ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 54-66.

УДК 517.956.4

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ЛИ ТОЧЕЧНОЙ ГРУППЫ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ БЕЗ ИСТОЧНИКА

А.М. ИЛЬЯСОВ

Аннотация. В работе построена оптимальная система подалгебр девятимерной алгебры Ли инфинитезимальных операторов точечной группы симметрии нелинейного уравнения теплопроводности с изотропным тензором теплопроводности со степенной зависимостью от температуры. Результаты представлены в виде леммы и теоремы. Доказано, что с точностью до преобразований внутренних автоморфизмов и некоторых дискретных автоморфизмов существует 117 классов не подобных подалгебр различной размерности.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, алгебра Ли, оптимальная система подалгебр.

Mathematics Subject Classification: 35K59.

1. Введение

Замкнутая система уравнений изотропной пространственной нестационарной фильтрации однофазной жидкости в сильно сцементированном пористом пласте [1] с параметрами флюида и скелета породы, зависящими от порового давления, подходящей заменой переменных приводится к нелинейному трехмерному уравнению теплопроводности с коэффициентами, имеющими степенную зависимость от температуры, и источником, зависящим от градиента температуры. Если пренебречь в уравнениях фильтрации гравитационными силами, то данное уравнение сводится к нелинейному уравнению теплопроводности без источника

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right). \tag{1}$$

В работе [2] выполнена групповая классификация пространственного нелинейного уравнения теплопроводности с источником, зависящим только от температуры в случаях анизотропной, трансверсально-изотропной и изотропной теплопроводности.

Как показано в работе [2], в интересующем нас случае изотропной теплопроводности, который соответствует распространенной модели изотропной пористой среды, ядро основных групп состоит из переносов вдоль осей координат четырехмерного пространства-времени и вращений вокруг осей координат. Этому ядру соответствует семимерная алгебра Ли инфинитезимальных операторов. В этой же работе показано, что в случае отсутствия источника и степенной зависимости коэффициентов уравнения от температуры алгебра Ли L_7 расширяется до девятимерной алгебры L_9 с базисом ($\sigma \neq 0$):

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2},\quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},\quad X_4 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$X_5 = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1},\quad X_6 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2},\quad X_7 = \frac{\partial}{\partial t},$$
$$X_8 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{2}$$

A.M. Ilyasov, Optimal system of Lie algebra subalgebras of the point symmetries group for nonlinear heat equation without source.

Поступила 9 января 2013 г.

$$X_9 = \sigma\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma\, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma\, x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, к операторам переноса и вращениям добавляются операторы одновременного растяжения по пространству-времени, а также совместного растяжения по пространственным переменным и зависимой переменной.

Далее, с выбранным базисом (2) будет построена оптимальная система подалгебр (ОСП) алгебры Ли L_9. Линейные преобразования для построения оптимальной системы рассматриваются над полем действительных чисел, так как нас интересуют действительные групповые решения уравнения (1).

2. Группа внутренних автоморфизмов алгебры Ли L_9

Вычислим сначала коммутаторы базисных операторов алгебры L_9. По определению, коммутатором базисных операторов (2) X_i и X_j, $\quad i,j=1,...,9$ называется оператор [3]:

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i, \quad i,j=1,...,9. \tag{3}$$

Вычисления по формуле (3) представлены в табл. 1 коммутаторов операторов алгебры L_9. Для краткости в таблице операторы заменены их номерами. Например, $-(\sigma)1$ означает $-\sigma\, X_1$. В таблице 1 в первых столбце и строке стоят базисные операторы, а на их пересечении — значения их коммутаторов.

Табл. 1

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	0	0	0	3	–2	0	1	$(\sigma)1$
2	0	0	0	–3	0	1	0	2	$(\sigma)2$
3	0	0	0	2	–1	0	0	3	$(\sigma)3$
4	0	3	–2	0	6	–5	0	0	0
5	–3	0	1	–6	0	4	0	0	0
6	2	–1	0	5	–4	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	(2)7	0
8	–1	–2	–3	0	0	0	–(2)7	0	0
9	$-(\sigma)1$	$-(\sigma)2$	$-(\sigma)3$	0	0	0	0	0	0

Произвольный элемент алгебры L_9 в базисе (2) запишем в виде $X = x^i X_i$, $(i=1,...,9)$. Обозначим через $P_1(x) = (x^1, x^2, x^3)$ и $P_2(x) = (x^4,\ x^5,\ x^6)$ проекции координатного вектора $\vec{x}$ для элемента X. Тогда, согласно введенным обозначениям, координатный вектор произвольного одномерного оператора алгебры L_9 можно представить в виде:

$$\vec{x} = (P_1(x),\, P_2(x),\, x^7,\, x^8,\, x^9). \tag{4}$$

Пусть $X' = x'^i X_i$, $(i=1,...,9)$ – некоторый оператор алгебры L_9 в базисе (2) и $Y \in L_9$ – другой инфинитезимальный оператор, записанный в том же базисе. Вычислим группу внутренних автоморфизмов алгебры L_9. Для любого оператора $Y \in L_9$ однопараметрическая группа внутренних автоморфизмов является решением задачи [3]:

$$\frac{\partial X'}{\partial a} = [X', Y], \quad X'(0) = X. \tag{5}$$

Как показано в [3], для вычисления всех внутренних автоморфизмов достаточно вычислить однопараметрические группы внутренних автоморфизмов для базисных операторов. Таким образом, внутренние автоморфизмы вычисляются из решения уравнений

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a_j} X_i = x'^i [X_i, X_j], \quad x'^i(0) = x^i, \quad i,j=1,...,9, \tag{6}$$

где в (5) вместо оператора Y последовательно берутся базисные операторы X_j.

Пусть $Y = X_1$, тогда из (6) и таблицы коммутаторов имеем:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a_1} X_i = x'^i [X_i, X_1] = -x'^5 X_3 + x'^6 X_2 - x'^8 X_1 - x'^9 \sigma\, X_1, \quad x'^i(0) = x^i,\ \ i=1,...,9$$

или следующую задачу Коши для системы ОДУ для определения координат x'^i:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x'^1}{\partial a_1} = -x'^8 - \sigma x'^9, \quad \dfrac{\partial x'^2}{\partial a_1} = x'^6, \quad \dfrac{\partial x'^3}{\partial a_1} = -x'^5, \quad \dfrac{\partial x'^i}{\partial a_1} = 0, \\ \\ x'^1(0) = x^1, \quad x'^2(0) = x^2, \quad x'^3(0) = x^3, \quad x'^i(0) = x^i, \quad i = 4, ..., 9, \end{cases}$$

отсюда получаем следующее решение этой задачи:

$$\begin{cases} x'^1 = -(x^8 + \sigma x^9)a_1 + x^1, \\ x'^2 = x^6 a_1 + x^2, \\ x'^3 = -x^5 a_1 + x^3, \\ x'^i = x^i, \quad i = 4, ..., 9. \end{cases} \tag{7}$$

Аналогично (7), из (6) и таблицы коммутаторов 1 получим однопараметрические группы для операторов $Y = X_2$ и $Y = X_3$. Легко показать, что композиция полученных однопараметрических групп автоморфизмов определяет трехпараметрическое преобразование проекции $P_1(x)$.

$$\Gamma : P_1(x') = P_1(x) + P_2(x) \times \vec{\alpha} - (x^8 + \sigma x^9)\, \vec{\alpha},$$

где через x' обозначены преобразованные координаты; $\vec{\alpha} = (a_4, a_5, a_6)$ – параметрический вектор, а «×» – знак векторного произведения.

Далее, из (6) находим однопараметрическую группу внутренних автоморфизмов алгебры Ли L_9 для оператора $Y = X_4$, которая представляет собой одновременные вращения вокруг осей Ox^1 и Ox^4:

$$\begin{cases} x'^2 = \sin a_4 \cdot x^3 + \cos a_4 \cdot x^2, \\ x'^3 = \cos a_4 \cdot x^3 - \sin a_4 \cdot x^2, \\ x'^5 = \sin a_4 \cdot x^6 + \cos a_4 \cdot x^5, \\ x'^6 = \cos a_4 \cdot x^6 - \sin a_4 \cdot x^5, \\ x'^i = x^i, \quad i = 1, 4, 7, 8, 9. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогично (8), при $Y = X_5$ из (6) получим группу одновременных вращений вокруг осей Ox^2 и Ox^5, а при $Y = X_6$ – группу одновременных вращений вокруг осей Ox^3 и Ox^6. Композиция однопараметрических групп вращений определяет трехпараметрические преобразования поворотов O проекций $P_1(x)$ и $P_2(x)$ по формулам:

$$P_1(x') = OP_1(x), \quad P_2(x') = OP_2(x), \quad OO^T = I, \quad \det O = 1.$$

При $Y = X_7$ из (6) получается преобразование, для которого введем обозначение

$$\Pi : \quad x'^7 = -2a_7 x^8 + x^7.$$

При $Y = X_8$ получается однопараметрическая группа одновременного растяжения проекции $P_1(x)$ и координаты x^7. Для данного преобразования введем обозначение

$$R_1 : \quad P_1(x') = a_8 P_1(x), \quad x'^7 = a_8^2 x^7.$$

Из (6) при $Y = X_9$ вычисляется однопараметрическая группа однородных растяжений проекций $P_1(x)$, для которой введем обозначение

$$R_2 : \quad P_1(x') = a_9 P_1(x).$$

Композиция полученных групп преобразований образует 9: параметрическую группу внутренних автоморфизмов.

Рассмотрим, как внутренние автоморфизмы действуют на различные координатные проекции вектора $\vec{x}$ (4). На проекции координатного вектора $\vec{x}$ действуют следующие группы автоморфизмов: на проекции P_2 действуют только повороты O; на проекции P_1 действуют повороты O, преобразование Γ, а также растяжения R_1 и R_2; координата x^7 изменяется только при преобразовании Π и растяжении R_1; на проекцию, задаваемую координатами x_8, x_9, никакие внутренние автоморфизмы не действуют.

Кроме того, из рассмотрения табл. 1 заметим следующие дискретные автоморфизмы:

$$\varepsilon_1 : \quad P_1(x') = -P_1(x),$$
$$\varepsilon_2 : \quad x'^7 = -x^7.$$

3. Оптимальные системы подалгебр

В работе [4] описан алгоритм вычисления оптимальной системы подалгебр произвольной алгебры Ли и приведены примеры вычисления некоторых подалгебр конечномерных алгебр линейного одномерного уравнения теплопроводности, уравнений газовой динамики и уравнений движения изотропной несжимаемой жидкости с коэффициентами вязкости и теплопроводности, зависящими от температуры. Для моделей газовой динамики обзор построенных оптимальных систем подалгебр приведен в работе [5]. Применим данный алгоритм для вычисления оптимальной системы подалгебр алгебры L_9 пространственного нелинейного уравнения теплопроводности без источника с изотропным тензором теплопроводности, имеющим степенную зависимость от температуры.

Рассмотрим табл. 1 коммутаторов базисных операторов алгебры L_9. Из таблицы видно, что четырехмерное подпространство, натянутое на векторы базиса $\{X_1, X_2, X_3, X_9\}$, является идеалом J_4 алгебры L_9, а пятимерное подпространство, натянутое на векторы $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$, является подалгеброй L_5 алгебры L_9. В свою очередь, подалгебру L_5 можно разложить в прямую сумму своих идеалов $J_{51} = \{X_4, X_5, X_6\}$ и $J_{52} = \{X_7, X_8\}$. Таким образом, справедливо разложение:

$$L_9 = L_5 \overset{\bullet}{\oplus} J_4 = (J_{51} \oplus J_{52}) \overset{\bullet}{\oplus} J_4. \tag{9}$$

Обозначим координаты оператора одномерных подалгебр через x^i, двумерных подалгебр – x^i, y^i, трехмерных подалгебр – x^i, y^i, z^i, четырехмерных подалгебр – x^i, y^i, z^i, w^i и т.д.

4. Оптимальная система подалгебр алгебры L_5

Вычислим оптимальную систему подалгебр алгебры L_5. Согласно разложению (9) алгебра является прямой суммой своих идеалов J_{51} и J_{52}:

$$L_5 = \{X_4, X_5, X_6\} \oplus \{X_7, X_8\} = J_{51} \oplus J_{52} \tag{10}$$

Используя алгоритм, описанный в работе [4], вычислим сначала ОСП идеала J_{51}, а затем согласно (10) будем прибавлять к каждому оператору из ОСП идеала J_{51} (в том числе и к нулевому оператору) линейную комбинацию базисных операторов идеала J_{52}, дополняющую операторы из ОСП идеала J_{51} до операторов из алгебры L_5. Далее, с помощью внутренних автоморфизмов приведем операторы подалгебр из L_5 к наиболее простому виду (сделать минимум произвольных координат операторов). Таким способом найдем ОСП алгебры L_5, каждый представитель которой имеет своей проекцией одну из подалгебр ОСП идеала J_{51} или нулевую проекцию.

Сначала найдем ОСП идеала J_{51}. Одномерная подалгебра – это произвольный оператор из идеала J_{51}, базисный оператор которого имеет вид $X = x^4 X_4 + x^5 X_5 + x^6 X_6$. Данный оператор можно представить в виде матрицы-строки для координат базисного оператора $\begin{pmatrix} x^4 & x^5 & x^6 \end{pmatrix}$. Применив преобразование поворота O и замену базиса, получим $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если $\varepsilon = 0$, то получим нулевую подалгебру, а если $\varepsilon = 1$ – одномерную подалгебру $\{X_4\}$.

Далее рассмотрим произвольную двумерную подалгебру идеала J_{51}, которую можно представить в виде матрицы для координат базисных операторов $\begin{pmatrix} x^4 & x^5 & x^6 \\ y^4 & y^5 & y^6 \end{pmatrix}$. Применив преобразование O и замену базиса, матрицу приведем к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Однако для такого базиса не выполняется условие подалгебры $[X_4, X_5] = X_6 \neq \lambda X_4 + \mu X_5$. Таким образом, двумерных подалгебр в ОСП идеала J_{51} нет.

Базис трехмерной подалгебры из J_{51} можно представить в виде действительной невырожденной матрицы $\begin{pmatrix} x^4 & x^5 & x^6 \\ y^4 & y^5 & y^6 \\ z^4 & z^5 & z^6 \end{pmatrix}$. Тогда с помощью замены базиса данную матрицу можно привести к единичной. Получим трехмерную подалгебру: $\{X_4, X_5, X_6\}$. Условие подалгебры выполняется. Итак, ОСП идеала J_{51} состоит из трех подалгебр: одномерной, трехмерной и нулевой.

Далее, вычислим все подагебры из L_5, которые имеют нулевую проекцию в J_{51}. Одномерная подалгебра имеет матричное представление координат базисного оператора $\begin{pmatrix} x^7 & x^8 \end{pmatrix}$. Если $x^8 \neq 0$, то преобразование Π делает $x^7 = 0$, а замена базиса приводит к подалгебре вида $\{X_8\}$.

Если $x^8 = 0$, то замена базиса приводит к подалгебре $\{X_7\}$. Итак, существуют 2 одномерные подалгебры в L_5 с нулевой проекцией в J_{51}.

Двумерная подалгебра с нулевой проекцией имеет вид $\{X_7, X_8\}$. Подалгебр размерности выше 2 с нулевой проекцией нет, т.к. операторы становятся линейно-зависимыми. Итак, в L_5 имеется нулевая, 2 одномерные и 1 двумерная подалгебры с нулевой проекцией в J_{51}.

Одномерная подалгебра в L_5 с проекцией $\{X_4\}$ в J_{51} имеет матричное представление координат оператора $\begin{pmatrix} 1 & x^7 & x^8 \end{pmatrix}$. Если $x^8 \neq 0$, то преобразование П делает $x^7 = 0$, а замена базиса приводит к подалгебре $\{X_4 + \alpha X_8\}$. Если $x^8 = 0$, то преобразования R_1 и ε_2 приводят к подалгебре $\{X_4 + X_7\}$. Итак, имеются 2 одномерные подалгебры в L_5 с проекцией $\{X_4\}$ в J_{51}.

Двумерная подалгебра в L_5 с проекцией $\{X_4\}$ в J_{51} имеет матричное представление координат операторов $\begin{pmatrix} 1 & x^7 & x^8 \\ 0 & y^7 & y^8 \end{pmatrix}$. Если $y^8 \neq 0$, то преобразование П делает $y^7 = 0$, замена базиса делает $y^8 = 1$, $x^8 = 0$, а преобразования R_1 и ε_2 приводят к подалгебре $\{X_4 + \varepsilon X_7, X_8;\ \varepsilon = 0, 1\}$. В случае $\varepsilon = 1$ условие подалгебры не выполняется, т.к. $[X_4 + X_7, X_8] = 2X_7 \neq \lambda(X_4 + X_7) + \mu X_8$. Если $\varepsilon = 0$, то получаем подалгебру $\{X_4, X_8\}$. Если $y^8 = 0$, то замена базиса делает $y^7 = 1$, $x^7 = 0$, что приводит к подалгебре $\{X_4 + \alpha X_8, X_7\}$. Итак, существуют 2 двумерные подалгебры в L_5 с проекцией $\{X_4\}$ в J_{51}.

Трехмерная подалгебра в L_5 с проекцией $\{X_4\}$ в J_{51} только одна: $\{X_4, X_7, X_8\}$.

Трехмерная подалгебра в L_5 с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в J_{51} имеет матричное представление координат операторов $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x^7 & x^8 \\ 0 & 1 & 0 & y^7 & y^8 \\ 0 & 0 & 1 & z^7 & z^8 \end{pmatrix}$. Вычислив всевозможные коммутаторы подалгебры, находим, что условие подалгебры выполняется тогда и только тогда, если $x^7 = y^7 = z^7 = x^8 = = y^8 = z^8 = 0$. Т.е. получаем исходную проекцию $\{X_4, X_5, X_6\}$.

Четырехмерная подалгебра в L_5 с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в J_{51} имеет матричное представление координат операторов

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x^7 & x^8 \\ 0 & 1 & 0 & y^7 & y^8 \\ 0 & 0 & 1 & z^7 & z^8 \\ 0 & 0 & 0 & w^7 & w^8 \end{pmatrix}$. Если $w^8 \neq 0$, то преобразование П делает $w^7 = 0$, замена базиса делает $w^8 = 1$, $x^8 = y^8 = z^8 = 0$, а условия подалгебры дают $x^7 = y^7 = z^7 = 0$ и приводят к подалгебре $\{X_4, X_5, X_6, X_8\}$. Если $w^8 = 0$, то замена базиса делает $w^7 = 1$, $x^7 = y^7 = z^7 = 0$, а условия подалгебры дают $x^8 = y^8 = z^8 = 0$. Приходим к подалгебре $\{X_4, X_5, X_6, X_7\}$.

Пятимерной подалгеброй в L_5 с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в J_{51} является сама L_5. Таким образом, существует 1 трехмерная, 2 четырехмерные и 1 пятимерная подалгебра с проекцией $\{X_4, X_5, X_6\}$ в J_{51}.

Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5 с коммутаторами из таблицы 1 с точностью до внутренних автоморфизмов и дискретных автоморфизмов ε_1 и ε_2 состоит из 12 классов неподобных подалгебр. Классы представлены в табл. 2*

Табл. 2

r	i	Базис	r	i	Базис
1	1	$4 + \alpha 8$	3	1	4, 5, 6
	2	4+7		2	4, 7, 8
	3	7	4	1	4, 5, 6, 7
	4	8		2	4, 5, 6, 8
2	1	4, 8	5	1	4, 5, 6, 7, 8
	2	$4 + \alpha 8$; 7			
	3	7, 8			

В таблице r – размерность подалгебры; i – порядковый номер подалгебры в данной размерности; α – произвольная постоянная.

5. Оптимальная система подалгебр алгебры L_9

Далее, согласно (9) алгебра L_9 есть полупрямая сумма подалгебры L_5 и идеала J_4:

$$L_9 = L_5 \overset{\bullet}{\oplus} J_4 = \{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\} \overset{\bullet}{\oplus} \{X_1, X_2, X_3, X_9\}. \tag{11}$$

Действуя аналогично предыдущему, с помощью доказанной леммы можно построить ОСП алгебры L_9, взяв в качестве проекций в L_5 подалгебры из табл. 2 и добавляя к их операторам части операторов из идеала J_4.

Сначала определим ОСП идеала J_4, которая совпадает с подалгебрами из оптимальной системы алгебры L_9, имеющими нулевую проекцию на L_5. Одномерные подалгебры в L_9 с нулевой проекцией на L_5 имеют матричное представление $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \end{pmatrix}$. Если $x^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(x) = 0$, а замена базиса дает подалгебру $\{X_9\}$. Если $x^9 = 0$, то поворот O и замена базиса приводят к подалгебре $\{X_1\}$. Итак, имеется 2 одномерные подалгебры в L_9 с нулевой проекцией на L_5: $\{X_1\}$ – подалгебра 1.1 в табл. 3 и $\{X_9\}$ – подалгебра 1.2 в табл. 3.

Двумерные подалгебры в L_9 с нулевой проекцией на L_5 имеют матричное представление $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \end{pmatrix}$. Если $y^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(y) = 0$, а замена базиса делает $y^9 = 1$, $x^9 = 0$. Поворот O делает $P_1(x) = \begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. После замены базиса получаем подалгебру $\{X_1, X_9\}$. Если $y^9 = 0$, то поворот O делает $P_1(y) = \begin{pmatrix} y^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а замена базиса делает $y^1 = 1$, $x^1 = 0$. Далее, поворот O вокруг оси Ox^1 дает $x^3 = 0$. Если $x^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(x) = 0$, а замена базиса дает $x^9 = 1$ и приходим к полученной выше подалгебре. Если $x^9 = 0$, то замена базиса делает $x^2 = 1$ и получаем подалгебру $\{X_1, X_2\}$. Итак, имеется 2 двумерные подалгебры в L_9 с нулевой проекцией на L_5: $\{X_1, X_9\}$ – подалгебра 2.2 в табл. 3 и $\{X_1, X_2\}$ – подалгебра 2.1 в табл. 3.

Трехмерные подалгебры в L_9 с нулевой проекцией на L_5 имеют матричное представление $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \end{pmatrix}$. Если $z^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $P_1(z) = 0$, а замена базиса делает $z^9 = 1$, $x^9 = y^9 = 0$. Поворот O делает $P_1(y) = \begin{pmatrix} y^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Далее, поворот O вокруг оси Ox^1 делает $x^3 = 0$, а замена базиса делает $y^1 = 1$. Получаем подалгебру $\{X_1, X_2, X_9\}$. Если $z^9 = 0$, то поворот O делает $P_1(z) = \begin{pmatrix} z^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а замена базиса делает $z^1 = 1$, $x^1 = y^1 = 0$. Далее, поворот O вокруг оси Ox^1делает $x^3 = 0$, и матрица подалгебры принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & x^2 & 0 & x^9 \\ 0 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если $x^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $x^2 = 0$, а замена базиса дает $x^9 = 1$, $y^9 = 0$. Далее, поворот O вокруг оси Ox^1 делает $y^3 = 0$, а замена базиса делает $y^2 = 1$. Приходим к полученной выше подалгебре. Если $x^9 = 0$, то замена базиса делает $x^2 = 1$, $y^2 = 0$. Если $y^9 \neq 0$, то преобразование Г делает $y^3 = 0$ и снова получаем ту же подалгебру. Если $y^9 = 0$, то замена базиса делает $y^3 = 1$ и получаем подалгебру $\{X_1, X_2, X_3\}$. Итак, имеется 2 трехмерные подалгебры в L_9 с нулевой проекцией на L_5: $\{X_1, X_2, X_9\}$ – подалгебра 3.2 в табл. 3 и $\{X_1, X_2, X_3\}$ – подалгебра 3.1 в табл. 3.

Четырехмерная подалгебра в L_9 с нулевой проекцией на L_5 совпадает с идеалом J_4 – подалгебра 4.1 в табл. 3.

Для того чтобы вычислить остальные подалгебры из ОСП алгебры L_9, необходимо согласно (11) к каждой подалгебре из леммы добавлять части операторов из идеала J_4. При этом одномерные проекции на подпространство L_5 будут иметь подалгебры H размерности $\dim \text{H} = 1 \div 5$. Подалгебр более высоких размерностей с одномерными проекциями на подпространство L_5 не существует, т.к., операторы становятся линейно-зависимыми. Аналогично, двумерные проекции на подпространство L_5 имеют подалгебры H размерности $\dim \text{H} = 2 \div 6$; трехмерные проекции имеют подалгебры размерности $\dim \text{H} = 3 \div 7$; четырехмерные проекции имеют подалгебры размерности $\dim \text{H} = 4 \div 8$; пятимерную проекцию имеют подалгебры размерности $\dim \text{H} = 5 \div 9$. В работе будут приведены примеры вычислений подалгебр всех размерностей в содержательных случаях. Результаты всех вычислений приводятся в табл. 3.

Рассмотрим одномерную подалгебру 1.1 из табл. 2. Одномерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство L_5 будут иметь следующее матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \end{pmatrix}$. Если $\alpha+\sigma x^9\neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(x)=0$ и получаем следующую подалгебру $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9,\ \beta\neq-\alpha/\sigma\}$. Если $\alpha+\sigma x^9=0$, то после замены параметра $\alpha/\sigma\to\alpha$ преобразование Γ делает $P_1(x)=\begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и дает подалгебру $\{X_4+\sigma\alpha X_8+\varepsilon X_1-\alpha X_9\}$. Если $\varepsilon=0$, то эту подалгебру можно объединить с предыдущей. Получим подалгебру без ограничений на значение параметра $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9\}$. Если $\varepsilon=1$, то получаем следующую подалгебру $\{X_4+X_1+\alpha(\sigma X_8-X_9)\}$. Итак, имеется 2 одномерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на L_5: $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9\}$ – подалгебра 1.3 в табл. 3 и $\{X_4+X_1+\alpha(\sigma X_8-X_9)\}$ – подалгебра 1.4 в табл. 3.

Двумерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство L_5 будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \end{pmatrix}$. Если $y^9\neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(y)=0$, а замена базиса делает $y^9=1$, $x^9=0$. Поворот O вокруг оси Ox^1 делает $x^3=0$, а из условия подалгебры $[X_4+\alpha X_8+x^1X_1+x^2X_2,\ X_9]=\sigma x^1X_1+\sigma x^2X_2=0$ следует, что это возможно при $x^1=x^2=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha X_8,\ X_9\}$. Если $y^9=0$, то преобразование Γ делает $P_1(x)=\begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а поворот O вокруг оси Ox^1делает $y^3=0$. Далее, условие подалгебры дает $y^2=0$, а замена базиса делает $y^1=1$, $x^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9,\ X_1\}$. Итак, существуют 2 двумерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на L_5: $\{X_4+\alpha X_8,\ X_9\}$ – подалгебра 2.3 в табл. 3 и $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9,\ X_1\}$ – подалгебра 2.4 в табл. 3.

Трехмерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство L_5 будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \end{pmatrix}$. Если $z^9\neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(z)=0$, а замена базиса делает $z^9=1$, $x^9=y^9=0$. Поворот O вокруг оси Ox^1 делает $x^3=0$. Условие подалгебры для коммутатора 1 и 2 операторов приводит к однородной системе уравнений $\begin{cases} y^2(\lambda+\alpha)+y^3=0 \\ y^2-(\lambda+\alpha)y^3=0 \end{cases}$ с определителем $\Delta=-(\lambda+\alpha)^2-1\neq 0$, откуда следует $y^2=y^3=0$. Замена базиса делает $y^1=1$, $x^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha X_8,\ X_1,\ X_9\}$. Если $y^9\neq 0$, то, поменяв 2 последние строки местами, приходим к уже рассмотренному случаю. Если $y^9=z^9=0$, то преобразование Γ делает $P_1(x)=\begin{pmatrix} x^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а поворот O вокруг оси Ox^1 делает $y^3=0$. Получаем следующее представление подалгебры $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & 0 & 0 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & 0 \end{pmatrix}$. Условие подалгебры для коммутатора 1 и 2 операторов приводит к системе уравнений $\begin{cases} \mu z^1=-(\lambda+\alpha+\sigma x^9)y^1 \\ \mu z^2=-(\lambda+\alpha+\sigma x^9)y^2 \\ \mu z^3=y^2 \end{cases}$. Имеются 2 возможности. 1) $y^2\neq 0$. Из последнего уравнения системы следует $\mu\neq 0$, $z^3\neq 0$. Тогда замена базиса делает $y^2=1$, $z^2=0$, $z^3=1$ и из первого уравнения системы следует $z^1=0$. Из условия подалгебры для коммутатора 1 и 3 операторов следует $y^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha X_8+\varepsilon X_1+\beta X_9,\ X_2,\ X_3\}$. Если $\varepsilon=0$, то имеем подалгебру $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9,\ X_2,\ X_3\}$. Если $\varepsilon=1$ и $\alpha+\sigma\beta\neq 0$, то преобразование Γ делает $x^1=0$. Получаем подалгебру $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9,\ X_2,\ X_3;\ \beta\neq-\alpha/\sigma\}$, которая вкладывается в предыдущую. Если $\varepsilon=1$ и $\alpha+\sigma\beta=0$, то имеем подалгебру $\{X_4+X_1+\alpha(\sigma X_8-X_9),\ X_2,\ X_3\}$. 2) $y^2=0$. Замена базиса делает $y^1=1$, $x^1=z^1=0$, а из условия подалгебры для 1 и 3 операторов следует $z^2=z^3=0$. Т.е. в этом случае операторы линейно-зависимы. Итак, существуют 3 трехмерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на L_5: $\{X_4+\alpha X_8,\ X_1,\ X_9\}$ – подалгебра 3.3 в табл. 3, $\{X_4+\alpha X_8+\beta X_9,\ X_2,\ X_3\}$ – подалгебра 3.4 в табл. 3 и $\{X_4+X_1+\alpha(\sigma X_8-X_9),\ X_2,\ X_3\}$ – подалгебра 3.5 в табл. 3.

Четырехмерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство L_5 будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \end{pmatrix}$. Возможны два случая. 1) Если $w^9 \neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(w)=0$, а замена базиса делает $w^9=1$, $x^9=y^9=z^9=0$. Поворот O вокруг оси Ox^1 делает $z^3=0$. Далее, можно считать, что $z^2=1$, т.к. это можно сделать либо переменой местами операторов 2 и 3, либо заменой координат в операторе 3. Замена базиса делает $x^2=y^2=0$. Условие подалгебры для коммутатора 1 и 3 операторов приводит к системе уравнений $\begin{cases} -\alpha\, z^1 = \gamma\, y^1 + \kappa\, z^1 \\ -\alpha = \kappa \\ 1 = \gamma\, y^3 \end{cases}$, откуда следует $y^1=0$, $y^3\neq 0$. Далее, замена базиса делает $y^3=1$, $x^3=0$. Из условия подалгебры для коммутатора 1 и 4 операторов следует, что $x^1=0$. И, наконец, условие подалгебры для коммутатора 1 и 2 операторов приводит к системе уравнений $\begin{cases} \mu\, z^1 = 0 \\ -\alpha = \lambda \\ -1 = \mu \end{cases}$, откуда следует $z^1=0$. Т.о. получаем подалгебру $\{X_4+\alpha\, X_8,\ X_3,\ X_2,\ X_9\}$. 2) Если $y^9=z^9=w^9=0$, то операторы подалгебры линейно-независимы, если выполняются неравенства: $y^1\neq 0,\ z^2\neq 0,\ w^3\neq 0$. Тогда замена базиса приводит к подалгебре $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\ X_1,\ X_2,\ X_3\}$. Итак, существуют 2 четырехмерные подалгебры в L_9 с проекцией$\{X_4+\alpha X_8\}$ на L_5: $\{X_4+\alpha\, X_8,\ X_3,\ X_2,\ X_9\}$ – подалгебра 4.2 в табл. 3 и подалгебра 4.3 в табл. 3: $\{X_4+\alpha\, X_8+\beta\, X_9,\ X_1,\ X_2,\ X_3\}$.

Пятимерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4+\alpha X_8\}$ на подпространство L_5 будут иметь невырожденное матричное представление

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \end{pmatrix}.$$

Операторы подалгебры линейно-независимы, если выполняются неравенства: $y^1\neq 0,\ z^2\neq 0,\ w^3\neq 0,\ s^9\neq 0$. Тогда замена базиса приводит к подалгебре $\{X_1,X_2,X_3,X_9\}$. Т.о., имеется 1 пятимерная подалгебра в L_9 с проекцией $X_4+\alpha X_8$ на L_5: $X_4+\alpha X_8, X_1, X_2, X_3, X_9$ – подалгебра 5.1 в табл. 3.

Далее рассмотрим пятимерную подалгебру 5.1 из табл. 2. Шестимерные подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4,X_5,X_6,X_7,X_8\}$ на подпространство L_5 будут иметь матричное представление $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^9 \end{pmatrix}$. Условия подалгебры для коммутаторов первых 3 операторов друг с другом дают $x^9=y^9=z^9=0$. Имеется 2 возможности. 1) Если $t^9\neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(t)=0$, а замена базиса делает $t^9=1$, $w^9=s^9=0$. Далее, условие подалгебры для коммутаторов 1 и 6 операторов дает $P_1(x)=0$; 2 и 6 операторов дает $P_1(y)=0$; 3 и 6 операторов дает $P_1(z)=0$; 4 и 6 операторов дает $P_1(w)=0$, а 5 и 6 операторов дает $P_1(s)=0$. Получаем подалгебру $\{X_4,X_5,X_6,X_7,X_8,X_9\}$. 2) Если $t^9=0$, то условие подалгебры для коммутаторов 1 и 6 операторов приводит к однородной системе с ненулевым детерминантом $\begin{cases} \lambda\, t^2 + t^3 = 0 \\ t^2 - \lambda\, t^3 = 0 \end{cases}$, откуда следует $t^2=t^3=0$. Замена базиса делает $t^1=1$. Условие подалгебры для коммутаторов 2 и 6 операторов дает $[X_5+y^1X_1+y^2X_2+y^3X_3,\ X_1]=-X_3=0$, что невозможно. Т.о., во втором случае подалгебр нет. Итак, существует одна шестимерная подалгебра $\{X_4,X_5,X_6,X_7,X_8,X_9\}$ с проекцией $\{X_4,X_5,X_6,X_7,X_8\}$ на подпространство L_5 – подалгебра 6.7 в табл. 3.

Семимерной подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство L_5 не существует, т.к. не выполняются условия подалгебры. В качестве примера вычисления семимерной подалгебры возьмем подалгебру с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_8\}$ – подалгебру 4.2 из табл. 2 леммы. Ее матричное представление есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u^1 & u^2 & u^3 & u^9 \end{pmatrix}$. Условия подалгебры для коммутаторов первых трех операторов друг с другом дают $x^9 = y^9 = z^9 = 0$. Имеются 2 возможности. 1) Если $u^9 \neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(u) = 0$, а замена базиса делает $u^9 = 1$, $w^9 = s^9 = t^9 = 0$. Далее можно считать, что $t^2 = 1$, т.к. это можно сделать либо переменой местами операторов 5 и 6, либо заменой координат в операторе 6. Тогда замена базиса делает $s^2 = 0$, а условие подалгебры коммутатора 2 и 5 операторов приводит к однородной системе с ненулевым детерминантом $\left\{ \begin{array}{l} \gamma\, s^1 - s^3 = 0 \\ s^1 + \gamma\, s^3 = 0 \end{array} \right.$, откуда следует $s^1 = s^3 = 0$. Т.е. операторы линейно-зависимы. 2) Если $s^9 = t^9 = u^9 = 0$, то операторы 5÷7 подалгебры линейно-независимы, если $s^1 \neq 0$, $t^2 \neq 0$, $u^3 \neq 0$. Заменой базиса получаем подалгебру $\{X_4, X_5, X_6, X_8, X_1, X_2, X_3\}$. Итак, существует одна семимерная подалгебра $\{X_4, X_5, X_6, X_8, X_1, X_2, X_3\}$ с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_8\}$ на подпространство L_5 – подалгебра 7.4 в табл. 3.

Рассмотрим пример вычисления восьмимерной подалгебры в L_9 с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство L_5.

Матричное представление подалгебры имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 & y^9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^1 & w^2 & w^3 & w^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s^1 & s^2 & s^3 & s^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u^1 & u^2 & u^3 & u^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^1 & v^2 & v^3 & v^9 \end{pmatrix}$.

Условия подалгебры для коммутаторов первых трех операторов друг с другом дают $x^9 = y^9 = z^9 = 0$. Имеются 2 возможности. 1) Если $v^9 \neq 0$, то преобразование Γ делает $P_1(v) = 0$, а замена базиса делает $v^9 = 1$, $w^9 = s^9 = t^9 = u^9 = 0$. Далее, как и выше, можно считать, что $u^2 = 1$. Тогда замена базиса делает $t^2 = 0$, а условие подалгебры коммутатора 2 и 6 операторов приводит к однородной системе с ненулевым детерминантом $\left\{ \begin{array}{l} \chi\, t^1 - t^3 = 0 \\ t^1 + \chi\, t^3 = 0 \end{array} \right.$, откуда следует $t^1 = t^3 = 0$. Т.е. операторы линейно-зависимы. 2) Если $t^9 = u^9 = v^9 = 0$, то три последних оператора подалгебры линейно-независимы, если $t^1 \neq 0$, $u^2 \neq 0$, $v^3 \neq 0$. Замена базиса делает $P_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $P_1(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P_1(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а также $P_1(x) = P_1(y) = P_1(z) = P_1(w) = P_1(s) = 0$. Далее, условие подалгебры коммутатора 4 и 5 операторов дает $[X_7 + w^9 X_9,\, X_8 + s^9 X_9] = 2X_7 = \omega(X_7 + w^9 X_9)$, откуда следует $w^9 = 0$. Т.о. получаем подалгебру 8.3 в табл. 3: $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8 + \alpha\, X_9, X_1, X_2, X_3\}$.

Очевидно, что девятимерной подалгеброй с проекцией $\{X_4, X_5, X_6, X_7, X_8\}$ на подпространство L_5 в L_9 является сама алгебра L_9, что достигается заменой базиса в соответствующем матричном представлении. Это – подалгебра 9.1 в табл. 3.

Аналогично, согласно (11) вычисляются подалгебры всевозможных размерностей из L_9 с проекциями на подпространство L_5 из табл. 2 леммы. При фиксированных параметрах некоторые подалгебры будут вкладываться в уже вычисленные подалгебры из оптимальной системы, а другие подалгебры будут самостоятельными представителями ОСП. Таким образом, вычисляется оптимальная система подалгебр алгебры L_9. Результатом вычислений будет следующая теорема.

Теорема 1. *Оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_9 с коммутаторами из табл. 1 с точностью до внутренних автоморфизмов и дискретных автоморфизмов ε_1 и ε_2 состоит из 117 классов неподобных подалгебр, представленных в табл. 3, где α, β – произвольные постоянные; $\sigma \neq 0$ – показатель степени у коэффициентов уравнения* (1).

Табл. 3

r	i	Базис	Проекция в L_5
9	1	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	5.1
8	1	4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 9	4.1
	2	4, 5, 6, 8, 1, 2, 3, 9	4.2
	3	$4, 5, 6, 7, 8+\alpha 9, 1, 2, 3$	5.1
7	1	4, 5, 6, 1, 2, 3, 9	3.1
	2	4, 7, 8, 1, 2, 3, 9	3.2
	3	4, 5, 6, 7, 1, 2, 3	4.1
	4	$4, 5, 6, 8+\alpha 9, 1, 2, 3$	4.2
6	1	4, 8, 1, 2, 3, 9	2.1
	2	$4+\alpha 8, 7, 1, 2, 3, 9$	2.2
	3	7, 8, 1, 2, 3, 9	2.3
	4	4, 5, 6, 1, 2, 3	3.1
	5	$4+\alpha 9, 7, 8+\beta 9, 1, 2, 3$	3.2
	6	4, 7, 8, 2, 3, 9	3.2
	7	4, 5, 6, 7, 8, 9	5.1
5	1	$4+\alpha 8,\ 1,\ 2,\ 3,\ 9$	1.1
	2	$4+7,\ 1,\ 2,\ 3,\ 9$	1.2
	3	7, 1, 2, 3, 9	1.3
	4	8, 1, 2, 3, 9	1.4
	5	4, 8, 2, 3, 9	2.1
	6	$4+\alpha 9,\ 8+\beta 9,\ 1,\ 2,\ 3$	2.1
	7	$4+\alpha 8,\ 7,\ 2,\ 3,\ 9$	2.2
	8	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 7,\ 1,\ 2,\ 3$	2.2
	9	7, 8, 2, 3, 9	2.3
	10	$7,\ 8+\alpha 9,\ 1,\ 2,\ 3$	2.3
	11	$4+\alpha 1+\beta 9,\ 7,\ \sigma 8-9,\ 2,\ 3;\quad \beta\neq 0$	3.2
	12	$4+\alpha 9,\ 7,\ 8+\beta 9,\ 2,\ 3;\quad \beta\neq -1/\sigma$	3.2
	13	$4+\alpha 1,\ 7,\ \sigma 8+\beta 1-9,\ 2,\ 3;\quad \alpha^2+\beta^2=1$	3.2
	14	4, 7, 8, 1, 9	3.2
	15	$4,\ 7+1,\ \sigma 8+\alpha 1+9,\ 2,\ 3$	3.2
	16	4, 5, 6, 7, 9	4.1
	17	4, 5, 6, 8, 9	4.2
	18	$4, 5, 6, 7, 8+\alpha 9$	5.1
4	1	1, 2, 3, 9	0
	2	$4+\alpha 8,\ 2,\ 3,\ 9$	1.1
	3	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 1,\ 2,\ 3$	1.1
	4	$4+7,\ 2,\ 3,\ 9$	1.2
	5	$4+7+\alpha 9,\ 1,\ 2,\ 3$	1.2
	6	7, 1, 2, 9	1.3
	7	$7+\alpha 9,\ 1,\ 2,\ 3$	1.3
	8	8, 1, 2, 9	1.4
	9	$8+\alpha 9,\ 1,\ 2,\ 3$	1.4
	10	4, 8, 1, 9	2.1
	11	$4+\alpha 9,\ 8+\beta 9,\ 2,\ 3$	2.1

r	i	Базис	Проекция в L_5
	12	$4+\alpha 1,\ \sigma 8+\beta 1-9,\ 2,\ 3;\quad \alpha^2+\beta^2=1$	2.1
	13	$4+\alpha 8,\ 7,\ 1,\ 9$	2.2
	14	$4+\alpha 9,\ 7+\beta 9,\ 2,\ 3;\quad \beta\neq 0$	2.2
	15	$4+\alpha 1,\ 7+1,\ 2,\ 3$	2.2
	16	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 7,\ 2,\ 3$	2.2
	17	$4+\alpha(\sigma 8-9)+1,\ 7,\ 2,\ 3$	2.2
	18	$7,\ 8,\ 1,\ 9$	2.3
	19	$7,\ 8+\alpha 9,\ 2,\ 3$	2.3
	20	$7,\ 1+\sigma 8-9,\ 2,\ 3$	2.3
	21	$7+1,\ \sigma 8+9,\ 2,\ 3$	2.3
	22	$4,\ 5,\ 6,\ 9$	3.1
	23	$4,\ 7,\ 8,\ 9$	3.2
	24	$4+\alpha 9,\ 7,\ 8+\beta 9,\ 1$	3.2
	25	$4,\ 5,\ 6,\ 7+\alpha 9$	4.1
	26	$4,\ 5,\ 6,\ 8+\alpha 9$	4.2
3	1	$1,\ 2,\ 3$	0
	2	$1,\ 2,\ 9$	0
	3	$4+\alpha 8,\ 1,\ 9$	1.1
	4	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 2,\ 3$	1.1
	5	$4+1+\alpha(\sigma 8-9),\ 2,\ 3$	1.1
	6	$4+7,\ 1,\ 9$	1.2
	7	$4+7+\beta 9,\ 2,\ 3$	1.2
	8	$4+7+1,\ 2,\ 3$	1.2
	9	$7,\ 1,\ 9$	1.3
	10	$7+\alpha 9,\ 3,\ 2$	1.3
	11	$7+1,\ 3,\ 2$	1.3
	12	$8,\ 1,\ 9$	1.4
	13	$8+\alpha 9,\ 3,\ 2$	1.4
	14	$8+1,\ 3,\ 2$	1.4
	15	$4,\ 8,\ 9$	2.1
	16	$4+\alpha 9,\ 8+\beta 9,\ 1$	2.1
	17	$4+\alpha 8,\ 7,\ 9$	2.2
	18	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 7,\ 1$	2.2
	19	$4+\alpha 9,\ 7+\beta 9,\ 1$	2.2
	20	$7,\ 8,\ 9$	2.3
	21	$7,\ 8+\alpha 9,\ 1$	2.3
	22	$7+2,\ \sigma 8+9,\ 1$	2.3
	23	$7,\ \sigma 8+2-9,\ 1$	2.3
	24	$4,\ 5,\ 6$	3.1
	25	$4,\ 7+\alpha 1,\ \sigma 8+9;\ \alpha\neq 0$	3.2
	26	$4+\alpha 9,\ 7,\ 8+\beta 9$	3.2
2	1	$1,\ 2$	0
	2	$1,\ 9$	0
	3	$4+\alpha 8,\ 9$	1.1
	4	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 1$	1.1
	5	$4+7,\ 9$	1.2
	6	$4+7+\alpha\, 9,\ 1$	1.2
	7	$7,\ 9$	1.3
	8	$7+\alpha\, 9,\ 1$	1.3
	9	$7+2,\ 1$	1.3

r	i	Базис	Проекция в L_5
	10	$8,\ 9$	1.4
	11	$8+\alpha 9,\ 1$	1.4
	12	$8+2,\ 1$	1.4
	13	$4+\alpha 9,\ 8+\beta 9$	2.1
	14	$4+\alpha 1,\ \sigma 8+\beta 1-9;\ \alpha^2+\beta^2=1$	2.1
	15	$4+\alpha 8+\beta 9,\ 7$	2.2
	16	$4+\alpha 9,\ 7+\beta 9;\ \beta\neq 0$	2.2
	17	$4+1+\alpha(\sigma 8-9),\ 7$	2.2
	18	$4+\alpha(\sigma 8+9),\ 7+1;\ \alpha\neq 0$	2.2
	19	$4+\alpha 1,\ 7+1$	2.2
	20	$7,\ 8+\alpha 9$	2.3
	21	$7+1,\ \sigma 8+9$	2.3
	22	$7,\ \sigma 8+1-9$	2.3
1	1	1	0
	2	9	0
	3	$4+\alpha 8+\beta 9$	1.1
	4	$4+1+\alpha(\sigma 8-9)$	1.1
	5	$4+7+1$	1.2
	6	$4+7+\alpha 9$	1.2
	7	$7+1$	1.3
	8	$7+\alpha 9$	1.3
	9	$8+\alpha 9$	1.4
	10	$\sigma 8+1-9$	1.4

На рисунке 1 показана гистограмма распределения числа подалгебр N в оптимальной системе от их размерности r. Видно, что на подалгебрах размерности 3 и 4 достигается максимум числа подалгебр.

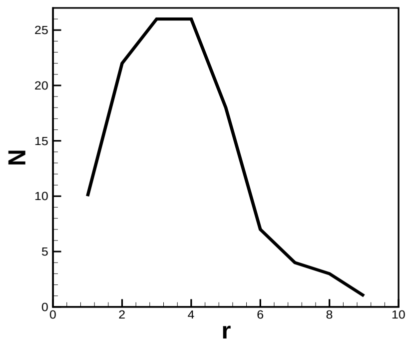

Рис. 1.

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н., профессору Салавату Валеевичу Хабирову за постановку задачи и постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.И. *Основы механики гетерогенных сред*, М.: Наука, 1978. 336 с.
2. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. *Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях* // Дифференциальные уравнения. Т. 19, № 7. 1983. С. 1215–1223.
3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 399 с.
4. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. *Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды* Новосибирск: изд. НГТУ. 2012. 659 с.
5. Хабиров С.В. *Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 2. 2011. С. 87–90.

Айдар Мартисович Ильясов,
РН-УфаНИПИнефть,
ул. Революционная, 96/2,
450078, г. Уфа, Россия
E-mail: AMIlyasov@gmail.com