с О.А. Олейник). В 2000 году он стал лауреатом Государственной премии РФ (совместно с В.С. Буслаевым и М.В. Карасевым).

Арлен Михайлович был не только выдающимся ученым, но и замечательным педагогом. Где бы он ни работал – в Москве, Свердловске (Екатеринбурге), Уфе, Улан-Удэ, Челябинске – всегда вокруг него формировался коллектив молодых исследователей-единомышленников, которые с течением времени становились авторитетными учеными. Созданная А.М. Ильиным научная школа получила широкое признание в России и за рубежом. Под его руководством были подготовлены и защищены 17 кандидатских диссертаций, а среди его учеников – восемь докторов наук. Арлен Михайлович много работал в экспертных советах ВАК и РФФИ, в редакциях ряда ведущих математических журналов, всеми силами способствуя развитию математической мысли в России. Арлен Михайлович пользовался авторитетом и признанием коллег не только за выдающиеся научные достижения. Сочетание требовательности и принципиальности с благожелательным отношением к любому человеку, будь то студент или академик, обеспечивали ему любовь и уважение окружающих его людей.

Светлая память об Арлене Михайловиче навсегда сохраниться в сердцах знавших его людей.

Р.Г. Ахметов, Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин А.Р. Данилин, Л.А. Калякин,
О.М. Киселев, Е.Ф. Леликова, В.Ю. Новокшенов, Б.И. Сулейманов

# ABSTRACTS

## N.N. Aitkuzhina, A.M. Gaisin

Dirichlet series with real coefficients

**Abstract.** We study the class of entire functions represented by Dirichlet series with real coefficients determined by a convex growth majorant. We prove the criterion for the validity of the asymptotic identity on the positive ray which is an exact estimate for the growth of the logarithm of the modulus for each function in the considered class.

**Keywords:** Dirichlet series with real coefficients, discrete growth majorant.

## F.Kh. Baichorova, Z.S. Elkanova

Commuting differential operators of orders 4 and 6

**Abstract.** We consider a model problem on a pair of commuting differential operators of orders 4 and 6. The results are employed to generalize a known commuting pair in a work of J. Dixmier for the case of rational coefficients.

**Keywords:** commuting differential operators, differential operators of orders 4 and 6.

## Yu.G. Voronova, A.V. Zhiber

Symmetries and Goursat problem for system of equations
$u_{xy} = e^{u+v}u_y,\ v_{xy} = -e^{u+v}v_y$

**Abstract.** We describe the higher symmetries and construct the general solution for a hyperbolic system of equations. We also obtain the explicit formula for the solution of Goursat problem.

**Keywords:** symmetries, Goursat problem, integrals.

## R.A. Gaisin

Quasianalyticity criteria of Salinas-Korenblum type
for general domains

**Abstract.** We prove a criterion of quasianalyticity in a boundary point of a rather general domain (not necessarily convex and simply-connected) if in a vicinity of this point the domain is close in some sense to an angle or is comparable with it.

**Keywords:** Carleman class, regular sequences, bilogarithmic quasianalyticity condition.

## Z.Kh. Zakirova

On some special solutions of Eisenhart equation

**Abstract.** In this note we study a 6-dimensional pseudo-Riemannian space $V^6(g_{ij})$ with the signature $[++----]$, which admits projective motions, i.e., continuous transformation groups preserving geodesics. A general method of determining pseudo-Riemannian spaces admitting some nonhomothetic projective group $G_r$ was developed by A.V.Aminova. A.V.Aminova classified all Lorentzian manifolds of dimension $\geqslant 3$ admitting nonhomothetic projective or affine infinitesimal transformations. The problem of classification is not solved for pseudo-Riemannian spaces with arbitrary signature.

In order to find a pseudo-Riemannian space admitting a nonhomothetic infinitesimal projective transformation, one has to integrate the Eisenhart equation

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Pseudo-Riemannian manifolds for which there exist nontrivial solutions $h_{ij} \neq cg_{ij}$ to the Eisenhart equation are called *h-spaces*. It is known that the problem of describing such spaces depends on the type of an $h$-space, i.e., on the type of the bilinear form $L_X g_{ij}$ determined by the characteristic of the $\lambda$-matrix $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$. The number of possible types depends on the dimension and the signature of an $h$-space

In this work we find the metrics and determine quadratic first integrals of the corresponding geodesic lines equations for 6-dimensional $h$-spaces of the type $[(21\dots1)(21\dots1)\dots(1\dots1)]$.
**Keywords:** differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, systems of partial differential equations.

## A.M. Ilyasov

Optimal system of Lie algebra subalgebras of the point symmetries group for nonlinear heat equation without source

**Abstract.** In this paper we construct an optimal system of subalgebras for the nine-dimension Lie algebra of infinitesimal operators for a point symmetries group of a nonlinear heat equation with isotropic heat conductivity tensor and with a power dependence of the temperature. The results are presented as a lemma and a theorem. It is proven that up to transformations of internal automorphisms and some discrete automorphisms, there are 117 dissimilar subalgebras classes of various dimensions.

**Keywords:** nonlinear heat equation, Lie algebra, optimal system of subalgebras.

## K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov

Unconditional bases of reproducing kernels in Hilbert spaces of entire functions

**Abstract.** We consider the existence of unconditional bases of reproducing kernels in a functional Hilbert space of entire functions. It is proved that under certain conditions, unconditional bases of reproducing kernels do not exist. It is shown that in particular spaces some known theorems on the absence of unconditional bases are the consequences of these results.

**Keywords:** Hilbert spaces, entire functions, reproducing kernels, unconditional bases.

## V.A. Korneev

### Construction of generalized solution for first order divergence type equation

**Abstract.** We consider the Cauchy problem for a first order divergence type equation with the right hand side independent of the unknown function and with a discontinuous initial condition. This equation was first mentioned by J.M. Burgers in 1940 and it is a model equation for the system of equations describing the non-stationary motion of a gas. Various properties of the solution to this problem we studied in works by O.A. Oleinik (1957), J. Whitham (1974), S.N. Kruzhkov (1970), E.Yu. Panov (2006). The original problem is reduced to the Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equation with a continuous initial condition. It is suggested to apply the method of singular characteristics to this problem, while this method was developed A.A. Melikyan for game problems. The effectiveness of technique is demonstrated by the example, when in the original equation the derivative w.r.t. the spatial variable is applied to a cubic polynomial of the unknown function, and boundary condition is specified as a "raising" step. The Hamiltonian in the modified problem is a third degree polynomial of a partial derivative for the unknown function, and the boundary condition is given by the piecewise linear convex function with a break in the origin. We single out the domains of the parameters for which the construction of a generalized solution is possible, and we describe the procedure of constructing the solution. It is shown that the solution involves nonsmooth singularities called the dispersal and equivocal surfaces according to the terminology of differential games. The constructing of the solution is illustrated by figures.

**Keywords:** Hamilton-Jacobi equation, generalized solution, method of characteristics.

## A.S. Krivosheyev, O.A. Krivosheyeva

### A closedness of set of Dirichlet series sum

**Abstract.** In the work we consider Dirichlet series. We study the problem of closedness for the set of the sums for such series in the space of functions holomorphic in a convex domain of a complex plane with a topology of uniform convergence on compact subsets. We obtain necessary and sufficient conditions under those every function from the closure of a linear span of exponents with positive indices is represented by a Dirichlet series. These conditions can be formulated only in terms of geometric characteristics of an index sequence and of the convex domain.

**Keywords:** exponent, convex domain, Dirichlet series, entire function, invariant subspace.

## E.V. Makarevich

### Invariant and partially invariant solutions with respect to Galilean shifts and dilatation

**Abstract.** In the work we consider a three-dimensional subalgebra embedded in a four-dimensional subalgebra in order to find the set of solutions and to adjoint them the solutions on subalgebras of higher dimension. Although the aim is not reached yet, we obtain invariant solutions of the rank 1 and partially invariant solutions of the rank 1 and defect 1. We obtain two submodels being invariant and partially invariant, seven solutions depend on arbitrary function and nineteen exact solutions.

**Keywords:** gas dynamics, hierarchy of submodels, invariant solution, partially invariant solution.

## S.G. Merzlyakov, S.V. Popenov

### Interpolation with multiplicity by series of exponentials in $H(\mathbb{C})$ with nodes on the real axis

**Abstract.** In the space of entire functions we study an interpolation problem with multiplicity by the functions from a closed subspace which is invariant in respect to the operator of differentiation. The discrete set of the nodes for the interpolation with multiplicity is located on the real axis in the complex plane. The proof is based on the passage from the subspace to its subspace consisting of all series of exponentials converging in the topology of uniform convergence on compact sets. We obtain a criterion for the solvability of the interpolation problem with real nodes having multiplicity by series of exponentials in the terms of location of exponents of exponentials.

**Keywords:** entire function, interpolation with multiplicity, series of exponents, ideal, Fischer representation.

## I.I. Strukova

### Wiener's theorem for periodic at infinity functions with summable weighted Fourier series

**Abstract.** In the article we define a Banach algebra of periodic at infinity functions. For this class of functions we introduce the notions of a Fourier series, its absolutely convergence and invertibility. We obtain an analogue of Wiener theorem on absolutely convergent Fourier series for periodic at infinity functions whose Fourier coefficients are summable with a weight.

**Keywords:** Banach space, slowly varying at infinity functions, periodic at infinity functions, Wiener theorem, absolutely convergent Fourier series, invertibility.

# CONTENTS